

W. KLINKERFUES
—
THEORETISCHE
ASTRONOMIE



FRIEDR. VIEWEG & SOHN
BRAUNSCHWEIG

THEORETISCHE
ASTRONOMIE

Abbildungen
aus dem xylographischen Atelier
von
Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

THEORETISCHE ASTRONOMIE

VON

DR. W. KLINKERFUES

WEIL. PROFESSOR UND DIRECTOR DER KÖNIGLICHEN STERNWARTE ZU GÖTTINGEN

NEUBEARBEITUNG

VON

PROF. DR. H. BUCHHOLZ

PRIVATDOCENT FÜR ASTRONOMIE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK
AN DER UNIVERSITÄT HALLE A. S.

Dritte verbesserte und vermehrte Ausgabe

MIT 67 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN



BRAUNSCHWEIG

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDR. VIEWEG & SOHN

1912

QD
K56
1912

Alle Rechte,
namentlich das Recht der Uebersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

Copyright, 1912, by Friedr. Vieweg & Sohn,
Braunschweig, Germany.

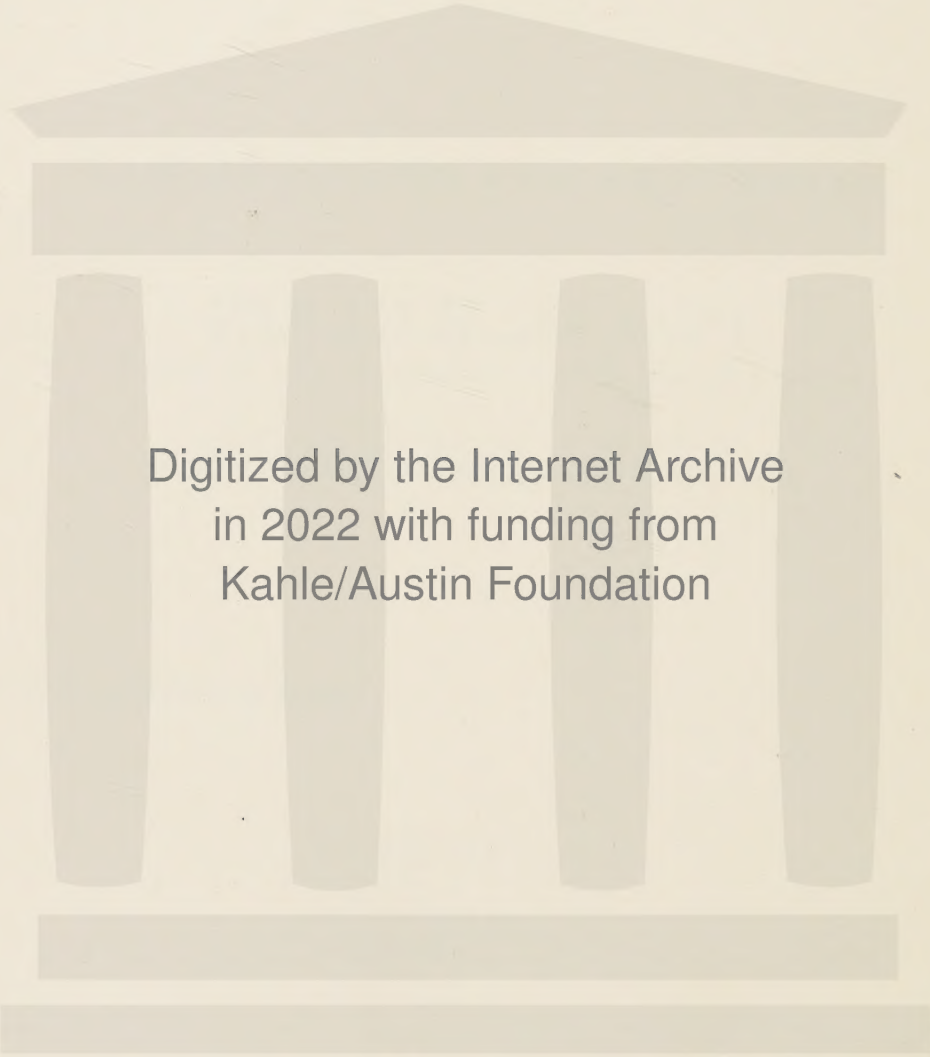
WITHDRAWN
HILL
REFERENCE
LIBRARY
ST. PAUL

HERRN GEHEIMEN REGIERUNGSRAT

PROF. DR. F. KLEIN

IN DANKBAREM GEDENKEN

DER HERAUSGEBER



Digitized by the Internet Archive
in 2022 with funding from
Kahle/Austin Foundation

VORWORT ZUR ERSTEN AUFLAGE.

Das hier erscheinende Werk über theoretische Astronomie giebt den Gang und Inhalt von Vorlesungen wieder, welche der Verfasser über Bahnbestimmungen ein um das andere Semester an hiesiger Universität zu halten pflegt. Diesem Ursprunge entspricht sowohl die gewählte Eintheilung, als auch die übrige Behandlungsweise des Stoffes. Es ist dabei nicht so sehr darauf abgesehen, die Rechnungsformeln specieller Methoden derart zu entwickeln, dass auch der Anfänger vollkommene Ueberzeugung von der Richtigkeit derselben erlangt, und für sich die bestimmte gewählte Entwicklung zu reproduciren vermag, als vielmehr eine recht vielseitige Einsicht in das Wesen dieser Rechnungen und einen höheren Grad von Selbstständigkeit zu geben, als der Anfänger durch das Studium einer speciellen Methode erlangen wird. Zu dem Zwecke schien es unerlässlich, häufig ein und dasselbe Thema mit verschiedenen Variationen zu behandeln, wobei denn freilich die Einheit der Darstellung nicht in gleichem Grade zu bewahren ist, als wenn man sich die Entwicklung einer bestimmten Methode zum Ziele setzt. Dass dabei häufig, ja meistens, die einfachste Behandlungsweise eines Problems nicht vorangestellt ist, sondern ziemlich zuletzt kommt, entspricht der bekannten Erfahrung, dass in der Regel das Einfachste nicht zuerst gefunden wird, weil die Augen erst im Erspähen der zugänglichsten Seiten eines Problems geübt sein müssen. Beispielsweise wird in der Abtheilung IV, welche die Berechnung einer elliptischen Bahn zum Gegenstande hat, eine sehr einfache Art gezeigt, aus den Grundgleichungen der Aufgabe je zwei beliebige Distanzen von der Erde zu eliminiren, ein Verfahren, welches seine grosse Einfachheit und Uebersichtlichkeit dem Umstande verdankt, dass es unmittelbar aus den Grundbegriffen der geometrischen und der heliocentrischen Coordinaten sich ableitet, im Gegensatze zu anderen Verfahren, wobei die Elimination das Resultat einer mehrgliedrigen Entwicklung ist. Dennoch erschien es dem Verfasser nicht zweckmässig, in einem für Anfänger bestimmten Buche jenes Verfahren an die Spitze der Abtheilung zu stellen.

Die vor nicht langer Zeit erschienenen vortrefflichen Werke von Watson (Theoretical astronomy) und von Oppolzer (Lehrbuch der Bahnbestimmung der Kometen und Planeten), das erstere die vornehmsten bekannten Methoden, mit Voranstellung des Gravitationsgesetzes, entwickelnd, das andere auch mit neuen Methoden des Verfassers bekannt machend, haben bei diesem Werke sehr wenig benutzt werden können, da das Manuscript, als jene Werke dem Verfasser zur Hand kamen, schon zu weit vorgerückt war.

Nach dem Beispiele des Oppolzer'schen Werkes hat Verfasser auch den Meteoritenbahnen einen kleinen Abschnitt widmen zu müssen geglaubt, noch mehr aber den so wichtigen Untersuchungen über Doppelsternbahnen, welche bis jetzt in keinem Lehrbuche hinreichende Berücksichtigung gefunden zu haben scheinen.

Wegen einer sonst nicht zu vermeidenden und allzu beträchtlichen Ueberschreitung des ursprünglich für dieses Werk bestimmten Umfanges musste auf den Druck sechsstelliger Barker'scher Tafeln, sowie einiger anderer im Texte erwähnter Tafeln, Verzicht geleistet werden; diese Unvollständigkeit dürfte sich indessen schwerlich sehr fühlbar machen.

Göttingen, im August 1870.

W. Klinkerfues.

VORWORT ZUR ZWEITEN AUFLAGE.

Bei Uebernahme vorliegender Neubearbeitung der theoretischen Astronomie von Klinkerfues hielt ich es für unbedingtes Erforderniss, das Werk da zu verändern oder zu erweitern, wo es vorhandene Mängel desselben oder der Fortschritt der Wissenschaft als unerlässlich erscheinen liessen, dies um so mehr, als die beiden, dasselbe Gebiet der Astronomie weit ausführlicher behandelnden Werke von Watson und von Oppolzer, im Buchhandel vergriffen sind.

Zunächst schien mir der erste, die allgemeinen Grundlagen behandelnde Theil des Klinkerfues'schen Werkes nicht zureichend. Denn unter den von Klinkerfues auf den ersten 42 Seiten behandelten allgemeinen Problemen, denen Oppolzer nicht weniger als 266 Seiten grossen Formates in seiner Bahnrechnung widmet, fehlt eine Anzahl gerade der wichtigsten und zum Theil auch schwierigeren Probleme völlig oder doch so gut wie vollständig. So die Parallaxe, die Aberration, das Problem der Bewegung der Aequinoctien, ferner die Interpolation. Endlich ist die allgemeine Basis des ganzen Folgenden, die Kepler'sche Bewegung, welche Watson und Oppolzer eingehender theoretischer Behandlung für werth erachtet haben, nicht aus dem Gravitationsgesetz entwickelt, sondern kaum in den Resultaten zusammengestellt.

Die folgenden Partien von Klinkerfues' Darstellung hingegen bilden ein Ganzes von bleibendem Werth und es dürfte überflüssig sein, nochmals die schlichte Klarheit und geistreich anregende Form der Klinkerfues'schen Ausführungen hervorzuheben.

Von vornherein zieht sich indessen Klinkerfues gewisse Grenzen, indem er sich in seinem Buche auf die „vorläufigen Bahnen“ beschränkt, die mechanische Quadratur und die speciellen Störungen hingegen vom Kreise seiner Darstellungen ausschliesst. Die Aufgabe der Bahnrechnung erschöpft er somit nicht vollständig, indem er den letzten Schritt, die Bestimmung „definitiver Bahnen“, nicht ausführt, eine Aufgabe, welcher Watson und Oppolzer einen so grossen Theil ihrer Werke gewidmet haben.

Während indess diese stoffliche Selbstbeschränkung keinen Mangel des Klinkerfues'schen Buches an sich bezeichnet, sondern ihm nur den Charakter eines erschöpfenden, umfassenderen Werken gegenüber selbstständigen Ganzen nimmt, macht sich in anderer Beziehung eine wirkliche Lücke fühlbar. Es ist dies das gänzliche Fehlen von Zahlentafeln, die zur Berechnung von Bahnen neu entdeckter Kometen ein unbedingtes Erforderniss bilden, der grossen Arbeitersparniss wegen, die sie gewähren.

Endlich hielt ich es für wünschenswerth, die neue, zu Ende der achtziger Jahre veröffentlichte Gibbs'sche Vektorenmethode zur Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen, sowie die von Professor Seeliger in einem fundamentalen Aufsätze niedergelegten modernen Anschauungen über Doppelsternbahnen, aufzunehmen. —

Angesichts der beschränkten Zeit, die mir zu diesen umfangreichen Arbeiten zu Gebote stand, schätzte ich mich glücklich, meinen Freund Herrn Dr. Ebert zur Darstellung folgender Capitel zu gewinnen: In Abtheilung I: Zu den werthvollen Ausführungen: „Ueber nahezu parabolische Bahnen“ (7), ferner: „Allgemeine Bemerkungen über Interpolation und Ephemeridenberechnung“, Theil A (11¹), sowie schliesslich: „Vollständiges Beispiel zum Vergleich einer Beobachtung mit einem Elementensystem“ (15). Weiterhin zur Abfassung der allgemeinen Bemerkungen sowie des zweiten Rechenbeispiels zu Encke's Originaldarstellung seiner Methode der speciellen Störungen (97), mit der „die allgemeinen Bemerkungen über Bestimmung definitiver Bahnen“ enthaltenden Einleitung (96), sowie schliesslich zur Darstellung der Vorlesungen 101 bis 103 incl. und 110 in der Methode der kleinsten Quadrate, die eine besonders wichtige Acquisition für das Klinkerfues'sche Buch bilden dürften, an deren Stelle die Vorlesungen 93 bis 95 incl. sowie 102 bis 105 incl. der alten Auflage füglich ganz fortfielen.

Ausserdem bin ich Herrn Professor Brendel und ebenso Herrn Dr. Ebert noch persönlich zu grösstem Danke verpflichtet, da sie die Freundlichkeit hatten, beim Correcturenlesen einiger Capitel mich zu unterstützen und mir dabei noch einige kritische Winke zu geben. —

Was die Disposition und Ausführung der ersten von mir neu geschriebenen Abtheilung betrifft, für die ich den alten Klinkerfues'schen Darstellungen nur die geometrische Ableitung und numerische Auflösung der Kepler'schen Gleichung, sowie die Behandlung des Lambert'schen Theorems entnommen habe, so schien mir dieselbe, um hier nur das Wesentliche anzudeuten, sich am natürlichsten in folgender Weise zu gestalten.

An die Spitze habe ich das allgemeine Problem der planetarischen Bewegung gestellt, so wie diese wirklich stattfindet, und erst hierauf die Specialisirung eingeführt, welche die Grundlage des folgenden, die Kepler'sche Bewegung, ergibt. Dabei habe ich diese letztere indess als Specialfall der allgemeinen Centralbewegung behandelt, weil mir dieser Weg methodisch den Vorzug zu verdienen schien. In diese Darstellungen reiht sich die Behandlung der Bahnelemente naturgemäss ein, da dieselben die Integrationsconstanten der Kepler'schen Bewegung sind. Diese letztere ist dann der Reihe nach für die Ellipse, die Parabel und die Hyperbel separat behandelt.

Beim Capitel der Parallaxe habe ich ausser den Originaldarstellungen noch die geistvolle Behandlung dieses Gegenstandes von Herrn Professor Bauschinger mit dessen freundlicher Erlaubniss benutzt, wofür ich ihm meinen verbindlichsten Dank abstatte.

Bezüglich der Präcession, an deren Stelle ich zusammenhängend gleich vollständiger die Bewegung der Erdachse im Erdinneren und im Raume behandelt und die Beziehung der letzteren zur Bahnrechnung dargestellt habe, seien einige Bemerkungen

¹) Die im Anschluss gegebene Encke'sche Darstellung ist dem Berliner Jahrbuch für 1837 entnommen. —

gestattet. Streng genommen ist das Problem freilich ein solches der Mechanik des Himmels. Oppolzer durfte, weil er die umfassendsten numerischen Ausführungen der Theorie gegeben, diese, sammt deren numerischen Ergebnissen, die eine so unmittelbare Rolle in der Bahnrechnung spielen, sehr wohl in dieser mittheilen. Ich habe diese Aufgabe, der Oppolzer 146 Seiten widmet, auf 90 Seiten theoretisch von Grund aus, numerisch nur insoweit es die Anwendungen erfordern können, zu behandeln den Versuch gemacht. Diese immerhin ausführlichere Darstellung eines an sich nicht direct in die Bahnrechnung gehörenden Gegenstandes habe ich an Stelle einiger kurzer Bemerkungen, die sich auf das Resultat dieser höchst complicirten Theorie beschränken, in der Neubearbeitung von Klinkerfues' theoretischer Astronomie gegeben. Denn ich hielt es dem wissenschaftlichen Bedürfniss für entsprechender, wenn auch derjenige, welcher zum Studium von Lagrange's und Laplace's Werken nicht Gelegenheit findet, dennoch eine Vorstellung von diesem mathematisch am vollkommensten gelösten Probleme der höheren Astronomie bekommt, ohne bloss mechanisch allein nach dessen Schlussformeln zu rechnen. Auch dürfte dieser Schritt durchaus im Geiste des Klinkerfues'schen Buches sein, dessen grosser Vorzug es ist, nicht bloss eine mechanische Rechnerschule grosszuziehen, sondern selbstständige wissenschaftliche Thätigkeit zu fördern.

Im zweiten der drei Theile, in denen ich die „Theorie der Bewegung der Erdachse und ihre Anwendung in der Bahnrechnung“ behandelt habe, bin ich bei der analytischen Entwicklung den classischen Darstellungen meines verehrten Lehrers, Herrn Professor Hugo Seeliger, über diesen Gegenstand mit seiner gütigen Erlaubniss gefolgt, wofür ich ihm meinen wärmsten Dank ausspreche.

Im einleitenden Theile zur Theorie der Bewegung der Erdachse habe ich den originellen Beweis der Euler'schen Gleichungen in der Weise gegeben, wie ich ihn durch Herrn Professor Boltzmann kennen gelernt habe. Auch bei Behandlung des Trägheitsmomentes, sowie an einzelnen Stellen in der translatorischen Bewegung habe ich, wenn auch in anderem Zusammenhange, an seine Vorlesung über Mechanik vom Wintersemester 91/92 angeknüpft, die jetzt in dem bekannten Buche: „Vorlesungen über die Principe der Mechanik“, gedruckt vorliegt. Ich kann mir nicht versagen, auch ihm, dem ich so sehr verpflichtet bin, an dieser Stelle meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen. —

Von Abschnitt II des Klinkerfues'schen Buches ab, mit dem die eigentliche Bahnrechnung beginnt, ist dasselbe in seinem ganzen Umfange so gut wie vollständig erhalten geblieben mit Ausnahme der abgeänderten Vorlesungen in der Methode der kleinsten Quadrate. Nur habe ich im Verlaufe der Darstellung die zuvor erwähnten Erweiterungen eingefügt. In Betreff der Gibbs'schen Vektorenmethode verdanke ich Herrn Professor Gibbs eine Reihe werthvoller brieflicher Mittheilungen. Ich hielt es danach für angemessen, die Gibbs'sche Theorie in getreuem Anschluss an das Original aufzunehmen, ohne die beiden Aufsätze von Fabritius in Nr. 3061 und Nr. 3065 der Astronomischen Nachrichten zur Darstellung heranzuziehen. Den Vorwurf, dass die Gibbs'sche Theorie zu complicirt sei, weist schon Professor Philipps zurück, welcher die Methode auf den Swift'schen Kometen mit Erfolg angewendet hat. Seine mir gütigst übersandte Rechnung ist, da sie wenig Raum beansprucht, mit aufgenommen worden.

Zu Anfang seiner Entwicklungen hat dabei Gibbs die ziemlich complicirte Ableitung der Fundamentalgleichung nicht durchgeführt, sondern nur im Resultate mitgetheilt. Die detaillirte Ableitung, die im Folgenden wiedergegeben ist, verdanke ich einer Mittheilung von Herrn Professor Schur, der mir dieselbe gütigst zur Aufnahme zur Verfügung stellte.

Sodann haben in das Werk noch die mechanische Quadratur und die drei Methoden der speciellen Störungen von Lagrange, von Encke und von Hansen incl. Beispielen, die aus den zu Anfang erwähnten Gründen unumgänglich nöthige Aufnahme gefunden, und zwar die ausgezeichneten Darstellungen der mechanischen Quadratur, der Lagrange'schen und der Encke'schen Methode von Encke (Berl. Jahrbuch für 1837, 1838, 1858, 1862), sowie die von Tietjen verbesserte Hansen'sche Methode der Störungen in Polarcoordinaten. (Berl. Jahrbuch für 1877.)

Zum Schluss ist noch zu erwähnen, dass ich den im Valentiner'schen Handwörterbuche (6. Lieferung S. 671 bis 696) veröffentlichten Aufsatz Professor Seeliger's über Doppelsternbahnen, in dem die modernen Anschauungen in vollendeter Weise zum Ausdruck gelangen, dem Werke nicht vorenthalten zu dürfen glaubte, ohne mich indess darum berechtigt zu fühlen, die Klinkerfues'sche Darstellung über die Doppelsternbahnen, welche, in anderem Zusammenhange durchgeführt, sich inhaltlich naturgemäss doch zum Theil mit derjenigen Professor Seeliger's berührt, wegzulassen, oder beide Darstellungen zu einer neuen zu verschmelzen. Im Gegentheil scheint mir an der Stelle, wo Klinkerfues zu Anwendungen übergeht, die Darstellung Professor Seeliger's sich vortrefflich einzufügen.

Hinsichtlich der Zahlentafeln habe ich das grosse Glück gehabt, die anerkannt zuverlässigen Watson'schen Hülftafeln vom Verlage von J. P. Lippincott & Comp. in Philadelphia zur Aufnahme in das Werk zu erlangen und dieselben soweit übernommen, als es mir passend schien. Ferner hatte Herr Geheimrath Professor Th. Albrecht die grosse Güte, mir die Aufnahme seiner vier Zeittafeln aus seiner Tafelsammlung zu gestatten, wofür ich ihm zu grossem Danke verpflichtet bin, während ich Tafel XI und XII der *Theoria motus* von Gauss entlehnt habe. Tafel IX hat Herr Dr. Ebert für das von ihm geschriebene Capitel über nahezu parabolische Bahnen entworfen und das Beispiel im Anhang zu dieser Tafel gegeben, Tafel XIII ist die Encke'sche f-Tafel, die Quadrattafel XIV ist Bremiker's fünfstelliger Logarithmentafel entnommen. Tafel XV ist bereits in der ersten Auflage des Klinkerfues'schen Werkes gegeben und gehört zur 47. Vorlesung. Tafel XVI habe ich auf Grund der durch die Pariser Fundamentalsternconferenz adoptirten Werthe, sowie von Angaben Watson's und Becker's fünfstelliger Logarithmentafel neu zusammengestellt. Auch verdanke ich hinsichtlich dieser Tafel Herrn Professor Kreutz verschiedene werthvolle Rathschläge, wofür ich ihm meinen herzlichsten Dank aussprechen möchte. Das Correcturenlesen der Tafeln wurde mit ganz besonderer Sorgfalt, unabhängig von verschiedenen Seiten, durchgeführt. Im Original der Barker'schen Tafel von Watson habe ich dabei die folgenden drei Druckfehler aufgefunden und berichtigt: $v = 46^{\circ} 37'$, lies: 1.535 450 9 statt 1.555 450 9; weiter: $v = 118^{\circ} 41'$ lies: 2.391 904 2 statt 2.392 904 2; schliesslich: $v = 163^{\circ} 40'$, Differenz, lies: 215.90 statt 216.90. Bezüglich der Encke'schen f-Tafel ist zu erwähnen, dass ich die von Oppolzer für dieselbe in Nr. 2130 der *Astronomischen Nachrichten* gegebenen Correctionen berücksichtigt habe, wodurch sie an

Genauigkeit gewinnt. Auch sind die bekannten Druckfehler derselben berichtigt. Endlich sei noch bezüglich der verschiedenen astronomischen Fundamentalconstanten bemerkt, dass die für dieselben durch die Pariser Fundamentalsternconferenz (1896) adoptirten Werthe im vorliegenden Werke Eingang gefunden haben. Und zwar sind die durch die Conferenz definitiv adoptirten Werthe in Tafel XVI enthalten, während in den Zusammenstellungen am Schluss von Vorlesung 13 und 14 zum Theil die von Gill und Newcomb auf der Conferenz vorgeschlagenen Werthe gegeben sind. —

Die Durchrechnung der Formeln der alten Auflage ergab mir, wie noch Erwähnung finden mag, die Zahl von einhundertundsechszig Druckfehlern, die sämmtlich in der Neubearbeitung berücksichtigt sind, deren Verzeichniss, das sich in meinen Händen befindet, der Neuausgabe beizufügen ich jedoch als zwecklos erachtete. Von diesen Druckfehlern verdanke ich in den zwei letzten Abschnitten über Doppelstern- und Meteoriten-Bahnen verschiedene der gütigen Mittheilung von Herrn Professor Schur und einem im Besitz des geophysikalischen Institutes befindlichen, mir von Herrn Professor Wichert gütigst zugestellten Verzeichnisse. —

Zum Schluss drängt es mich, Herrn Geheimrath Professor Felix Klein, dem ich mich tief verpflichtet fühle, da mir auf seine Veranlassung die Neubearbeitung des Klinkerfues'schen Werkes übertragen wurde, meinen aufrichtigsten und wärmsten Dank auszusprechen. —

Göttingen, im Mai 1899.

H. Buchholz.

VORBEMERKUNGEN ZUR DRITTEN AUSGABE,

mit einer kritischen Uebersicht der neueren von

W. GIBBS, P. HARZER UND A. LEUSCHNER

gegebenen Methoden der Bahnrechnung.

Als der Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn das Ansuchen an mich richtete, von meiner Neubearbeitung der theoretischen Astronomie von Klinkerfues eine neue Ausgabe zu veranstalten, ergriff ich diese Aufgabe bereitwilligst. Es gereicht mir zur Genugthuung, verschiedene, dem Werk anhaftende Mängel bei der neuen Ausgabe beseitigen zu können. Diese, von der Kritik ¹⁾ nicht hervorgehobenen Mängel näher zu bezeichnen, ist der erste Zweck des Vorwortes.

Zunächst muss ich einen Irrthum konstatiren und, soweit das hier möglich ist, klarstellen. In der ersten Vorlesung der zweiten Auflage (cf. S. 7 und 11) wurde bei der Ableitung der allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung und der kurzen Charakterisirung der Theorien ihrer Lösung gesagt, dass die Gyldén'sche Theorie der absoluten Bahn eine wirklich befriedigende Lösung des Störungsproblems gäbe, indem sie die Bewegung eines Planeten für einen beliebigen Zeitraum ausreichend genau darstelle.

In diesem Umfang präcisirt, ist die Behauptung, wie hier nur in aller Kürze begründet werden kann, nicht zutreffend. Die letzte von Gyldén aufgestellte Integrationsmethode, die horistische, behandelt einerseits die Differentialgleichung für die sogenannte Zeitreduction (Länge), andererseits diejenige für den Radius Vector, auf Grund von verschiedenen „horistischen“ Methoden, vor Allem mittelst elliptischer Functionen. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für die Zeitreduction (vergl. §. 6 der Gyldén'schen *Nouvelles Recherches*) ist, trotz der gegen sie erhobenen Einwände, mathematisch nicht fehlerhaft ²⁾; indess wird die in dieser Gleichung auftretende Horistica

¹⁾ Vergl. O. Callandreau, Bulletin astronomique, Tome XVII, Mars 1900. Ferner: Schulhof, Revue générale des Sciences pures et appliquées No. 8, 30 Avril 1900.

²⁾ Wie die auf S. 159 bis 191 meiner Abhandlung: „Die Gyldén'sche horistische Integrationsmethode des Problems der drei Körper und ihre Convergenz, Nova Acta. Abh. der Kaiserl. Leop.-Carol. deutschen Academie der Naturforscher, Bd. LXXXI, Nr. 3“ im Detail durchgeführte Nachprüfung des mathematisch interessanten, äusserst complicirten §. 6 der Gyldén'schen *Nouvelles Recherches* erweist. Indess ist die auf S. 191 bis 199 dieser Arbeit wiedergegebene Backlund'sche Behandlungsweise des Radius Vector [die in anderer, aber bereits ähnlicher Form schon in Herrn Backlund's zweiter Arbeit über den Hecubatypus ($\frac{1}{2}$), im Anschluss an Gyldén, die Basis bildet] bezüglich der Convergenz nicht richtig. Man vergleiche hierzu meinen Aufsatz in Nr. 3922 der Astronomischen Nachrichten: „Klarstellung der von Herrn Backlund A. N. 3911 gegen mich erhobenen Vorwürfe“, sowie das Weitere, bezüglich des Radius Vector oben Gesagte.

so klein von höherer Ordnung, dass die Methode praktisch illusorisch werden kann, abgesehen von ihrer zu grossen Complicirtheit für die Anwendung. Hingegen ist die Lösung für die Differentialgleichung des Radius Vector im allgemeinen Fall, auf den es ankommt (wie sie im §. 7 der N. R. gegeben ist), nicht richtig. Hier hat Gyldén gegen das eigens von ihm aufgestellte Princip der Mitnahme der kritischen Glieder verstossen, indem er die Integration der Differentialgleichung gerade dadurch ermöglicht, dass er gewisse kritische Glieder vernachlässigt, auf deren vollständige Mitnahme Alles ankommt (vergl. Anm. 1). Dagegen sind die für specielle Fälle angegebenen Methoden (in §. 2 bis §. 4 der N. R.) mittelst elliptischer Functionen nicht in dem Grade mangelhaft, wie ihnen vorgeworfen wurde. Kann man daher von einer „convergenten“ Lösung nicht sprechen, wie es in Vorlesung I der zweiten Auflage von Klinkerfues' theoretischer Astronomie geschehen, und ist der grosse principielle Fortschritt, wie ihn Gyldén durch die horistische Methode erreicht zu haben glaubte, den auch Herr Backlund ausdrücklich als solchen hinstellt¹⁾, nicht erreicht, so ist doch nicht zu leugnen, dass die, durch Herrn Poincaré weit über Gebühr herabgesetzte Gyldén'sche Störungstheorie, in Folge der Gyldén'schen Entwicklung der Störungfunction und bei Anwendung von Gyldén's partieller Integrationsmethode (gegen die theoretisch kein Einwand erhoben ist), wie sie vor allen Anwendung auf gewisse Typen kleiner Planeten gefunden hat, einen wesentlichen Fortschritt gegenüber der alten Störungstheorie bedeutet. Denn einerseits ermöglicht diese Methode die analytische Behandlung von wissenschaftlich besonders interessanten Fällen (diejenige der „charakteristischen“ Planeten), bei denen die früheren Methoden nicht ausreichen; andererseits giebt sie eine weit bequemere Näherung, als die früheren analytischen Methoden sie erreichten (vergl. auch Vorlesung I, S. 10). Treffend bemerkt Prof. Brendel in Theil II seiner „*Theorie der kleinen Planeten*“ S. 2: „Der Leser

¹⁾ O. Backlund, Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft, Jahrg. 32, Heft I, S. 15 u. 18. „... Entwürfe, die darauf abzielten, gleichsam die Waffen zu schmieden, mit denen er den schliesslichen Sieg erfechten sollte... Es galt vor allen Dingen, die sogenannten kritischen Glieder zu bewältigen, die bei den gewöhnlichen Integrationsmethoden zu sinnlosen Resultaten führen. Die neuen Integrationsmethoden, die er zu dem Zwecke schuf, und zwar in erster Linie die sogenannte horistische Methode, gehören zu Gyldén's genialsten Leistungen. Dadurch gelang es ihm in der That, den erwähnten Gliedern die richtige Bedeutung zu vindiciren.“

O. Backlund, Comptes rendus. Séance de lundi, 11 février 1901. „*Cette erreur élémentaire n'appartient exclusivement. Je le dois à la mémoire de Gyldén.*“

O. Backlund, Bulletin astronomique, t. XXI, août 1904, p. 289. *Sur la méthode horistique de Gyldén. „Cette objection“* (— „il y a des cas où la méthode horistique peut être inoffensive; il n'y en a pas où elle peut être utile“ —) „devient très grave étant énoncée par la plus grande autorité de notre temps. Ne partageant pas l'opinion de M. Poincaré, j'estime de mon devoir d'en exposer la raison... Les termes avec les arguments $G_1 - 2G_2$ et $2G_1 - G_2$ ne sont pas alors critiques.“ Hier, am springenden Punkt der ganzen Principienfrage, macht Herr Poincaré zu §. 7 der Gyldén'schen N. R. den berechtigten Einwand, dass die zuvor von Herrn Backlund erwähnten Glieder doch kritisch sind und ihre Vernachlässigung durch Gyldén das allgemeine horistische Integrationsverfahren für den Radius Vector illusorisch macht. Vergleiche:

M. H. Poincaré, Bulletin astronomique, t. XXI, août 1904, p. 293. *Sur la méthode horistique. „Je ne relèverais pas ce qui chez M. Backlund n'est qu'une inadvertance si ce n'était là précisément l'erreur fondamentale de Gyldén. Il est impossible que G_1 et G_2 soient critiques, sans que $2G_1 - G_2$ le soit ...; si l'astronome russe s'est trompé, ce n'est pas qu'il en a mal appliqué les règles, c'est que ces règles ne valaient rien.“* Den genauen Nachweis Poincaré's cf. Comptes rendus vom 18. April 1904.

wird mit Recht fragen, ob und welche Vortheile die Gyldén'sche Methode gegenüber den älteren Methoden gewährt, zumal das Vorhandensein solcher Vortheile aus den Entwicklungen des ersten Theiles nicht direct ersichtlich sein dürfte, und von Poincaré auch angezweifelt worden ist (*Acta Mathematica*, Bd. 29, 1905). Ich will ausdrücklich hervorheben, dass ich bei meinen Untersuchungen die Bedürfnisse der rechnenden Astronomie im Auge habe; für diese dürften die neuen Methoden Gyldén's schliesslich fruchtbringender sein, als die wichtigen analytischen Resultate über den Charakter der Lösungen.“ —

Auch die Bedeutung von Gyldén's Hauptwerk, den *Orbites absolues*, — falls dasselbe im dritten Band wirklich noch seinen Abschluss finden sollte¹⁾, — liegt in erster Linie nicht in den principiellen Ergebnissen, da die „absolute Lösung“ im Princip nicht erreicht ist und der Titel selbst daher nicht gerechtfertigt erscheint.

Dass Gyldén selbst unter seiner „absoluten“ Lösung, die er mittelst der horistischen Methode erreicht zu haben glaubte, in der That eine für unbeschränkte Zeit gültige, „convergente“ Lösung verstand, beweist unter anderen Stellen S. 275 und 276 der *Nouvelles Recherches*: „Nichtsdestoweniger kann man, wenn die arbiträren Constanten bestimmt sind, abgesehen von dem höchst seltenen, sogenannten asymptotischen Fall, eine numerische Lösung erhalten, welche die Coordinaten eines Planeten durch gleichförmig convergente trigonometrische Reihen ausdrückt. . . . Man kann daher, wenn man in Betracht zieht, dass die Convergenz der kritischen Glieder in der Störungsfunction derjenigen einer geometrischen Progression gleichkommt, leicht schliessen, dass man den Grad der Annäherung so weit treiben kann wie man will, derart, dass der Rest kleiner als eine gegebene Grösse wird.“ Hierzu vergleiche auch *Orbites absolues*, S. 497, 555 etc. —

Den Werth der *Orbites absolues*, wenn dies Werk durch Prof. Sundmann's Mitwirkung, der auch bereits den wesentlichsten Theil der Fortsetzung von Bd. II nach Pulkova geliefert hat, vollendet werden sollte, wird man vielmehr, — von methodischen Vervollkommnungen im Einzelnen, die allerdings zum Theil wesentliche sind, abgesehen, — nur in dem erhöhten Genauigkeitsgrad der Annäherung und den eventuellen numerischen Ergebnissen zu suchen haben, d. h. er kann sich, in letzter Instanz, nur auf das Gebiet der rechnenden Astronomie erstrecken.

¹⁾ Man vergleiche die Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft vom Jahre 1897; 32. Jahrg., S. 20, Zeile 20 etc. und S. 21, Zeile 14 etc. — Bd. II der *Orbites absolues*, der erst zu Anfang des Jahres 1909, zwölf Jahre nach der Ueberführung von Gyldén's wissenschaftlichem Nachlass nach Pulkova, zur Ausgabe gelangt ist, bringt ausser dem bei Gyldén's Tod bereits Gedruckten als Fortsetzung nur die 130 Seiten einfacher weiterer Formel- und Zahlenentwicklungen, welche den Abschluss der von Gyldén zum grossen Theil schon durchgeführten Berechnung der Störungsfunction für die *Hauptplaneten* bilden; wogegen die eigentliche Arbeit, die Integration der Differentialgleichungen, noch aussteht. Für die *kleinen Planeten* ist von Herrn Brendel durch seine „*Theorie der kleinen Planeten*“ mittelst der Gyldén'schen Principien ein Resultat bereits erreicht. —

Sollten die im 32. Jahrgange der astronomischen Vierteljahrsschrift in Aussicht gestellten Publicationen sich noch weiter verzögern müssen, so wäre erwünscht, dass vielleicht vorher die daselbst auf S. 32 erwähnten 200 Briefe Gyldén's, „die fast ausschliesslich einen wissenschaftlichen Charakter tragen“, erscheinen könnten. —

Dass aber für die rechnende Astronomie die Principien Gyldén's und die Gyldén'schen Methoden in der That wirklichen Werth besitzen und die von Gyldén begründeten Brendel'schen „instantanen“ Elemente den osculirenden hinsichtlich der Kürze der Rechnung erheblich überlegen sind, dafür hat Prof. Brendel in Theil IV seiner *Theorie der kleinen Planeten* den Beweis erbracht.

Dies nunmehr abgeschlossene Werk¹⁾, das für die Astronomie von bleibendem Werth ist, zeigt, dass man mittelst der Gyldén'schen Methoden mit einem recht geringen Aufwand von Rechenarbeit im Stande ist, die Beobachtungen eines Planeten so genähert darzustellen, dass seine Wiederauffindung am Himmel etwa während eines Jahrhunderts ohne jede Mühe gesichert ist.

In Nr. 4397 der Astronomischen Nachrichten weist Herr Brendel darauf hin, dass bei Berücksichtigung einiger Hauptstörungsglieder für Jupiter die zur Vergleichung herangezogenen Beobachtungen der Aegina aus den Jahren 1866 bis 1907 so dargestellt werden, dass die grösste Differenz in Rectascension 2'.3, in Declination 23'' beträgt, ein Resultat, das angesichts der angestrebten Genauigkeitsgrenze nichts zu wünschen übrig lässt. In Theil IV der *Theorie der kleinen Planeten* setzt Herr Brendel bei der Ausgleichung auseinander, dass die bei der Ausgleichung nicht berücksichtigten Beobachtungen, ebenso wie die Vorausberechnungen auf 50 Jahre oder darüber, etwas stärker abweichen müssen; dass aber die nicht berücksichtigten und die vorausberechneten Oerter nicht so stark abweichen werden, dass die Auffindung nach 50 oder mehr Jahren irgend welche Schwierigkeit macht. (Hierzu vergl. auch den Schluss der folg. Anm. 1, S. XXVII.)

Nach Bestimmung eines genügend zuverlässigen Elementensystems und Aufstellung der Bewegungstafeln für das nächste halbe Jahrhundert oder länger aber ist ein Planet auf lange Zeit gesichert, ohne dass irgend eine Neurechnung erforderlich wäre. Hierin liegt die hauptsächlichste Ueberlegenheit der Gyldén'schen Methode über diejenige der speciellen Störungen; zudem ist eine solche definitive Bahnbestimmung in ein paar Wochen vollständig zu erledigen, während die älteren analytischen Störungsmethoden weit umständlichere Rechnungen erfordern. Von eben so grosser Bedeutung aber sind die neuen Methoden, wenn es sich um eine scharfe Darstellung der Beobachtungen und eventuell um Prüfung des Newton'schen Gesetzes handelt. Die hierzu erforderliche Mitnahme der weiteren Störungen höherer Ordnung (und höheren Grades), die nach den älteren analytischen Störungsmethoden äusserst complicirt und mühsam ist, erledigt sich nach den Gyldén'schen Principien in einfachster Weise bei Behandlung der einzelnen Grade. (Hierzu vergleiche man speciell meine, auf S. 10 des Folgenden in Anmerkung 4 citirte Wiener Denkschriftenarbeit über den Typus $\frac{1}{2}$, Theil I, wo sich auf S. 349 und 350 alles Diesbezügliche in ausführlichster Weise auseinandergesetzt findet, sowie später Theil III.) —

Durch Aufdeckung des von Gyldén bei seiner horistischen Methode in §. 7 der *Nouvelles Recherches* begangenen Fehlers, der die convergente Lösung illusorisch macht,

¹⁾ Theil IV (der mir schon im Manuscript vorlag und von dem die Separata bereits erschienen sind) cf. Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen, Bd. VIII, Nr. 1. Die Tafeln umfassen circa 350 Planeten ($n > 709''$).

hat Herr Poincaré der Astronomie einen wesentlichen Dienst geleistet. In seiner allgemeinen Beurtheilung der Gyldén'schen Arbeiten aber, wie sie Herr Poincaré z.B. auch auf S. 235 von Bd. 29 der *Acta Mathematica*, Zeile 6 bis 14 ausspricht, ist er nicht nur über das Maass und Ziel einer objectiven wissenschaftlichen Bewerthung hinausgegangen, sondern hat sich zu einem nicht motivirten und völlig unzutreffenden Werthurtheil hinreissen lassen. Das beweisen die nunmehr vorliegenden, von Herrn Brendel erlangten positiven Rechenergebnisse der Gyldén'schen Methoden, denen kein wissenschaftlich ernst zu nehmender Einwand bezüglich ihres Werthes für die Astronomie mehr entgegen zu stellen ist. Meine eigenen, weit später als die Brendel'schen Arbeiten begonnenen Untersuchungen auf Grund der Methoden Gyldén's über den *Hildatypus* [$\frac{2}{3}$] (cf. S. 10 des Folgenden, Anmerkung 4, sowie S. XXVII dieser Vorbemerkungen, Anmerkung 1) haben zur Zeit ihren Abschluss noch nicht erreicht. —

Während nun Herr Poincaré den Gyldén'schen Versuch einer „convergenten“ Lösung des Störungsproblems als nicht geglückt in Bd. 29 der *Acta Mathematica* aufs schärfste verurtheilt, ist seine eigene „convergente“, im Jahre 1889 als Tome XIII der *Acta Mathematica* bereits gedruckte, „preisgekrönte“ Lösung — wie seiner Zeit Gyldén und Phragmén erwiesen — ebenso gescheitert. Dem auf anderen Gebieten so fruchtbaren Genie des grossen Mathematikers ist es — meines Wissens — auch bis heute, trotz wiederholter Versuche, noch nicht gelungen, wirklich brauchbare Störungsmethoden für die Astronomie zu schaffen, welche die Rechnungen nicht unnöthig compliciren, und deren Werth vor Allem durch die Erfahrung (die Beobachtungen) genügend bestätigt wird: Methoden, wie sie Gyldén dagegen hinterlassen hat.

Das ist das Endergebniss der ganzen Frage, während deren Herr Poincaré seit Gyldén's Tode oft nur einige abfällige Bemerkungen zu publiciren brauchte — die häufig genug gänzlich unrichtige Behauptungen¹⁾ neben zutreffender Kritik enthielten, die aber nur von einigen Wenigen, mit dem Stoff völlig Vertrauten überhaupt nachgeprüft werden konnten —, um durch das blosse Gewicht seines Namens lange Zeit hindurch eine ganze Richtung niederzudrücken und ihre Vertreter vor der Oeffentlichkeit

¹⁾ Hierzu vergleiche man auch das Brendel'sche Referat auf der Astronomenversammlung vom Jahre 1910 in Breslau in dem betreffenden Versammlungsbericht der Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, 45. Jahrgang, Heft 4, auf welches die nachfolgenden Seitenzahlen hinweisen.

In diesem Referat (cf. S. 307) weist Herr Brendel mit aller nur wünschenswerthen Deutlichkeit darauf hin, dass gewisse abfällige Urtheile Poincaré's „vollkommen haltlos und auch auf kein Argument gestützt sind“, . . . dass „die ungeheuren Vortheile der Gyldén'schen Methode gegenüber den classischen Methoden Herrn Poincaré offenbar entgangen sind, weil er niemals weiter in das Problem dieser Entwicklung eingedrungen ist“, . . . und „dass die Grundlosigkeit dieser Vorwürfe so auf der Hand liegt, dass man kaum ein Wort darüber zu verlieren braucht“. —

Der durch das Brendel'sche Referat (cf. S. 306, Zeile 24 bis 43) veranlasste Beschluss der astronomischen Gesellschaft in Breslau (cf. S. 299, Zeile 14 bis 30 und S. 300, Zeile 8 bis 10) gewährleistet bereits die systematische Nutzbarmachung der neuen Methoden für die Astronomie durch ihre Anwendung zur gruppenweisen Berechnung der kleinen Planeten. Denn sehr richtig schlägt Herr Brendel (cf. S. 306, Zeile 29 bis 32) als „zweite Modification des Bauschinger'schen Programms“ für die kleinen Planeten (cf. *Astr. V. J. Schrift*, 31. Jahrgang, 1896, S. 284) vor, „nicht die Methode der speciellen Störungen anzuwenden, sondern absolute Störungen“ (nach den Gyldén'schen Principien) „zu rechnen, die es ja ermöglichen, die Bahn für längere Zeit festzulegen“. —

lahm zu legen durch Behauptungen, die seiner Autorität einfach geglaubt wurden, die aber nicht durch Polemik, sondern nur und allein durch Resultate endgültig zu widerlegen waren.

Hiermit ist alles, den Thatsachen entsprechend, festgelegt.

Diese Feststellung war auch deshalb wünschenswerth, weil eine Beantwortung und Klarstellung von Herrn Poincaré's grossem Aufsatz in Bd. 29 der *Acta Mathematica* gegen die Gylden'sche Richtung überhaupt, von Seiten des Inhabers von Gylden's wissenschaftlichem Nachlass, — an den Herrn Poincaré's Aufsatz im Jahre 1905 gerichtet war (cf. A. M. Bd. 29, S. 260 und 261), — nicht erfolgt ist, und von dieser Seite nach einander so verschiedenartige Versehen begangen wurden, dass die allgemeine Meinung durch beides und die geringe Förderung der *Orbites absolues* naturgemäss darin bestärkt werden musste, das Urtheil Herrn Poincaré's über Gylden's wissenschaftliche Leistungen sei in jeder Beziehung das richtige gewesen. „Voll unnützer Complicationen“ indess, und „nur noch von historischem Interesse“ — wie Herr Poincaré in Bd. 29 (S. 235, Zeile 6 bis 14) der *Acta Mathematica* behauptet — sind die nicht-historischen Methoden Gylden's am wenigsten von allen Störungsmethoden der Astronomie. Auch haben andere neue Methoden den Grad von Brauchbarkeit, wie ihn nach der „*Theorie der kleinen Planeten*“ die Gylden'schen Methoden besitzen, zahlenmässig bisher nicht bewiesen.

Es könnte gewagt scheinen, wenn hier ein Urtheil abgegeben wurde, das dem Poincaré'schen theilweise widerspricht. Ist doch die Bedeutung Poincaré's als Mathematiker allgemein anerkannt. Auf dem Nachbargebiet der Astronomie, hinsichtlich der Leistungen seines einstigen Gegners Gylden jedoch, haben die wissenschaftlichen Thatsachen das Poincaré'sche Urtheil als ein nicht in jeder Hinsicht zutreffendes und gültiges erwiesen. Und wiewohl die analytischen Untersuchungen der zweiten Poincaré'schen Arbeit: „*Ueber das Problem der drei Körper und die Gleichungen der Dynamik*“, vom Jahre 1890, hinsichtlich der periodischen Lösungen (wie auch andere Poincaré'sche Untersuchungen), in erkenntniss-theoretischer Hinsicht für die Astronomie einen gewissen Werth besitzen, so haben diese Arbeiten doch den actuellen Werth, die fruchtbare Verwerthbarkeit, die den Keim neuer Entdeckungen birgt, welche die Gylden'schen Methoden erwiesen haben, für die Astronomie nicht gezeitigt. Jedenfalls aber hat sich für die Astronomie Poincaré's eigene Forschung [in *Acta Mathematica*, Tome XIII ¹⁾] und sein Urtheil (in *Acta Mathematica*, Bd. 29, S. 235, Zeile 6 bis 14 etc.) hinsichtlich des Störungsproblems (Problem der drei Körper) in der Grundtendenz als irrig erwiesen. Das

¹⁾ Für diejenigen Leser, denen die auf S. 10 des Folgenden erwähnte *Physikalische Zeitschrift* nicht erreichbar ist, sei aus dieser, als Beleg für obige Behauptung zur nothwendigen Vervollständigung des zuvor Gesagten, die betreffende Stelle hier angeführt und, als beste Illustration zu Poincaré's späterer schmählicher Beurtheilung der wissenschaftlichen Leistungen seines verstorbenen astronomischen Gegners in Bd. 29 der *Acta Mathematica*, hier gleichfalls festgelegt. Nach allem hier Dargelegten wird sich der Leser selbst sein Urtheil bilden. *Physikalische Zeitschrift*, 5. Jahrgang, Nr. 7, S. 181:

„Im Jahre 1889 wurde eine Arbeit Poincaré's über das Problem der drei Körper durch den officiellen Preisrichter in Stockholm, den Chefredacteur der *Acta Mathematica*, Mittag

von vereinzelt Astronomen [und gerade von einem sonst so anerkannten, wie H. Bruns in Leipzig], — welche die nicht horistischen Methoden Gyldén's und den Werth der neuen Richtung nicht entsprechend an Beispielen geprüft zu haben scheinen, — schlechthin als gültig acceptirte „αἰτὸς ἔφα“ des Mathematikers ist für die Astronomie zur Genüge als ungültig gekennzeichnet und erledigt. —

Durch das Gesagte dürfte es verständlich werden, warum der principielle Standpunkt von Vorlesung I der zweiten Auflage von Klinkerfues' theoretischer Astronomie bei Abfassung der dritten Ausgabe des Werkes ein anderer geworden ist. Wiewohl die erörterte Frage nicht die Bahnrechnung als solche betrifft, sondern die alte Grundfrage der Mechanik des Himmels bildet, so war doch ihre endgültige Klarstellung bei Charakterisirung des allgemeinen Problems der planetarischen Bewegung, das in Vorlesung I naturgemäss an die Spitze der Betrachtung gestellt wurde, gegeben.

Leffler, mit dem von S. M. Oscar II. König von Schweden gestifteten Preis von zehntausend Kronen gekrönt. [Dass Mittag Leffler allein — nicht aber auch Weierstrass — die Verantwortung für die Entscheidung des Preisgerichtes trägt, hat er selbst zugegeben. (cf. Acta Math., Tome XIII. Avant Propos pag. VII.)] Diese Arbeit ist:

„Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique par H. Poincaré. Mémoire couronné du prix de S. M. le roi Oscar II. le 21. janvier 1889. Avec des Notes par l'auteur.“

Die gekrönte Arbeit wurde in den Acta Mathematica vollständig gedruckt vom 29. April 1889 bis 13. November 1889 (wie die Seitenimprimata des Exemplares zeigen); ihre offizielle Ausgabe wurde jedoch im letzten Moment noch vermieden, nachdem sogar schon broschirte Separate (so eines an Gyldén) vom Chefredacteur der Acta Mathematica in Stockholm versandt worden waren. Denn man ward erst jetzt, just nach Ablauf der zwölften Stunde, auf einen Fehler in der Preisarbeit aufmerksam, der sich nicht mehr durch Zusätze nachträglich etwa berichtigen und noch verbessern liess, sondern die Grundlagen der gekrönten Arbeit derart berührte, dass er ihre Ausgabe unmöglich machte.

An Stelle dieser Arbeit veröffentlichten die Acta Mathematica — ein Jahr später — eine zweite Arbeit Poincaré's von fast völlig gleichem Titel, aber verändertem Inhalt. Diese zweite Arbeit, welche die verfehlte Preisarbeit ersetzen musste, ist:

„Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique par H. Poincaré. Mémoire couronné du prix de S. M. le roi Oscar II. le 21. janvier 1889.“

Ist gedruckt vom 28. April 1890 bis 21. October 1890 (wie man wiederum aus den Seitenimprimata im Bd. XIII der Acta Mathematica ersieht).

Während beide Arbeiten als Tome XIII, Nr. 1 und 2 der Acta Mathematica gedruckt wurden, gelangte nur die zweite Arbeit in Bd. XIII der Acta Mathematica, wie man im Titelblatt liest, als das „Mémoire couronné du prix de S. M. le roi Oscar II. le 21. janvier 1889“ zur wirklichen Ausgabe!

Ein seiner Zeit vom „Rédacteur en chef“ der Acta Mathematica versandtes, broschirtes Exemplar der ursprünglichen Preisarbeit Poincaré's, das von mir persönlich eingesehen wurde, dem auch die oben mitgetheilten Datum der Seitenimprimata entnommen sind, befindet sich in Sicherheit. — Hiermit vergleiche man die Erklärungen Poincaré's in seiner „Introduction“ zur edirten — „Preisarbeit“ Acta Mathematica, Tome XIII, p. 5. . . .

Soviel historisch über die wichtigste und grösste Arbeit, die Poincaré über das Problem der drei Körper verfasst hat.“ —

An Stelle der ursprünglichen, „convergenten“ Ergebnisse der ersten Arbeit war nur von Preis-Bewerber und Preis-Richter die divergente Lösung der eilends verfassten, zweiten, „gekrönten“ Arbeit über das Fundamentalproblem der Astronomie gesetzt worden, deren mehr negative Ergebnisse, wie schon hervorgehoben, nichts von der actuellen Bedeutung und positiven Verwerthbarkeit für die Störungstheorie besitzen, welche die Gyldén'schen Methoden bei ihrer Anwendung erwiesen haben.

Damit ist historisch das Facit über das von Gyldén und von Poincaré für das Störungsproblem Erreichte objectiv gezogen. (Man vergl. aber auch noch S. XXVII, Anmerkung 1.) —

Nach Klärung des erwähnten Irrthums hinsichtlich der horistischen Methode muss auf den zweiten, schwerer ins Gewicht fallenden Mangel hingewiesen werden, der die zweite Auflage trifft; es ist der Mangel an verbürgter Sicherheit für die Richtigkeit der mathematischen Formeln, die aus der ersten Auflage des ursprünglichen, 30 Druckbogen umfassenden Werkes von Klinkerfues in die Neubearbeitung von mir übernommen wurden.

Ich will diesen Mangel in keiner Weise zu beschönigen suchen. In meiner Assistentenstellung, wo ich naturgemäss durch die Dienststunden und laufenden Beobachtungen schon sehr in Anspruch genommen war, unterschätzte ich die Schwierigkeiten der Herausgabe eines Werkes, das wegen seiner ausgezeichnet pädagogischen und geistreichen Darstellung mit Recht berühmt geworden ist, das jedoch durch das tragische Geschick seines Verfassers im Detail der mathematischen Formeln gänzlich unzuverlässig war. Es hätte bei der Neubearbeitung zugleich eine vollständige Nachprüfung der Formeln der ersten Auflage stattfinden müssen. Immerhin wurden damals 186 Fehler festgestellt. Das gedruckte Verzeichniss derselben wurde seiner Zeit dem Verlag ebensowohl, wie dem Chefredacteur der astronomischen Vierteljahrschrift, Prof. Lehmann-Filhés und auch verschiedenen anderen Collegen übergeben.

Gleichwohl umfasst diese grosse Zahl von Fehlern der ersten Auflage — die keineswegs durchweg blosse Druckfehler waren —, noch nicht entfernt die sämmtlichen in ihr enthaltenen Fehler.

Der Umstand, dass mir durch Prof. Knopf, Prof. Lehmann-Filhés und Dr. Wedemeyer noch eine Anzahl übersehener Fehler der ersten Auflage mitgetheilt wurde, wofür ich ihnen auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aussprechen möchte, veranlasste mich, meine Arbeit mit dem Erscheinen derselben nicht als abgeschlossen zu betrachten, sondern sie von Neuem vorzunehmen, mit dem Bestreben, vor allem die Richtigkeit der mathematischen Formeln sicherzustellen. Wie ich hoffe, enthält das im Laufe der Jahre von mir hergestellte Fehlerverzeichniss (das auch wieder dem Vieweg'schen Verlag und dem Chefredacteur der A. V. J. S., sowie Herrn Geheimrath v. Seeliger übersandt wurde) nunmehr wirklich die sämmtlichen, früher übersehenen, in der dritten Ausgabe berücksichtigten Fehler, welche einen grossen Theil der mathematischen Formeln der zweiten Auflage durchlaufend entstellen.

Bemerkt sei an dieser Stelle, dass den Rechner irreführende Druckfehler in den mathematischen Formeln auch in anderen, das Gebiet der Bahnrechnung behandelnden Werken zu finden sind. Ja, ich stehe nicht an, zu behaupten, dass es fast unmöglich sein dürfte, derartig umfangreiche Werke völlig druckfehlerfrei herzustellen. Als Beweis hierfür möchte ich auch das bereits im Jahre 1905 erschienene grosse Bauschinger'sche¹⁾ Lehrbuch über Bahnrechnung anführen, das gewiss mit der grösstmöglichen Sorgfalt ausgeführt und revidirt worden ist. Ohne dass ich dies umfangreiche Buch in allen Theilen genauer geprüft hätte, ist mir in demselben eine, für seinen Umfang allerdings nicht grosse Anzahl von Fehlern bekannt, die ich im

¹⁾ Die Bahnbestimmung der Himmelskörper von Julius Bauschinger. Mit 84 Figuren im Text. Leipzig, Verlag von Wilhelm Engelmann, 1906.

Interesse der Rechner den Exemplaren der vorliegenden dritten Ausgabe als Sonderbeilage hinzugefügt habe. Jedenfalls wird man hieraus aber dem hochverdienstvollen Werke keinen ernstlichen Vorwurf machen; enthält doch sogar das classische Lehrbuch der Bahnbestimmung von Oppolzer, das sein Verfasser, nach Mittheilung des neuen Fehlerverzeichnisses in Engelmann's Verlag im Jahre 1880, für vollständig controlirt hielt, noch die beträchtliche Anzahl, von Prof. Leuschner im Jahre 1890 in den „Publications of the Astronomical Society of the Pacific“ mitgetheilte Fehler, deren Verzeichniss, da es nicht allgemein bekannt sein dürfte, der vorliegenden dritten Ausgabe gleichfalls mit beigegeben ist. Und so wage auch ich nicht zu behaupten, dass das eine oder andere Druckversehen in den mathematischen Formeln der dritten Ausgabe des vorliegenden Werkes, trotz aller stattgehabten Bemühungen, völlig ausgeschlossen wäre. Ja, wenn sich Jemand der Mühe einer Prüfung derselben unterziehen und dabei von mir unbemerkt gebliebene Versehen feststellen und mir oder dem Vieweg'schen Verlage mittheilen wollte, so würde ich ihm im Interesse des Werkes zu aufrichtigem Dank verpflichtet sein. —

Auch von den Klinkerfues'schen Rechenbeispielen wurden einige, offenbar fehlerhafte, neu gerechnet, wie die Beispiele der Vorlesungen 20, 34, 36 und 70 der zweiten Auflage; verschiedene andere, zwar im Ergebniss richtige, indess mit Druckfehlern behaftete, wurden corrigirt. Ob im übrigen Klinkerfues bei seinen Rechenbeispielen noch Fehler untergelaufen sind, will ich dahingestellt sein lassen. Das, worauf es mir ankam, war vor Allem die Richtigstellung der mathematischen Entwicklungen. — Ebenso wurde auch das Ebert'sche Rechenbeispiel der 110. Vorlesung, in dem am Schluß sämmtliche Elementencorrectionen unrichtig erhalten sind, da die Fehlereinheit vergessen ist, corrigirt. Diese verschiedenen Rechnungen wurden von Herrn Dr. Wedemeyer und mir in Controle gleichzeitig durchgeführt.

Ferner wurden einige neu gefundene (auch im Watson'schen Original enthaltene) Druckfehler der im Anhang gegebenen Barker'schen Tafel VI beseitigt; auch wurden in Tafel XI und XII der 2. Auflage die von Prof. Brendel in den Gauss'schen Originaltafeln der *Theoria motus* (cf. Gauss' Werke, Bd. VII, 1906, herausgegeben von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen) angebrachten Verbesserungen berücksichtigt. Schliesslich wurde die Constantentafel XVI der 2., d. i. Tafel XX der 3. Ausgabe erweitert und modern verbessert. In ihrer vorliegenden Form dürften Druckfehler der Tafeln ausgeschlossen sein. Die im Vorwort der 2. Auflage (cf. S. X) über die Nummernfolge der Tafeln gemachten Angaben gelten für die 3. Ausgabe, in welche neue Zahlentafeln aufgenommen sind, nicht mehr; die diesbezüglichen Aufschlüsse findet der Leser auf S. 828 des folgenden Anhangs, der die Tafeln enthält, gegeben. —

Bezüglich der Präcession, die auch in anderen Werken über Bahnrechnung eine ausführlichere Behandlung erfahren hat — wiewohl streng genommen allerdings nur die Ergebnisse der Theorie für die Bahnrechnung in Betracht kommen —, möchte ich auf das schon im Vorwort zur zweiten Auflage des vorliegenden Werkes auf S. IX Gesagte verweisen. Hier sei noch erwähnt, dass die classische mechanische Theorie der Figur der Erde, die einen genäherten Werth für die Abplattung ergibt (der,

numerisch modificirt, in der Theorie der Präcession, cf. S. 148 des Folgenden, gebraucht ist), sich in meinem Buch über die Figur der Erde¹⁾ in verständlich gehaltener Form und weit ausführlicher, als in anderen Arbeiten über dies complicirte Problem der höheren Mechanik, abgeleitet findet, ein Ziel, das ich besonders auch bei der Präcession angestrebt habe. Der moderne Werth für die Abplattung wird in der Fortsetzung des genannten Buches behandelt. (Diese wird indess erst nach Abschluss des dritten Theiles meiner, auf Grund der Gylden'schen Störungstheorie durchgeführten Untersuchungen über die Störungen der kleinen Planeten vom *Hildatypus* [$\frac{2}{3}$] zur Ausgabe gelangen.) —

Im Uebrigen habe ich meine erste Neubearbeitung des Klinkerfues'sches Buches keiner weiteren wesentlichen Umarbeitung unterzogen, sondern von einer gleich zu erwähnenden, principiellen Erweiterung abgesehen, nur noch einzelne, mehr nebensächliche Veränderungen vorgenommen, wie die Aenderung verschiedener Figuren, die Hinzufügung einzelner Gleichungen etc. Ferner ist in der dritten Ausgabe das falsche Klinkerfues'sche Beispiel der 127. Vorlesung der zweiten (d. i. der 122. Vorlesung der ersten) Auflage für die Identität der zwei betreffenden Meteoritenbahnen fortgefallen, da, worauf im *Astronomical Journal*, Bd. XV, S. 165 durch Prof. Schaeberle hingewiesen ist, die beiden Sternschnuppen nicht identisch waren.

Das an Stelle des unrichtigen Klinkerfues'schen Beispiels im Folgenden gegebene Beispiel ist von Herrn Chas. P. Olivier (cf. *Lick Observatory Contributions* Nr. 5) und behandelt die gleichzeitige Beobachtung desselben Meteors auf Mt. Hamilton und Mt. Diablo. Herr Olivier hat den Moment des Verschwindens dem Moment des Aufleuchtens bei der Berechnung vorgezogen, weil der letztere in der Regel viel weniger beobachtet ist, als der erstere (cf. S. 812 des Folgenden). —

Hinzugefügt sind der neuen Ausgabe, wie schon erwähnt, noch einige wichtige neue Zahlentafeln. Tafel XI der dritten Ausgabe, für Vorlesung 35, hatte Herr Dr. Wedemeyer die Güte auszuführen²⁾. — Als eine besondere Errungenschaft für die dritte Ausgabe dürfte jedoch die Aufnahme der neuen Leuschner'schen Bahnrechnungsmethoden zu betrachten sein, auf deren Charakteristik ich sogleich mit einigen Worten zurückkommen werde. Die für diese Methoden gebrauchte Tafel XVI, die eine Erweiterung der entsprechenden Oppolzer'schen Tafel XIII, Bd. I, auf sechs Stellen mit kleineren Intervallen darstellt und im Allgemeinen genau bis auf circa eine Einheit der letzten Ziffer ist, und die von besonderer Wichtigkeit ist (cf. S. 471 und

¹⁾ Das mechanische Potential nach Vorlesungen von L. Boltzmann bearbeitet und die Theorie der Figur der Erde. Erster Theil. Mit 137 Textfiguren. Leipzig, Verlag von Johann Ambrosius Barth, 1908. Besprochen in der:

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, 46. Jahrgang, Heft 1 von 1911 (durch Prof. E. Anding). —

Im: *Bulletin astronomique*, Bd. 25 (1908), S. 200 (durch Prof. Armand Lambert). —

In: *Nature* Nr. 2025, Vol. 78. Thursday, 20. August 1908 (durch Captain W. J. Johnston, Captain Clarke's Nachfolger). —

²⁾ Diese von Klinkerfues am Schluss von Vorlesung 35 der ersten Auflage erwähnte Tafel hat sich zwar in Klinkerfues' wissenschaftlichem Nachlass befunden, ist aber von Klinkerfues' Nachfolger, wie er mir seiner Zeit mittheilte, mit dem übrigen Nachlass wegen gänzlicher Unleserlichkeit verbrannt worden. —

S. 473, Zeile 22 und 23 des Folgenden), hatte Herr Prof. Leuschner die Güte, für die dritte Ausgabe zur Verfügung zu stellen, während Tafel XIV und XV dem zweiten Bande von Oppolzer's Bahnrechnung (Tafel Ia und IIa daselbst) mit Genehmigung des Engelmann'schen Verlags entnommen sind. —

Bei Abfassung meiner ersten Neubearbeitung des Werkes war es durch das wissenschaftliche Interesse geboten, die neue, im Jahre 1889 erschienene Vektormethode von Willard Gibbs¹⁾ aufzunehmen, die, originell und elegant hinsichtlich der theoretischen Entwicklungen, im Genauigkeitsgrad der Annäherung allen früheren Methoden überlegen ist und schon aus diesem Grunde bei einer Neudarstellung der Bahnrechnung selbstverständlich nicht einfach unerörtert bleiben durfte. Wenn- gleich einige Nachtheile dieser Methode in praktischer Beziehung allerdings nicht in Abrede zu stellen sind (cf. S. XXVI, Anm.), so fällt doch das günstige Urtheil derjenigen Rechner, die sie angewandt haben (cf. S. 414 des Folgenden), dem, bekanntlich von anderer Seite über die Methode gefällten, einseitig absprechenden Urtheil gegenüber, wesentlich ins Gewicht. Ebenso hat auch Callandreau die Vorzüge der Methode rühmend anerkannt. Die von Fabritius und von Vogel (cf. A. N., Bd. 128, S. 225 und Bd. 129, S. 37) gemachten Vorschläge von Verbesserungen der Gibbs'schen Methode, — die einige Mängel derselben beseitigen, — wurden nicht berücksichtigt, weil sie weder eine wirklich durchgeführte Neugestaltung der Methode, noch auch, auf Grund einer solchen, die numerische Anwendung erbringen. Auf die wesentliche Verbesserung der Methode durch Frischauf werden wir weiterhin zu sprechen kommen. —

Kurz nach dem Erscheinen meiner ersten Neubearbeitung von Klinkerfues' theoretischer Astronomie ist dann von Prof. Harzer in Kiel ein erneuter Versuch gemacht worden, für das Problem eine noch vollkommeneren Lösung als die von Gauss, Encke, Oppolzer und Gibbs gegebene, zu finden, in einer grossen, buchartigen Abhandlung: „Ueber die Bestimmung und Verbesserung der Bahnen von Himmelskörpern nach drei Beobachtungen.“ (Publication der Sternwarte in Kiel XI, herausgegeben von Paul Harzer; cf. auch A. N., Bd. 141.) Schon Prof. Bauschinger hat die Aufnahme der Harzer'schen Methode in sein neues Lehrbuch über Bahnrechnung abgelehnt. Er motivirt auf S. 393 seine Gegnerschaft gegen die Laplace'sche und die Harzer'sche Methode

¹⁾ Von meiner damaligen Correspondenz mit Gibbs über seine Methode ist inzwischen in den gesammelten Werken des Verstorbenen (vergl. Vol. II, Nr. VI, S. 149—154) ein höchst interessanter Brief erschienen: „*On the use of the Vector method in the determination of orbits. Letter to Dr. Hugo Buchholz, Editor of Klinkerfues Theoretische Astronomie [Hitherto unpublished]*“, den ich den amerikanischen Herausgebern von Gibbs' Werken im Jahre 1905 auf ihre Bitte zur Verfügung stellte. — An dieser Stelle möchte ich eines, wenn auch nebensächlichen Irrthums der zuvor erwähnten Callandreau'schen Kritik gedenken. Callandreau schrieb: „*Pour l'exposé de la méthode vectorielle de Gibbs, le Dr. Buchholz a eu à sa disposition les leçons du professeur Schur, de Göttingue, sur le calcul des orbites, ainsi que des Notes communiquées par M. Gibbs lui même.*“ Hierzu möchte ich bemerken: erstens, dass ich bei Klinkerfues' Nachfolger niemals Vorlesungen gehört habe; zweitens, dass die von Gibbs selbst nicht gegebene, ausführliche Ableitung seiner Fundamentalgleichung, wie sie auf S. 419 bis 422 im Folgenden gegeben ist, in Wirklichkeit von Prof. Schering her stammt (man vergleiche S. 419, Zeile 16 etc.); drittens, dass meine im Folgenden gegebene Darstellung der Gibbs'schen Methode, wie sich jeder überzeugen kann, direct auf dem englischen Original von Gibbs selbst, sowie auf Gibbs' Briefen basirt.

damit: „...da jede Anwendung derselben von der Mühseligkeit der Rechnung und von der geringen Sicherheit des erlangten Resultates den Beweis erbringt. Die Methode fasst zweifellos das Problem im Kern, aber die Hilfsmittel, deren sie sich bedient, sind unzulänglich.“ Nun ist freilich der Vorwurf, dass die Harzer'sche Methode auf Laplace fusse und darum mangelhaft sei, nicht zutreffend; übrigens vergleiche man die Harzer'sche Entgegnung (Astronomische Nachrichten, Bd. 170, Nr. 4058); trotzdem aber trifft die Harzer'sche Methode der letzte Theil des von Prof. Bauschinger erhobenen, nur nicht weiter begründeten Vorwurfs.

Ein so ausgezeichnete Kenner der Bahnrechnung, der sich auf dem Gebiete so erfolgreich selbst bethätigt hat, wie der bekannte Director des Students' Observatory in Californien, Prof. A. O. Leuschner, urtheilt bei Darstellung seiner werthvollen neuen Bahnrechnungsmethoden (A short method of determining orbits from three Observations, University of California Publications; cf. Publications of the Lick Observatory, Vol. VII, Part. 1; ferner Part. 2, 3, 7, 8; vergl. Vorlesung 82 des Folgenden) gleichfalls hinsichtlich ihrer praktischen Verwerthbarkeit, auf die es astronomisch ankommt, abfällig¹⁾ über die Harzer'sche Methode. Einige der von Prof. Leuschner hervorgehobenen Mängel der Harzer'schen Methode, welche dieselbe dem Rechner wenig brauchbar erscheinen lassen müssen, finden sich im Folgenden (vergl. S. 448) kurz angegeben; ausführlicher noch sind sie in der zuvor erwähnten ersten Arbeit gleich zu Beginn von Prof. Leuschner beleuchtet worden, weshalb ich hier nicht weiter auf sie eingehe. Bei der Leuschner'schen Methode jedoch sind alle Unstimmigkeiten der Harzer'schen Arbeit auf das Glücklichste vermieden (vergl. S. 449 und auch S. 450 des Folgenden). Die Berücksichtigung der Untersuchungen von Prof. Leuschner — einer Autorität auf dem Gebiete der Bahnrechnung — in der dritten Ausgabe des vorliegenden Werkes musste im Interesse der Rechner in hohem Grade wünschenswerth erscheinen, um so mehr, als dieselben im Original schwer erreichbar, und in anderen Werken über Bahnrechnung nicht zu finden sind. (Hierzu vergleiche man auch S. 449, Zeile 27 etc. der im Folgenden, in Vorlesung 82 gegebenen Leuschner'schen Darstellung.) —

Die ursprüngliche Fassung der „short method“, wie sie bis jetzt erst in Part. 1, 2 und 3 von Vol. VII der „Publications of the Lick Observatory“ publicirt vorliegt, erfuhr indess im Laufe der letzten Jahre nicht nur Verbesserungen, sondern auch grundlegende Erweiterungen, deren endgültige Formulirung zur Zeit der Abfassung der dritten Ausgabe des vorliegenden Werkes noch nicht gedruckt vorlag, sondern vom Autor damals erst

¹⁾ Vergl. z. B. S. 3 der Sonderausgabe der ersten Leuschner'schen Arbeit: „... There are, however pratical difficulties involved which make it doubtful whether astronomers will adopt this“ (Harzer's) „method in preference to the short methods of determining circular elements for planets, to Olbers' and v. Oppolzer's methods of deriving parabolic orbits for comets, or even to the more general methods of Gauss and Oppolzer for the Determination of orbits without previous hypothesis as to the excentricity. Some of the difficulties, all of them of the utmost importance to computers are as follows...“ „The essential improvements to be sought for are...“ (Es folgen in der Leuschner'schen Arbeit mehrere Seiten ausstellender Kritik über die Harzer'sche Arbeit.) Ferner z. B. S. 25: „The methods of Laplace and Harzer furnish convenient expressions which contain the geocentric distance ...; but for reasons which are apparent from the preceding article, these methods are otherwise not suited for the solution of the present problem.“

für die Publicationen des Lick Observatory im Manuscript zusammengestellt wurde¹⁾. Aus diesem Grunde ersuchte ich Prof. Leuschner, die folgende, in Vorlesung 82 gegebene Gesamtdarstellung seiner Untersuchungen selbst zu übernehmen und stellte meine eigene, auf Grund der ersten Leuschner'schen Arbeiten bereits verfasste Darstellung zurück. Nachträglich lieferte dann Prof. Leuschner auf meine Bitte auch noch entsprechende Formelzusammenstellungen mit Rechenbeispielen, sowie eine etwas ausführlichere Darstellung seiner „Methode der Bahnberechnung mit sofortiger Berücksichtigung der Störungen“, sammt Rechenbeispiel, als sie in der Astr. V. J. Schrift (43. Jahrg., Heft 4) gegeben ist, Entwicklungen, die im Anhang mitgetheilt sind. Bei Prof. Leuschner's eingetretener schwerer Erkrankung — von der er glücklich wiederhergestellt ist —, hatte Prof. Crawford vom Students' Observatory die Güte, die Correctur der Tafel XVI mit zu erledigen.

Schliesslich ist noch zu erwähnen, dass ich die im Folgenden, auf S. 448, 449 u. 450 gegebenen einleitenden Bemerkungen, auf Grund mir von Prof. Leuschner überlassener Notizen, selbst verfasst habe. Die Bemerkungen über den Werth und die Bedeutung der Leuschner'schen Methoden rühren dabei von mir her. Die bezüglich der Harzer'schen Methode gemachten kritischen Bemerkungen jedoch, und ebenso die Bemerkung über das auf S. 393 des Bauschinger'schen Werkes über Bahnrechnung (auf S. 448 u. 449 des Folgenden) Gesagte, sind dem, in meinem Besitz befindlichen Leuschner'schen Entwürfe wörtlich entnommen. —

Hier sei nur darauf hingewiesen, dass in den folgenden Leuschner'schen Untersuchungen die in „short method“ gegebenen Entwicklungen unter anderem nicht nur modificirt sind dadurch, dass geschlossene Ausdrücke für f und g für die Anwendung auf lange Intervalle eingeführt sind, ebenso für ∂f und ∂g ; dass ausserdem einfache Modificationen direct zur Parabel oder zum Kreise führen, wenn derartige Bahnbestimmungen erwünscht sind. Vor allem sind die ursprünglichen Untersuchungen dadurch erweitert, dass nunmehr osculirende erste Elemente, d. h. solche mit sofortigem Einschluss der Störungen, berechnet werden können. Das Letztere erscheint als besonders wichtig für gestörte Trabanten, wie z. B. für Saturn IX, Jupiter VI, VII, VIII. Denn bisher hat es bekanntlich überhaupt keine directe Methode der Bahnbestimmung für Satelliten gegeben; vielmehr ist man von Annahmen über Perioden, Excentricität und bisweilen auch Neigung ausgegangen. Diese Annahmen fallen bei der Leuschner'schen Methode vollständig fort, und alle Elemente und alle Lösungen, wenn mehrere vorliegen, erfolgen in ihrer Bestimmung gleichzeitig. Dabei geht die Lösung der verschiedenen Probleme, wie der Parabel, der Kreisbahn, der allgemeinen Bahn, der gestörten Bahn, fast in der gleichen Weise vor sich, und der Uebergang von der einen zur anderen Bahn, wie z. B. von der Parabel zur Ellipse, erfordert kaum Mehrarbeit. Diese Allgemeinheit der Methoden ist, neben ihrer Genauigkeit und Kürze, ein Hauptvorzug vom theoretischen Standpunkt aus. Denn die Leuschner'schen Methoden, deren gute praktische Verwerth-

¹⁾ Dieselben sind auch jetzt noch nicht gedruckt und ihre Publication in Amerika (in einem anderen, als dem hier, pädagogisch, entwickelten Zusammenhang) wird erst später erfolgen.

barkeit durch die numerischen Rechnungen hinlänglich erwiesen ist (man vergleiche die im Folgenden mitgetheilten Beispiele), dienen in ihrer jetzigen Form nicht, wie in ihrer ursprünglichen, nur mehr für genäherte Ephemeriden, sondern sie umfassen das ganze Gebiet der Bahnrechnung. —

Dabei ist noch zu betonen, dass, wenn die erste Annäherung („directe Lösung“) nicht hinreichend ist, die zweite Annäherung nicht, wie die sogenannte zweite Hypothese, durch algebraische Nachrechnung der vorher vernachlässigten Glieder höherer Ordnung erfolgt, sondern dadurch, dass auf differentiellern Wege diejenigen Correctionen der vier Fundamentalgrössen berechnet werden, welche die Unterschiede Beobachtung minus Rechnung zum Verschwinden bringen.

Schliesslich sei hier noch der Bemerkung Prof. Leuschner's (cf. S. 454, Zeile 16 des Folgenden) Erwähnung gethan, die darauf hinweist, dass es für den Bahnrechner von Vortheil sein würde, wenn künftig bei Herstellung der astronomischen Jahrbücher die betreffenden Geschwindigkeiten in den Sonnencoordinaten mit berechnet würden. —

Von der Harzer'schen Methode muss bei objectiver Prüfung hervorgehoben und ausdrücklich anerkannt werden, dass sie in rein mathematischer Beziehung das Problem mit viel Scharfsinn löst¹⁾; in praktischer Beziehung, auf die es astronomisch ankommt, jedoch thut sie das nicht. Zwar sagt Herr Harzer selbst auf S. 6 von seiner Arbeit: „So sinnreich dies Verfahren (das Gibbs'sche) ist, muss doch bezweifelt werden, dass es praktische Vortheile vor dem von uns skizzirten gewähre.“ Allein in einem wissenschaftlichen Lehrwerk wie dem Klinkerfues'schen, das nur die wirklich brauchbaren Hauptergebnisse der wissenschaftlichen Forschung enthalten soll (ohne, bei der Fülle des Stoffes, jeder der vielen werthvollen kleineren Arbeiten über das Gebiet gerecht werden zu können), das zugleich ein Führer und Wegweiser der studirenden Jugend ist, dürfte, bei eingehender, gewissenhafter Prüfung, die Harzer'sche Methode, als minder brauchbar, eine Berücksichtigung nicht finden.

So giebt auch der Verfasser des bekannten „Grundriss der theoretischen Astronomie und der Geschichte der Planetentheorien“ (in 2. Auflage erschienen 1903 bei Engelmann in Leipzig), Prof. Frischau, in seiner, Verbesserungen und neue Gesichtspunkte enthaltenden Darstellung²⁾ der Gibbs'schen Methode auf S. 30 sein Urtheil über den Harzer'schen Versuch dahin ab: „Harzer setzt als Näherungswerth ... Die darauf gegründete Bestimmung von r , r' , r'' wird aber, was Kürze, Bequemlichkeit und

¹⁾ Hierzu vergleiche man die von Herrn Harzer unmittelbar vor der „Einleitung“ seiner Arbeit gemachte Vorbemerkung auf S. 3, Zeile 4 und 5, wonach Winke des bekannten Mathematikers Prof. Staeckel, während dieser an der Kieler Universität wirkte, „für die Gestaltung der analytischen Darstellung der Untersuchungen nützlich gewesen“. —

²⁾ Die Gauss-Gibbs'sche Methode der Bahnbestimmung eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen von Dr. J. Frischau, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Graz. Leipzig, Verlag von W. Engelmann 1905. Diese interessante, von Frischau gegebene Modification der Gibbs'schen Methode, — welche zwar keine numerische Anwendung als Probe ihrer praktischen Leistungsfähigkeit, in der That aber principielle Verbesserungen der Gibbs'schen Originalmethode in Gestalt einer detaillirt gegebenen Neugestaltung der Rechenformeln bringt, — numerisch, bei gleichzeitiger Anwendung der Gibbs'schen Originalmethode auf ein Beispiel, zu prüfen, würde eine wissenschaftlich zweckvolle Aufgabe zum Vergleich der Methoden für eine „Dissertation“ bilden.

Convergenz der Rechnungen anbelangt, von der Gauss-Gibbs'schen in jeder Beziehung übertroffen. Zunächst erscheinen die Harzer'schen transcendenten Ausgangswerthe für $n:n'$ und $n'':n'$ zur Berechnung von r, r', r'' nicht sehr geeignet; sie müssen zu diesem Zwecke in rationale Ausdrücke von r, r', r'' umgewandelt werden, was einem Aufgeben dieser Specialmethode gleichwerthig ist. Ferner, da in der Praxis f in der Regel klein ist, so ist das Fehlerglied Harzer's mit ν^4 mit dem nur unsicher bestimmbaren Factor σ^2 ungleich größer als das bezügliche von Gibbs (bei Pallas $f = 0,1268$ das 14,5- und 12fache, bei Ceres $f = -0,03056$ das 53,3- und 55,8fache für $n:n'$ und $n'':n'$). . . . Es ist daher auch bei Harzer eine Beschränkung auf kleine Werthe von ν (höchstens gleich 1:3) geboten, wodurch wieder die Entwicklung der höheren Glieder, mindestens von ν^9 an, überflüssig erscheint. Die Harzer'schen Reihenentwicklungen mit der Beschränkung auf Glieder sechster Ordnung nach ν^2, u, v reichen nicht einmal für das Ceres-Beispiel $\nu = 0,536$ trotz der kleinen Excentricität $= 0,081$ aus“ u. s. w. (Das Gibbs'sche Ceres-Beispiel vergl. S. 438 des Folgenden.) —

Dagegen weist Herr Frischauf auf die fundamentale Bedeutung des neuen, von Gibbs für die Bahnrechnung aufgestellten Principes mit den charakteristischen Worten hin: „Diese einfachen, rationalen und dabei sehr genauen Ausdrücke nach r, r', r'' , die Gibbs als Näherungswerthe der Dreiecksverhältnisse aufgestellt hat, können unstreitig als der bedeutendste Fortschritt der Lösung der Aufgabe einer ersten Bahnbestimmung seit Gauss bezeichnet werden.“

Fabritius aber hebt den praktischen Werth der Gibbs'schen Ausdrücke der Dreiecksverhältnisse sowohl für die Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen, als auch aus vier Beobachtungen, wie auch für parabolische Bahnen rühmend hervor, indem er sagt: „Bei Kometen mit bedeutender heliocentrischer Bewegung brachte diese Methode (die Gibbs'sche) convergirende Resultate, wo andere Methoden divergirende ergeben.“

Fassen wir das Gesagte kritisch zusammen, so kann das Urtheil über die neueren, nach einander von Gibbs, Harzer und Leuschner entwickelten Methoden der Bahnrechnung nur dahin präcisirt werden: dass die Leuschner'schen Untersuchungen einfache Resultate von ausgezeichneter Brauchbarkeit ergeben. Auch der Originalmethode von Gibbs kann, wenngleich sie weniger einfach ist, und ihr, in gewissen Fällen, Nachtheile in praktischer Hinsicht (wie sie die Frischauf'sche Arbeit auf S. 16 richtig hervorhebt¹⁾) in der That anhaften — ganz abgesehen von ihrer hervor-

¹⁾ „So günstig die unmittelbare Verwendung der drei Gleichungen (4), (5), (6), wie sie Gibbs vorgeschlagen hat, beim Ceres-Beispiel (mit Zwischenzeiten von bezw. 134 und 126 Tagen) erscheint... so ungünstig stellt sich dieselbe bei wirklich kleinen Zwischenzeiten, etwa 10 bis 20 Tagen, je zweier auf einander folgender Beobachtungen... Der Grund der misslichen Verwendbarkeit der obigen Gleichungen liegt in der Kleinheit des Nenners der drei Unbekannten $\Delta q, \Delta q', \Delta q''$, welche in der Form:

$$\Delta q = \frac{a X_0 + b Y_0 + c Z_0}{d} = \frac{a}{d} X_0 + \frac{b}{d} Y_0 + \frac{c}{d} Z_0 \text{ u. s. w.}$$

erscheinen... Für das Ceres-Beispiel, wo bereits die zweite Hypothese genügt, bestätigt die Erfahrung diese (die Gibbs'schen) Voraussetzungen, nicht aber beim Swift-Komet (1880, V), wo trotz guter Darstellung der Zwischenzeiten die gegebenen Beobachtungen aus den erhaltenen Elementen nicht genügend genau dargestellt werden.“

ragenden Originalität und Exactheit —, die Brauchbarkeit in vielen Fällen (wie z. B. Ceres) keineswegs abgesprochen werden; wenngleich von der Methode zugegeben werden muss, dass, selbst in ihrer verbesserten Form, die erste Annäherung in der Rechnung zwar von hoher Genauigkeit, aber praktisch doch zu complicirt ist, und dass andere Methoden, wie beispielsweise die Encke'sche und vor allem die Leuschner'schen, weil kürzer und bequemer, für den Rechner vorzuziehen sind. Dagegen kann der Weg, den Herr Harzer in seiner Arbeit eingeschlagen — wiewohl nicht zu verkennen ist, dass diese Arbeit einen wesentlichen Fortschritt gegen andere Harzer'sche Untersuchungen, wie z. B. auch gegen die über die Störungen der Bahnen vom Hecubatypus [1] („Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper“¹⁾) unstreitig insofern bezeichnet, weil sie ein positives Resultat

¹⁾ Bei Innehaltung der von Herrn Harzer für *Hecuba* gewählten Genauigkeitsgrenze gehen die Abweichungen bei Herrn Harzer's Theorie in obiger Arbeit bis zu vier Grad schon in den heliocentrischen Eclipticalcoordinaten; was auch ganz erklärlich ist, da nicht einmal die aus der Störungfunction kommenden Glieder zweiten Grades von Herrn Harzer entsprechend berücksichtigt sind. Auf die Bezeichnung einer astronomischen Näherung kann diese, vom rein theoretischen Standpunkt aus zwar interessante, an neuen wissenschaftlichen Resultaten jedoch, trotz ihres Umfanges, gleichfalls ohne eigentliche Ergebnisse gebliebene Harzer'sche Studie keinen Anspruch machen.

Ganz erreichen das Ziel einer genügenden Annäherung für den Typus $\frac{1}{2}$ auch die viel werthvolleren Kramer'schen Entwicklungen in ihrer jetzigen Gestalt noch nicht, wiewohl bei diesen weitgehenden Untersuchungen ausser den Gliedern erster Ordnung zweiten Grades, auch noch die Glieder zweiter Ordnung für den zweiten Grad in der Störungfunction Berücksichtigung gefunden haben, und bei der Integration noch die exargumentalen Glieder dritten Grades. Für *Hecuba* selbst reichen die von Herrn Kramer ermittelten Elemente und Störungen noch nicht aus, um für längere Zeit die Bewegung auf $\pm 1'$ bis $2'$ darzustellen. Dagegen brachte Herr Kramer beim Planeten des Typus $\frac{1}{2}$ *Semele*, für den er Tafeln aus Beobachtungen der Jahre 1866 bis 1896 (Epoche 1876) auf Grund der Gyldén-Brendel'schen Principien abgeleitet, die Genauigkeit bereits auf den, wenn auch praktisch noch nicht völlig zureichenden Werth von $\pm 2'$, bei einer Excentricität von 12° und einem Divisor $\delta = 0.08$ (1903: $\Delta a = -0.6$, $\Delta \delta = -2.4$, 1906: $\Delta a = -2.7$, $\Delta \delta = +2.7$). (Hierzu vergl. S. 10 des Folgenden, Anmerkung 3.)

Man ersieht hieraus, um an dieser Stelle die zu vor über die Gyldén'schen Methoden gemachten Bemerkungen nochmals aufzunehmen und zu ergänzen, dass für den Typus $\frac{1}{2}$ und den in anderer Hinsicht noch complicirteren Typus $\frac{2}{3}$ auch die Mitnahme der aus der Störungfunction selbst kommenden Glieder dritten Grades (sowie eventuell der „Zusatzglieder“ dritten Grades und einiger Glieder vierten Grades) nach den Gyldén'schen Principien nöthig ist, wenn man zu einem nur einigermaassen brauchbaren Resultat gelangen, d. h. die Beobachtungen auch nur auf eine Bogenminute genau darstellen will. Auch empfiehlt es sich eventuell bei den jupiternahen Planeten des Hildatypus (und ebenso bei denjenigen des Hecubatypus), wenn die numerischen Näherungen zu langsam fortschreiten, statt der Gyldén'schen partiellen Integration ein anderes Gyldén'sches Verfahren mittelst elliptischer Functionen zur Verstärkung der Convergenz anzuwenden, worauf ich später in Theil IV des Hildatypus zurückkommen werde. (Erwähnt sei hier noch, dass das Druckfehlerverzeichniss von Theil I und II meiner Untersuchungen über Hilda, welches seiner Zeit den Separaten größtentheils schon gedruckt beigegeben wurde, aber nicht in die Bände der Denkschriftenausgabe mit eingebunden worden zu sein scheint, vollständig in Theil III beigegeben werden wird, wo auch die in Cap. V von Theil I behandelte specielle Frage über die Lücke verificirt werden wird.)

Bei den einfacheren, von Herrn Brendel in seiner *Theorie der kleinen Planeten* behandelten Commensurabilitätstypen, speciell bei den Typen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ („charakteristische“ Planeten, bei denen die alten analytischen Methoden viel mühsamer sind und z. B. bereits bei *Hestia* versagen) aber war eine so weit gehende Mitnahme von Gliedern höheren Grades und höherer Ordnung nicht nöthig, wie sie die besonders schwierigen Typen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$ nach den gemachten Erfahrungen erfordern. Vielmehr ergeben sich dort schon bei Berücksichtigung des

erbracht hat —, aus den zuvor erwähnten Gründen nicht als ein eigentlich zweckentsprechender, praktisch befriedigender betrachtet werden.

Zwar könnte mit Recht eingewendet werden, daß hinsichtlich der praktischen Brauchbarkeit die Gibbs'sche Originalmethode der Harzer'schen nicht so be-

zweiten Grades und der zweiten Ordnung brauchbare Resultate, durch welche Hunderte von kleinen Planeten für lange Zeit in weit bequemerer Weise mittelst der Gyldén'schen Principien zu erledigen sind, als dies mittelst der Theorie der speciellen Störungen möglich ist. Nach den alten analytischen Methoden aber hat man seit Laplace's Zeit absolute Störungen mit Tafeln nur für dreizehn kleine Planeten (cf. Astr. V. J. Schrift, 31. Jahrgang, 1896, S. 288, Gruppe G.), unter grossem Rechenaufwand berechnet, allerdings mit grösserer Anforderung an die Genauigkeit. Eine solche wäre bei Mitnahme des dritten Grades — den ich für *Hilda* nach den Gyldén'schen Principien bis inclusive der zweiten Ordnung in der Störungsfunktion und in den Differentialgleichungen bereits in Rechnung gezogen habe — für die Brendel'schen Planetengruppen sehr einfach zu erreichen. Für den ins Auge gefassten Zweck, das rasche Wiederauffinden eines kleinen Planeten am Himmel für circa ein Jahrhundert, aber ist eine grössere Genauigkeit als die in der „*Theorie der kleinen Planeten*“ angestrebte, für die betreffenden Gruppen nicht erforderlich. (Hierzu ist es interessant, Enckes Worte, auf S. 588 des Folgenden, zu vergleichen, welche die Berechnung der kleinen Planeten noch ganz in die Domäne der speciellen Störungen verweisen.) —

Dass die hier, wie in Vorlesung I gegebenen kritischen Darlegungen, welche die Frage nach dem von Gyldén (und von Poincaré) für das Störungsproblem Erreichten (und nicht Erreichten) zum ersten Mal allseitig klar stellen und zum Abschluss bringen, vom Anfänger (dem das vorliegende Werk sonst, so weit es möglich ist, Rechnung trägt) zunächst besser überschlagen werden, darauf ist auch in Vorlesung I, S. 6, hingewiesen.

Sollte immerhin Poincaré, um sein gegen die Gyldén'sche Richtung so apodiktisch abgegebenes Urtheil aufrecht zu erhalten, es, trotz der Thatsachen, versuchen, den Vorwurf der Unbrauchbarkeit gegen diese Richtung (die „voll unnützer Complicationen und bloss noch von historischem Wert ist“!) in irgend einer Weise zu erneuern: durch die ersten Zahlenergebnisse der *Theorie der kleinen Planeten* bereits (welche auf der strikten Anwendung der Grundprincipien Gyldén's und auf der detaillirten Ausbildung und consequenten praktischen Durchführung seiner einen Hauptmethode gerade beruht) steht die Gyldén'sche Richtung, wie wir gesehen haben, so vollständig gerechtfertigt da, dass sie künftig weder durch Poincaré's Warnungen vor ihrer Anwendung und die sonstigen Aussprüche dieses einstigen Rivalen Gyldén's wird mehr discreditirt, noch durch dessen gekrönte Arbeiten über das Störungsproblem wird mehr zu Unrecht in den Schatten gestellt und beeinträchtigt werden können.

Hat auch Gyldén, so wenig wie im Jahre 1889 Poincaré, die „convergente“ Lösung für das Störungsproblem, und damit nicht den principiellen „Sieg“ erreicht (man vergl. die Anmerkung 1, S. XIII dieser Vorbemerkungen): so dürfte es doch, nach der ganzen hier gegebenen Thatsachenzusammenstellung wohl Niemand mehr zweifelhaft sein, welcher der beiden Forscher für die Astronomie das wirklich Positive, Bleibende geschaffen, und welchem von ihnen in dem durch seine besonderen Begleitumstände in der Geschichte der Wissenschaft einzig dastehenden Kampf der Sieg verblieben ist.

Gyldén, den man in Stockholm von der allgemeinen Preisbewerbung über sein eigenes Specialgebiet, das Störungsproblem, in mehr als sonderbarer Weise ausschloss; dessen Arbeiten, nach seinem Tode, seine alten Gegner vom Jahre 1889 [und der Genannte, nun zur Genüge widerlegte, in Deutschland] durch abfällige Worte nach allen Seiten zu discreditiren und vollständig zu entwerten versuchten, — eine Zeit lang dabei vom äußeren Erfolg begleitet: Gyldén als Astronom hat, in richtiger Erkenntnis der Bedürfnisse seines Faches, das Brauchbare geschaffen, den Fortschritt gegen das Frühere begründet und so Bedürfnissen entsprochen, denen der Mathematiker Poincaré — dessen Verdienste im übrigen wohl Jeder willig anerkennt — naturgemäß nicht das volle nothwendige Verständnis entgegenbringen konnte. Seine ganze Beurtheilungsweise der astronomischen Arbeiten Gyldén's hat das — **von allem Uebrigen gänzlich abgesehen** — ja in der That auch auf das deutlichste und schlagendste gezeigt, was auch dagegen etwa in der französischen Zeitschrift *Bulletin astronomique* — Poincaré's Organ — oder sonst immer gesagt werde. Im Uebrigen haben äußere Machenschaften — wie sie *verschiedentlich* im vorliegenden Fall offen vor Aller Augen liegen — das Durchdringen der wissenschaftlichen Wahrheit noch niemals dauernd verhindern können. —

deutend überlegen sei. Allein die Gibbs'sche Methode bezeichnet, wie schon hervorgehoben, die erste Bahnrechnungsmethode, welche den wesentlichen principiellen Fortschritt der größeren Genauigkeit der Annäherung erreicht, als sie allen zuvor gebrauchten Bahnrechnungsmethoden eigen ist. Aus diesem Grunde durfte diese Methode, trotz der ihr anhaftenden praktischen Unzulänglichkeiten, selbstverständlich in einem Grundwerk über Bahnrechnung nicht fehlen.

Während, wie gesagt, der Vorwurf gegen die Harzer'sche Methode mit Recht nicht erhoben werden kann (cf. S. XXIII dieser Vorbemerkungen): daß sie auf der Laplace'schen Methode fusse und deshalb unbrauchbar sei; beruht doch die theoretisch wie praktisch gleich vorzügliche Leuschner'sche Methode gerade auf der Methode von Laplace. —

Nach Abschluss¹⁾ der vorstehenden Uebersicht über die neueren Methoden der Bahnrechnung sind im Sommer 1910 die Sonderabzüge einer weiteren Bahnrechnungsmethode erschienen, unter dem Titel: „Ueber die geometrische Methode zur Bestimmung der Bahnen von Himmelskörpern nach fünf Beobachtungen von Paul Harzer“. Publication der Sternwarte Kiel XII.

Diese Methode liefert jedoch keine allgemein zureichende Lösung für das Problem (weil sie gerade bei den parabolischen Kometenbahnen nicht praktisch ausreicht), während andere, im Folgenden zur Darstellung gelangte Methoden eine solche ergeben. Diesen Mangel musste auch Herr Harzer in der Einleitung auf S. 6 seiner neuen Arbeit selbst zugeben. —

Die Idee der geometrischen Methode, deren Kritik im Einzelnen nach dem Zuvorgesagten hier übergangen werden kann, ist zudem keineswegs in dem Grade originell und neu, wie Herr Harzer selbst annahm und noch besonders in der Vorankündigung seiner Arbeit in den Astronomischen Nachrichten (Nr. 4399, S. 110) und ebenso noch auf S. 6 seiner Arbeit hervorhebt, worauf er auch sogleich von Prof. F. Engel hingewiesen wurde. Vielmehr hatte bereits ein halbes Jahrhundert früher A. Grunert in mehreren, das Thema behandelnden originellen Arbeiten, wenn auch, wie zuzugeben ist, in unvollkommenerer Form, Ideen entwickelt, welche die Harzer'sche Arbeit in den Grundlagen berühren (cf. Astronomische Nachrichten Nr. 448 und 456; ferner: Archiv d. Mathematik u. Physik, Band 17); Arbeiten, über die Herr Harzer nachträglich in Nr. 4417 der Astronomischen Nachrichten in absprechendster Weise urtheilt, und noch besonders ihre praktische Bedeutungslosigkeit im Vergleich zu seiner eigenen Methode hervorhebt, die er selbst als eine „einfache“, „durchsichtige“, „bei grossen Zwischenzeiten sehr brauchbare rein geometrische Methode“ in Nr. 4417 der Astronomischen Nachrichten bezeichnet.

¹⁾ Die vorstehende Uebersicht war von der Druckerei bereits im Wintersemester 1909/1910 gesetzt (vergl. die Ankündigung in den Astronomischen Nachrichten Nr. 4410, S. 289, Anmerkung 2); die Herausgabe des Werkes wurde indess durch Fertigstellung der Leuschner'schen Tafel XVI über ein Jahr verzögert, so dass ausser den obigen Bemerkungen über die „geometrische“ Methode auch noch die Anmerkung 1, S. XVI nachträglich Aufnahme finden konnte. —

Sucht man dieser neuen, wie den Harzer'schen Arbeiten überhaupt gerecht zu werden, so ist allerdings hervorzuheben, dass auch die „geometrische“ Methode unbestreitbar neue Ideen zur Behandlung des Problems enthält; ebenso enthält sie manche schöne theoretische Betrachtungen und Entwicklungen. Andererseits kann aber nicht bestritten werden, dass die Harzer'sche Ausführung seiner Ideen für praktische Zwecke eine viel zu complicirte ist. Gerade für den Werth astronomischer Methoden aber ist ein Hauptmaassstab ihres Werthes die gute praktische Verwerthbarkeit. Anwenden wird ein erfahrener Rechner die Harzer'schen Theorien indess nicht (und hat es ausser Herrn Harzer selbst auch nicht gethan), sondern jedenfalls einer der anderen zur Verfügung stehenden, weit brauchbareren und weit vollkommeneren Methoden den Vorzug geben. —

Indess sind die zuvor gekennzeichneten Mängel der ersten Harzer'schen Behandlungsweise des Bahnrechnungsproblems doch von grossem Nutzen für die Wissenschaft geworden. Denn ohne die Harzer'sche Bearbeitung der Laplace'schen Methode hätte Herr Leuschner — wie er selbst verschiedentlich hervorgehoben hat (cf. z. B. auch S. 448, Zeile 26 des Folgenden) — nicht daran gedacht, die Laplace'sche Methode anders zu bearbeiten. Doch besteht ein Unterschied zwischen der Abfassung wenn auch noch so interessanter, grosser Abhandlungen und der Schöpfung wirklich brauchbarer, wissenschaftlich werthvoller Methoden.

Von Herrn Leuschner — darauf sei hier noch hingewiesen — ist übrigens, als erstem, die fundamentale Frage der parabolischen Lösungen: dass, wenn drei parabolische Lösungen existiren, nur eine gültig ist, mittelst seiner Methoden nicht nur theoretisch entschieden, sondern zugleich auch durch Discussion der Wirklichkeit entnommener Beispiele (im folgenden Anhang ist ein solches als Beispiel VI wiedergegeben) praktisch erledigt worden. Hierzu vergl. man S. 468, Anmerkung 1 der folgenden Leuschner'schen Darstellung, die bereits im Frühjahr 1910 gedruckt war, während die Ausgabe des vorliegenden Werkes verzögert wurde (cf. Anmerkung 1, S. XXIX dieser Vorbemerkungen). Der ausführliche Beweis für das auf S. 468 erwähnte und bei den Beispielen des folgenden Anhanges, speciell beim sechsten Beispiel verwandte Leuschner'sche Resultat ist in Part 7, vol. VII der „Publications of the Lick Observatory“ gegeben.

Zur Frage, dass wenn drei parabolische Lösungen existiren, nur eine gültig ist, vergl. man übrigens auch einen äusserst interessanten, von Herrn (Charlier¹⁾) in den „Monthly Notices“ vom März 1911 gegebenen, sowie einen anderen, in Nr. 4495 der „Astronomischen Nachrichten“ vom Mai 1911 von R. Vogel²⁾) mitgetheilten Beweis.

Ein Lehrbuch der Bahnbestimmung, das dem Anspruch, auf einem modernen Standpunkt zu stehen, genügen sollte, ohne doch zu weitschweifig zu werden, musste

¹⁾ Cf. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. LXXI, Nr. 5, March 1911, pag. 454: „Second Note on Multiple Solutions in the Determination of Orbits from three Observations. By Professor C. V. L. Charlier, Assoc. R. A. S.“ Vergl. auch schon die Nummer vom November 1910.

²⁾ Cf. Astronomische Nachrichten, Bd. 188, S. 105: „Ueber die Unmöglichkeit dreier Lösungen bei einer theoretisch vollständigen Bestimmung einer parabolischen Bahn.“ Von R. Vogel.

sich auf die Wiedergabe der principiell bedeutsamsten und praktisch brauchbarsten neueren Methoden beschränken. An einer Discussion aber über die hier begründeten Urtheile über diese, wie die anderen zuvor erwähnten Methoden, in welcher Form sie auch etwa eröffnet werden möchte, würde ich mich nicht betheiligen können, da meine Zeit durch andere Arbeiten in Anspruch genommen ist. Mit Darlegung des wissenschaftlichen Sachverhaltes betrachte ich meine vorliegende Aufgabe als beendet. Bezüglich der Gylden'schen Principien und ihrer Verwerthung sei noch auf die beiden letzten Publicationen Herrn Brendel's hingewiesen, nämlich auf seine, mittelst der neuen Methoden durchgeführte Bahnbestimmung des schwierigen Planeten (699¹⁾), der eine sehr grosse Excentricität hat (cf. *Astronomische Nachrichten*, Nr. 4544), sowie auf seinen Aufsatz über einen Programmentwurf zur Bearbeitung der kleinen Planeten unter Berücksichtigung der neuen Gesichtspunkte (cf. *Astronomische Nachrichten*, Nr. 4545)²⁾. —

An dieser Stelle möchte ich nicht unterlassen, dem Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn, der, wie schon bei der Drucklegung der zweiten Auflage, so auch diesmal keine Mühe gescheut hat, das Buch zu einem möglichst zweckentsprechenden zu machen, meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

¹⁾ Dieser Planet, der die grösste bisher überhaupt beobachtete Excentricität hat und noch dazu ungenügend beobachtet ist, war nur mit grösster rechnerischer Mühe vor dem Verlorengehen zu retten. Die mittelst der Brendel'schen „*Theorie der kleinen Planeten*“ durchgeführte genäherte Bahnbestimmung, welche den Planeten für zehn Jahre sichert, beansprucht nur ein paar Stunden. Der Erfolg ist hier gerade der, dass mit einer rohen Annäherung in wenigen Stunden so viel erreichbar ist, während eine genaue Bahnbestimmung rechnerische (und theoretische) Weiterentwickelungen, aber trotzdem weit weniger Zeit, als nach den classischen Methoden, erfordern würde. —

²⁾ „Die Mehrarbeit, die entsteht, wenn man die Hauptstörungen“ — nach der *Theorie der kleinen Planeten* — „berücksichtigt, anstatt nur rein elliptische Elemente abzuleiten, ist so geringfügig, dass sie gegen den gewaltigen Vorthail, die Bewegungen mit einem Schlage für einen langen Zeitraum darstellen zu können, überhaupt kaum in Betracht kommt.“ —

Hugo Buchholz.

INHALTSVERZEICHNISS.

Erste Abtheilung.

Berechnung der Oerter der Himmelskörper aus ihren Bahnelementen.

Vorlesung	Seite
1. Das allgemeine Problem der planetarischen Bewegung (Problem der drei Körper)	1
2. Die allgemeine Centralbewegung des materiellen Punktes (Problem der zwei Körper)	11
3. Die Bahnelemente	22
4. Die Kepler'sche Bewegung in Kegelschnitten um die Sonne. Die Ellipse	26
5. Die Parabel	40
6. Die Hyperbel	45
7. Ueber nahezu parabolische Bahnen	49
8. Lambert's Theorem über die heliocentrische Bewegung in Kegelschnitten und seine Specialisirung für die Parabel	53
9. Die sphärischen Coordinatensysteme der Astronomie und der gegenseitige Uebergang vom einen System auf das andere	55
10. Die Berechnung der heliocentrischen Coordinaten aus den Kepler'schen Elementen	63
11. Interpolationsformeln und allgemeine Bemerkungen über Ephemeridenberechnung	67
A. Ableitung der Interpolationsformeln mittelst der Sätze über arithmetische Reihen . .	67
B. Ableitung der Interpolationsformeln von Encke (nach Gauss)	83
12. Die Parallaxe	95
13. Die Aberration	108
14. Die Theorie der Bewegung der Erdaxe und ihre Anwendung in der Bahnrechnung	121
I. Die allgemeinen mechanischen Grundlagen des Problems der Erdachsenbewegung . .	121
II. Die Theorie der Bewegung der Erdachse	144
A. Die Bewegung der Erdachse im Erdinnern (der Euler'sche Cyklus)	146
B. Die Bewegung der Erdachse im Raume (Präcession und Nutation)	150
III. Der Einfluss der Bewegung der Aequinoctien auf die Coordinaten und die Bahnlage der Himmelskörper	179
A. Die Präcession	179
B. Die Nutation	190
C. Gemeinsame Berücksichtigung der Präcession, Nutation und Aberration	193
15. Vollständiges Beispiel zum Vergleich einer Beobachtung mit einem Elementensysteme . . .	211

Zweite Abtheilung.

Die Berechnung von Bahnen aus gegebenen Beobachtungen.

16. Berechnung einer Kreisbahn	222
17. Formeln zu der Berechnung einer Kreisbahn	224
18. Modification der Formeln der letzten Vorlesung (S. 224)	228
19. Directe Berechnung der Gauss'schen Constanten aus den heliocentrischen Coordinaten für den Aequator	231
20. Rechnungsbeispiel für Harmonia	233
21. Die Gauss'sche Methode zur Berechnung einer Kreisbahn	237
22. Rechnungsbeispiel für die Gauss'sche Methode zur Bestimmung einer Kreisbahn	240

Dritte Abtheilung.

Die Bestimmung der parabolischen Bahnen von Kometen.

Vorlesung	Seite
23. Einleitende Bemerkungen über die Kometenbahnen. Wiedererkennen früher erschienener Kometen	245
24. Kriterium aus einer vollständigen Beobachtung eines neu erschienenen Kometen, ob derselbe mit einem erwarteten identisch sein kann	247
25. Vorbereitende Bemerkungen zu der Methode von Olbers	251
26. Ableitung des Olbers'schen Ausdruckes für das Verhältniss von zwei Distanzen von der Erde ϱ und ϱ''	252
27. Die Olbers'sche Methode zur Berechnung einer Kometenbahn in verschiedenen Formen	256
28. Die Gauss'sche Umformung der Olbers'schen Methode	258
29. Rechnungsbeispiel für die Gauss'sche Modification der Olbers'schen Methode	263
30. Verschiedene Arten, die erste Hypothese für ϱ oder bei der Olbers'schen Methode zu bilden	266
31. Vorbereitende Betrachtungen für den Lambert'schen Satz über die Krümmung des geocentrischen Laufes	268
32. Der Lambert'sche Satz von der geocentrischen Krümmung	270
33. Anwendung des Lambert'schen Kriteriums über die Entfernung eines Gestirnes von der Sonne	271
34. Bestimmung der Entfernung des Himmelskörpers von der Sonne	274
35. Umformung der Lambert'schen Gleichung; Ausdruck für das Verhältniss des Sectors zum Dreieck bei der Parabel	278
36. Systematische Verbesserung der Hypothesen in den Versuchen zur Olbers'schen Methode, durch ein Rechnungsbeispiel erläutert	281
37. Verbesserung des nach dem Olbers'schen Princip gefundenen Werthes von $\frac{\varrho''}{\varrho}$. Kunstgriff von Carlini	282
38. Die Berücksichtigung der Aberration, der Parallaxe und der Bewegung der Aequinoctien bei Bahnbestimmungen	285
39. Die Olbers'sche Methode für den Aequator als Fundamentalebene umgeformt	288
40. Zusammenstellung der Formeln für eine auf den Aequator zu beziehende Kometenbahnberechnung	293
41. Rechnungsbeispiel zu Vorlesung 40	297
42. Die Gauss'sche Form der Olbers'schen Methode, auf den Aequator übertragen	302
43. Zusammenstellung der Formeln für die unmittelbar auf den Aequator bezogene, strenge Form der Olbers'schen Methode. Rechnungsbeispiel	304
44. Der sogenannte Ausnahmefall der Olbers'schen Methode. Berechnung der Bahn eines Kometen aus drei Beobachtungen, von denen nur zwei vollständig sind	306
45. Eine andere Umformung der Gleichung (4) in Vorlesung 40 (S. 294). Bessel's Beitrag zur Kometentheorie	313
46. Ueber Construction einer Tafel zum schnellen Erkennen der Identität von Kometen	317

Vierte Abtheilung.

Die Bestimmung elliptischer Bahnen.

47. Einleitende Bemerkungen	318
48. Entwicklung der Fundamentalgleichungen für die Bestimmung der Entfernung eines Himmelskörpers aus drei vollständigen Beobachtungen und Auflösung derselben für den Aequator. Erste Näherung	319
49. Verbesserungsverfahren für eine aus den Fundamentalgleichungen der 48. Vorlesung (S. 320) hergeleitete Näherung	323
50. Rechnungsbeispiel zu den Formeln der 49. Vorlesung (S. 323)	325
51. Einige Umformungen der Formeln der 49. Vorlesung (S. 323)	329
52. Fortsetzung der vorhergehenden Entwicklungen	332
53. Folgerungen für den zu erreichenden Grad von Genauigkeit einer Bahnbestimmung	334

Vorlesung	Seite
54. Einfachere Herleitung der Hauptgleichung für die Bestimmung der Entfernung der Himmelskörper	336
55. Weitere Ausführung der Gleichungen (1) und (3) in der 54. Vorlesung (S. 336)	339
56. Rechnungsbeispiel für die Formeln der 55. Vorlesung (S. 339)	341
57. Vereinfachungen und Abkürzungen für die Methode der Vorlesungen 54, 55 und 56 (S. 336, 339 und 341)	343
58. Rechnungsbeispiel für die Bestimmung von λ , λ' und λ'' nach den Formeln der vorigen Vorlesung (S. 343)	349
59. Transformation des Lambert'schen Satzes über die Krümmung des geocentrischen Laufes	352
60. Einige Bemerkungen über den Fall der Schleifenbildung im geocentrischen Laufe eines Himmelskörpers	354
61. Encke's Form der Fundamentalgleichungen	357
62. Fortsetzung der Entwicklung zur Encke'schen Methode	359
63. Fortsetzung der Formeln der Encke'schen Methode	361
64. Zusammenstellung der Formeln der Encke'schen Methode für die Bestimmung der Entfernungen, sammt Rechnungsbeispiel	363
65. Hansen's Form der Bestimmung der Distanz eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen	366
66. Fortsetzung der Entwicklung für die Formeln der Hansen'schen Methode	369
67. Einige weitere Vereinfachungen der Hansen'schen Formeln	372
68. Zusammenstellung der Formeln der Hansen'schen Methode zur Bestimmung der drei Entfernungen, nebst Rechnungsbeispiel	374
69. Die Verbesserung der Hypothesen für die Dreiecksflächen	376
70. Berücksichtigung von $\frac{dr'}{dt}$ in der Finalgleichung für z'	380
71. Fortsetzung der Entwicklungen zur Verbesserung der Hypothesen	385
72. Die zur Beschreibung eines Kegelschnittbogens gebrauchte Zeit, ausgedrückt durch ein bestimmtes Integral	387
73. Berechnung der Elemente b , e , p und der mittleren Anomalie der gewählten Epoche	391
74. Die Gauss'schen und die Encke'schen Formeln für die Verbesserung der Dreiecksflächen	393
75. Fortsetzung der Entwicklungen von Encke zur Bestimmung der Dreiecksflächen	396
76. Hansen's Formeln zur Verbesserung	399
77. Fortsetzung der Hansen'schen Entwicklungen für die Verbesserung der Hypothesen	401
78. Anwendung der Reihenentwicklungen für $\frac{x - \sin x}{\sin^{1/2} x}$ für Ellipsen und Hyperbeln, deren Excentricität nahe gleich der Einheit wird	406
79. Anwendung der allgemeinen Lambert'schen Gleichung für die Verbesserung der Hypothesen	409
80. Rechnungsbeispiele für die Verbesserung der Hypothesen bei einer elliptischen Bahn	412
81. Die Gibbs'sche Vektorenmethode zur Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen	413
82. Die Leuschner'schen Methoden (Formelzusammenstellung und Rechenbeispiele, cf. Anhang, S. 998)	448

Fünfte Abtheilung.

Berechnung einer elliptischen Bahn aus vier Beobachtungen, von denen nur zwei vollständig sind.

83. Einleitende Bemerkungen	491
84. Grundformeln für die Bestimmung der Distanzen aus vier Beobachtungen, von denen nur die äusseren vollständig sind	492
85. Andere Art der Entwicklung der Grundformeln	495
86. Grundformeln für die Berechnung der Distanzen aus vier Beobachtungen, deren äussere unvollständig sind	497
87. Weitere Vereinfachung der Bedingungsleichungen für q' und q''	499
88. Fortsetzung der Entwicklungen der 87. Vorlesung (S. 499)	501

Vorlesung	Seite
89. Modification in der Bildung der ersten Hypothese zur Erzielung einer grösseren Genauigkeit bei derselben	503
90. Die Gauss'sche Form der Berechnung der Bahn aus vier Beobachtungen	504
91. Fortsetzung der Entwicklungen der vorhergehenden Vorlesung (S. 504)	508
92. Zusammenstellung der Formeln und Rechnungsbeispiel	510
93. Fortsetzung des Rechnungsbeispiels. Zweite Hypothese	514
94. Hypothesenbildung (1) und (2)	517

Sechste Abtheilung.

Die mechanische Quadratur und die Methoden der speciellen Störungen.

95. Herleitung der Methode der mechanischen Quadratur aus dem Taylor'schen Theorem (nach Encke)	521
96. Allgemeine Bemerkungen über definitive Bahnbestimmungen	553
97. Encke's Methode zur Berechnung der speciellen Störungen in den rechtwinkligen Coordinaten	558
98. Lagrange's Methode der Variation der Constanten zur Ermittlung der speciellen Störungen (nach Encke)	587
99. Die Hansen-Tietjen'sche Methode zur Berechnung der speciellen Störungen in Polarcordinaten (nach Tietjen)	637

Siebente Abtheilung.

Die Berechnung einer Bahn aus einer grösseren Zahl von Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate.

100. Einleitende Bemerkungen, Bildung von Normalörtern	685
101. Differentialformeln für die directe Verbesserung äquatorialer Elemente	687
102. Ueber die Differentialquotienten nach den phoronomischen Elementen in nahezu oder vollständig parabolischen Bahnen	695
103. Ausführliches Beispiel zur Bildung der einem Normalorte entsprechenden Bedingungengleichungen	701
104. Entwicklung der Grundvoraussetzungen für die Methode der kleinsten Quadrate	716
105. Einfachste Folgerung aus dem Grundsätze der Methode der kleinsten Quadrate. Gesetz der Beobachtungsfehler	717
106. Begriff und Ableitung des mittleren Fehlers. Relation zwischen dem wahrscheinlichen und dem mittleren Fehler	721
107. Mittlerer zu befürchtender Fehler. Beispiel	724
108. Die Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe aus einem System linearer Gleichungen. Aufstellung der Normalgleichungen	726
109. Fortsetzung der Entwicklung der Vorlesung 108 zur Entwicklung der wahrscheinlichen Fehler eines Systems von Grössen	728
110. Bildung der Normalgleichungen und Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten	731

Achte Abtheilung.

Die Berechnung von Doppelsternbahnen.

111. Einleitende Bemerkungen	744
112. Fortsetzung der einleitenden Bemerkungen	746
113. Leichte Herleitung verschiedener Elemente der wahren Bahn aus der Projectionsellipse oder Theilen derselben	750

Vorlesung	Seite
114. Anwendung des graphischen Verfahrens auf die Bahn von ω Leonis	753
115. Methode zur Bestimmung einer Doppelsternbahn aus sechs Positionswinkeln	756
116. Grundformeln für Berechnung einer Doppelsternbahn, wenn ausser vier Positionswinkeln noch wenigstens drei Distanzen gegeben sind	759
117. Rechnungsbeispiel für die Methode der Vorlesung 115 (S. 756)	761
118. Einige Anwendungen der Doppelsternbahnmethoden auf andere Theile der Fixsternastro- nomie. Berechnung der hypothetischen Parallaxe. Massenbestimmungen	765
119. Ueber die Berechnung einer Doppelsternbahn, wenn die eine Componente unsichtbar ist	768
120. Doppelsterne (nach Seeliger)	771
121. Anhang zu der Berechnung der Doppelsterne. Grundzüge der Theorie des Saturn- ringes	796
122. Kriterium für die Sichtbarkeit des Saturnringes	799
123. Berechnung der Satellitenbahnen durch Zurückführung auf die Berechnung einer Doppel- sternbahn	801
124. Fortsetzung der Untersuchungen zur Berechnung einer Satellitenbahn	804

Neunte Abtheilung.

Ueber die Bahnbestimmung der Meteore, Meteoriten und Sternschnuppen.

125. Einleitende Bemerkungen	807
126. Bestimmung der Höhen und Geschwindigkeiten aus correspondirenden Sternschnuppen- beobachtungen	808
127. Ueber den Radiationspunkt und dessen Herleitung	810
128. Unabhängigmachen der Bestimmung von der Forderung der Gleichzeitigkeit. Verein- fachende geometrische Betrachtungen und Construction. Angabe der bleibenden Un- sicherheit	813
129. Bestimmung des von dem Meteor oder Meteorstrom um die Sonne beschriebenen Kegel- schnitts	816
130. Fortsetzung der Untersuchungen aus Vorlesung 129. Rechnungsbeispiel	819
131. Vergleichung der durch Berechnung des Radiationspunktes gefundenen Bahn mit Kometen- bahnen	821
132. Zusammenstellung von Formeln für die Recognoscirung von Identitäten zwischen Meteor- strömen und Kometenbahnen. Rechnungsbeispiel	824

Anhang.

Hülfstafeln.

Tafel	I. Geocentrische Breite und Logarithmus des Erd-Radius	829
"	II. Verwandlung der Mittleren Zeit in Sternzeit	831
"	III. Verwandlung der Sternzeit in Mittlere Zeit	833
"	IV. Verwandlung von Stunden, Minuten und Secunden in Decimaltheile des Tages	835
"	V. Anzahl der seit Beginn des Jahres verflossenen Tage	835
"	VI. Die Barker'sche Tafel	836
"	VII. Ergänzung der Barker'schen Tafel für grosse Werthe von v	881
"	VIII. Zur Berechnung der seit dem Periheldurchgang verflossenen Zeit in der Parabel	882
"	IX. Für nahezu parabolische Bahnen	884
"	IXa. Erläuterungen zu Tafel IX	894
"	X. Encke's μ -Tafel	898
"	XI. Zur Berechnung des Verhältnisses $\frac{(\text{Dreieck})}{(\text{Sector})}$ in parabolischen Bahnen	901
"	XII. Zur Berechnung des Verhältnisses $\frac{(\text{Sector})}{(\text{Dreieck})}$ in elliptischen Bahnen	907

	Seite
Tafel XIII. Ergänzungstafel zu Tafel XII	913
„ XIV. Oppolzer's <i>N</i> -Tafel	916
„ XV. Oppolzer's <i>M</i> -Tafel	924
„ XVI. Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocen- trischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen	932
„ XVII. Encke's <i>f</i> -Tafel	974
„ XVIII. Tafel der Quadrate der Zahlen von 0.000 bis 3.000	979
„ XIX. Tafel der Gauss'schen Constanten für die nicht identischen Kometenbahnen	985
„ XX. Constanten-Tafel. Bahnelemente der grossen Planeten	995

Anhang zu den Leuschner'schen Methoden der Bahnbestimmung.

Zusammenstellung der Formeln mit Rechenbeispielen	998
I. Formeln	998
A. Die directen Methoden der Bahnbestimmung	998
B. Die Methoden der Bahnverbesserung	1004
II. Beispiele	1012
Erstes Beispiel	1012
Zweites Beispiel	1020
Drittes Beispiel	1025
Viertes Beispiel	1034
Fünftes Beispiel	1037
Sechstes Beispiel	1049
III. Die Bahnbestimmung mit sofortiger Berücksichtigung der Störungen	1054
Siebentes Beispiel	1060

Berichtigung.

Seite 737, Zeile 15 von oben (Tabelle, rechte Spalte) lies $d + e$ statt $d - e$.

Erste Abtheilung.

Berechnung der Oerter der Himmelskörper aus ihren Bahnelementen.

Erste Vorlesung.

Das allgemeine Problem der planetarischen Bewegung.

(Problem der drei Körper.)

Die Gesetze, welche die Materie regieren,
sind das Ewige.

Die Erfahrung lehrt, dass jeder Körper im Raume auf einen anderen eine anziehende Kraft ausübt, welche nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze der Masse der Körper direct proportional, dem Quadrat der gegenseitigen Entfernung hingegen umgekehrt proportional ist. Die Kraft, mit der die beiden materiellen Punkte m_λ und m_ν auf einander wirken, ist also durch einen Ausdruck der Form repräsentirt:

$$K = - k^2 \frac{m_\lambda m_\nu}{r_{\lambda, \nu}^2},$$

wobei das Minuszeichen gewählt, weil die Kraft als anziehende die Entfernung zu verkleinern strebt, und k^2 die später zu discutirende Gauss'sche oder Gravitations-constante ist.

Wären die Himmelskörper kugelförmig und vom Centrum zur Peripherie hin vollkommen symmetrisch angeordnet, so würde man sie streng als materielle Punkte im Sinne der Mechanik betrachten können, da solche Kugeln nach der Potentialtheorie einander so anziehen, als ob ihre ganze Masse im Schwerpunkte concentrirt wäre. Da die Himmelskörper jedoch keine vollkommenen Kugeln, sondern geschichtete Sphäroide sind, so gelten die folgenden Betrachtungen auch nicht absolut streng, indess doch äusserst genähert. Denn einerseits sind die Durchmesser der Planeten im Vergleich zu ihrer Entfernung von der Sonne, und andererseits sind die Massen der Planeten im Vergleich zu derjenigen des Centralkörpers, der Sonne, so klein, dass man sie schlechthin doch als Punkte betrachten kann. Und da ferner ihre Bewegung um den Schwerpunkt, wie wir in der Theorie der Rotation der Erde sehen werden, so erfolgt, als ob derselbe fest wäre, so kann man ihre rotatorische Bewegung um den Schwerpunkt getrennt von der translatorischen Bewegung des Schwerpunktes um die Sonne betrachten.

Das allgemeine Problem der rotatorischen Bewegung eines Planeten um seinen Schwerpunkt ist ebenso wie dasjenige der translatorischen Bewegung des Schwerpunktes im Raume allgemein durch drei Bewegungsgleichungen charakterisirt. Dies erstere grosse Problem der theoretischen Astronomie, das Rotationsproblem, werden wir später

in einem besonderen Capitel behandeln, da es für die Bahnbestimmung, den eigentlichen Gegenstand des vorliegenden Werkes, insofern Voraussetzung ist, als die allgemeinen Formeln der Präcession, wie sie das Rotationsproblem ergibt, in der Bahntheorie verwendet werden.

Zunächst wollen wir das allgemeine Problem der translatorischen Bewegung des Schwerpunktes der Planeten um die Sonne, wie sie in der Natur wirklich stattfindet, betrachten. Diese Bewegung des Schwerpunktes im Raume erfolgt in erster Näherung nach den Kepler'schen Gesetzen, wie wir sehen werden, in einem Kegelschnitt, wenn man von den übrigen Himmelskörpern abstrahirt und bloss die Sonne als Centralkörper und einen einzigen Planeten als Nebenkörper für sich allein ins Auge fasst.

Zieht man indess noch einen zweiten Planeten in Rechnung, so zeigt sich, dass dessen nach dem Newton'schen Gesetze erfolgende Einwirkung auf den ersten dessen Kepler'sche Bewegung im Laufe eines kürzeren Zeitraumes nur langsam und wenig verändert, da die Sonnenanziehung überwiegt. Aus diesem Grunde bezeichnet man diese Einwirkung des zweiten Nebenkörpers auf den ersten als eine Störung von dessen Kepler'scher Bewegung, eben da letztere nur wenig durch diese Einwirkung alterirt wird. Das allgemeine Problem der translatorischen Bewegung der Planeten, auch das Dreikörperproblem genannt, ist also das Problem der gestörten Bewegung.

Die Beschränkung auf den einfachen Fall des Zweikörperproblems ist bei ersten Bahnbestimmungen in der Praxis gestattet und mit ihm haben wir uns daher im folgenden Buche vorläufig allein zu beschäftigen. Die störende Einwirkung anderer Himmelskörper auf denjenigen, dessen Bahn bestimmt werden soll, wird dann bei definitiven Bahnbestimmungen, wie am Schlusse dieses Werkes gezeigt werden wird, durch die Methoden der sogenannten speciellen Störungen berücksichtigt, welche die Beträge der Störungen von Zeitabschnitt zu Zeitabschnitt mit Hülfe der mechanischen Quadratur numerisch berechnen, im Gegensatze zur analytischen Störungstheorie, die allgemein gültige Formeln mit der Zeit als independenter Variablen aufstellt.

Wiewohl wir es nun also vorläufig bloss mit der ungestörten Kepler'schen Bewegung zu thun haben, wollen wir doch das Problem gleich allgemein charakterisiren und dann die Kepler'sche Bewegung als Specialfall der allgemeineren gestörten Bewegung behandeln.

Dazu denken wir uns $n + 1$ materielle Punkte. Einen derselben greifen wir heraus und bezeichnen seine Masse mit m_0 ; unter diesem Massenpunkte verstehen wir im Folgenden die Sonne. Die Massen der n übrigen Planeten seien $m_1, m_2 \dots m_n$, ihre Coordinaten $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2 \dots \xi_n, \eta_n, \zeta_n$, diejenigen von m_0 seien ξ_0, η_0, ζ_0 . Bei Einführung der gesammten Kräftefunction aller Planeten und der Sonne:

$$V = k^2 \sum \frac{m_\lambda m_\nu}{r_{\lambda \nu}},$$

wo sowohl λ wie ν alle Werthe von 0 bis n annehmen und nur der Fall $\lambda = \nu$ auszuschliessen ist, werden die Differentialgleichungen der Bewegung, wenn man diese auf ein festes System bezieht, für die $n + 1$ materiellen Punkte nach den ersten Lehren der analytischen Mechanik folgende:

$$\left. \begin{aligned} m_\lambda \frac{d^2 \xi_\lambda}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial \xi_\lambda} \\ m_\lambda \frac{d^2 \eta_\lambda}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial \eta_\lambda} \\ m_\lambda \frac{d^2 \zeta_\lambda}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial \zeta_\lambda} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

wobei $\lambda = 0, 1, 2 \dots n$ zu setzen ist. Bei Bildung der partiellen Ableitungen der rechten Seiten dieser Gleichungen sind sämtliche Coordinaten als independente Variable zu betrachten, und daher werden in diesen Differentialquotienten nur diejenigen Glieder aus der Summe für V eine Rolle spielen, welche die Coordinaten $\xi_\lambda, \eta_\lambda, \zeta_\lambda$ enthalten, d. h. bloss die Glieder, welche sich auf die Masse m_λ beziehen. Die Summe dieser Glieder ist:

$$V_\lambda = k^2 m_\lambda \sum \frac{m_\nu}{r_{\lambda\nu}},$$

wobei bezüglich ν über alle Werthe mit Ausnahme von λ zu summiren ist. Für $\lambda = 0$ folgt die Bewegungsgleichung für die Sonne, für $\lambda = 1$ diejenige für den ersten Planeten u. s. f. Indem durch den Accent darauf hingewiesen ist, wie die Summen aufzufassen sind, schreiben sich die Differentialgleichungen also auch:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi_\lambda}{dt^2} &= k^2 \frac{\partial}{\partial \xi_\lambda} \sum' \frac{m_\nu}{r_{\lambda\nu}} \\ \frac{d^2 \eta_\lambda}{dt^2} &= k^2 \frac{\partial}{\partial \eta_\lambda} \sum' \frac{m_\nu}{r_{\lambda\nu}} \\ \frac{d^2 \zeta_\lambda}{dt^2} &= k^2 \frac{\partial}{\partial \zeta_\lambda} \sum' \frac{m_\nu}{r_{\lambda\nu}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Nun führen wir ein neues bewegliches, dem ursprünglichen paralleles Coordinatensystem ein, dessen Ursprung im Mittelpunkte der Sonne liegt. Die Coordinaten der n Planeten bezüglich dieses Systemes seien $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 \dots x_n, y_n, z_n$, während diejenigen von m_0 jetzt Null sind. Die Coordinaten beider Systeme sind dann verbunden durch folgende Relationen:

$$\begin{aligned} x_\lambda &= \xi_\lambda - \xi_0 \\ y_\lambda &= \eta_\lambda - \eta_0 \\ z_\lambda &= \zeta_\lambda - \zeta_0, \end{aligned}$$

während die Entfernung irgend eines Massenpunktes m_λ vom Ursprunge des neuen Systemes

$$r_{0\lambda} = \varrho_\lambda = \sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2 + z_\lambda^2}$$

ist. Bezeichnet $r_{0\nu}$ die Entfernung des materiellen Punktes m_0 von m_ν , so wird:

$$r_{0\nu}^2 = (\xi_0 - \xi_\nu)^2 + (\eta_0 - \eta_\nu)^2 + (\zeta_0 - \zeta_\nu)^2.$$

Die rechte Seite der Gleichung:

$$\frac{d^2 \xi_0}{dt^2} = k^2 \frac{\partial}{\partial \xi_0} \sum_1^n \frac{m_\nu}{r_{0\nu}}$$

schreibt sich daher auch:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_0} \left(\frac{1}{r_{0\nu}} \right) = - \frac{1}{r_{0\nu}^3} \frac{\partial r_{0\nu}}{\partial \xi_0}$$

oder, da:

$$r_{0\nu} \frac{\partial r_{0\nu}}{\partial \xi_0} = \xi_0 - \xi_\nu,$$

also:

$$\frac{\partial r_{0\nu}}{\partial \xi_0} = \frac{\xi_0 - \xi_\nu}{r_{0\nu}}$$

ist, auch:

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r_{0\nu}} \right)}{\partial \xi_0} = - \frac{\xi_0 - \xi_\nu}{r_{0\nu}^3}.$$

Es ist nun aber:

$$\begin{aligned}\xi_v - \xi_0 &= x_v \\ \eta_v - \eta_0 &= y_v \\ \zeta_v - \zeta_0 &= z_v\end{aligned}$$

$$r_{0v} = \varrho_v = \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}.$$

Daher wird:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \xi_0}{dt^2} &= k^2 \frac{\partial}{\partial \xi_0} \sum_1^n \frac{m_v}{r_{0v}} = k^2 \sum_1^n m_v \frac{\partial \left(\frac{1}{r_{0v}} \right)}{\partial \xi_0} \\ &= -k^2 \sum_1^n m_v \frac{\xi_0 - \xi_v}{r_{0v}^3} = -k^2 \sum_1^n m_v \frac{x_v}{r_{0v}^3} = +k^2 \sum_1^n m_v \frac{x_v}{\varrho_v^3}.\end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen der Bewegung für die Sonne werden somit:

$$\left. \begin{aligned}\frac{d^2 \xi_0}{dt^2} &= k^2 \sum_1^n m_v \frac{x_v}{\varrho_v^3} \\ \frac{d^2 \eta_0}{dt^2} &= k^2 \sum_1^n m_v \frac{y_v}{\varrho_v^3} \\ \frac{d^2 \zeta_0}{dt^2} &= k^2 \sum_1^n m_v \frac{z_v}{\varrho_v^3}\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Um diese Bewegungsgleichungen auch für einen beliebigen Planeten, z. B. den mit der Masse m_1 aufzustellen, haben wir zunächst auf Grund der allgemeinen Gleichungen (2):

$$\frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = k^2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \sum' \frac{m_v}{r_{1v}}$$

und analog in η_1 und ζ_1 . Da

$$x_1 = \xi_1 - \xi_0$$

ist, und ξ_0 bei der Differentiation als constant zu betrachten ist, erhalten wir, indem wir v alle Werthe mit Ausnahme des Werthes 1 ertheilen, also $v = 0, 2, 3 \dots n$ setzen:

$$\sum' \frac{m_v}{r_{1v}} = \frac{m_0}{r_{10}} + \sum_2^n \frac{m_v}{r_{1v}},$$

womit der Sinn des Summenzeichens klar ist und wir der Accente ledig sind. Es wird somit:

$$\frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = k^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{m_0}{\varrho_1} + \sum_2^n \frac{m_v}{r_{1v}} \right)$$

und analog in η_1 und ζ_1 .

Nun ist aber:

$$\xi_1 = x_1 + \xi_0,$$

daher hat man auch:

$$\frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{d^2 \xi_0}{dt^2},$$

oder, da:

$$\frac{d^2 \xi_0}{dt^2} = k^2 \sum_1^n \frac{m_v x_1}{\varrho_v^3},$$

auch:

$$\frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k^2 \sum_1^n \frac{m_v x_v}{\varrho_v^3}.$$

Da jedoch:

$$\varrho_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

und folglich:

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\varrho_1},$$

so wird:

$$k^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{m_0}{\varrho_1} \right) = k^2 m_0 \frac{\partial \frac{1}{\varrho_1}}{\partial x_1} = - \frac{k^2 m_0}{\varrho_1^3} x_1.$$

Unsere Gleichung wird daher:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{k^2 m_1 x_1}{\varrho_1^3} + k^2 \sum_2^n \frac{m_v x_v}{\varrho_v^3} = - \frac{k^2 m_0 x_1}{\varrho_1^3} + k^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_2^n \frac{m_v}{r_{1v}}$$

oder definitiv:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{k^2 (m_0 + m_1) x_1}{\varrho_1^3} = k^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_2^n \frac{m_v}{r_{1v}} - k^2 \sum_2^n \frac{m_v x_v}{\varrho_v^3}$$

und analog für y_1 und z_1 .

Diesen Gleichungen, welche die relative Bewegung eines Planeten um die Sonne bereits darstellen — während die Gleichungen (2) die absolute Bewegung, d. h. die Bewegung bezogen auf ein im Raume festes Centrum, charakterisiren (Näheres über absolute und relative Bewegung cf. Vorlesung 2) —, giebt man jedoch noch eine andere Form, die den Ausgangspunkt der analytischen Störungstheorie bildet, indem man das zweite Glied der rechten Seite als partiellen Differentialquotienten schreibt. Bildet man die Grösse:

$$\frac{m_v (x_1 x_v + y_1 y_v + z_1 z_v)}{\varrho_v^3},$$

in der v eine beliebige Zahl, 1 ausgenommen, bedeute, also $v = 2, 3 \dots n$, so wird x_1 in ϱ nicht enthalten sein, da

$$\varrho_v = \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}$$

ist. Bei der Differentiation nach x_1 ist also im ebengenannten Ausdrücke nur x_1 variabel, hingegen x_v, y_v, z_v constant zu halten, also, indem man differentiirt, $v = 2, 3 \dots n$ setzt und alle Gleichungen addirt:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \sum_2^n \left[\frac{m_v (x_1 x_v + y_1 y_v + z_1 z_v)}{\varrho_v^3} \right] = \sum_2^n \frac{m_v x_v}{\varrho_v^3}.$$

Die allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung eines Planeten um die Sonne werden somit in strenger Form:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{k^2 (m_0 + m_1) x_1}{\varrho_1^3} &= k^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_2^n m_v \left(\frac{1}{r_{1v}} - \frac{x_1 x_v + y_1 y_v + z_1 z_v}{\varrho_v^3} \right) \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{k^2 (m_0 + m_1) y_1}{\varrho_1^3} &= k^2 \frac{\partial}{\partial y_1} \sum_2^n m_v \left(\frac{1}{r_{1v}} - \frac{x_1 x_v + y_1 y_v + z_1 z_v}{\varrho_v^3} \right) \\ \frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{k^2 (m_0 + m_1) z_1}{\varrho_1^3} &= k^2 \frac{\partial}{\partial z_1} \sum_2^n m_v \left(\frac{1}{r_{1v}} - \frac{x_1 x_v + y_1 y_v + z_1 z_v}{\varrho_v^3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Dabei sind bezüglich in der ersten, zweiten, dritten Gleichung im Zähler die Glieder:

$$\begin{aligned} y_1 y_v + z_1 z_v \\ x_1 x_v + z_1 z_v \\ x_1 x_v + y_1 y_v \end{aligned}$$

lediglich der Symmetrie halber hinzugefügt, um auf den rechten Seiten in allen drei Gleichungen dieselbe Grösse zu haben, was für die Weiterbehandlung der Gleichungen von grosser Wichtigkeit ist. Hätte man auf die Symmetrie der Gleichungen verzichten wollen, so hätte man die genannten Glieder, da sie bezüglich der Differentiation keine Rolle spielen, auch ebensogut weglassen können. Für diese Grösse der rechten Seite,

welche man als die „Störungsfunction“ bezeichnet, führt man zur Abkürzung das Zeichen Ω ein, setzt also:

$$\Omega = \sum_2^n k^2 m_v \left(\frac{1}{r_v} - \frac{x x_v + y y_v + z z_v}{\varrho_v^3} \right),$$

wobei mit Weglassung des Index 1

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

die Entfernung des Planeten m_1 von der Sonne,

$$\varrho_v = \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}$$

diejenige des Planeten m_v ist, während

$$r_v = \sqrt{(x_v - x)^2 + (y_v - y)^2 + (z_v - z)^2}$$

die Entfernung der beiden Planeten m_1 und m_v von einander bedeutet. Setzt man noch, wie üblich, die Masse der Sonne $m_0 = 1$, und führt für die Grösse $k^2 (1 + m)$ die abkürzende Bezeichnung

$$k^2 (1 + m) = \mu$$

ein, dann lauten die Fundamentalgleichungen, welche die Bewegung eines Planeten um die Sonne unter der anziehenden Wirkung aller übrigen und derjenigen der Sonne allgemein charakterisiren:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{x}{\varrho^3} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \mu \frac{y}{\varrho^3} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \mu \frac{z}{\varrho^3} &= \frac{\partial \Omega}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

An diese Gleichungen, die für uns also nur insofern ein unmittelbares Interesse haben, als wir durch Specialisirung derselben die vorläufige Grundlage des Folgenden, die Kepler'sche Bewegung, gewinnen wollen, knüpfen wir indess noch einige allgemeine, das Problem der Planetenbewegung betreffende Bemerkungen, die vom Anfänger besser überschlagen werden.

Bei n Planeten, deren Bewegung allgemein bestimmt werden soll, gelten für jeden drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren jede zwei Integrationen erfordert und bei der Integration somit je zwei willkürliche Integrationsconstanten liefert. In Summa hat man also $3n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung und erhielte bei den $6n$ auszuführenden Integrationen $6n$ Integrationsconstanten: etwa die $3n$ Coordinaten und die $3n$ Geschwindigkeiten, womit die Bewegung vollständig bestimmt wäre.

Aus den Elementen der Mechanik ist aber bekannt, dass die Principien der analytischen Mechanik vier Integrale obiger Differentialgleichungen ergeben. Fasst man an Stelle des Viel-Körperproblems das Drei-Körperproblem ins Auge, was keine Beschränkung in sich schliesst, so wären zur vollständigen Charakterisirung der Bewegung also 12 Integrationen auszuführen. Von diesen 12 Integralen liefert 3 das Princip der Flächen, das 4. das Princip der lebendigen Kraft.

Wenn man an Stelle der Differentialgleichungen der relativen Bewegung die Differentialgleichungen (2) der absoluten Bewegung ins Auge fasst, so hat man drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung mehr, nämlich die der Sonne, muss dann also 18 Integrationen statt 12 ausführen, erhält diese 6 weiteren Integrale indess durch das Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes.

Fassen wir im Sinne der Astronomie die relative Bewegung ins Auge, so ist noch zu erwähnen, dass Jacobi gezeigt hat, dass, wenn von den 8 übrig bleibenden ungeleisteten Integrationen 7 durchgeführt wären, das letzte achte Integral sich mittelst des Principes vom letzten Multiplicator ergeben würde. Es ist indessen, wie Bruns in seiner bekannten Arbeit, später in anderer Weise Poincaré nachgewiesen hat, nicht möglich, auch nur eines dieser 8 Integrale in algebraischer Form darzustellen. Rein astronomisch führen uns mithin die genannten 4 respective 10 Integrale zur Ermittlung der planetarischen Bewegungen unserem Ziel nicht näher. Um letztere dennoch auf Grund der allgemeinen Störungsgleichungen zu eruiren, kann man diese auf zwei verschiedene Weisen näherungsweise integriren. Erstens mittelst der drei verschiedenen Methoden der speciellen Störungen, die von Lagrange, Encke und Hansen herrühren und am Schlusse dieses Buches dargelegt werden sollen, da sie in der Theorie der Bahnverbesserung zur definitiven Bahnbestimmung verwendet werden.

In diesen Theorien rechnet man, wie schon angedeutet wurde, von einem bestimmten Punkte der Bahn und einem bestimmten Datum ausgehend, den Betrag der Störungen numerisch von Zeitabschnitt zu Zeitabschnitt, und zwar nur für ganz beschränkte Intervalle der Zeit. Die Methoden der speciellen Störungen liefern also keine allgemeinen Formeln. Hingegen können sie für kurze Zeiträume genauere Resultate liefern, als dies die andere Gattung von Integrationsmethoden unserer allgemeinen Differentialgleichungen der planetarischen Bewegung thut, die sogenannten analytischen Störungsmethoden, falls bei diesen nicht sehr viele Glieder berücksichtigt werden. Diese letzteren stellen allgemeine Formeln auf, in denen die Zeit als unabhängige Variable figurirt, der man nur einen speciellen Werth zu ertheilen braucht, um den Betrag der Störungen für einen beliebigen Moment zu erhalten. Die ausführliche Darlegung dieser letzteren Methoden, welche den Inhalt des umfangreichen translatorischen Theiles der Mechanik des Himmels bildet und die eigentliche Störungstheorie ausmacht, gehört nicht zu den Aufgaben des vorliegenden Buches.

Im Gegensatz zu der später ausführlich behandelten Theorie der speciellen Störungen soll hier das Wesen der analytischen Störungstheorie indess noch in Kürze charakterisirt und auf die principiellen Mängel hingewiesen werden, die dieser Theorie, vom rein mathematischen Standpunkte betrachtet, anhaften.

Die Begründer der Störungstheorie, Lagrange und Laplace, gingen von der Thatsache aus, dass die Planetenmassen im Vergleich zur Masse der Sonne nur klein sind und dass, wenn man die Planetenmassen in erster Näherung direct Null setzt, man die Kepler'sche Bewegung findet, deren Integrale die sechs elliptischen Bahnelemente als Integrationsconstanten enthalten. (Dass man, wenn man die Massen und somit die rechten Seiten unserer allgemeinen Störungsgleichungen Null setzt, die Bewegung nach den Kepler'schen Gesetzen erhält, wird in den folgenden Vorlesungen gezeigt werden.) In der That giebt die Kepler'sche Bewegung, wie die Beobachtungen zeigen, die wirkliche Bewegung nahezu wieder, freilich nur für ganz kurze Zeit. Aus diesem Grunde legten die Begründer der analytischen Störungstheorie diese in einer festen Ellipse erfolgende Bewegung zu Grunde und bezeichneten die Abweichung von derselben in Folge der Anziehung, welche ein anderer Körper ausser der Sonne auf den betrachteten ausübt, als eine Störung. Offenbar kann man aber in jedem beliebigen Moment durch den Ort des betrachteten Planeten nicht nur eine, sondern unendlich viele Kepler'sche Ellipsen legen, deren jede die wahre Bahn schneidet. Von allen diesen Ellipsen denkt man nun in jedem Moment diejenige herausgegriffen, welche die wahre Bahn nicht bloss schneidet, sondern zugleich dieselbe tangirt, d. h. eine Berührung erster Ordnung mit ihr einget, indem sie in dem Schnittpunkte auch die Geschwindigkeit mit der

wahren Bahn gemein hat. Man hypostasirt also, dass nicht bloss die Coordinaten, sondern auch deren erste Differentialquotienten dieselben Werthe haben sollen in der gestörten wie in der ungestörten Kepler'schen Bewegung. Diese Ellipse, auf welcher der Planet nur einen unendlich kleinen Zeitmoment dt verbleibt, ist es, die man als osculirende Ellipse bezeichnet, und diese ist also eine bestimmte der unendlich vielen variablen Ellipsen, die in jedem Augenblick die wahre Bahn schneiden, also nur die Coordinaten, nicht aber deren Differentialquotienten darstellen. In dieser Weise gelangt man zur Grundidee der von Lagrange zur Lösung des Störungsproblems erfundenen sogenannten Methode der Variation der Constanten¹⁾: man betrachtet die sechs Bahnelemente der für einen Moment festen Kepler'schen Ellipse nicht mehr als Constanten, sondern, da die Ellipse als osculirende stetig von Moment t zu Moment $t + dt$ in eine andere übergeht, als Functionen der Zeit, und zwar bestimmt man sie eben als solche Functionen der Zeit, dass die Integrale der Kepler'schen Bewegung noch die allgemeinen Störungsgleichungen befriedigen. So gelangt man zu sechs Differentialgleichungen in den sechs Elementen der elliptischen Bewegung, den bekannten Grundgleichungen der Variation der Constanten (cf. z. B. Tisserand, *Méc. céleste*, Tome I, p. 169), deren rechte Seiten verwickelte Ausdrücke sind.

Die genäherte Integration dieser Differentialgleichungen wird durch Entwicklung der Störungsfunktion in eine Fourier'sche Reihe ermöglicht, wobei die Entwicklungen fortschreiten nach Potenzen der störenden Masse, wie man zu sagen pflegt, genauer: nach Potenzen der Störungen selbst. Die Laplace'sche Theorie setzt nämlich für die Elemente a, e etc. bezüglich:

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \delta a = a_0 + \delta_1 a + \delta_2 a + \delta_3 a + \dots \\ e &= e_0 + \delta e = e_0 + \delta_1 e + \delta_2 e + \delta_3 e + \dots \end{aligned}$$

wobei $\delta_1 a, \delta_2 a \dots$ bezüglich die Störungen erster, zweiter \dots Ordnung in a bezeichnen etc., führt diese Entwicklungen in die Störungsfunktion Ω und deren Derivirte ein und erhält dann, indem wir hier nur symbolisch andeuten, da es uns bloss auf das Princip ankommt, zur Berechnung der Störungen erster, zweiter, dritter Ordnung u. s. f., z. B. für das Element a Differentialgleichungen der Form:

$$\frac{d\delta_1 a}{dt} = m' \Sigma C_n^{(0)} \cos(in_0 t + i'n't + \text{const.}), \quad \frac{d\delta_2 a}{dt} = m'^2 P_2, \quad \frac{d\delta_3 a}{dt} = m'^3 P_3$$

In diesen Gleichungen bedeutet m' die Masse des störenden Körpers, $C_n^{(0)}$ constante Coefficienten, welche von den Elementen beider Körper abhängen, n_0 und n' die mittleren Bewegungen, i und i' positive oder negative ganze Zahlen. Ferner ist P_2 Function der Cosinus und von $\delta_1 a, \delta_1 e$ etc., P_3 Function der Cosinus und von $\delta_2 a, \delta_2 e \dots$ u. s. f. Die Integration dieser Gleichungen ist aber direct ausführbar. Diejenige der ersten ergibt:

$$\delta_1 a = m' \sum \frac{C_n^{(0)}}{i n_0 + i' n'} \sin(in_0 t + i'n't + \text{const.}).$$

Ist so $\delta_1 a$ gefunden und analog für die anderen Elemente durch ähnliche Gleichungen $\delta_1 e$ etc., so ist damit P_2 bekannt, man erhält somit durch Integration der zweiten Gleichung unmittelbar $\delta_2 a$ u. s. f. Die Integration ist also analytisch durchgeführt.

Gegen diese Methode lassen sich jedoch vom mathematischen Standpunkt Einwände erheben, die hier in Kürze angedeutet werden sollen.

Es hängt offenbar die Convergenz der Entwicklungen

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \delta a = a_0 + \delta_1 a + \delta_2 a + \delta_3 a + \dots \\ e &= e_0 + \delta e = e_0 + \delta_1 e + \delta_2 e + \delta_3 e + \dots \end{aligned}$$

¹⁾ Man vergleiche die Darstellung der Methode in L. Boltzmann's classischen Vorlesungen über die Principe der Mechanik. II. Teil. § 67 etc. (Leipzig, Ambrosius Barth.)

und somit auch die Convergenz der Reihen, in welche die rechten Seiten der sechs allgemeinen Differentialgleichungen der Variation der Constanten für die elliptischen Elemente entwickelt sind, wesentlich davon ab, ob die Beträge der Störungen:

$$a - a_0 = \delta a, \quad e - e_0 = \delta e, \text{ etc.}$$

wirklich auch immer klein bleiben: denn nur, wenn dies der Fall ist, repräsentirt die Laplace'sche Lösung eine stabile Bewegung, während im anderen Falle der Planet sich beliebig weit von der Sonne entfernen oder ihr beliebig nahe kommen würde. Und nur, wenn die Störungen wirklich stets klein bleiben, wenn a und e immer auf gewisse mittlere Grenzen beschränkt sind, ist es gestattet, die Differentialgleichungen unter Vernachlässigung von Störungen höherer Ordnung zu integrieren. Dass indess die Störungen eben wirklich für unbeschränkte Zeiten klein bleiben, dafür hat die Theorie keinen bindenden Beweis erbracht, ja dieser Beweis ist mit den bisherigen mathematischen Hilfsmitteln, scheint es, überhaupt nicht zu erbringen. Zwar lässt sich nachweisen, dass die Entwicklungen der rechten Seiten der allgemeinen Differentialgleichungen der Variation der Constanten für $\frac{da}{dt}, \frac{de}{dt}$ etc. convergent bleiben, so lange die Excentricitäten unterhalb

einer gewissen Grenze liegen. Auch zeigen die Beobachtungen, dass die Excentricitäten für kürzere Zeiträume wirklich klein bleiben, und innerhalb dieser Zeiten gelten also auch die Entwicklungen wirklich. Allein das Resultat ist im Princip nicht auf beliebig grosse Zeiträume ausdehnbar, denn dass die Excentricitäten überhaupt klein bleiben, wenn sie es einmal waren, ist, wie gesagt, nicht nachweisbar.

Ausserdem führt das Laplace'sche und Lagrange'sche Integrationsverfahren, welches also im Princip auf einer Entwicklung nach Potenzen der störenden Masse, oder besser: der Störungen selbst beruht, wenn der Integrationsdivisor $in_0 + i'n'$ Null wird, zu säcularen Gliedern. Das tritt ein, wenn die Grössen i und i' , die positive und negative ganze Zahlen, Null incl. repräsentiren, jede für sich Null werden. Denn in diesem Falle wird das Integral der angeführten Differentialgleichung z. B. in $\delta_1 e$ für das eine Glied der Entwicklung: $i = i' = 0$:

$$\text{pars } \delta_1 e = m' C_n^{(0)} t \cos (\text{const}).$$

Solche säculare Glieder, so genannt, weil sie die Zeit außerhalb des trigonometrischen Functionszeichens enthalten, wachsen aber mit der Zeit über alle Grenzen und machen die Convergenz und mithin das ganze Integrationsverfahren, welches auf Voraussetzung dieser beruht, für diesen Fall illusorisch. Das Gleiche gilt, wenn zwar nicht i und i' für sich Null wird, wenn indessen:

$$in_0 + i'n' = 0, \text{ d. h. wenn } \frac{i}{i'} = -\frac{n'}{n_0}$$

ist. Dieser Fall tritt also ein, wenn die mittleren Bewegungen n' und n_0 des störenden und gestörten Körpers, oder auch, da diese den Umlaufszeiten umgekehrt proportional sind, wenn die Umlaufszeiten in einem commensurabeln Verhältniss stehen, mit anderen Worten, wenn das Verhältniss der mittleren Bewegungen ein rationaler Bruch ist.

Um diese die Convergenz gefährdenden säcularen Glieder und ebenso die bei Behandlung genäherter Commensurabilitätsverhältnisse auftretenden kleinen Integrationsdivisoren („kritischen“ Glieder), welche die Convergenz gleichfalls hinfällig machen, zu vermeiden, ersetzte in neuerer Zeit Gylden das Integrationsverfahren nach Potenzen der störenden Masse durch andere Methoden, deren letzte, die sogenannte „horistische“, wie er annahm, die principiellen Mängel der alten Theorie beseitigte.

Hier soll nur kurz das Resumé des denkwürdigen historischen Streites, der seit den achtziger Jahren des verflossenen Jahrhunderts in verschiedenen Phasen gespielt hat,

gezogen werden, das dahin präcisirt werden muss, dass Gyldén ebenso wenig wie einst sein grosser Rivale Poincaré eine mathematisch befriedigende Lösung des Störungsproblems gegeben hat: dass beide Forscher, nur in der Form verschieden, in gleicher Weise bei Behandlung der Convergenzfrage und Aufstellung der „convergenten“ Lösung geirrt haben¹⁾. (Vergl. die Vorbemerkungen zur 3. Ausgabe S. XII bis XVIII.)

Indess hat Gyldén, wie mehr und mehr zu Tage tritt — in erster Linie durch die Arbeiten Brendels²⁾ —, durch die eigenthümliche, von ihm zuerst gegebene Entwicklung der Störungfunction und durch die partielle Integrationsmethode, insofern man nur beschränkte Zeiträume ins Auge fasst, der rechnenden Astronomie in der That einen grossen Dienst erwiesen.

Darin besteht der Hauptvorzug der Gyldén'schen Störungstheorie, dass in ihr zum Princip erhoben ist, jedes Glied mit Rücksicht auf seine Wichtigkeit in der Entwicklung zu berücksichtigen, und nicht, wie bei den alten Methoden, nach der Potenz der Masse, die es enthält. Bei Berechnung eines Planeten innerhalb der Beobachtungsfehler ist ihr Vorzug ganz besonders gross.

Auf Grund der neuen Principien Gyldén's hat Brendel, in eigener Weiterbildung derselben, die Methoden so ausgeführt, dass sie für den ins Auge gefassten Zweck — die Wiederauffindung eines Planeten am Himmel durch Vorausberechnung für circa ein Jahrhundert — ein wirklich brauchbares Resultat liefern. (Vergl. die Vorbemerkungen zur 3. Ausgabe des vorliegenden Werkes, S. XV.)

Ferner hat Kramer im speciellen die kleinen Planeten vom Hecubatypus ($1/2$), — nach dem von Harzer gemachten, unzulänglichen Versuch, — auf Grund der Gyldén-Brendel'schen Principien, in viel weiterreichender Annäherung behandelt. Während bei jener anderen complicirten Untersuchung die bei diesem schwierigen Planetentypus nothwendig mitzunehmenden Glieder — falls ein auch nur genähertes numerisches Resultat überhaupt in Frage kommen sollte — in ganz ungenügendem Umfang berücksichtigt sind, hat Kramer in zwei Abhandlungen³⁾ principiell wie praktisch in einem zuvor niemals angestrebten Umfang hinsichtlich Grad und Ordnung den mitzunehmenden Gliedern Rechnung getragen. (Vergl. die Vorbemerkungen zur 3. Ausgabe S. XXVII, Anmerkung 1.)

Eine Einführung in die störungstheoretischen Principien Gyldén's, so, wie sie brauchbar zur Verwendung sind, findet der Leser in Theil I von Brendel's „Theorie der kleinen Planeten“.

Das Aufsuchen der „elementären“, „charakteristischen“ und sämmtlichen übrigen Glieder, die wirkliche Bildung der Differentialgleichungen und ihre Integration in einem bestimmten Fall, findet sich auf das Ausführlichste dargelegt in meinen eigenen Untersuchungen⁴⁾

¹⁾ Vergl. meinen Aufsatz: „Poincaré's Preisarbeit von 1889/90 und Gyldén's Forschung über das Problem der drei Körper in ihren Ergebnissen für die Astronomie“. Physikalische Zeitschrift. 5. Jahrg., Nr. 7, S. 180 bis 186. (Hierzu vergl. man die Vorbemerkungen zur 3. Ausgabe, S. XVIII.)

Die hier von mir versuchte Rechtfertigung von Gyldén's horistischer Integrationsmethode, die ich auf Grund einer Zusammenstellung von Stellen aus Gyldén's *Nouvelles recherches* gegeben habe, muss ich als unzureichend bezeichnen. Vergl. auch hierzu die Vorbemerkungen zur 3. Ausgabe d. vorlieg. Werkes, S. XIII ff. Anm. d. Herausgeb. d. 3. Ausgabe.

²⁾ Von den vielen das Störungsproblem betreffenden Arbeiten Brendel's vergl. hier in erster Linie: Martin Brendel, *Theorie der kleinen Planeten*. Erster Theil. Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Classe. Neue Folge. Bd. I, Nr. 3, 1898. Ferner: Martin Brendel, *Theorie der kleinen Planeten*. Zweiter und dritter Theil. Ebendasselbst. Neue Folge. Bd. VI, Nr. 4 und 5. — Vierter Theil, Bd. VIII, Nr. 1.

³⁾ Julius Kramer, *Theorie der kleinen Planeten vom Hecubatypus*. Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Classe. Neue Folge. Bd. II, Nr. 2. Ferner: Julius Kramer, *Untersuchungen und Tafeln zur Theorie der kleinen Planeten vom Hecubatypus etc.* Ebendasselbst. Neue Folge. Bd. V, Nr. 3.

⁴⁾ Hugo Buchholz, *Untersuchung der Bewegung vom Typus ($2/3$) im Problem der drei Körper etc.* auf Grund der Gyldén'schen Störungstheorie. Erster Theil. Denkschriften der math.-naturw. Classe der

über die kleinen Planeten des Hildatypus ($\frac{2}{3}$), die, unter Anwendung der Gylden-Brendel'schen Entwicklung der Störungsfunktion auf Grund der partiellen Integrationsmethode mit Berücksichtigung aller Glieder von Einfluss diesen complicirten Fall der Mechanik des Himmels behandeln, der eine Sonderstellung gegenüber den anderen Commensurabilitätstypen noch insofern einnimmt, als er die Bestimmung des Integrationsdivisors δ_1 erst erfordert¹⁾. In Theil I habe ich die ausführlichste Einführung in die Principien Gylden's gegeben.

Zum Schluss dieses Capitels mögen noch die Worte Brendel's Platz finden (cf. Theorie der kleinen Planeten, Theil II, S. 2), die das Verhältniss der Aufgabe des Astronomen gegenüber derjenigen des reinen Mathematikers in schlagendster Weise zum Ausdruck bringen und auch für die nachfolgenden bahnrchnerischen Untersuchungen des vorliegenden Werkes gewissermaassen typisch sind:

„Der Weg des Mathematikers ist von dem des Astronomen durch eine breite Kluft getrennt. Der Mathematiker schreitet auf seinem Wege langsam vorwärts, jeden Schritt sorgfältig erwägend, jede Brücke, über die er hinübergeht, auf ihre Festigkeit prüfend; so weiss er, dass ihn mit seinem Ausgangspunkt ein fester Boden verbindet. Der Astronom kann diesen Weg nicht gehen; er käme zu langsam vorwärts; er hat ein fernes Ziel vor Augen. Will er die Bewegungserscheinungen der Himmelskörper darstellen, sie beschreiben, will er Formeln finden, die den Naturerscheinungen entsprechen, so kann er nicht den Weg des Mathematikers verfolgen, weil dieser weit vor seinem Ziele aufhört. Er muss sich über unsicheres Terrain wagen; er muss versuchen, bald hier, bald dort durch das unwegsame Gelände vorzudringen. Man soll ihm hieraus keinen Vorwurf machen und vor allem nicht vergessen, dass durch das gewagte Vorgehen des Astronomen, und des Naturforschers überhaupt, der Mathematik die schönsten Probleme erst gegeben werden. Hätte der Mathematiker jenen nicht als Pionier vor sich, so würde er oft nicht wissen, nach welcher Richtung hin er seine breite Strasse weiterbauen soll.“ —

Zweite Vorlesung.

Die allgemeine Centralbewegung des materiellen Punktes.

(Problem der zwei Körper.)

Während die Bewegung eines Planeten um die Sonne, wie sie in Wirklichkeit stattfindet, durch die in der ersten Vorlesung abgeleiteten allgemeinen Differentialgleichungen der gestörten Bewegung:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2(1+m) \frac{x}{\varrho^3} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + k^2(1+m) \frac{y}{\varrho^3} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + k^2(1+m) \frac{z}{\varrho^3} &= \frac{\partial \Omega}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

wobei:

$$\Omega = k^2 \sum_2^n m_v \left(\frac{1}{r_v} - \frac{xx_v + yy_v + zz_v}{\varrho^3} \right)$$

Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Bd. LXXII. Ferner: Fortgesetzte Untersuchung der Bewegung vom Typus $\frac{2}{3}$ im Problem der drei Körper auf Grund der Gylden'schen Störungstheorie. Zweiter Theil. Ebend. Bd. LXXVII. (Theil III u. IV, sowie die numerische Anwendung sind in Vorbereitung.)

Betreffs des im Vorwort zu Theil II über die horistische Methode Gesagten siehe die Anmerkung 1 auf voriger Seite.

¹⁾ Hierzu vergl. meine in Nr. 4410 der Astr. Nachrichten entwickelte neue Methode zur Bestimmung der Hauptstörungen kritischer Planeten und damit von δ_1 .

ist, charakterisirt wird, deren Auflösung mit grossen Schwierigkeiten verknüpft ist, trotzdem aber durch Reihenentwickelungen geleistet werden kann, die praktisch ausreichende Resultate liefern, gelangt man zu einer genäherten Vorstellung der Bewegung durch die Auflösung der viel einfacheren Gleichungen, indem wir den Radius vector jetzt mit r bezeichnen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2(1+m) \frac{x}{r^3} &= 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + k^2(1+m) \frac{y}{r^3} &= 0 \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + k^2(1+m) \frac{z}{r^3} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

welche man erhält, indem man die rechten Seiten der allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung Null setzt. Das besagt aber im Hinblick auf die Störungfunction \mathcal{Q} offenbar nichts Anderes, als dass man die Massen der störenden Planeten Null setzt, indem die Gleichungen (1) ja die Bewegung des gestörten Planeten m unter Einfluss der störenden Körper um die Sonne charakterisiren, deren Masse als Einheit vorausgesetzt. Die Differentialgleichungen (2) definiren somit einfach die Bewegung eines Körpers, welcher von der Sonne angezogen, diese als Centrkörper umkreist, oder mit anderen Worten das Zweikörperproblem, welches, wie wir zeigen wollen, strenge lösbar ist und auf die Kepler'schen Gesetze führt. Diese sind also in der Natur nicht streng erfüllt, sondern liefern nur eine genäherte Vorstellung der wahren Bewegung, wobei jedoch die Abweichungen von der Kepler'schen Bewegung nur klein sind, da die im Verhältniss zur Sonnenmasse kleinen Planetenmassen in einem kurzen Zeitraume durch ihre Anziehung nur eine geringe Abweichung von der Kepler'schen, in einem Kegelschnitt erfolgenden Bewegung des gestörten Körpers hervorbringen. Dass die ungestörte Kepler'sche Bewegung in einem Kegelschnitt erfolgt, haben wir nun allgemein zu zeigen.

Zunächst ist leicht zu sehen, dass die Bewegung des Planeten um die Sonne in einer Ebene erfolgt. Denn multiplicirt man von den Gleichungen im System (2) die erste mit y , die zweite mit x , subtrahirt und verfährt mit den beiden anderen Gleichungen analog, so folgt:

$$\left. \begin{aligned} x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} &= 0 \\ z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} &= 0 \\ y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Durch Integration folgt somit:

$$\left. \begin{aligned} x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= c_1 \\ z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} &= c_2 \\ y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= c_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

In diesen Gleichungen repräsentiren, wie wir sehen werden, die linken Seiten die Projectionen der doppelten in der Zeit dt vom Radius vector des Planeten beschriebenen unendlich kleinen Dreiecksflächen auf die Coordinatenebenen dividirt durch dt und dieselben sind also Constanten. Durch Multiplication der ersten, zweiten, dritten Gleichung bezüglich mit z , x , y und Addition ergibt sich:

$$c_1 z + c_2 y + c_3 x = 0 \dots \dots \dots (5)$$

d. h. die Bewegung des Planeten erfolgt in einer Ebene, welche durch den Mittelpunkt der Sonne als Ursprung des Coordinatensystemes hindurchgeht. Seine Bahn-curve ist in erster Näherung also eine ebene, während sie in Wirklichkeit eine doppelt gekrümmte ist.

Da beim Problem der zwei Körper die Bewegung des Planeten um die Sonne in einer Ebene erfolgt, so können wir

$$z = \frac{dz}{dt} = 0$$

setzen, indem wir die Bahnebene mit der xy -Ebene zusammenfallend denken. Die Differentialgleichungen, welche die Bewegung des Planeten in seiner Bahnebene um die Sonne charakterisiren, werden also, indem die dritte Gleichung in System (2) wegfällt, einfach:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{x}{r^3} &= 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \mu \frac{y}{r^3} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

wobei also:

$$\mu = k^2 (1 + m)$$

und ihre Integration ergibt vier willkürliche Constante.

An Stelle dieser Gleichungen wollen wir jedoch, um das Problem ganz allgemein zu lösen, die allgemeineren Gleichungen:

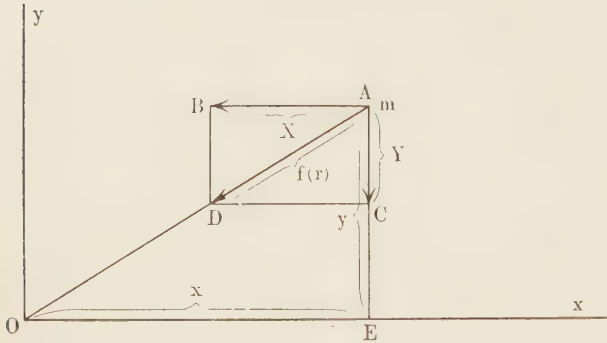
$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} + f(r) \frac{x}{r} &= 0 \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} + f(r) \frac{y}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

integriren, welche für ein beliebiges Kraftgesetz $f(r)$ gelten und, je nachdem man dieses specialisirt, eine andere Bewegung charakterisiren. Eine spiralförmige z. B., wenn die Kraft im umgekehrten Verhältniss der dritten Potenz der Entfernung steht, die Kepler'sche im Kegelschnitt, wenn die Kraft nach dem Newton'schen Gravitations-gesetze im umgekehrten Verhältniss des Quadrates der Entfernung wirkt, allgemein eine elliptische (die speciell circular oder geradlinig wird), wenn die Kraft direct proportional der Entfernung in einem elastischen Medium wirkt (Optik, die elliptisch, circular oder geradlinig polarisirte Lichtbewegung). Alle diese verschiedenen Fälle sind in den obigen allgemeinen Gleichungen je nach der speciellen Annahme über $f(r)$ enthalten. In die durch Integration derselben gewonnenen allgemeinen Integralformen werden wir dann erst zum Schlusse an Stelle des allgemeinen Kraftgesetzes $f(r)$ das Newton'sche Gravitationsgesetz einführen, wodurch sich die Kepler'sche Bewegung unmittelbar als Specialfall der allgemeinen Centralbewegung ergibt, wie sie durch obige Gleichungen definit ist.

Man denkt sich nämlich zunächst ein festes Anziehungscentrum O im Raume und in diesem den Coordinatenursprung. Wird dann irgend ein materieller Punkt m nach demselben hingezogen mit einer Kraft, die erstens gegen O gerichtet ist, und deren

Intensität zweitens nur von der Entfernung r des Punktes m von O abhängt, so nennt man die Bewegung des Punktes m um O eine Centralbewegung. Da der Punkt m aber ausser der durch den Einfluss aus O bedingten Bewegung im Allgemeinen

Fig. 1.



schon eine Anfangsgeschwindigkeit besitzt, so wird er in Folge dieser und der Centralkraft eine Curve beschreiben, die bei gegebenem Kraftgesetz $f(r)$ allgemein bestimmbar ist. Auf die Bestimmung dieser Curve und der Art der Bewegung in ihr sehen es die folgenden Untersuchungen allgemein ab.

Dass die Bewegung in der durch r und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit gelegten

Ebene stattfinden muss, ist a priori klar, weil keine dritte Kraft vorhanden ist, die das Bewegliche aus dieser Ebene herauslenken könnte. Um zu zeigen, dass die angeführten allgemeinen Gleichungen (7) wirklich die Centralbewegung des Punktes m um das als fest gedachte Anziehungscentrum O definiren, construiren wir über der Kraft $f(r)$, die wir durch einen Pfeil dargestellt denken, das Kräfteparallelogramm und erhalten so die Componenten der Kraft AD :

$$X = AB$$

$$Y = AC.$$

Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke ADC und AOE folgt aber:

$$DC : DA = OE : OA$$

oder

$$X : f(r) = x : r$$

und:

$$AC : AD = AE : AO$$

oder

$$Y : f(r) = y : r.$$

Mithin sind die Componenten der Kraft $f(r)$

$$X = -f(r) \frac{x}{r}$$

$$Y = -f(r) \frac{y}{r},$$

nämlich negativ, da die Richtung in die der negativen x - und y -Axe fällt. Bei einer abstossenden Kraft hingegen hätte man das positive Vorzeichen zu nehmen. Doch ist es auch an sich natürlich, eine anziehende Kraft, da sie die Entfernung verkleinert, als negativ, eine abstossende hingegen, welche die Entfernung vergrössert, als positiv zu bezeichnen.

Da nun nach den Grundbegriffen der Mechanik:

„Kraft“ gleich „Masse“ mal „Beschleunigung“,

so sind die allgemeinen Bewegungsgleichungen von m um das feste Centrum O :

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= X = -f(r) \frac{x}{r} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= Y = -f(r) \frac{y}{r} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Das sind in der That die zuvor angeführten Gleichungen (7):

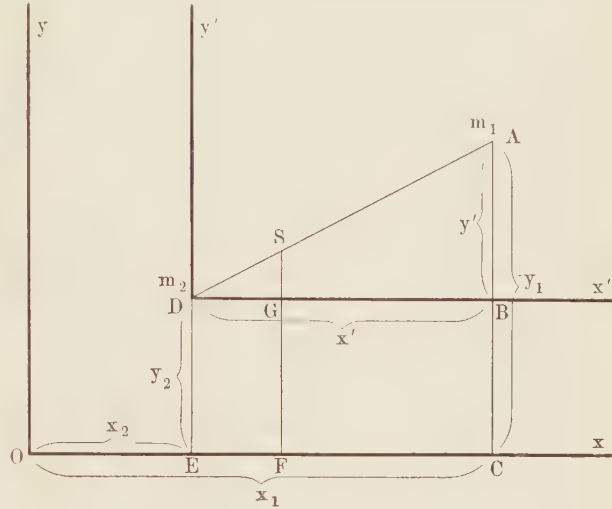
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f(r) \frac{x}{r} = 0$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + f(r) \frac{y}{r} = 0$$

die wir erhielten, indem wir in den Gleichungen (6) an Stelle des Newton'schen das allgemeine Wirkungsgesetz $f(r)$ substituirt.

Die Gleichungen (7), welche also in dem eben gegebenen Sinne die Bewegung in Bezug auf ein festes Centrum bestimmen, charakterisiren somit eine absolute Bewegung. In der Astronomie existirt aber eine solche nicht, da es keinen festen Punkt im Weltall giebt, auf den man die Bewegung beziehen könnte, die Sonne, die als Ursprung des Coordinatensystemes gewählt wird, vielmehr selbst ein bewegliches Centrum, die Bewegung in Bezug auf dasselbe also nur eine relative ist.

Fig. 2.



Denkt man sich in diesem letzteren Sinne zwei bewegliche materielle Punkte m_1 und m_2 mit den Coordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 in der Entfernung r , von denen m_2 auf m_1 eine anziehende Kraft $f(r)$ ausübe, die stets gegen m_2

gerichtet ist, dann sind zunächst die Bewegungsgleichungen von Punkt m_1 , indem nach der Figur, in welcher x, y ein festes Coordinatensystem bezeichnet:

$$X = -f(r) \cos(r, x)$$

$$EC = r \cos(r, x)$$

$$EC = x_1 - x_2$$

also
$$\cos(r, x) = \frac{x_1 - x_2}{r}$$

und analog
$$\cos(r, y) = \frac{y_1 - y_2}{r}$$

ist:
$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -f(r) \frac{x_1 - x_2}{r}$$

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -f(r) \frac{y_1 - y_2}{r}$$

Die Bewegungsgleichungen des Punktes m_2 aber werden, da die von m_1 her auf m_2 wirkende Kraft nach dem Principe der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung auch gleich $f(r)$, jedoch entgegengesetzt wie die von m_2 auf m_1 wirkende Kraft gerichtet ist:

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = +f(r) \frac{x_1 - x_2}{r}$$

$$m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = +f(r) \frac{y_1 - y_2}{r}$$

Denkt man sich jetzt durch m_2 ein zweites, dem ersten paralleles Coordinatensystem x', y' gelegt, so ist dasselbe beweglich im Raume, seine Axen aber bleiben sich stets parallel: die Coordinaten von m_1 in Bezug auf dies bewegliche System sind:

$$\begin{aligned}x' &= x_1 - x_2 \\y' &= y_1 - y_2.\end{aligned}$$

Wäre z. B. m_2 die Sonne und m_1 die Erde, so würde ein auf der Sonne befindlicher Beobachter (wenn er an ihrer Axendrehung nicht theilnehmend gedacht wird), nur die Veränderungen der relativen Coordinaten x' und y' , aber nichts von seiner eigenen Lagenveränderung im Raume in Folge der translatorischen Bewegung der Sonne, d. h. nichts von der Aenderung der absoluten Coordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 wahrnehmen.

Durch Subtraction der beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x_1}{dt^2} &= - \frac{1}{m_1} f(r) \frac{x_1 - x_2}{r} \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= + \frac{1}{m_2} f(r) \frac{x_1 - x_2}{r}\end{aligned}$$

folgt:

$$\frac{d^2 (x_1 - x_2)}{dt^2} = - \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) f(r) \frac{x_1 - x_2}{r}.$$

Indem

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m},$$

wo

$$m = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

schreibt sich letztere Gleichung:

$$m \frac{d^2 (x_1 - x_2)}{dt^2} = - f(r) \frac{x_1 - x_2}{r}$$

analog

$$m \frac{d^2 (y_1 - y_2)}{dt^2} = - f(r) \frac{y_1 - y_2}{r}$$

oder

$$\left. \begin{aligned}m \frac{d^2 x'}{dt^2} + f(r) \frac{x'}{r} &= 0 \\ m \frac{d^2 y'}{dt^2} + f(r) \frac{y'}{r} &= 0\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

Das sind aber der Form nach genau die Bewegungsgleichungen des Falles, wo sich ein materieller Punkt um ein festes Centrum bewege. Die relative Bewegung von m_1 gegen m_2 findet mithin gerade so statt, wie wenn m_2 ein festes Centrum wäre, nur geschieht sie so, als ob nicht die wirkliche Masse m_1 des laufenden Punktes sich um m_2 bewege, sondern vielmehr m . Da aber m

$$m = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{1 + \frac{m_1}{m_2}},$$

wenn m_2 gegenüber m_1 sehr gross wird, wie das bei der Sonne gegenüber der Erde der Fall ist, sehr nahe gleich m_1 ist, so kann man sich in Wirklichkeit die Bewegung auf ein festes Centrum stets bezogen denken und spricht demgemäss in der theoretischen Astronomie kurz von „einem im Sinne der Mechanik festen System“.

Als erstes Integral der Gleichungen (9) der relativen Bewegung, wie auch für die analogen der absoluten Bewegung, ergibt sich durch Elimination von $f(r)$ unmittelbar der Flächensatz durch Multiplication der ersten Gleichung mit y , der zweiten mit x und Subtraction

$$m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = 0.$$

Da

$$\frac{d}{dt} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = + \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + x \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{dx}{dt} - y \frac{d^2 x}{dt^2},$$

so schreibt sich letztere Gleichung auch:

$$\frac{d}{dt} \left[m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \right] = 0,$$

also integrirt:

$$m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \text{constans} = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Die geometrische Bedeutung dieses sogenannten Flächensatzes wird sogleich bei Einführung von Polarcoordinaten ersichtlich werden.

Ein zweites Integral der Gleichungen (9) ergibt sich gleichfalls unmittelbar, indem man die erste mit $\frac{dx}{dt}$, die zweite mit $\frac{dy}{dt}$ multiplicirt und addirt

$$m \left(\frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = -f(r) - \frac{x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}}{r}.$$

Bezeichnet man den Abstand des Planeten von der Sonne mit r , so ist (vergl. Fig. 3)

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

durch Differentiation folgt hieraus:

$$\frac{x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}}{r} = \frac{dr}{dt}.$$

Mithin schreibt sich unsere letzte Gleichung auch

$$m \left(\frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = -f(r) \frac{dr}{dt}.$$

Da aber das Quadrat der Geschwindigkeit g gleich ist der Summe der Quadrate der Geschwindigkeitscomponenten:

$$g^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2,$$

so ergibt sich durch Differentiation und Division mit 2 hieraus:

$$\frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2 y}{dt^2} = g \frac{dg}{dt}.$$

Durch Einsetzen in obige Gleichung folgt daher:

$$d \left(\frac{mg^2}{2} \right) = -f(r) dr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Aus Fig. 3 (a. f. S.) ersieht man, dass der Ausdruck der rechten Seite letzterer Gleichung das Product der auf den Punkt m wirkenden Kraft $f(r)$ in die Projection des von m in der unendlich kleinen Zeit dt durchlaufenen Weges ds auf die Richtung dieser Kraft ist und man bezeichnet dieses Product als die von der Kraft während der Zeit dt geleistete Arbeit. Dieselbe ist negativ, wenn die Richtung der Bewegung derjenigen der Kraft entgegengesetzt ist, also in unserem Falle bei wachsendem r . Das halbe Product der Masse m in das Quadrat der Geschwindigkeit des Punktes hingegen bezeichnet man als seine lebendige Kraft. Unsere Gleichung besagt also, dass der Zuwachs der lebendigen Kraft gleich ist der von der Kraft in der Zeit dt geleisteten Elementararbeit. Durch Integration erhält man

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \right) = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \right) = 0$$

oder für die Klammergrößen ihre eben gefundenen Werthe, die Coordinaten des Schwerpunktes eingesetzt:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = 0,$$

also durch Integration

$$\frac{d \xi}{dt} = c_1$$

$$\frac{d \eta}{dt} = c_2$$

und nach abermaliger Integration

$$\left. \begin{aligned} \xi &= c_1 t + C_1 \\ \eta &= c_2 t + C_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

wo c_1, c_2, C_1, C_2 vier willkürliche Constanten. Diese Integralgleichungen besagen also, dass sich der Schwerpunkt S des Systemes m_1 und m_2 geradlinig und gleichförmig, d. h. so, als ob gar keine Kraft auf ihn wirkte, fortbewegt.

Erwähnen wollen wir bloss noch der Vollständigkeit halber, dass die Principien der lebendigen Kraft, der Flächen und der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes nicht bloss für das Zwei-Körper-Problem, sondern allgemein auch für das n -Körper-Problem erfüllt sind: es sind allgemeine Principe der analytischen Mechanik. Von diesen Verallgemeinerungen, die kein unmittelbares Interesse für uns haben, sehen wir hier jedoch ab, indem es uns nur darauf ankam, den Unterschied der absoluten und relativen Bewegung klarzustellen.

Wir wollen jetzt vielmehr in die Integrale der Flächen und lebendigen Kraft die Polarcoordinaten r und ϑ an Stelle von x und y einführen. Dadurch gelangen wir, worauf unsere ganzen Betrachtungen in dieser Vorlesung abzielen, unmittelbar erstens zu der Relation zwischen r und ϑ , welche die Gleichung der Bahncurve darstellt, und zweitens zur Relation zwischen r und t , welche die Beziehung zwischen der Zeit und dem Orte des Beweglichen in seiner Bahn repräsentirt; r und ϑ sind also jetzt mit der Zeit veränderliche Grössen. Im Hinblick auf die dritte Vorlesung sei bemerkt, dass ϑ , die Länge gezählt von einer festen Richtung in der Bahn, zu unterscheiden ist von der wahren Anomalie v , welche von der Richtung nach dem Perihel ab gezählt wird. Aus der Figur folgt nun

$$x = r \cos \vartheta$$

$$y = r \sin \vartheta,$$

also durch Differentiation

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dr}{dt} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dr}{dt} \sin \vartheta + r \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

Durch Multiplication der ersten dieser Gleichungen mit $-r \sin \vartheta$, der zweiten mit $+r \cos \vartheta$ und Addition erhält man aber:

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r^2 \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Unser früheres Integral

$$m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = C$$

schreibt sich also auch:

$$mr^2 \frac{d\vartheta}{dt} = C$$

oder wenn man

$$\frac{C}{m} = C_1$$

setzt:

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = C_1 \dots \dots \dots (15)$$

Die geometrische Bedeutung der Grösse $x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}$ oder $r^2 \frac{d\vartheta}{dt}$ ergibt sich jetzt aus der Figur 3 sofort. Da $d\vartheta$ der Zuwachs des Winkels ϑ in der Zeit dt ist, während welcher der materielle Punkt m das Wegelement ds durchlaufen hat, so können wir das auf OD gefällte Perpendikel BC , welches, da wir es mit Infinitesimalgrössen zu thun haben, unendlich klein ist, auch als Kreisbogen um O betrachten, der auf OD senkrecht steht, wenn das Dreieck ODB unendlich klein ist. Es ist mithin $BC = rd\vartheta$; der Flächeninhalt des Dreieckes OBD , dessen Basis OB und dessen Höhe BC ist, ist mithin:

$$\frac{1}{2} (OB \cdot BC) = \frac{1}{2} r^2 d\vartheta.$$

Aus der Gleichung

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = C_1$$

folgt aber

$$r^2 d\vartheta = C_1 dt = OB \cdot BC.$$

Somit repräsentirt $r^2 d\vartheta$ die doppelte unendlich kleine Dreiecksfläche, die eingeschlossen ist vom Element des Weges, das in der Zeit dt von m beschrieben wird und den beiden Radien vectoren r und $r + dr$. Der Radius vector beschreibt also in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume. Im Falle der Planetenbewegung, wo der von der Sonne nach dem Himmelskörper gezogene Radius vector in der Bahn die Fläche der Zeit proportional bestreicht, repräsentirt dies Princip das sogenannte zweite Kepler'sche Gesetz.

Da $r^2 d\vartheta = xdy - ydx$ das in der Zeit dt vom Radius vector beschriebene doppelte unendlich kleine Flächenstück darstellt, so repräsentirt offenbar der Ausdruck $\frac{1}{2} r^2 \frac{d\vartheta}{dt}$ die Flächengeschwindigkeit, ganz analog wie $\frac{ds}{dt}$ als Liniengeschwindigkeit defnirt wird, wobei s die Bahnlänge von einem festen Punkte bis zu dem benachbarten ist.

Wir führen nun noch in das zweite Integral unserer allgemeinen Differentialgleichungen (9), in dasjenige der lebendigen Kraft, Polarcoordinaten ein. Die Gleichung

$$g^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2$$

wird dann mit Hinblick auf die Gleichungen (14):

$$\begin{aligned} g^2 &= \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \cos^2 \vartheta - 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\vartheta}{dt} r \cos \vartheta \sin \vartheta + r^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \\ &+ \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \sin^2 \vartheta + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\vartheta}{dt} r \cos \vartheta \sin \vartheta + r^2 \cos^2 \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

oder:

$$g^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2.$$

Die Gleichung der lebendigen Kraft schreibt sich mithin auch:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = C_2 - \frac{2\varphi(r)}{m} \dots \dots \dots (16)$$

indem zur Abkürzung die Constante

$$\frac{2C'}{m} = C_2$$

gesetzt und $\varphi(r)$ eine beliebige Function von der Eigenschaft ist, unbestimmtes Integral von $f(r)$ zu sein.

Aus den beiden Differentialgleichungen

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = C_1 \dots \dots \dots (17)$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = C_2 - \frac{2\varphi(r)}{m} \dots \dots \dots (18)$$

ergiebt sich zunächst direct die Relation zwischen der Zeit und dem Orte des Beweglichen in seiner Bahn. Durch Quadriren von Gleichung (17) erhält man zunächst:

$$r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{C_1^2}{r^2}.$$

Durch Einsetzen dieses Werthes in Gleichung (18) folgt

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = C_2 - \frac{2\varphi(r)}{m} - \frac{C_1^2}{r^2},$$

also die Beziehung zwischen Zeit und Ort in der Bahn ganz allgemein

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{C_2 - \frac{2\varphi(r)}{m} - \frac{C_1^2}{r^2}}} \dots \dots \dots (19)$$

Um die Gleichung der Bahncurve zu finden, könnte man in

$$d\vartheta = \frac{C_1 dt}{r^2}$$

die aus Gleichung (19) für t gefundene Function von r einsetzen. Wir schreiben jedoch

$$dt = \frac{r^2 d\vartheta}{C_1}$$

und erhalten im Hinblick auf Gleichung (19):

$$\frac{r^2 d\vartheta}{C_1} = \frac{dr}{\sqrt{C_2 - \frac{2\varphi(r)}{m} - \frac{C_1^2}{r^2}}}$$

oder:

$$\vartheta = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{C_2}{C_1^2} - \frac{2\varphi(r)}{m C_1^2} - \frac{1}{r^2}}} \dots \dots \dots (20)$$

die Gleichung der Bahncurve.

Setzen wir jetzt in den beiden Relationen

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{C_2 - \frac{2\varphi(r)}{m} - \frac{C_1^2}{r^2}}} \dots \dots \dots (21)$$

$$\vartheta = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{C_2}{C_1^2} - \frac{2\varphi(r)}{m C_1^2} - \frac{1}{r^2}}} \dots \dots \dots (22)$$

für $f(r)$ das Newton'sche Gravitationsgesetz ein [indem $\varphi(r) = \int f(r) dr$], so ergibt sich unmittelbar die Kepler'sche Bewegung, wie sie in der Natur für die Planeten und Kometen um die Sonne also genähert stattfindet. Ehe wir jedoch diese Substitution durchführen, ist es gegeben, zuvor eine allgemeine Erklärung der sechs elliptischen Bahnelemente, welche die Position eines Himmelskörpers vollständig bestimmen, voranzuschicken, weil dieselben als die sechs Integrationsconstanten der Kepler'schen Bewegung auftreten.

Dritte Vorlesung.

Die Bahnelemente.

Die Lage eines Planeten ist vollständig charakterisirt, wenn man erstens die Grösse und Form seiner Bahnellipse, zweitens deren Lage im Raume, drittens die Stellung des Planeten in dieser Bahnellipse kennt. Diese Bestimmungen werden aber durch sechs Grössen, die für die Kepler'sche (ungestörte) Bewegung Constanten sind, eindeutig gegeben. Man bezeichnet diese sechs Constanten in der Astronomie als die Kepler'schen Elemente oder als die Bahnelemente, weil sie die Bahn vollständig charakterisiren. Um diese sechs Bestimmungsstücke einer Bahn zu erhalten, denken wir uns den Ursprung des Coordinatensystems in den Mittelpunkt der Sonne gelegt. Um die Sonne als Centrum denken wir uns nun eine Kugel vom Radius 1 construirt, deren Durchschnittspunkte mit den drei Coordinatenaxen bezüglich X , Y , Z seien. Als xy -Ebene wählen wir die Ebene der Erdbahn, in ihrer mittleren Lage, die sogenannte mittlere Ekliptik (cf. Vorlesung 14), und denken die x -Axe nach demjenigen der beiden Schnittpunkte von Aequator und Ekliptik gezogen, in welchem die Sonne von der Erde aus gesehen zu Frühlingsanfang, d. h. am 20. März, steht. Diese Richtung „Erde-Sonne“ wird dann allgemein als die Richtung nach dem Frühlingspunkte Υ bezeichnet, welches auch der Standpunkt sein mag. Von der Sonne aus gesehen steht die Erde ein halbes Jahr später oder früher im Frühlingspunkte. Da aber, wie im Capitel der Theorie der Bewegung der Erdaxe gezeigt werden wird, der Widderpunkt in Folge der Präcession einer langsamen rückläufigen Bewegung auf der Ekliptik, deren Lage selbst veränderlich ist, unterworfen ist, so bezieht man in der Bahnrechnung, um einen bestimmten Ausgangspunkt zu haben, die Elemente im Allgemeinen auf das sogenannte „mittlere Aequinoctium“ des Beobachtungsjahres, welches nur durch Säcularglieder bedingt ist im Gegensatze zum wahren, das ausser den säcularen noch die periodischen Glieder enthält (cf. Theorie der Bewegung der Erdaxe, Vorlesung 14). Man bezieht dabei auf das Aequinoctium des betreffenden Jahrzehnts, wenn die Beobachtungen in verschiedenen Jahren liegen, aus welchem Grunde das Berliner Jahrbuch ausser den Sonnencoordinaten des Jahresanfanges auch noch ihre Reductionen auf den Anfang eines Jahrzehnts giebt.

Es zeigt nun die x -Axe unseres Coordinatensystems nach dem Widderpunkte, die y -Axe, senkrecht zur x -Axe, liegt in der Ekliptik, die z -Axe zeigt also nach dem Nordpol der Ekliptik. Die Ebene SXY (cf. Fig. 4) bezeichnet mithin die Ebene der Erdbahn. Der Sinn $XS Y$ entspricht der Bewegung der Sonne in ihrer scheinbaren Bahn am Himmel (directe Bewegung) oder, vom Südpol aus gesehen, der Bewegung eines Uhrzeigers.

Die Bahn irgend eines Objectes, welches sich gleichfalls um die Sonne bewegt, jedoch in einer etwas gegen die Ekliptik geneigten Ebene (wie es bei den Planeten

der Fall ist), schneidet somit die Ekliptik in der Linie SA , der sogenannten Knotenlinie, indem der grösste Kreis, in welchem die Planetenbahn die Kugel vom Radius 1 schneidet, bezüglich AB sei. Der Winkel dieser Knotenlinie SA mit der Richtung nach dem Widderpunkte, wird die „Länge des aufsteigenden Knotens“ oder auch kürzer einfach „der Knoten“ genannt und mit \odot bezeichnet. Der Schnittpunkt von Ekliptik und Planetenbahn aber heisst der „Knotenpunkt“ und wird in der Figur häufig gleichfalls mit \odot bezeichnet, was zu keinerlei Verwechselungen Anlass geben kann. Da nun aber jeder Planet oder Komet bei jedem seiner Umläufe um die Sonne die Ebene der Erdbahn zweimal passiren muss, einmal, wenn er von südlichen zu nördlichen heliocentrischen Breiten gelangt, das andere Mal, wenn er von nördlichen zu südlichen übergeht, so hat man auch zwei Knotenpunkte zu unterscheiden, wobei man den erstgenannten Schnittpunkt der Ekliptik mit der Bahn als den „aufsteigenden Knoten“ (\odot), den zweiten hingegen als den „absteigenden Knoten“ (γ) zu bezeichnen pflegt. Dementsprechend unterscheidet man auch die Länge des aufsteigenden Knotens von der Länge des ab-

Fig. 4.

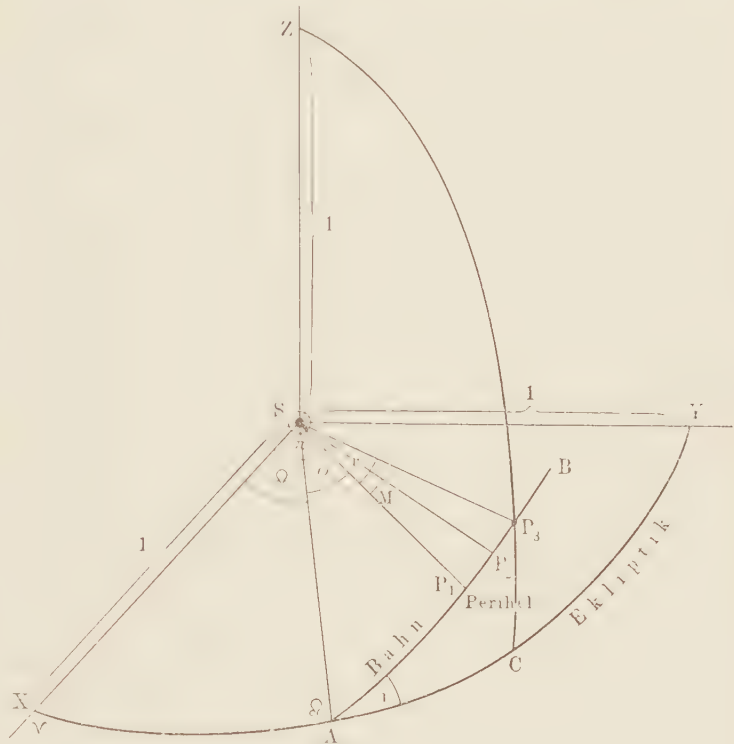
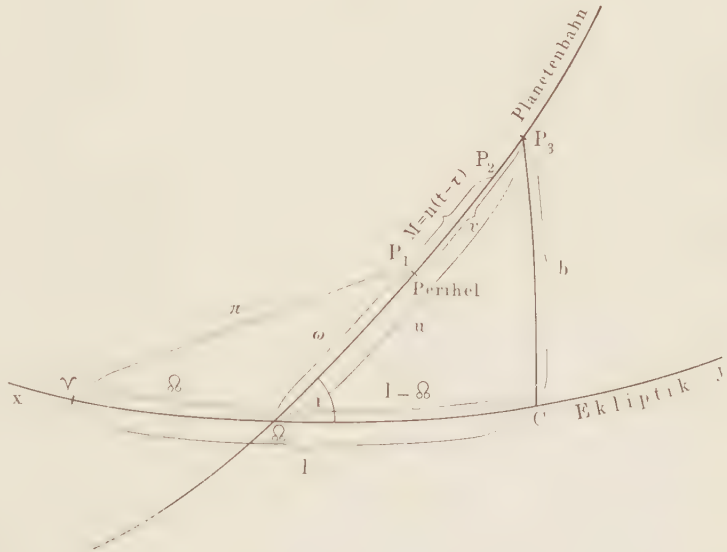


Fig. 5.



steigenden Knotens von der Länge des ab-

steigenden Knotens. Der Neigungswinkel ferner zwischen der Planeten- oder Kometenbahn und der Erdbahn wird nach allgemein eingeführtem Gebrauch mit i bezeichnet. Sobald \varnothing und i gegeben sind, ist die Lage der Bahnebene im Raume mithin vollständig bestimmt.

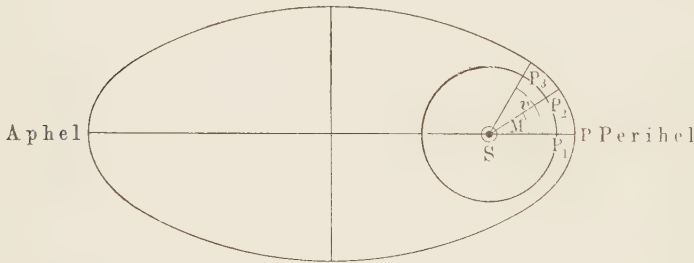
Um die Lage des Planeten in seiner Bahnebene zu bestimmen, braucht man zwei weitere Bestimmungsstücke. Zieht man nämlich von der Sonne nach demjenigen Punkte der Bahn, in dem der Körper der Sonne am nächsten steht, dem sogenannten „Perihel“ P , eine Linie, welche unsere Kugel vom Radius 1 um die Sonne im Punkte P_1 schneiden möge, dann bezeichnet man die Summe der zwei Winkel XSA und ASP_1 als die „Länge des Periheles“ π , so dass also:

$$\pi = \varnothing + \omega$$

ein gebrochener Bogen ist, der in der Ekliptik vom Frühlingspunkte Υ bis zum Knoten \varnothing und von da weiter in der Planetenbahn bis zum Perihel gezählt wird (Fig. 4 u. 5).

Es fehlt jetzt, damit nicht bloss die Lage der beschriebenen Bahn, sondern die Lage des Gestirnes im Raume vollständig bekannt werde, nur noch eine Angabe über den Punkt der Bahn, in welchem sich der Körper zu einer gegebenen Zeitepoche befunden hat: die Angabe der Zeit des Periheldurchganges T , die bei Kometen stets

Fig. 6.



gewählt wird. Bei Planeten giebt man auch ein anderes Bestimmungsstück. Denkt man sich dazu von der Sonne nach dem Planeten, der sich zur Zeit t irgendwo im Raume befinde, in dieser beliebigen Lage eine Linie gezogen, so wird der grösste Kreis auf der Kugel, indem die Bahnebene die Kugel schneidet

(in der Figur durch AB repräsentirt), durch diese Gerade in Punkt P_3 geschnitten. Man bezeichnet dann den Winkel P_1SP_3 als die wahre Anomalie, v , des Planeten. Die beiden Grössen π und v würden nun die Lage des Planeten geben. Man zieht es aber vor, an Stelle von v die mittlere Anomalie M als zweites Bestimmungsstück der Lage des Planeten in seiner Bahn neben π zu geben, die direct bekannt ist, während v , wie wir sehen werden, aus M berechnet werden kann (Fig. 6). Man denkt sich einen Hülfsplaneten, der vom Perihel zur selben Zeit ausgehend wie der wirkliche Planet, die Sonne in einer vollständigen Kreisbahn vom Radius 1 mit derselben Umlaufszeit und mit gleichförmiger Geschwindigkeit umkreist. Der in einer beliebigen Zeit t von diesem idealen Planeten beschriebene Winkel M ist also allgemein gegeben durch:

$$M = at + b,$$

wo a und b zwei zu bestimmende Constanten. Steht nun der Planet in seinem Perihel, so ist, indem τ die Perihelzeit:

$$t = \tau$$

also:

$$a\tau + b = 0.$$

Nach einem totalen Umlauf ist die Zeit allgemein um $\frac{2\pi}{n}$, der Winkel M um 2π gewachsen, wenn n die durchschnittliche Winkelbewegung in der Zeiteinheit des mittleren Sonnentages, d. h. die „mittlere tägliche Bewegung“ bedeutet. Dann also ist:

$$t = \frac{2\pi}{n} + \tau$$

$$a \frac{2\pi}{n} + a\tau + b = 2\pi,$$

also:

$$a \frac{2\pi}{n} = 2\pi,$$

d. h.

$$a = n,$$

$$b = -n\tau$$

also:

$$M = at + b = n(t - \tau).$$

Dieser Winkel, den der ideale Planet mit constanter Geschwindigkeit in der Zeit $(t - \tau)$ beschrieben hat, ist es, den man als die mittlere Anomalie M bezeichnet, mit deren Hülfe man dann, wie wir sehen werden, durch Auflösen der Kepler'schen Gleichung die sogenannte excentrische Anomalie E bestimmt, aus der sich unmittelbar die wahre Anomalie v ergibt. Man sieht, dass, während der wirkliche Planet einen ganzen Umlauf macht, d. h. während der Zeit $\frac{2\pi}{n}$, der Hilfsplanet den Winkel

$\frac{2\pi}{n} \cdot n = 2\pi$, d. h. seine ganze Bahn beschreibt, da der Radius des Kreises $= 1$ an-

genommen wurde. Da die Umlaufszeiten beider Planeten, des wirklichen und des fingirten, gleich sind, der erstere sich aber mit seiner stetig veränderlichen Geschwindigkeit gemäss dem zweiten Kepler'schen Gesetze im Perihel schneller, im Aphel langsamer um die Sonne bewegt, so wird der wahre Planet anfangs dem idealen vorausseilen (weshalb wir in den Figuren $v > M$ gezeichnet haben), dann aber im Aphel wieder mit ihm zusammentreffen, hierauf hinter ihm zurückbleiben, bis nach einem gemeinsamen Umlaufe beide Planeten gerade in den Perihelien P und P_1 wieder zusammentreffen.

Aus dieser Vorstellungsweise geht auch die Unterscheidung der allgemein gebräuchlichen sogenannten mittleren Länge und wahren Länge hervor. Während man, wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich, die vom Perihel gezählten Winkel allgemein Anomalien nennt, bezeichnet man herkömmlicher Weise die vom Widderpunkte aus in der Ekliptik bis zum Knoten und von da weiter in der Planetenbahn gezählten Winkel als „Längen“. Man versteht demnach unter

$$\varnothing + \omega + v = \pi + v = w$$

die wahre Länge in der Bahn (d. h. die Länge des wahren Planeten), und unter

$$\varnothing + \omega + M = \pi + M = L$$

die mittlere Länge in der Bahn (d. h. die Länge des mittleren Planeten). Die Grösse

$$\omega + v = u$$

nennt man das Argument der Breite, w und L sind also gebrochene Bogen ebenso wie π .

Legt man schliesslich noch durch Punkt Z , in dem die Kugel die z -Axe schneidet, und durch Punkt P_3 , in dem der Radius vector, d. h. die Linie von der Sonne nach dem wahren Planeten, die Kugel schneidet, einen grössten Kreis, der die Ekliptik im Punkte C schneide, so ist P_3Z die Poldistanz des Planeten, an deren Stelle man jedoch ihr Complement $P_3C = 90^\circ - P_3Z$ einführt. Man nennt diesen Winkel die heliocentrische Breite des Planeten und bezeichnet dieselbe mit b .

Die Entfernung des Fusspunktes des sphärischen Lothes b vom Frühlingspunkte hingegen bezeichnet man als die heliocentrische Länge l , des Planeten, die also in der Ekliptik gezählt wird und nicht zu verwechseln ist mit der Länge in der Bahn, deren man zwei unterscheidet, eine wahre und eine mittlere.

Nachdem durch Ω und i die Lage der Bahnebene im Raume, durch π und M resp. τ die Lage des Objectes in seiner Bahn eindeutig bestimmt ist, erübrigt es nur noch, zu erwähnen, dass die Gestalt und die Dimension der Bahn durch die halbe grosse Axe der Bahn, a , und die Excentricität e , bei Kometen durch den kleinsten Radius vector, d. h. den Perihelabstand q und die Excentricität bestimmt wird. Dabei führt man aber in der Astronomie an Stelle der linearen Excentricität die sogenannte numerische Excentricität ein, d. i. die erstere dividirt durch a .

Zum Schluss sei noch erwähnt, dass man die mittlere Anomalie M in der Regel durch die sogenannte „mittlere Länge der Epoche“ ε ausdrückt, die nichts Anderes ist als die Länge des Hilfsplaneten zur Anfangszeit. Man erhält dieselbe also, indem man die mittlere Länge $\pi + n(t - \tau)$, welche für verschiedene Zeiten verschiedene Werthe hat, für die Anfangszeit $t = 0$ nimmt:

$$\varepsilon = \pi - n\tau.$$

Die Grösse ε bezieht sich also nicht auf die Perihelzeit τ , sondern auf die Anfangszeit und hat somit eine bestimmte geometrische Bedeutung. Durch die sechs Bahnelemente:

$$\begin{pmatrix} a \\ q \end{pmatrix}, e, i, \Omega, \begin{pmatrix} \pi \\ \omega \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tau \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

ist also die Lage des Planeten im Raume zur Zeit t vollständig bestimmt.

Bei den Kometen tritt die Nothwendigkeit ein, bei Angabe der Bahnelemente den Sinn der Bewegung anzugeben. Dieser ist entweder so wie bei der Erde und den bis jetzt bekannten Planeten, bei welchen die heliocentrischen Längen mit der Zeit wachsen, und dann nennt man die Bewegung direct; oder die heliocentrischen Längen nehmen fortwährend ab, und der Komet ist retrograd. Im ersteren Falle pflegt den Elementen des Kometen wohl ein blosses D , im letzteren ein R hinzugefügt zu werden.

Ausserdem ist es seit Gauss auch gebräuchlich geworden, die Bahnen retrograder Kometen als Bahnen mit stumpfem Neigungswinkel gegen die Ekliptik zu bezeichnen. Wäre z. B. bei einem Kometen $i = 30^\circ$, Bewegung retrograd angegeben, so kann man beide Umstände in der Angabe $i = 150^\circ$ vereinigen; nur muss dann gleichzeitig $\pi - \Omega$ in $360^\circ - (\pi - \Omega)$ verwandelt werden, da bei der älteren Zählungsweise der Winkel $\pi - \Omega$ im Sinne der Längen gezählt wird, also für eine Bahn, deren i gerade durch 90° hindurchgeht, plötzlich das Vorzeichen ändert, während dagegen bei der neueren Zählungsweise $\pi - \Omega$ stets in dem Sinne der Bewegung des Radius vectors in der Bahn gerechnet, jene Discontinuität bei $i = 90^\circ$ also nicht mehr vorhanden ist.

Dieser Gebrauch, die Neigung i von 0 bis 180 durchzuzählen, ist jetzt der vorherrschende.

Vierte Vorlesung.

Die Kepler'sche Bewegung in Kegelschnitten um die Sonne.

Die Ellipse.

Wir wollen die Integration zunächst für die Ellipse ausführen, da dieselbe für die übrigen Bewegungen typisch ist. Wenn wir in den in der zweiten Vorlesung abgeleiteten allgemeinen Integraalausdruck, welcher die Gleichung der Bahncurve bei einer beliebigen Centralbewegung repräsentirte:

$$d\vartheta = \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{C_2}{C_1^2} - \frac{2\varphi(r)}{m C_1^2} - \frac{1}{r^2}}} \dots \dots \dots (1)$$

an Stelle eines beliebigen Kraftgesetzes das Newton'sche Gravitationsgesetz einführen, also:

$$f(r) = \frac{k^2(1+m)m}{r^2},$$

$$\varphi(r) = -\frac{k^2(1+m)m}{r},$$

setzen, so folgt zunächst:

$$d\vartheta = \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{C_2}{C_1^2} + \frac{2k^2(1+m)}{C_1^2 r} - \frac{1}{r^2}}} \dots \dots \dots (2)$$

oder, wenn man

$$\frac{1}{r} = \chi,$$

also:

$$dr = -\frac{d\chi}{\chi^2}$$

setzt, auch:

$$d\vartheta = -\frac{d\chi}{\sqrt{\frac{C_2}{C_1^2} + \frac{2k^2(1+m)}{C_1^2} \chi - \chi^2}} = -\frac{d\chi}{\sqrt{\frac{C_2}{C_1^2} + \frac{k^4(1+m)^2}{C_1^4} \left[\chi - \frac{k^2(1+m)}{C_1^2} \right]^2}}$$

Setzt man jetzt:

$$\chi - \frac{k^2(1+m)}{C_1^2} = \psi$$

$$\frac{C_2}{C_1^2} + \frac{k^4(1+m)^2}{C_1^4} = \alpha^2,$$

so folgt:

$$d\vartheta = -\frac{d\psi}{\sqrt{\alpha^2 - \psi^2}} = -\frac{d\left(\frac{\psi}{\alpha}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\psi}{\alpha}\right)^2}} = d \arccos \frac{\psi}{\alpha} \dots \dots (3)$$

Bezeichnet man die Integrationsconstante mit π , da sich dieselbe, wenn man unter ϑ die „wahre Länge des Himmelskörpers in der Bahn“ (cf. Vorlesung 3) versteht, nachher als die in der dritten Vorlesung definirte und mit π bezeichnete „Perihellänge“ herausstellen wird, so ergibt sich durch Integration:

$$\vartheta - \pi = \arccos \frac{\psi}{\alpha},$$

also:

$$\psi = \alpha \cos (\vartheta - \pi).$$

Durch Einsetzen erhält man mithin:

$$\frac{1}{r} - \frac{k^2(1+m)}{C_1^2} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1^2} + \frac{k^4(1+m)^2}{C_1^4}} \cos (\vartheta - \pi)$$

oder:

$$\frac{1}{r} = \frac{k^2(1+m)}{C_1^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{C_2 C_1^2}{k^4(1+m)^2}} \cos (\vartheta - \pi) \right].$$

Setzen wir nun:

$$e = \sqrt{1 + \frac{C_2 C_1^2}{k^4(1+m)^2}},$$

also:

$$e^2 = 1 + \frac{C_2 C_1^2}{k^4(1+m)^2},$$

so wird:

$$\frac{1}{r} = \frac{k^2(1+m)}{C_1^2} \{1 + e \cos(\vartheta - \pi)\},$$

oder:

$$r = \frac{\frac{C_1^2}{k^2(1+m)}}{1 + e \cos(\vartheta - \pi)} \dots \dots \dots (4)$$

Aus der analytischen Geometrie setzen wir als bekannt voraus, dass dies die Polargleichung eines Kegelschnittes ist, der, wenn $e < 1$, eine Ellipse repräsentirt; wenn $e = 1$, eine Parabel; wenn $e > 1$, hingegen eine Hyperbel.

Nun war allgemein [cf. Gleichung (12) S. 18],

$$g^2 = -\frac{2\varphi(r)}{m} + C_2.$$

Für das Newton'sche Gesetz ist demnach:

$$g^2 = \frac{2k^2(1+m)}{r} + C_2.$$

Geht die Bahn ins Unendliche, d. h. wird r unendlich, so wird:

$$g = \sqrt{C_2}.$$

Wenn C_2 negativ ist, so kann der Körper sich offenbar nie ins Unendliche entfernen, da sonst die Bahn imaginär würde, es wird dann also eine Ellipse beschrieben. Wird C_2 Null, so wird g allmähig Null, d. h. die Bahn geht ins Unendliche, und im Unendlichen nimmt die Geschwindigkeit bis Null ab. Das ist bei der Parabel der Fall. Ist schliesslich C_2 positiv, so ist auch die Geschwindigkeit g noch im Unendlichen reell; und umgekehrt, kommt ein Komet mit endlicher Geschwindigkeit aus dem Unendlichen, so wird seine Bahn eine Hyperbel sein.

Aus Fig. 7 folgt, dass für $\vartheta - \pi = v = 0$:

$$r = SP = a(1 - e),$$

also:

$$\frac{C_1^2}{k^2(1+m)(1+e)} = a(1 - e)$$

oder:

$$\frac{C_1^2}{k^2(1+m)} = a(1 - e^2)$$

wird. Eingesetzt folgt die Ellipsengleichung in ihrer gewöhnlichen Form:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\vartheta - \pi)} = \frac{p}{1 + e \cos v} \dots \dots \dots (5)$$

wobei die durch den Brennpunkt gehende, auf der grossen Halbaxe senkrechte halbe Sehne p der Parameter der Ellipse genannt wird. Die Relation (5) ist also der allgemeine Ausdruck für das erste Kepler'sche Gesetz, welches besagt, dass sich die Planeten um die Sonne in Ellipsen drehen, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht.

Um die Beziehung zwischen der Zeit und dem Orte des Planeten in seiner Bahn festzustellen, haben wir den am Schlusse der zweiten Vorlesung abgeleiteten allgemeinen Integraalausdruck:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{C_2 - \frac{2\varphi(r)}{m} - \frac{C_1^2}{r^2}}} \dots \dots \dots (6)$$

für das Gravitationsgesetz zu lösen. Dazu führen wir eine Hilfsgrösse E ein, mittelst der Gleichung:

zurückgekommen ist u. s. w. Es ist also, wenn wir mit T die Umlaufszeit des Planeten (die Zeit von einem Periheldurchgange zum nächsten) bezeichnen:

$$nT = 2\pi.$$

Betrachtet man noch einen zweiten Planeten, den wir durch den Index ' bezeichnen, so besteht die Relation:

$$nT = n'T',$$

oder, wenn man n durch seinen Werth ersetzt:

$$\frac{k\sqrt{1+m}}{a^{3/2}} T = \frac{k\sqrt{1+m'}}{a'^{3/2}} T',$$

oder:

$$T : T' = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{1+m}} : \frac{a'^{3/2}}{\sqrt{1+m'}} \dots \dots \dots (14)$$

Das ist das „verbesserte dritte Kepler'sche Gesetz.“ Vernachlässigt man die kleinen Planetenmassen m und m' , so folgt hieraus das dritte Kepler'sche Gesetz in der von Kepler gegebenen Form:

$$T^2 : T'^2 = a^3 : a'^3 \dots \dots \dots (15)$$

die also nur näherungsweise richtig ist.

Man drückt dasselbe gewöhnlich wie folgt aus: Die Quadrate der Umlaufzeiten verschiedener Planeten verhalten sich wie die Cuben ihrer grossen Halbaxen.

Das zweite Kepler'sche Gesetz folgt unmittelbar, indem man in der allgemeinen Form des Flächensatzes, wie er für jede Centralbewegung erfüllt ist (cf. Vorlesung 2):

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = C_1 \dots \dots \dots (16)$$

an Stelle der Constanten C_1 ihren für das Gravitationsgesetz gültigen, bereits abgeleiteten Werth:

$$\frac{C_1^2}{k^2(1+m)} = a(1-e^2),$$

d. h.:

$$C_1 = \sqrt{k^2(1+m)} \sqrt{a(1-e^2)} = \sqrt{\mu} \sqrt{a(1-e^2)}$$

einsetzt, und in denselben noch den Parameter p :

$$p = a(1-e^2)$$

einführt. So folgt:

$$C_1 = \sqrt{\mu p} = k\sqrt{p(1+m)},$$

also:

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = k\sqrt{p(1+m)} = \text{constans} \dots \dots \dots (17)$$

der Ausdruck für das zweite Kepler'sche Gesetz, welches besagt, dass der von der Sonne nach dem Planeten gezogene Radius vector in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume bestreicht. Der früher allgemein definirte Ausdruck der Flächengeschwindigkeit wird somit für das Gravitationsgesetz

$$F = 1/2 k\sqrt{p(1+m)}.$$

Mit Hülfe des zweiten Kepler'schen Gesetzes lässt sich der Werth der Gauss'schen Constanten k bestimmen. Da nach dem Früheren

$$r^2 d\vartheta = 2d(\text{Sector}),$$

wobei „ d Sector“ im Sinne von Vorlesung 2 die in der Zeit dt beschriebene unendlich kleine Dreiecksfläche bezeichnet, so ist:

$$k = \frac{2 \times \text{Sector}}{t\sqrt{p(1+m)}}.$$

Setzt man für t die Zeit eines Umlaufes in der Bahnellipse, so hat man an Stelle des

Sectors die Ellipsenfläche $ab\pi$ zu setzen und erhält so für die Gravitationsconstante den Werth:

$$k = \frac{2\pi a^{3/2}}{T\sqrt{1+m}} \dots\dots\dots (18)$$

Während sich das erste und zweite Kepler'sche Gesetz auf einen Planeten für sich bezieht, stellt das dritte eine Beziehung zwischen verschiedenen Planeten fest. Und alle drei Gesetze gelten, um das nochmals hervorzuheben, streng nur für das Zweikörperproblem, also unter der Voraussetzung, dass die Massen der übrigen Planeten Null sind, sowie dass das dritte Gesetz verbessert wird.

Stellen wir die Kepler'schen Gesetze der Uebersicht halber zusammen, so erfolgt also zunächst die Bewegung eines Himmelskörpers in einer Ebene, die durch den Mittelpunkt der Sonne geht, wie zu Beginn der zweiten Vorlesung gezeigt wurde. In dieser Ebene bewegen sich

1. die Planeten in Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht. Der mathematische Ausdruck dieses Gesetzes ist durch die Ellipsengleichung gegeben:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} \dots\dots\dots (19)$$

während hingegen die Kometen ausser elliptischen auch noch hyperbolische, zumeist aber genähert parabolische Bahnen beschreiben.

2. Beschreiben die von der Sonne nach dem Planeten gezogenen Radien vectoren der Zeit proportionale Flächen; mit anderen Worten, die in einer und derselben Bahn beschriebenen Flächen verhalten sich wie die Zeiten, in denen sie beschrieben werden. Bezeichnet also F die vom Radius vector in der Zeit $(t - t_0)$ beschriebene Fläche und T die Umlaufszeit, so beschreibt der Radius vector in der Zeit T die ganze Fläche der Ellipse $ab\pi$, in der Zeit $t - t_0$ also die Fläche:

$$F = ab\pi \frac{t - t_0}{T},$$

da sie der Zeit proportional durchlaufen wird, oder, bei Einführung der Werthe von

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

$$p = a(1 - e^2),$$

auch

$$F = a^2\pi\sqrt{1 - e^2} \frac{(t - t_0)}{T},$$

oder:

$$F = a^{3/2}\pi\sqrt{p} \frac{(t - t_0)}{T} \dots\dots\dots (20)$$

was auch der Ausdruck des zweiten Kepler'schen Gesetzes ist.

Die früher für dasselbe aus dem Gravitationsgesetze abgeleitete Differentialformel kann man auch gewinnen, indem man in diesen letzteren Ausdruck den aus dem dritten Kepler'schen Gesetze:

$$T^2(1 + m) = \frac{4\pi^2 a^3}{k^2}$$

für T folgenden Werth substituirt. Dadurch erhält man die Umlaufszeit T eliminirt und die Fläche direct geometrisch ausgedrückt:

$$Fl. = \frac{k\sqrt{p}}{2} \sqrt{1+m} (t - t_0),$$

Durch Differentiation folgt hieraus:

$$d\text{Fl.} = \frac{k\sqrt{p}\sqrt{1+m}}{2} dt,$$

oder:
$$\frac{d\text{Fl.}}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{2} k \sqrt{p} \sqrt{1+m} = \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

das zweite Kepler'sche Gesetz in Form des eigentlichen Flächensatzes.

3. Verhalten sich bei zwei verschiedenen Bahnen die in gleichen Zeiten beschriebenen Flächen wie die Quadratwurzeln aus den Parametern, oder die Quadrate der Umlaufzeiten wie die Cuben der grossen Halbaxen. Analytisch findet dies Gesetz seinen Ausdruck in folgenden verschiedenen Formen:

$$T^2 : T'^2 = a^3 : a'^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Oder:
$$\frac{(1+m) T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{k^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Oder, bei Einführung der mittleren Winkelbewegung n in einen mittleren Sonnentag, d. h. der Zunahme der mittleren Anomalie in der Zeiteinheit:

$$n^2 a^3 = k^2 (1+m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

In allen diesen verschiedenen Formen findet das dritte Kepler'sche Gesetz seinen Ausdruck.

Mittelst desselben kann man die bereits aus dem zweiten Gesetze abgeleitete Gauss'sche Constante gleichfalls ableiten. Multiplicirt man nämlich den für das ganze System nach dem dritten Gesetze bestehenden Ausdruck:

$$\frac{a^3}{T^2(1+m)} = \frac{a'^3}{T'^2(1+m')} = \frac{a''^3}{T''^2(1+m'')} = \dots = \text{const.}$$

mit $4\pi^2$, so bleibt der so entstehende Werth auch constant und diese für jeden Planeten constante Grösse ist eben die von Gauss in die rechnende Astronomie eingeführte Gauss'sche Constante:

$$k^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2(1+m)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Die Dimension dieser allgemeinen Gravitationsconstante ist offenbar:

$$\text{Dimension } k = \frac{(\text{Länge})^{3/2}}{\text{Zeit} \times (\text{Masse})^{1/2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

d. h. der numerische Werth von k hängt von Zeit-Längen-Massen-Einheit ab. In den numerischen Rechnungen spielt fast nur $\log k$ eine Rolle; der von Gauss in der Theoria motus corporum coelestium abgeleitete, in allen derartigen Rechnungen adoptirte Werth ist:

$$\log k = 8,2355814414 - 10,$$

ferner ist:

$$k = 0,0172021$$

$$k^2 = 0,0002959 = \frac{2959}{10^7}$$

$$k = 3548'',188; \quad \log k = 3,5500065746.$$

Diese Werthe gewinnt Gauss, indem er als Längeneinheit die grosse Halbaxe der Erdbahn gewählt, d. h. $a = 1$ gesetzt, die Umlaufzeit T in mittleren Sonnentagen:

$$T = 365,2563835$$

und die Erdmasse m in Einheiten der Sonnenmasse:

$$m = \frac{1}{354710}$$

ausgedrückt denkt. So erhält er:

$$\begin{aligned}\log T &= 2,562\,597\,8148 \\ \log \sqrt{1+m} &= 0,000\,000\,6122 \\ \log 2\pi &= 0,798\,179\,8684\end{aligned}$$

und eben auf Grund hiervon die angeführten Werthe. Der von Gauss berechnete numerische Werth von k ist indess nicht vollkommen genau; man besitzt jetzt einen genaueren Werth für die Erdmasse m , als zu Gauss' Zeit. Daher müsste eigentlich die Gauss'sche Constante etwas abgeändert werden, und zwar in der sechsten Decimale. Um indess diese in der ganzen rechnenden Astronomie verwendete Fundamentalconstante nicht immer von Zeit zu Zeit, wenn man zu einer genaueren Massenbestimmung der Erde gelangt, abändern zu müssen, entschloss man sich nach Leverrier's Vorgang (cf. Pariser Annalen, Bd. I), k zwar als Gauss'sche Constante beizubehalten, sie indess etwas anders zu definiren, dadurch, dass man die grosse Halbaxe der Erdbahn etwas abändert, indem man einfach statt der wirklichen Erde eine ideale Erde, die aber auch die Masse m der wirklichen hat, nicht in der Entfernung $a = 1$ und $\log a = 0$, wie es Gauss that, sondern in der Entfernung

$$\log a = 0,000\,000\,0381 \text{ und } a = 1,000\,0014$$

um die Sonne gehend denkt. Mit diesem Werthe ergibt sich dann wieder das der modernen Erdmassenbestimmung entsprechende alte Gauss'sche allgemein gebrauchte k der Theoria motus.

Es erübrigt nun noch einige wichtige Relationen zwischen den eingeführten Grössen aufzustellen. Nach dem Früheren (cf. Fig. 7) folgt:

$$\begin{aligned}\overline{Sx} &= r \cos v = a \cos E - \overline{CS} = a \cos E - ae \\ \overline{xy} &= r \sin v = \frac{b}{a} \cdot \overline{px} = b \sin E = a \sqrt{1-e^2} \cdot \sin E \\ r^2 &= a^2 (\cos E - e)^2 + a^2 (1-e^2) \sin^2 E = a^2 (1 - e \cos E)^2 \\ r &= a (1 - e \cos E) \\ r(1 + \cos v) &= 2r \cos \frac{1}{2}v = 2a(1-e) \cos \frac{1}{2}E^2 \\ r(1 - \cos v) &= 2r \sin \frac{1}{2}v = 2a(1+e) \sin \frac{1}{2}E^2\end{aligned}$$

$$\text{oder} \quad \left. \begin{aligned} \sqrt{r} \cdot \sin \frac{1}{2}v &= \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2}E \\ \sqrt{r} \cdot \cos \frac{1}{2}v &= \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2}E \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

$$\text{also:} \quad tg \frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} tg \frac{1}{2}E \dots \dots \dots (28)$$

durch welche Formel v aus E gefunden wird. Mittelst v ergibt sich dann der Radius vector direct durch die Gleichung

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} = a (1 - e \cos E).$$

Um das Capitel über die Bewegung in der Ellipse zum Abschluss zu bringen, erübrigt es nur noch zu zeigen, wie die excentrische Anomalie E aus der mittleren Anomalie M gefunden wird. Es geschieht dies durch:

„Die numerische Auflösung der Kepler'schen Gleichung.“

Wir haben im Vorhergehenden angenommen, dass E sich aus M mittelst der Gleichung:

$$E - e \sin E = M$$

¹⁾ Bei Bahnen von grosser Excentricität kann man mit Vortheil diese Gleichung unter der Form

$$r = q \frac{\cos \frac{1}{2}E^2}{\cos \frac{1}{2}v^2},$$

wo q die Periheldistanz bedeutet, anwenden.

Bei Anwendung dieser Auflösungsart nach einer in mässiger Grösse gezeichneten Curve wird man sehr bald deren vorzügliche Bequemlichkeit zu schätzen wissen. Bei Doppelsternbahnen, welche wir später in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen wollen, kann es zuweilen von grossem Nutzen sein, auch die wahre Anomalie schnell durch Construction zu finden; deshalb noch folgende Bemerkungen. Bezeichnet man nach Gauss mit φ den sogenannten Excentricitätswinkel, definiert durch die Gleichung

$$e = \sin \varphi,$$

legt dann durch M eine Gerade \overline{MB} , welche mit OX den Winkel $90^\circ - \varphi$ macht, so wird das von derselben auf der Ordinate \overline{Ey} abgeschnittene Stück \overline{BE} gleich:

$$\frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \cdot e \sin E = \frac{b}{a} \sin E = \frac{r}{a} \sin v.$$

Man nehme also die oben gefundene Grösse $1 - e \cos E$ oder $\frac{r}{a}$ in den Cirkel und schneide damit von B aus in OX im Punkte F ein, so ist der Winkel BFX selbst, oder sein Nebenwinkel BFO die wahre Anomalie v . Ob v spitzer oder stumpfer Winkel sei, ist jedesmal leicht zu entscheiden, denn im ersteren Falle ist

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos E < \frac{p}{a},$$

und also:

$$1 - e \cos E < 1 - e^2,$$

d. h.

$$E < 90^\circ - \varphi.$$

Ist dagegen:

$$E > 90^\circ - \varphi,$$

so ist v ein stumpfer Winkel.

Dass man die Curve auch für die Anomalien im dritten und vierten Quadranten, die wir hier nicht berücksichtigt haben, gebrauchen kann, und auf welche Weise, bedarf keiner besonderen Erläuterung. Die Formel (29) bildet das am häufigsten verwendete Mittel zur Auflösung der Kepler'schen Gleichung. Man berechnet

$$\frac{1}{1 - e \cos E}$$

numerisch mit einem Näherungswerthe E' und verbessert diesen mittelst (29), nachdem man

$$E' - e \sin E' = M'$$

berechnet hat.

Angenommen, man habe solche Hilfsmittel, wie die eben erwähnten, nicht zur Hand, so kann auch auf dem folgenden, rein rechnenden Wege eine Annäherung erlangt werden. Man schreibt die Kepler'sche Gleichung in der Form:

$$\left. \begin{aligned} E &= M + e \sin E \\ &= M + e \sin (M + e \sin E) \\ &= M + e \sin \{M + e \sin [M + e \sin (M + e \sin M + \dots)]\} \end{aligned} \right\} \dots (30)$$

nach welcher, wie man sieht, E durch directe Rechnung bis zu einem beliebigen Grade von Genauigkeit zu erhalten ist. Man kann aber auch mehrere sehr brauchbare Näherungsformeln aus der Gleichung (30) ableiten. Setzt man

$$\sin (E - M) = \sin (e \sin E) = e \sin E - \frac{e^3}{6} \sin E^3 + \frac{e^5}{120} \sin E^5 \dots,$$

und erlaubt sich dann für die mit den früheren Potenzen von e multiplicirten Grössen $\sin E^2$, $\sin E^4$ u. s. w., $\sin M^2$, $\sin M^4$ u. s. w. zu setzen, so erhält man

$$\cotg E = \cotg M \left[1 - \frac{2 \sin (e \sin M)}{\sin 2 M} \right] \dots (31)$$

eine Formel, welche nicht nur bei der vorauszusetzenden Gewöhnung an den Gebrauch der Summen- und Differenzlogarithmen sehr bequem ist, sondern auch für die bei Planeten bis jetzt überhaupt bekannten Excentricitäten einen hohen Grad von Annäherung gewährt. Auch können die Zech'schen Tafeln für Summen- und Differenzlogarithmen zugezogen werden.

Es sei:

$$\log \frac{\sin 2M}{2 \sin(e \sin M)} = A.$$

Ist nun z. B. A positiv, so suche man in den Zech'schen Tafeln für Subtraction die zu A , welches man als ein Argument der Tafel betrachtet, gehörige Zahl; diese sei B , so wird:

$$\log \operatorname{tg} E = \log \operatorname{tg} M + B.$$

Ein in der Theoria motus corporum coelestium art. 13 behandelter Fall soll hier zur Erläuterung nach dieser Regel behandelt werden. Es ist daselbst $M = 332^{\circ} 28' 54''.77$, $e = 0,2453162$, $\log e = 9,3897262$. Die der Bequemlichkeit halber mit fünf Stellen geführte Annäherungsrechnung gestaltet sich wie folgt:

$\log \sin M = 9,66467_n$	$\log \sin 2M = 9,91355_n$	$\log \operatorname{tg} M = 9,71862_n$
$\log(e \text{ in Min.}) = 2,92601$	$C \log \sin(e \sin M) = 0,94653$	$B = 0,14028$
$e \sin M \text{ in Min.} = 389,65$	$\log \frac{1}{2} = 9,69897$	$\log \operatorname{tg} E = 9,85710_n$
	$A = 0,55905$	$E = 324^{\circ} 15',63$

Die für E gefundene Annäherung ist hier um weniger als eine Minute fehlerhaft.

Hat man so auf irgend eine Weise einen Näherungswerth von E erhalten, so verbessert man denselben allgemein mittelst der Formel (29). Man kann sich hierbei zur Berechnung von $1 - e \cos E$ mit Vorthail der Additions- resp. Subtractionslogarithmen bedienen. Man setzt dieses Verfahren so lange fort, bis die Rechnung stehen bleibt, d. h. keine Verbesserung von E mehr möglich ist.

Zur Verbesserung des oben gefundenen E' z. B. hätte man folgende Rechnung durchzuführen:

$\log \sin E' = 9,766488_n$	$E' = 324^{\circ} 15' 37'',80$
$\log(e \text{ in Sec.}) = 4,704151$	$e \sin E' = -8^{\circ} 12' 35'',54$
$e \sin E' = -29555'',54$	$M' = 332^{\circ} 28' 13'',34$
$= -8^{\circ} 12' 35'',54$	$M = 332^{\circ} 28' 54'',77$
	$M - M' = 41'',43$
$\log \frac{1}{\cos E'} = 0,09061$	$C = 0,09643$
$\log \frac{1}{e} = 0,61027$	$\log 41,43 = 1,61731$
$0,70088$	$\log \operatorname{Corr.} = 1,71374$
$\operatorname{Corr.} \text{ von } E' = 51'',73.$	

Der verbesserte Werth von E wird $324^{\circ} 16' 29,53''$ werden; die Genauigkeit desselben lässt sich mit sechsstelligen Logarithmen nicht mit Sicherheit überbieten.

Bei einem anderen von Gauss eingeführten Verfahren führt man schon die Substitution für den Werth von der unbestimmten Form $E = E' + x$ aus, wodurch, wenn die Correction x eine sehr kleine Grösse ist, eine lineare Gleichung für diese Verbesserung gewonnen wird. Um die letztere in Secunden ausgedrückt zu erhalten, entnimmt man den Logarithmentafeln mit dem $\log \sin E'$ auch noch dessen Aenderung für jede Secunde, ausgedrückt in Einheiten der letzten Stelle, desgleichen bei dem Aufschlagen von dem in Secunden auszudrückenden $e \sin E'$ die Aenderung des Logarithmus

für jede Einheit dieser Zahl. Es sei nach Gauss'scher Bezeichnung die erste Aenderung gleich λ , die zweite gleich μ , so wird $e \sin(E' + x) = e \sin E' \pm \frac{\lambda x}{\mu}$, wobei das obere Zeichen für den ersten und vierten, das untere für den zweiten und dritten Quadranten zu wählen ist. Man hat also:

$$E' + x = M + e \sin(E' + x) = M + e \sin E' \pm \frac{\lambda x}{\mu}$$

oder:

$$x = \frac{\mu}{\mu \mp \lambda} (M + e \sin E' - E'),$$

und demnach den verbesserten Werth $E' + x$ aus der Formel:

$$E' + x = M + e \sin E' \pm \frac{\lambda}{\mu \mp \lambda} (M + e \sin E' - E').$$

Bei Anwendung dieses Verfahrens auf den obigen Näherungswerth $E' = 324^\circ 15' 37''.8$ würde man auf folgende Zahlen kommen, $\lambda = 2,92$, $\mu = 14,70$, verbesserter Werth von

$$E = 324^\circ 16' 19''.23 + \frac{2,92}{11,78} \times 41'',43 = 324^\circ 16' 19''.23 + 10'',27 = 324^\circ 16' 29''.50,$$

mit der Auflösung in der Theoria motus corp. coel. ganz übereinstimmend.

Zum Schlusse dieses Capitels wollen wir noch zeigen, dass die sechs Integrationsconstanten der Kepler'schen Bewegung thatsächlich mit den sechs Bahnelementen, wie am Schlusse der zweiten Vorlesung gesagt, identisch sind. In der zweiten Vorlesung haben wir gesehen, dass

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c_1$$

$$z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = c_2$$

$$y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = c_3$$

ist. Die Constanten c_1, c_2, c_3 der Gleichung für die Bahnebene des Planeten:

$$c_1 z + c_2 y + c_3 x = 0$$

sind ferner nach dem früher Gesagten offenbar die doppelten Projectionen der Flächen-
geschwindigkeit

$$F = \frac{1}{2} k \sqrt{p(1+m)}$$

auf die drei Coordinatenebenen xy, xz, yz . Es ist also, wie direct ersichtlich, zunächst:

$$c_1 = 2 F \cos i.$$

Die Projection von $2F$ auf eine Ebene, die durch die Schnittlinie der Bahnebene mit der xy -Ebene geht und auf dieser letzteren senkrecht steht, ist $2F \sin i$; also die Projection auf die xz -Ebene

$$c_2 = - 2 F \sin i \cos \Omega.$$

Die Projection schliesslich auf die yz -Ebene wird:

$$c_3 = 2 F \sin i \sin \Omega.$$

Die Gleichung der Planetenbahnebene wird daher:

$$z \cos i - y \cos \Omega \sin i + x \sin \Omega \sin i = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Drückt man den Werth von F durch p und die Werthe von c_1, c_2, c_3 aus, so werden die Flächenintegrale für die Kepler'sche Bewegung:

$$\left. \begin{aligned} x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= k \sqrt{p(1+m)} \cos i \\ z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} &= -k \sqrt{p(1+m)} \cos \delta \sin i \\ y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= k \sqrt{p(1+m)} \sin \delta \sin i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (33)$$

Die Elemente δ und i sind mithin aus den drei Constanten c_1, c_2, c_3 berechenbar, indem einfach:

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu p} \cos i &= c_1 \\ -\sqrt{\mu p} \cos \delta \sin i &= c_2 \\ \sqrt{\mu p} \sin \delta \sin i &= c_3 \end{aligned}$$

wobei

$$\mu = k^2(1+m)$$

also:

$$tg \delta = -\frac{c_3}{c_2}, \quad tg i \cos \delta = -\frac{c_2}{c_1}, \quad tg i \sin \delta = \frac{c_3}{c_1},$$

folglich

$$\left. \begin{aligned} tg i &= \frac{\sqrt{c_3^2 + c_2^2}}{c_1} \\ \cos &= -\frac{c_2}{\sqrt{c_3^2 + c_2^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

ist.

Die obigen Gleichungen befähigen uns also, δ, i und p zu berechnen, wenn für irgend einen Moment die Masse und Coordinaten von m , sowie die drei Geschwindigkeitscomponenten gegeben sind. Die Constanten a und e , welche bei Ausführung des Integrales der Bahncurve auftraten und sich auf die Form der Bahn beziehen, sind in p inbegriffen. Zählt man den Winkel $v + \omega$ von dem Punkte an, in welchem die Planetenbahn die xy -Ebene schneidet, d. h. vom Knoten, so bestimmt die Constante ω die Lage der Bahn in ihrer eigenen Ebene. Schliesslich ist die sechste Integrationsconstante diejenige der Kepler'schen Gleichung, die Zeit des Periheldurchganges, und dieselbe bestimmt die Lage des Planeten in seiner Bahn. Die Integration der allgemeinen Gleichungen (21) und (22) der zweiten Vorlesung liefert also als die sechs Constanten, welche die Bewegung vollständig bestimmen, in der That die sechs Elemente der Kepler'schen Bahn.

Aus der letzten Entwicklung erhellt zugleich, dass die sechs Bahnelemente aus den drei Coordinaten und drei Geschwindigkeitscomponenten

$$x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$$

berechenbar sind. Denn aus den abgeleiteten Formeln folgt zunächst unmittelbar:

$$\left. \begin{aligned} tg i \sin \delta &= \frac{y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}}{x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}} \\ -tg i \cos \delta &= \frac{z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt}}{x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (35)$$

wodurch i und δ bestimmt sind.

Weiter ist

$$g^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2, \quad \frac{\mu}{a} = \frac{2\mu}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - g^2,$$

also

$$\left. \begin{aligned} r^2 \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 &= 2\mu r - \frac{\mu}{a} r^2 - \mu p \\ v &= 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a} - \frac{1}{\mu} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt}\right)^2 = a(1 - e^2) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

durch welche beiden Gleichungen a und e bestimmt sind. Die vier Elemente a, e, \varnothing und i sind somit gefunden.

Um die Länge des Perihels $\pi = \varnothing + \omega$ zu finden, hat man also noch ω zu berechnen. Dies geschieht in folgender Weise. Sei u die Entfernung des Planeten vom aufsteigenden Knoten, so folgt, indem man den Ort des Planeten bezüglich mit der x, y, z -Axe je durch einen grössten Kreis verbunden denkt, unmittelbar aus der sphärischen Anschauung:

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \cos \varnothing \cos u - \sin \varnothing \sin u \cos i \\ \frac{y}{r} &= \sin \varnothing \cos u + \cos \varnothing \sin u \cos i \\ \frac{z}{r} &= \sin u \sin i, \end{aligned}$$

also

$$\left. \begin{aligned} \cos u &= \frac{x}{r} \cos \varnothing + \frac{y}{r} \sin \varnothing \\ \sin u \cos i &= -\frac{x}{r} \sin \varnothing + \frac{y}{r} \cos \varnothing \\ \sin u \sin i &= \frac{z}{r}, \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (37)$$

wodurch u gegeben ist. Andererseits kennt man v , da

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{p}{1 + e \cos v}.$$

Nach dem Vorhergehenden kennt man aber p und a , also auch e . Somit kann man aus dieser letzteren Gleichung v bestimmen. Nun ist aber $u = v + \omega$, also $\omega = u - v$, $\pi = \omega + \varnothing = u - v + \varnothing$. Man kennt also auch ω und π .

Fünfte Vorlesung.

Die Parabel.

Geht die Ellipse dadurch, dass die grosse Axe ins Unendliche wächst, in die Parabel über, so rückt auch das Centrum, aus dem die excentrische Anomalie zu construiren ist, ins Unendliche, die Hülfsgrösse E wird also gleich Null und die vorhergehenden, für die Ellipse gebrauchten Formeln werden für die numerische Rechnung unbrauchbar. Man erhält dafür aber in diesem Falle die wahre Anomalie v desto einfacher aus dem Ausdrücke für den doppelten, vom Radius vector beschriebenen Sector

$\int r^2 dv$. Um denselben für die Parabel in geschlossener Form zu integrieren, braucht man, da die Excentricität gleich Eins wird, gar nicht den bei der Ellipse eingeführten Hülfswinkel E der excentrischen Anomalie. Da $e = 1$, also

$$r = \frac{p}{1 + \cos v} = \frac{p}{2 \cos \frac{1}{2} v},$$

so wird:

$$r^2 dv = \frac{p^2 dv}{4 \cos^2 \frac{1}{2} v} = \frac{p^2 dt \frac{1}{2} v}{2 \cos^2 \frac{1}{2} v^2} = \frac{p^2}{2} (1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^2) dt \frac{1}{2} v \quad . \quad . \quad (1)$$

Der von der Perihelrichtung und dem Radius vector r eingeschlossene doppelte Sector wird daher durch Integration zwischen den Grenzen t und T , wie wir die Perihelzeit bei der Parabel bezeichnen wollen:

$$\int_t^T r^2 dv = k \cdot (t - T) \sqrt{p(1+m)} = \frac{p^2}{2} (\operatorname{tg} \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^3) \quad . \quad . \quad (2)$$

Mithin bestimmt sich bei der Parabel die wahre Anomalie v direct aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^3 = \frac{2k(t - T) \sqrt{1+m}}{p^{3/2}}.$$

Da aber die Beobachtungen zeigen, dass die Massen der Kometen im Vergleich zur Masse der Sonne verschwindend klein sind, so kann man $m = 0$ setzen und erhält, wenn man für p seinen Werth, der bei der Parabel gleich $2q$, d. h. gleich der doppelten Periheldistanz wird, einsetzt, die sogenannte Barker'sche Gleichung:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^3 = \frac{k(t - T)}{q^{3/2} \sqrt{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Dieser allgemeine Ausdruck giebt also die Beziehung zwischen der wahren Anomalie v und der seit dem Periheldurchgange verfloßenen Zeit in einer parabolischen Bahn.

Der Mühe einer numerischen Auflösung dieser Gleichung im einzelnen Falle ist man ein- für allemal überhoben durch die sogenannte, im Anhange gegebene Barker'sche Tafel. Mit Rücksicht auf die Construction derselben multiplicirt man letztere Gleichung mit 75:

$$\frac{75k}{q^{3/2} \sqrt{2}} (t - T) = 75 \operatorname{tg} \frac{1}{2} v + 25 \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wobei die Grösse

$$\frac{75k}{q^{3/2} \sqrt{2}} = \frac{150k \sqrt{1+m}}{p^{3/2}} = n$$

zuweilen als die mittlere tägliche Bewegung in der parabolischen Bahn bezeichnet wird. Die Barker'sche Tafel giebt nun für das Argument v den Werth der sogenannten mittleren Anomalie M in der Parabel:

$$M = 75 \operatorname{tg} \frac{1}{2} v + 25 \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^3$$

allgemein an. Die mittlere Anomalie M ist leicht zu finden. Setzt man

$$\frac{75k}{\sqrt{2}} = C,$$

so ergiebt sich für die Constante C der Werth:

$$\log C = 9,9601277069.$$

Die mittlere tägliche Bewegung wird also

$$n = \frac{C}{q^{3/2}}.$$

Setzt man also die Werthe von M :

$$M = n(t - T) = 75 \operatorname{tg} \frac{1}{2} v + 25 \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^3,$$

welche den successiven Werthen von $v = 0^0$ bis nahe $v = 180^0$ entsprechen, wie das die Barker'sche Tafel leistet, so kann man aus derselben für die Zeit $t - T$ entweder M , wenn v bekannt ist, oder v , wenn $M = n(t - T)$ bekannt ist, direct entnehmen. Bei negativen Werthen von $t - T$ ist dabei auch der Werth von v als negativ zu betrachten, man hat also einfach $t - T$ das gleiche Zeichen wie dem aus der Tafel erhaltenen Werthe von v zu geben. Die Werthe von M für das Argument $v = 0^0$ bis nahe an 180^0 sind in Tafel VI im Anhange angegeben, deren Gebrauch in einem numerischen Beispiel noch erläutert werden wird (s. Schluss von Vorlesung 14).

Für grosse Werthe der wahren Anomalie ($180^0 > v > 167^0$) kann man nach Bessel wie folgt verfahren. Die Fundamentalgleichung

$$\frac{k(t - T)}{q^{3/2} \sqrt{2}} = tg^{1/2} v + \frac{1}{3} tg^{1/2} v^3$$

schreibt sich offenbar auch:

$$\frac{k(t - T)}{q^{3/2} \sqrt{2}} = \frac{1}{3} tg^{1/2} v^3 (1 + 3 \cotg^{1/2} v^2) \dots \dots \dots (5)$$

Multiplieirt und dividirt man diesen Ausdruck mit $(1 + \cotg^{1/2} v^2)^3$, so folgt:

$$\frac{k(t - T)}{q^{3/2} \sqrt{2}} = \frac{1}{3} tg^{1/2} v^3 (1 + \cotg^{1/2} v^2)^3 \frac{(1 + 3 \cotg^{1/2} v^2)}{(1 + \cotg^{1/2} v^2)^3}.$$

Da nun bei Entwicklung des Nenners nach Potenzen von $\cotg^{1/2} v$

$$\frac{1 + 3 \cotg^{1/2} v^2}{(1 + \cotg^{1/2} v^2)^3} = 1 + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cotg^{1/2} v^4 + \dots$$

wird, so ist $\frac{1 + 3 \cotg^{1/2} v^2}{(1 + \cotg^{1/2} v^2)^3}$ nur um Grössen vierter Ordnung von der Einheit verschieden. Weiter ist

$$1 + \cotg^{1/2} v^2 = \frac{2}{\sin v \, tg^{1/2} v},$$

also

$$tg^{1/2} v^3 (1 + \cotg^{1/2} v^2)^3 = (tg^{1/2} v + \cotg^{1/2} v)^3 = \frac{8}{\sin^3 v}$$

und folglich

$$\frac{k(t - T)}{q^{3/2} \sqrt{2}} = \frac{8}{3 \sin^3 v} \cdot \frac{1 + 3 \cotg^{1/2} v^2}{(1 + \cotg^{1/2} v^2)^3} \dots \dots \dots (6)$$

Da nun, wenn v sich 180^0 nähert, $\cotg^{1/2} v$ sehr klein sein wird, so nähert sich in diesem Falle der zweite Factor der rechten Seite in letzter Gleichung der Einheit. Bezeichnen wir also nach Bessel mit w den Werth von v für den Fall, wo der genannte Factor gleich 1 ist, was strenge für $v = 180^0$ erfüllt ist, so ergiebt sich der wahre Werth von v mittelst der kleinen Correction δ aus der Gleichung

$$v = w + \delta.$$

Um δ in eine Tafel mit dem Argument w zu bringen, hat man δ als Function von w darzustellen. Zunächst ist nun:

$$\frac{8}{\sin w^3} = 3 tg^{1/2} (w + \delta) + tg^{1/2} (w + \delta)^3 \dots \dots \dots (7)$$

oder

$$\frac{8}{\sin w^3} = tg^{1/2} w^3 (1 + \cotg^{1/2} w^2)^3 = \frac{(1 + tg^{1/2} w^2)^3}{tg^{1/2} w^3}.$$

Setzt man jetzt

$$tg^{1/2} w = \theta,$$

so wird, da

$$tg^{1/2} \delta = x,$$

$$tg^{1/2} (w + \delta) = \frac{tg^{1/2} w + tg^{1/2} \delta}{1 - tg^{1/2} w \, tg^{1/2} \delta},$$

letztere Gleichung auch

$$\frac{(1 + \theta^2)^3}{\theta^3} = 3 \frac{\theta + x}{1 - \theta x} + \frac{(\theta + x)^3}{(1 - \theta x)^3} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (8)$$

Durch Multiplication mit $\theta^3(1 - \theta x)^3$ folgt entwickelt in

$$(1 + 3\theta^2 + 3\theta^4 + \theta^6)(1 - 3\theta x + 3\theta^2 x^2 - \theta^3 x^3) = 3(\theta^4 + x\theta^3)(1 - 2\theta x + \theta^2 x^2) + \theta^3(\theta^3 + 3\theta^2 x + 3\theta x^2 + x^3),$$

oder

$$\frac{1 + 3\theta^2}{3\theta(1 + 4\theta^2 + 2\theta^4 + \theta^6)} = x - \theta x^2 + \frac{\theta^2(2 + 6\theta^2 + 3\theta^4 + \theta^6)}{3(1 + 4\theta^2 + 2\theta^4 + \theta^6)} \cdot x^3.$$

Setzt man weiter nach Bessel:

$$\frac{1 + 3\theta^2}{3\theta(1 + 4\theta^2 + 2\theta^4 + \theta^6)} = y,$$

so wird:

$$y = x - \theta x^2 + \frac{\theta^2(2 + 6\theta^2 + 3\theta^4 + \theta^6)}{3(1 + 4\theta^2 + 2\theta^4 + \theta^6)} x^3$$

oder nach Potenzen von y bis zu Gliedern dritter Ordnung incl. entwickelt:

$$x = y + \theta(y^2 + 2\theta y^3) - \frac{\theta^2(2 + 6\theta^2 + 3\theta^4 + \theta^6)}{3(1 + 4\theta^2 + 2\theta^4 + \theta^6)} y^3 + \cdot \cdot \cdot$$

oder

$$x = y + \theta y^2 + \frac{\theta^2(4 + 18\theta^2 + 9\theta^4 + 5\theta^6)}{3(1 + 4\theta^2 + 2\theta^4 + \theta^6)} y^3 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (9)$$

Da aber auf Grund von

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta &= x \\ \delta &= 2x - \frac{2}{3} x^3 + \frac{2}{5} x^5 - \cdot \cdot \cdot \end{aligned}$$

ist, so ergibt sich für δ durch Substitution des für x gefundenen Werthes in diese Reihe

$$\delta = 2y + 2\theta y^2 + \frac{-2 + 32\theta^4 + 16\theta^6 + 10\theta^8}{3(1 + 4\theta^2 + 2\theta^4 + \theta^6)} y^3 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (10)$$

oder, wenn man $\frac{1}{\theta}$ als Grösse erster Ordnung ansieht, in welchem Falle y von der fünften, θy^2 von der neunten, das dritte Glied von der dreizehnten Ordnung, d. h. verschwindend klein wird, folgt mit einem hinreichenden Grade von Genauigkeit:

$$\delta = 2y + 2\theta y^2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (11)$$

Die im Anhange gegebene Tafel VII giebt mit dem Argument w den Werth von δ in Bogensecunden von $w = 155^\circ$ bis $w = 180^\circ$, wobei der Werth von M :

$$M = n(t - T)$$

wie früher der Tafel VI zu entnehmen ist. Da nun nach dem Vorhergehenden

$$\frac{k(t - T)}{q^{3/2} \sqrt{2}} = \frac{8}{3 \sin w^3},$$

so findet man w aus

$$\sin w = \sqrt[3]{\frac{8 q^{1/2} \sqrt{2}}{3(t - T)k}} = \sqrt[3]{\frac{200}{M}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (12)$$

Hat man also mit dem Tafel VI entnommenen Werthe der mittleren Anomalie M die Grösse w aus dieser Gleichung berechnet, so entnimmt man Tafel VII den entsprechenden Werth von δ , wonach sich der strenge Werth der wahren Anomalie v aus der Gleichung

$$v = w + \delta$$

ergiebt.

Ist v gegeben und die Zeit $t - T$ gesucht, so erhält man aus der Tafel einen genäherten Werth von δ , wenn man v als Argument braucht, und bekommt dann w aus

$$w = v - \delta.$$

Hierauf findet man den genauen Werth von δ aus der Tafel, erhält aus ihm denjenigen von w und findet mit diesem

$$t - T = \frac{200}{C} \frac{q^{3/2}}{\sin w^3}.$$

Dies Problem, die Zeit $t - T$ zu finden, wenn die wahre Anomalie v gegeben ist, kann, zumal wenn v klein ist, nach Watson auch in folgender Weise gelöst werden. Die Gleichung für die Bewegung in der Parabel:

$$\frac{k(t - T)}{q^{3/2} \sqrt{2}} = tg \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} tg \frac{1}{2} v^3$$

kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{3k(t - T)}{q^{3/2} \sqrt{2}} = \frac{\sin \frac{1}{2} v}{\cos \frac{1}{2} v^3} (3 - 2 \sin \frac{1}{2} v^2) \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

woraus sich, da $q = r \cos \frac{1}{2} v^2$ ist:

$$\frac{3k(t - T)}{2r^{3/2}} = 3 \left(\frac{\sin \frac{1}{2} v}{\sqrt{2}} \right) - 4 \left(\frac{\sin \frac{1}{2} v}{\sqrt{2}} \right)^3 \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

ergiebt. Setzt man jetzt:

$$\frac{\sin \frac{1}{2} v}{\sqrt{2}} = \sin x,$$

so hat man

$$\frac{3k(t - T)}{2r^{3/2}} = 3 \sin x - 4 \sin^3 x = \sin 3x$$

und folglich:

$$t - T = \frac{2}{3k} r^{3/2} \sin 3x \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

welche Formel eine ebenso genaue wie bequeme numerische Lösung zulässt. Setzt man nämlich zur Vereinfachung der Rechnung

$$\frac{\sin 3x}{\sin v} = N,$$

so können die Werthe von N mit v als Argument tabulirt werden. Für $v = 0$ wird $N = \frac{3}{4} \sqrt{2}$, für $v = 90^\circ$ wird $N = 1$, woraus erhellt, dass der Werth von N sich für Werthe von v von 0° bis 90° nur langsam ändert. Für $v = 180^\circ$ hingegen wird $N = \infty$ und daher ist es nothwendig, wenn $v > 90^\circ$ wird, eine andere Hilfsgrösse als N einzuführen. Wir setzen in diesem Falle:

$$N' = N \sin v = \sin 3x,$$

woraus erhellt, dass $N' = 1$ wird für $v = 90^\circ$, hingegen $N' = \frac{1}{2} \sqrt{2}$ für $v = 180^\circ$. Daher hat man für $v < 90^\circ$:

$$t - T = \frac{2}{3k} N r^{3/2} \sin v$$

und für $v > 90^\circ$

$$t - T = \frac{2}{3k} N' r^{3/2},$$

wobei

$$\log \frac{2}{3k} = 1,588\,327\,299\,5$$

ist, weshalb $t - T$ leicht berechnet werden kann, wenn v bekannt ist. Tafel VIII giebt die Werthe von N mit Differenzen zur Interpolation für die Werthe von v , von $v = 0^\circ$ bis $v = 90^\circ$, sowie die Werthe von N' für diejenigen von $v = 90^\circ$ bis $v = 180^\circ$.

Sechste Vorlesung.

Die Hyperbel.

Um die Formeln für die Hyperbel möglichst leicht aus denen für die Ellipse abzuleiten, kann man mit einer Modification der für die Hyperbel bisher üblichen Betrachtungsweise, wie folgt, verfahren.

Wir sehen den Charakter der Hyperbel darin ausgesprochen, dass die Excentricität e grösser als 1 wird. Da nun $b^2 = a^2 (1 - e^2)$ ist, so wird b^2 negativ, b rein imaginär.

Wenn wir ferner festsetzen, dass der halbe Parameter p einen positiven Werth haben soll, so muss, mit Rücksicht darauf, dass $p = \frac{b^2}{a}$, a negativ werden. Die mitt-

lere Bewegung n oder $\frac{k\sqrt{1+m}}{a^{3/2}}$ wird dann ebenfalls rein imaginär. Die Kepler'sche Gleichung verliert dessen ungeachtet ihre analytische Gültigkeit nicht, sie lässt sich sogar ganz leicht auch numerisch auflösen. Wir bemerken zu dem Zwecke, dass die Grösse $r \sin v$, und demnach auch $b \sin E$ nothwendig reell werden muss; also ist $\sin E$ eine rein imaginäre Grösse. Deshalb und weil

$$E = e \sin E = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{3/2}} t$$

sein soll, wenn t die seit dem Periheldurchgange verflossene Zeit ist, muss auch E rein imaginär sein. Es sei nun $E = u \sqrt{-1} = ui$ und $a = -\alpha$, so wird durch Substitution des bekannten Exponentialausdruckes für $\sin E$, worin e die Basis des natürlichen Logarithmensystems vorstellt

$$iu = e \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i} = - \frac{k\sqrt{1+m}}{\alpha^{3/2}i} t$$

oder

$$-u = \frac{1}{2} e (e^{-u} - e^u) = - \frac{k\sqrt{1+m}}{\alpha^{3/2}} t.$$

Setzt man:

$$e^{-u} = \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{F}{2} \right),$$

so erhält man¹⁾:

$$e \operatorname{tg} F = \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{F}{2} \right) = \frac{k\sqrt{1+m}}{\alpha^{3/2}} t \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

welche durch Versuche leicht aufzulösende Gleichung bei der Hyperbel die Stelle der Kepler'schen Gleichung vertritt. Man pflegt diese Gleichung noch mit dem Modul der Brigg'schen Logarithmen

$$\operatorname{mod} = 0,434\,2945 \ [9,637\,7843]$$

zu multipliciren, wodurch an Stelle des natürlichen Logarithmus ein gewöhnlicher tritt. Man hat so schliesslich an Stelle der Kepler'schen Gleichung für die Hyperbel die folgende²⁾:

$$\frac{\operatorname{mod} k\sqrt{1+m}}{(-\alpha)^{3/2}} t = (e \operatorname{mod}) \operatorname{tg} F = \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{F}{2} \right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$$

Nach dem Obigen ist:

¹⁾ Hier ist unter \log der natürliche Logarithmus zu verstehen.

²⁾ Hier ist unter \log der Brigg'sche Logarithmus zu verstehen.

und somit:

$$\left. \begin{aligned} c^{-u} &= \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{F}{2} \right) = c^{Ei} = \cos E + i \sin E \\ \operatorname{cotg} \left(45^\circ + \frac{F}{2} \right) &= \cos E - i \sin E \end{aligned} \right\} \dots \dots (3)$$

woraus

$$\cos E = \frac{1}{\cos F}, \quad \sin E = \frac{1}{i} \operatorname{tg} F \quad \dots \dots (4)$$

Indem man aus den Gleichungen (3) die Quadratwurzel zieht, folgt:

$$\begin{aligned} \sqrt{\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{F}{2} \right)} &= \cos \frac{E}{2} + i \sin \frac{E}{2} \\ \sqrt{\operatorname{cotg} \left(45^\circ + \frac{F}{2} \right)} &= \cos \frac{E}{2} - i \sin \frac{E}{2} \end{aligned}$$

und hieraus:

$$\cos \frac{E}{2} = \frac{\cos \frac{F}{2}}{\sqrt{\cos F}}; \quad \sin \frac{E}{2} = \frac{\sin \frac{F}{2}}{i \sqrt{\cos F}} \quad \dots \dots (5)$$

Mit Hülfe der Gleichungen (4) und (5) kann man leicht Relationen für die Hyperbel aus den entsprechenden für die Ellipse herleiten. Man findet:

$$\begin{aligned} \sqrt{r} \sin \frac{1}{2} v &= \sqrt{(-a)(e+1)} \frac{\sin \frac{1}{2} F}{\sqrt{\cos F}} \\ \sqrt{r} \cos \frac{1}{2} v &= \sqrt{(-a)(e-1)} \frac{\cos \frac{1}{2} F}{\sqrt{\cos F}} \end{aligned} \quad \dots \dots (6)$$

Nach dem Vorhergehenden ist F beim Periheldurchgange gleich Null und wächst mit der Zeit, also auch mit der wahren Anomalie.

Durch Division der beiden Gleichungen (6) folgt:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} F \quad \dots \dots (7)$$

Mit Benutzung von (4) ergibt sich jetzt:

$$r = (-a) \left(\frac{e}{\cos F} - 1 \right) \quad \dots \dots (8)$$

Diese Gleichung zur Berechnung des Radius vectors in der Bahn besitzt, besonders wenn die Excentricität vom Range 1 ist, rechnerische Vorzüge gegenüber der gewöhnlichen Gleichung ¹⁾:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v},$$

die für alle drei Kegelschnitte gemeinsam gilt. Ferner wird:

$$\left. \begin{aligned} r \cos v &= (-a) \left(e - \frac{1}{\cos F} \right) \\ r \sin v &= (-a) \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{tg} F \end{aligned} \right\} \dots \dots (9)$$

Aus Gleichung (1) folgt durch Differenzirung:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\cos F}{r} \frac{k \sqrt{1+m}}{(-a)^{1/2}} \quad \dots \dots (10)$$

In Verbindung hiermit giebt (9):

¹⁾ Die folgende Darstellung ist der interessanten Ebert'schen Abhandlung: „Inwiefern kann ein Stern mit grosser Geschwindigkeit die Stabilität eines Planetensystems beeinflussen“ entnommen.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(r \cos v)}{dt} &= - \frac{k \sqrt{1+m} \sqrt{-a}}{r} \operatorname{tg} F \\ \frac{d(r \sin v)}{dt} &= \sqrt{-a} \sqrt{e^2-1} \frac{k \sqrt{1+m}}{r \cos F} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

Die Bestimmung des Winkels F aus (2) muss durch successive Annäherung erreicht werden. Schreibt man diese Gleichung zunächst wie folgt:

$$\operatorname{tg} F = \frac{1}{e \operatorname{mod}} \left\{ \frac{\operatorname{mod} k \sqrt{1+m}}{(-a)^{3/2}} t + \log \operatorname{tg} (45^\circ + 1/2 F) \right\} \dots \dots \dots (12)$$

so ist das zweite Glied in der Klammer gewöhnlich verhältnissmässig klein gegenüber dem ersten. Daraus folgt, dass man zu seiner Bestimmung nur eine wenig genaue Kenntniss von F zu haben braucht, um mittelst (12) einen viel genaueren Werth von F zu erhalten. Sehr häufig convergirt dieses Verfahren so schnell, dass man bereits bei dem zweiten oder dritten Näherungswerthe von F stehen bleiben kann. Der Controle wegen geht man aber besser von einem Näherungswerthe von F zum nächstfolgenden mittelst einer Differentialformel über, wie das auch bei Auflösung der Kepler'schen Gleichung zu geschehen pflegt. Von einem Näherungswerthe F_0 ausgehend, erhält man nämlich mittelst folgender Gleichung einen verbesserten Werth F_1 :

$$\operatorname{tg} F_1 = \frac{1}{e \operatorname{mod}} \left\{ \frac{\operatorname{mod} k \sqrt{1+m}}{(-a)^{3/2}} t + \log \operatorname{tg} (45^\circ + 1/2 F_0) \right\}.$$

Berechnet man dann die kleine Correctionsgrösse Δ nach der Gleichung:

$$\Delta = \log \operatorname{tg} (45^\circ + 1/2 F_1) - \log \operatorname{tg} (45^\circ + 1/2 F_0),$$

so ergibt sich für die zu F_1 noch hinzuzufügende Correction $d F_1$ ¹⁾:

$$d F_1'' = \frac{\Delta}{\operatorname{mod} e - \cos F_1} \frac{\cos F_1^2}{\cos F_1} 206\,264,8.$$

Wenn also Δ in Einheiten der fünften Decimale ausgedrückt ist, so folgt:

$$d F'' = \Delta \cdot [0,67665] \frac{\cos F_1^2}{e - \cos F_1} \dots \dots \dots (13)$$

Ist die Excentricität gross, so empfiehlt es sich, die Grösse $[0,67665] \frac{\cos F_1^2}{e - \cos F_1}$ mit dem Argumente F_1 etwa von 5 zu 5 oder von 10 zu 10 Grad zu tabuliren; ist die Excentricität aber vom Range 1, so ist es gerathener, die Differentialquotienten von Fall zu Fall zu berechnen. Mit Hülfe von F muss nun v bestimmt werden durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} 1/2 v = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{tg} 1/2 F,$$

was im Allgemeinen auf die gewöhnliche Weise geschehen wird. Ist jedoch die Excentricität gross, so entwickelt man v besser in eine Fourier'sche Reihe nach F , besonders, wenn es sich um Erreichung grösserer Genauigkeit handelt.

Setzt man nämlich:

$$n = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}, \quad m = \frac{n-1}{n+1},$$

¹⁾ Wenn eine und dieselbe Grösse, z. B. dF , bald in Bogenmaass und bald in Linearmaass auftritt, so sei:

dF diese Grösse in Linearmaass,
 dF' " " " Bogenminuten,
 dF'' " " " Bogensecunden.

so folgt:

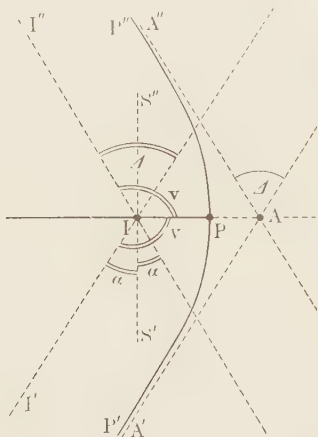
$$v = F + 2m \sin F + m^2 \sin 2F + \frac{2}{3} m^3 \sin 3F + \dots \quad (14)$$

Hat man also bei grosser Excentricität eine gewisse Zahl von Oertern zu berechnen, so empfiehlt es sich, die kleinen Glieder mit $\sin 2F$, $\sin 3F$ u. s. f. mit dem Argumente F etwa von 5 zu 5 Grad zu tabuliren.

Für manche Zwecke ist es vorthailhaft, den Winkel zwischen den beiden Hyperbelasymptoten zu kennen. Sei $P'PP''$ die hyperbolische Bahn des Planeten um die Sonne I .

Je weiter man sich vom Perihel P des Planeten entfernt, um so mehr nähern sich die Aeste PP' und PP'' den Asymptoten AA' und AA'' . II' und II'' seien die Radiivectoren nach den unendlich fernen Punkten der Hyperbel. Da diese letzteren auf

Fig. 9.



Ausgezeichnete Winkel in Hyperbelbahnen.

den Hyperbelasymptoten liegen, so haben II' mit AA' und II'' mit AA'' einen gemeinsamen Punkt im Unendlichen, d. h. diese Linien sind parallel. Also ist der Winkel Δ zwischen AA' und AA'' gleich dem Winkel zwischen II' und II'' .

Da nun die ganze Figur um die Hyperbelaxe IPA symmetrisch ist, so ist der Winkel $I''IP = I'IP = V$, dem grössten Werthe der wahren Anomalie.

Die Senkrechte $S'IS''$ zur Hyperbelaxe halbirt also den Winkel Δ . Setzt man daher:

$$\alpha = V - 90^\circ,$$

so ergibt die Fig. 9 unmittelbar:

$$\Delta = 2\alpha.$$

Nach der Gleichung der Hyperbel:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v},$$

ist nun die wahre Anomalie für den unendlich fernen Punkt durch die Gleichung gegeben:

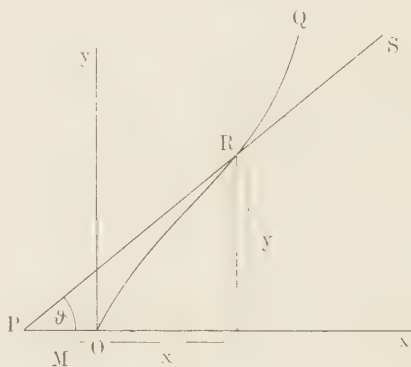
$$\cos V = -\frac{1}{e}.$$

Demnach ist:

$$\sin \alpha = \sin \frac{\Delta}{2} = \frac{1}{e}.$$

Je grösser e , desto kleiner wird Δ , um so mehr nähert sich die Bahn $P'PP''$ einer Geraden senkrecht zu IP . Aus Gleichung (8) folgt, dass für den unendlich fernen Punkt $F = 90^\circ$ ist.

Fig. 10.



wird diese Ungenauigkeit noch bedeutend vermehrt. Man ist also gezwungen, für derartige Fälle andere Rechnungsvorschriften zu suchen.

Wir gehen zu diesem Zwecke wieder von den Gleichungen:

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} r^2 dv &= dt \cdot k \sqrt{p} \\ r &= \frac{p}{1 + e \cos v} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

aus, indem wir die Masse des Kometen gleich Null setzen.

In diesen Gleichungen führen wir an Stelle von v die Variable:

$$\tau = tg^{1/2} v$$

ein. Dann wird:

$$\cos v = \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2}; \quad dv = \frac{2 d\tau}{1 + \tau^2}.$$

Man erhält somit aus den beiden Gleichungen (2):

$$k dt = \frac{2 p^{3/2} (1 + \tau^2)}{[1 + \tau^2 + e (1 - \tau^2)]^2} d\tau.$$

Nun setzen wir:

$$\varepsilon = \frac{1 - e}{1 + e}, \quad \text{also:} \quad e = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon},$$

ε ist in den Fällen, die wir betrachten, eine kleine Zahl. Beachtet man ferner, dass:

$$\frac{p}{q} = 1 + e = \frac{2}{1 + \varepsilon}$$

ist, so ergibt sich:

$$k dt = \frac{q^{3/2} (1 + \tau^2) \sqrt{2(1 + \varepsilon)}}{(1 + \varepsilon \tau^2)^2} d\tau.$$

Diese Gleichung ist in geschlossener Form integrirbar, führt aber zu rechnerisch völlig unbrauchbaren Ausdrücken, welche mit der Kepler'schen Gleichung oder der Gleichung in F identisch sind. Wir entwickeln sie daher zunächst in eine Reihe nach Potenzen von $\varepsilon \tau^2$ und schaffen alle constanten Factoren auf die linke Seite:

$$\frac{k dt}{q^{3/2} \sqrt{2(1 + \varepsilon)}} = d\tau (1 + \tau^2) [1 - 2\varepsilon \tau^2 + 3\varepsilon^2 \tau^4 - 4\varepsilon^3 \tau^6 + \dots]$$

Durch Integration folgt hieraus:

$$\begin{aligned} \frac{kt}{q^{3/2} \sqrt{2(1 + \varepsilon)}} &= \tau \left[1 - \frac{2\varepsilon \tau^2}{3} + \frac{3\varepsilon^2 \tau^4}{5} - \frac{4\varepsilon^3 \tau^6}{7} + \dots \right] \\ &+ \frac{\tau^3}{3} \left[1 - \frac{6\varepsilon \tau^2}{5} + \frac{9\varepsilon^2 \tau^4}{7} - \frac{12\varepsilon^3 \tau^6}{9} + \dots \right] \dots \dots (3) \end{aligned}$$

worin t die seit dem Periheldurchgange verfllossene Zeit bedeutet. Ist t negativ (vor dem Periheldurchgange), so ist auch τ negativ. Es genügt also in diesem Falle, die Rechnung mit dem absoluten Werthe von t durchzuführen und dann an dem für v gefundenen Werth das Zeichen minus anzubringen. Man hat sich sehr bemüht, aus Gleichung (3) τ mittelst kunstvoller Transformationen durch directe Rechnung zu finden, indem man nur die niedrigeren Potenzen von ε berücksichtigt.

Auf diese Weise haben Gauss und Posselt Hilfstafeln construirt, welche aber in gewissen Fällen nicht genügende Genauigkeit gewähren. Oppolzer, welcher darin viel weiter gegangen ist, hat auch das Ziel, welches er sich setzte, nicht ganz erreicht: Nachdem er durch bemerkenswerthe analytische Entwicklungen eine erste Näherung durch directe Rechnung gefunden hat, ist er nachträglich doch gezwungen, an dem so erhaltenen Resultat kleine Correctionen anzubringen, die er auf empirischem Wege bestimmt. Man kann aber die Gleichung (3) sehr leicht durch indirecte Rechnung auflösen.

Gleichung (3) geht, wenn man $\varepsilon = 0$ setzt, in die Barker'sche Gleichung über:

$$tg \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} tg \frac{1}{2} v^3 = \frac{k t}{q^{3/2} \sqrt{2}}.$$

Da ε klein ist, so sind die beiden Klammern $[\dots]$ in Gleichung (3) nahe gleich 1 und variiren nur langsam mit τ . Man kann daher mit Vortheil die beiden Klammern mit einem Näherungswerthe τ_0 berechnen, und dann durch Auflösung einer cubischen Gleichung einen weit besseren Werth für τ erhalten. Diese Rechnung kann sehr durch geeignete Hilfstafeln verkürzt werden. In der That, die beiden Klammern hängen nur von einem Argumente:

$$x = \varepsilon \tau^2$$

ab. Wir setzen also:

$$\begin{aligned} A(x) &= 1 - \frac{2}{3}x + \frac{3}{5}x^2 - \frac{4}{7}x^3 + \dots \\ B(x) &= 1 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{7}x^2 - \frac{12}{9}x^3 + \dots \end{aligned}$$

Dann haben wir also folgende Gleichung an Stelle von (3):

$$\frac{k t}{q^{3/2} \sqrt{2} (1 + \varepsilon)} = \tau A + \frac{\tau^3}{3} B \dots \dots \dots (4)$$

Diese Gleichung wollen wir nun durch Einführung eines Winkels w auf die Form:

$$M = 75 tg \frac{1}{2} w + 25 tg \frac{1}{2} w^3 \dots \dots \dots (5)$$

bringen, die man mit Hülfe der Barker'schen Tafel auflösen kann. Wir setzen:

$$tg \frac{1}{2} v = \tau = C tg \frac{1}{2} w \dots \dots \dots (6)$$

wo C vorläufig unbestimmt ist. Man erhält dann:

$$\frac{k t}{q^{3/2} \sqrt{2} (1 + \varepsilon)} = A C tg \frac{1}{2} w + B C^3 \frac{tg \frac{1}{2} w^3}{3} \dots \dots \dots (7)$$

Um auf die Form (5) zu kommen, muss zunächst $\frac{B C^3}{A C}$ gleich Eins sein. Also:

$$C = \sqrt{\frac{A}{B}}.$$

Nach dieser Substitution wird die Gleichung (7), wenn man mit $\frac{75 \sqrt{B}}{A^{3/2}}$ multiplicirt:

$$\frac{\sqrt{B}}{A^{3/2}} \frac{75 k t}{q^{3/2} \sqrt{2} \sqrt{1 + \varepsilon}} = 75 tg \frac{1}{2} w + 25 tg \frac{1}{2} w^3 = M \dots \dots \dots (8)$$

Wir setzen nun noch:

$$D = \frac{\sqrt{B}}{A^{3/2}} \frac{75 k}{\sqrt{2}} \left\{ \dots \dots \dots (9) \right.$$

also:

$$M = \frac{D t}{q^{3/2} \sqrt{1 + \varepsilon}}$$

Im Anhang sind die Logarithmen der Grössen C und D mit dem Argumente $x = \varepsilon \tau^2$ innerhalb weiter Grenzen tabulirt. Ausserhalb der Grenzen dieser Tafel kann man die Auflösung der Kepler'schen Gleichung oder der Gleichung in F ohne Schwierigkeit nach den gewöhnlichen Regeln ausführen.

Wir stellen die eben gegebenen Vorschriften kurz zusammen.

Zunächst verschafft man sich einen Näherungswerth v_0 von v . Hat man keinen besseren zur Verfügung, so kann dies durch Auflösung der Barker'schen Gleichung geschehen.

Man sucht also aus der Barker'schen Tafel einen Winkel v_0 mittelst des Argumentes:

$$M = \frac{75 k t}{q^{3/2} \sqrt{2}} = [9,960\,127\,7] \frac{t}{q^{3/2}}.$$

Dann berechnet man:

$$\varepsilon = \frac{1-c}{1+e}; \quad \tau_0 = tg \frac{v_0}{2}; \quad x_0 = \varepsilon \tau_0^2.$$

Mit dem Argumente x_0 entnimmt man nun Tafel IX die Grössen $\log C$ und $\log D$. Hierauf berechnet man:

$$M = \frac{Dt}{q^{3/2} \sqrt{1+\varepsilon}}$$

und entnimmt der Barker'schen Tafel mit diesem Argumente einen Winkel w . Man erhält hierauf einen verbesserten Werth von v mittelst der Gleichung:

$$tg \frac{1}{2} v = C tg \frac{1}{2} w.$$

Mit diesem neuen Werthe von v kann man nun wieder x berechnen und daraus einen noch angenäherteren Werth von v u. s. w., bis die Rechnung stehen bleibt.

Dieses Verfahren ist im Anhange durch ein ausführliches Beispiel, welches Tafel IX direct zur Erläuterung angeschlossen ist, illustriert. Wir wollen hier nur noch die Stärke seiner Convergenz prüfen. Bezeichnet man den Näherungswerth von τ mit τ_0 , den verbesserten mit τ_1 , so schreibt sich die Gleichung (3) bei Vernachlässigung höherer Potenzen von ε :

$$const. = \tau_1 [1 - \frac{2}{3} \varepsilon \tau_0^2] + \frac{\tau_1^3}{3} [1 - \frac{6}{5} \varepsilon \tau_0^2].$$

Durch Differentiation dieser Gleichung ergibt sich zunächst:

$$0 = d\tau_1 \{ [1 - \frac{2}{3} \varepsilon \tau_0^2] + \tau_1^2 [1 - \frac{6}{5} \varepsilon \tau_0^2] \} \\ - d\tau_0 \left\{ \tau_0 \tau_1^4 \frac{1}{3} \varepsilon + \tau_0 \frac{\tau_1^3 12}{15} \varepsilon \right\}.$$

Wir vernachlässigen nun, da es sich, wie gesagt, nur um eine ganz angenäherte Bestimmung des Differentialquotienten $\frac{d\tau_1}{d\tau_0}$ handelt, in der ersten Klammer $\{\cdot\cdot\cdot\}$ die Glieder mit ε . Es folgt so:

$$d\tau_1 = \frac{d\tau_0 \tau_0 \tau_1 \varepsilon [\frac{4}{3} + \frac{4}{5} \tau_1^2]}{1 + \tau_1^2}.$$

Setzen wir jetzt schliesslich wieder:

$$\tau_1 = tg \frac{v_1}{2}, \quad \tau_0 = tg \frac{v_0}{2}$$

und vertauschen im Werthe des Differentialquotienten v_0 und v_1 mit v , so ergibt sich:

$$\frac{dv_1}{dv_0} = \varepsilon \sin \frac{v^2}{2} \left[\frac{4}{3} + \frac{4}{5} tg^2 \frac{v}{2} \right].$$

Dieser Differentialquotient ist also im Allgemeinen von der Grössenordnung von ε , und das Annäherungsverfahren convergirt in Folge dessen schnell.

Es sei z. B. $v = 90^\circ$ und $\varepsilon = \frac{1}{100}$; man hätte dann:

$$\frac{dv_1}{dv_0} \text{ circa } \frac{1}{100}.$$

Wenn man für äquidistante Zeiten eine grössere Zahl von Werthen von v berechnet, wie das z. B. bei Bildung einer Ephemeride geschieht, so ist es mittelst der Differenzreihen sehr leicht, den jedesmal zu erwartenden Werth v_0 auf 1" genau vor auszusehen. Unter obiger Voraussetzung würde man hieraus einen Werth von v_1 berechnen können, der auf 0",01, also völlig genügend genau ist. Demnach kommt in den gewöhnlichen Fällen bei Berechnung von Ephemeriden unser Annäherungsverfahren einer directen Rechnung fast vollkommen gleich.

Achte Vorlesung.

Lambert's Theorem über die heliocentrische Bewegung in Kegelschnitten und seine Specialisirung für die Parabel.

Lambert hat die merkwürdige Entdeckung gemacht, dass die Zeit, welche ein in einem Kegelschnitte um die Sonne laufender Körper gebraucht, um von einem Punkte seiner heliocentrischen Bahn zu einem anderen zu gelangen, nur von der grossen Axe, der zwischen beiden Punkten eingeschlossenen Sehne, und der Summe der beiden zugehörigen Radienvectoren abhängt. Dieser fruchtbare, sehr wichtiger Anwendungen fähige Satz lässt sich, wie folgt, beweisen.

Man bezeichne die grosse Axe mit $2a$, die kleine mit $2b$, die Sehne mit κ , die Radienvectoren mit r und r' , die zugehörigen excentrischen Anomalien mit E und E' , die gebrauchte Zeit mit $t' - t$, die Excentricität mit e , so wird:

$$\begin{aligned} r &= a (1 - e \cos E), \quad r' = a (1 - e \cos E'), \\ \kappa^2 &= [a (\cos E' - e) - a (\cos E - e)]^2 + (b \sin E' - b \sin E)^2 \\ &= a^2 (\cos E' - \cos E)^2 + b^2 (\sin E' - \sin E)^2 \\ &= 4 a^2 \sin^2 \frac{1}{2} (E' - E)^2 [1 - e^2 \cos^2 \frac{1}{2} (E' + E)]. \end{aligned}$$

Es ist aber auch:

$$\frac{r + r' - 2a}{2a} = -e \cos \frac{1}{2} (E' + E) \cos \frac{1}{2} (E' - E),$$

also:

$$\kappa^2 = 4 a^2 \sin^2 \frac{1}{2} (E' - E)^2 \left[1 - \frac{(r + r' - 2a)^2}{4 a^2 \cos^2 \frac{1}{2} (E' - E)^2} \right] \dots \dots (1)$$

woraus sich zunächst ergibt, dass für zwei Ellipsen, in welchen die oben genannten Stücke gleich sind, auch die Differenz der excentrischen Anomalien beider Punkte die nämliche ist. Da nun aber ferner:

$$\begin{aligned} \frac{k (t' - t)}{a^{3/2}} &= E' - E - e (\sin E' - \sin E) \\ &= E' - E - 2 e \cos \frac{1}{2} (E' + E) \sin \frac{1}{2} (E' - E), \end{aligned}$$

und Alles auf der rechten Seite dieser Gleichung ebenfalls, wie eben gezeigt wurde, nur von den genannten Stücken abhängt, so ist hiermit der von Lambert aufgestellte Satz bewiesen. Derselbe lässt sich sofort auf Parabel und Hyperbel ausdehnen, weil die Bewegungsgleichungen aller drei Kegelschnitte in analytischer Beziehung gleich sind, wenn für die Hyperbel das Imaginäre zugelassen wird. Alle Sätze, in denen das Imaginäre schon eliminirt erscheint, können daher ohne Weiteres auch für die Hyperbel zur Anwendung gebracht werden.

Ehe wir zu den wichtigen Folgerungen aus diesem Satze schreiten, geben wir noch das Resultat der Entwicklung von $\cos \frac{1}{2} (E' - E)$ und $\sin \frac{1}{2} (E' - E)$ aus der obigen Gleichung (1). Man findet¹⁾:

$$4 a \cos \frac{1}{2} (E' - E) = \sqrt{(r' + r + \kappa) (r' + r - \kappa)} \left| \begin{array}{c} \dots \dots \dots (2) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

$$4 b \sin \frac{1}{2} (E' - E) = \sqrt{(\kappa - r' + r) (\kappa + r' - r)} \left| \begin{array}{c} \dots \dots \dots (3) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

¹⁾ Bei der numerischen Rechnung ist eine Unsicherheit über das Vorzeichen der Wurzelgrössen sehr leicht zu heben; da übrigens eine Quadratwurzel selbstverständlich doppelte Vorzeichen hat, so lassen wir dieselben fort, uns denkend, dass hinter dem Zeichen + der Addition noch ein \pm stehe.

in welchen, in Beziehung auf r , r' , ϱ und ϱ' symmetrisch gebildeten Ausdrücken ϱ und ϱ' die Radienvectoren aus dem zweiten Brennpunkt, d. h. die Grösse $2a - r$ und $2a - r'$ vorstellen. Die Gleichung (3) ist mit der folgenden identisch:

$$b \sin \frac{1}{2} (E' - E) = \sqrt{rr'} \cdot \sin \frac{1}{2} (v' - v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

welche sich aus den bekannten Relationen zwischen $\frac{1}{2} E$, $\frac{1}{2} v$ und \sqrt{r} ohne Mühe ergibt.

Lambert selbst schon hat von dem eben bewiesenen Satze in seinem classischen Buche „*Insigniores orbitae cometarum proprietates*“ eine sehr interessante Anwendung gemacht. Er bemerkt, dass man ja auf einer Ellipse von verschwindender kleiner Axe, wie sie ein ohne seitliche Geschwindigkeit nach der Sonne fallender Körper beschreiben würde, stets zwei Punkte so aussuchen könne, dass die grosse Axe, die Summe der Radienvectoren und die Sehne gegebene Werthe haben, und dass die in einer Ellipse von beliebiger Excentricität gebrauchte Zeit durch die einfacheren Ausdrücke für jene in eine gerade Linie degenerirte Ellipse von der Excentricität 1 gefunden werden könne. Die letztere unterscheidet sich von der Parabel dadurch, dass ihre grosse Axe nicht unendlich gross ist, sondern einen endlichen Werth hat. Es behält deshalb auch die excentrische Anomalie darin ihre Bedeutung.

Es müssen offenbar die beiden Punkte auf der geraden Linie, deren excentrische Anomalien δ und δ' sein mögen, so bestimmt werden, dass die Summen der Radienvectoren, d. h.

$$a (1 - \cos \delta') + a (1 - \cos \delta) = r + r'$$

und die Differenz gleich der gegebenen Sehne, d. h.:

$$a (1 - \cos \delta') - a (1 - \cos \delta) = \kappa$$

wird. Es wird demnach:

$$\sin \frac{1}{2} \delta'^2 = \frac{r + r' + \kappa}{4a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\sin \frac{1}{2} \delta^2 = \frac{r + r' - \kappa}{4a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und es besteht dann die Gleichung:

$$\delta - \sin \delta - (\delta' - \sin \delta') = \frac{k (t - t')}{a^{3/2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wenn $t - t'$ die zum Beschreiben des zur Sehne gehörigen Bogens verwendete Zeit ist.

Diese drei Gleichungen, (5), (6), (7), lassen für jede Ellipse, und in ihrer grössten analytischen Ausdehnung unter Zuziehung des Imaginären auch für jede Hyperbel die Zeit finden, wenn in dem Kegelschnitte $r + r'$, κ und a gegeben sind. Eine ganz besonders einfache Form aber erhält man, wenn a in das Unendliche wächst. Alsdann ist:

$$\begin{aligned} k (t' - t) &= 2 a^{3/2} \left\{ \arcsin \left[\left(\frac{r + r' + \kappa}{4a} \right)^{1/2} \right] \right. \\ &\quad \left. - \arcsin \left[\left(\frac{r + r' - \kappa}{4a} \right)^{1/2} \right] \right\} \\ &= a^{3/2} \sin \left\{ 2 \arcsin \left[\left(\frac{r + r' + \kappa}{4a} \right)^{1/2} \right] \right\} \\ &\quad + a^{3/2} \sin \left\{ 2 \arcsin \left[\left(\frac{r + r' - \kappa}{4a} \right)^{1/2} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{6} (r + r' + \kappa)^{3/2} - \frac{1}{6} (r + r' - \kappa)^{3/2}, \end{aligned}$$

da unter Anwendung der bekannten Reihenentwickelungen für $\sin x$ und $\arcsin x$ in diesem Falle alle übrigen Glieder, welche a im Nenner enthalten würden, verschwinden.

Diese Gleichung für die Parabel, in der Gestalt:

$$(r + r' + \kappa)^{3/2} - (r + r' - \kappa)^{3/2} = 6k(t' - t) \dots \dots \dots (8)$$

führt ganz vorzugsweise den Namen der Lambert'schen Gleichung und spielt bei der Bestimmung von Kometenbahnen eine sehr wichtige Rolle.

Neunte Vorlesung.

Die sphärischen Coordinatensysteme der Astronomie und der gegenseitige Uebergang von einem System auf das andere.

Um die Lage eines Himmelskörpers anzugeben, sind in der Astronomie vorzugsweise zwei Systeme von Coordinaten im Gebrauche, auf die man den Ort eines Gestirnes bezieht, das der Rectascension und Declination und das der Länge und Breite. Vom System des Horizontes (Azimuth und Höhe) sehen wir, weil für die Untersuchungen des vorliegenden Werkes nirgends in Betracht kommend, ganz ab.

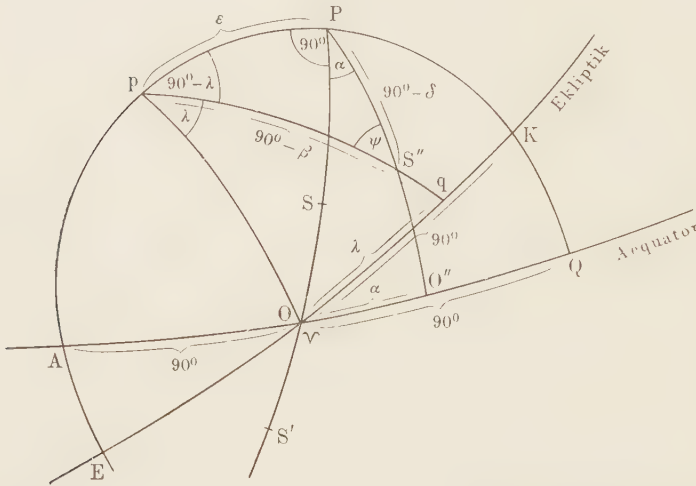
Das erstere System findet die häufigste Anwendung in Ephemeriden und Himmelskarten, die zum Aufsuchen eines Objectes oder zur Vergleichung zwischen Rechnung und Beobachtung dienen sollen, da die Hülfsmittel der neueren Astronomie die beobachteten Oerter fast unmittelbar in dieser Form liefern. Unter der Rectascension versteht man bekanntlich den Winkel, welchen der durch das Object gelegte Meridian der Himmelskugel mit dem Meridian der Frühlings-Tag- und -Nachtgleiche bildet. Dieselbe wird in dem Sinne gezählt, dass in Folge der täglichen Bewegung Sterne immer grösserer Rectascension durch den Meridian eines Ortes gehen. Zur Bestimmung der Rectascension würde es also genügen, zu beobachten, zu welcher Sternzeit das Gestirn den Meridian eines Ortes passirt. Da aber die Bestimmung der Lage des Frühlingspunktes viele Beobachtungen erfordert, so pflegt man die Rectascensionen gewöhnlich durch Vergleich mit einem Fundamentalstern zu bestimmen, dessen Stellung sehr genau durch die Jahrbücher von Tag zu Tag gegeben wird. Zur Bestimmung der Declination oder des senkrechten Bogenabstandes des Objectes vom Aequator stellt in Fig. 11 AOQ den Aequator der Himmelskugel, O den darin gelegenen Punkt des Frühlingsäquinociums, P den Nordpol des Aequators, die durch O und P gelegte Linie den Meridian des Äquinociums vor. Die Sterne S und S' , welche auf diesem Meridiane liegen, haben also nach der Definition die Rectascension 0^0 ; die Declinationen derselben Sterne werden durch die Bögen des Meridians OS und OS' vorgestellt, und zwar ist die des ersteren Sternes als nördlich, die des letzteren als südlich zu bezeichnen, was durch das Zeichen $+$ und $-$ geschieht.

Um die Rectascension und Declination eines Sternes S'' darzustellen, hat man durch denselben den Meridian $PS''O''$ zu legen, welcher den Aequator in O'' schneidet. Es ist dann der Winkel am Pol OPS'' oder $OP O''$, welchen der Meridian des Sternes mit dem Meridian des Äquinociums bildet, oder auch der Bogen des Aequators OO'' , der diesem Winkel entspricht, die Rectascension, der Bogen $O''S''$ aber der Abstand vom Aequator, d. h. die Declination des Sternes S'' .

Bisweilen ist es von Vortheil, das System der Längen und Breiten anzuwenden, weil für dasselbe die Erdbahn oder Ekliptik die Fundamentalebene bildet. Das Frühlingsäquinocium bildet den Ausgangspunkt der Zählung der Längen, welche in

diesem Systeme den Rectascensionen entsprechen. Die Zählungsrichtung ist die nämliche; in Folge dessen nimmt die Länge der Sonne bei ihrer scheinbaren Bewegung in der Ekliptik immer zu. Betrachtet man beide Fundamentelebenen vom nördlichen

Fig. 11.



Theile des Himmels aus, so sind in beiden die Zählungsrichtungen der eines Uhrzifferblattes entgegengesetzt. Beide Systeme gehen durch Vertauschung der Pole in einander über. Sei in Fig. 11 EOK die Ekliptik, welche durch das Frühlingsäquinoccium O hindurchgeht. Verbinden wir ihren Nordpol p mit dem Sterne S'' durch den grössten Kreis pS'' , welcher die Ekliptik im Punkte q schneidet, und

mit dem Aequinoctium O durch pO , dann ist die Länge von S'' der Winkel OpS'' oder Opq oder der Bogen Oq der Ekliptik, die Breite von S'' aber der Bogen $S''q$.

Die Aufgabe, von gegebener Rectascension α und Declination δ auf die Länge λ und die Breite β , und umgekehrt, von gegebenem λ und β auf α und δ überzugehen, kommt in der Bahnbestimmung häufig vor, da α und δ durch die Beobachtungen gegeben werden, während man die Bahnelemente auf die Ekliptik bezieht. Bekannt sein muss dabei der Winkel zwischen den beiden Fundamentelebenen, Aequator und Ekliptik, oder, was dasselbe, deren beiden Polen, die sogenannte Schiefe der Ekliptik ϵ (in Fig. 11 KOQ). Die Sonne durchläuft scheinbar in einem Jahre einmal die Ekliptik, wobei sie einen Bogen von 180° über dem Aequator und einen ebensolchen unter ihm beschreibt. Zur Zeit der Solstitien, wo sie am höchsten und tiefsten steht, befindet sie sich gerade in der Mitte dieses Bogens. Es ist daher die Schiefe der Ekliptik gleich der Declination desjenigen auf ihr gelegenen Punktes, der die Länge 90° hat, also eine durch Messung bestimmbare Grösse.

Seien a, b, c die Seiten eines sphärischen Dreieckes, A, B, C die ihnen gegenüberliegenden Winkel, so sind die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie:

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

welche durch Einführung der Relationen

$$\begin{aligned} \cos b &= m \cos M \\ \sin b \cos A &= m \sin M \end{aligned}$$

in die folgenden, für die logarithmische Rechnung bequemerem übergehen:

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= m \cos(c - M) \\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \sin a \cos B &= m \sin(c - M) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Man pflegt hierbei M so zu bestimmen, dass m positiv ist, wodurch jede Zweideutigkeit

wegfällt. An Stelle dieser Formeln kann man auch die aus ihnen resultirenden Tangentialformeln anwenden:

$$\left. \begin{aligned} tg M &= tg b \cos A \\ tg B &= \frac{tg A \sin M}{\sin(c - M)} \\ tg a &= \frac{tg(c - M)}{\cos B} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Hierbei ist es gleichgültig, welchen der beiden Werthe von M man wählt; man muss sich aber hüten, a und B um 180° falsch zu bestimmen. Dies geschieht am einfachsten, indem man sich die betreffenden Lagen auf der Sphäre vergegenwärtigt.

Wendet man diese Vorschriften auf das fundamentale Dreieck pPS'' zwischen dem Sterne, dem Pole des Aequators und dem der Ekliptik an, so erhält man unmittelbar die Formeln, welche bei gegebenem α und δ die Grössen λ und β ergeben:

$$\left. \begin{aligned} 1) \cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha \\ 2) \cos \beta \sin \lambda &= \cos \delta \sin \alpha \cos \varepsilon + \sin \delta \sin \varepsilon \\ 3) \sin \beta &= -\cos \delta \sin \alpha \sin \varepsilon + \sin \delta \cos \varepsilon \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

oder bei Einführung von

$$\left. \begin{aligned} M \sin N &= \sin \delta \\ M \cos N &= \cos \delta \sin \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

die der Rechnung zu Grunde zu legenden Tangentialformeln:

$$\left. \begin{aligned} tg N &= \frac{tg \delta}{\sin \alpha} \\ tg \lambda &= \frac{\cos(N - \varepsilon) tg \alpha}{\cos N} \\ tg \beta &= tg(N - \varepsilon) \sin \lambda \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

wobei sich die Controlformel durch Division von

$$\begin{aligned} \cos \beta \sin \lambda &= M \cos(N - \varepsilon) \\ \cos \delta \sin \alpha &= M \cos N \end{aligned}$$

ergiebt, nämlich

$$\frac{\cos \beta \sin \lambda}{\cos \delta \sin \alpha} = \frac{\cos(N - \varepsilon)}{\cos N} \dots \dots \dots (7)$$

Da β immer zwischen -90° und $+90^\circ$ liegt, so ist ein Irrthum bei der Bestimmung dieser Grösse nicht möglich; λ liegt immer in der Nähe von α . Der Winkel am Sterne, ψ , folgt durch Division der beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta \sin \psi &= \cos \alpha \sin \varepsilon \\ \cos \beta \cos \psi &= \cos \varepsilon \cos \delta + \sin \varepsilon \sin \delta \sin \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Für die Lösung der umgekehrten Aufgabe, aus gegebener Länge λ und Breite β die Rectascension α und Declination δ zu finden, ergiebt dasselbe Dreieck:

$$\left. \begin{aligned} 1) \cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda \\ 2) \cos \delta \sin \alpha &= \cos \beta \sin \lambda \cos \varepsilon - \sin \beta \sin \varepsilon \\ 3) \sin \delta &= \cos \beta \sin \lambda \sin \varepsilon + \sin \beta \cos \varepsilon \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

also, wenn man wieder

$$\begin{aligned} M \sin N &= \sin \beta \\ M \cos N &= \cos \beta \sin \lambda \end{aligned}$$

setzt, die definitiven Rechenformeln:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} N &= \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \lambda} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\cos(N + \varepsilon)}{\cos N} \operatorname{tg} \lambda \\ \operatorname{tg} \delta &= \operatorname{tg}(N + \varepsilon) \sin \alpha \\ \cos \delta \sin \psi &= \cos \lambda \sin \varepsilon \\ \cos \delta \cos \psi &= \cos \varepsilon \cos \beta - \sin \varepsilon \sin \beta \sin \lambda \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

mit der Controle:

$$\frac{\cos(N - \varepsilon)}{\cos N} = \frac{\cos \delta \sin \alpha}{\cos \beta \sin \lambda} \dots \dots \dots (11)$$

Doch existirt noch eine sicherere Controle für beide Transformationen, die im Jahre 1878 durch Tietjen im Berliner Jahrbuche mitgetheilt worden ist. Man erhält sie höchst einfach, indem man die erste und zweite Gleichung des Systemes (4) bezüglich mit $-\sin \alpha$ und $+\cos \alpha$ multiplicirt und dann die beiden so erhaltenen Gleichungen unter Berücksichtigung der Substitution

$$\begin{aligned} 1 - \cos \varepsilon &= 2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \\ \sin \varepsilon &= 2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \cos \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

sowie der schon für M und N angeführten Relationen (5) addirt. So resultirt die erste von Tietjen aufgestellte Controlformel:

$$\sin(\lambda - \alpha) = 2 M \sec \beta \cos \alpha \sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \left(N - \frac{\varepsilon}{2} \right) \dots \dots \dots (12)$$

Die zweite ergibt sich durch Subtraction der dritten Gleichung im System (4) und von Gleichung (9) unter Berücksichtigung der Relationen

$$\begin{aligned} \sin \lambda \cos \beta &= M \cos(N - \varepsilon) \\ \sin \alpha \cos \delta &= M \cos N; \end{aligned}$$

ferner:

$$\begin{aligned} 1 + \cos \varepsilon &= 2 \cos \frac{\varepsilon}{2} \\ \sin \varepsilon &= 2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \cos \frac{\varepsilon}{2}; \end{aligned}$$

schliesslich:

$$\sin \delta - \sin \beta = 2 \sin \frac{\delta - \beta}{2} \cos \frac{\delta + \beta}{2};$$

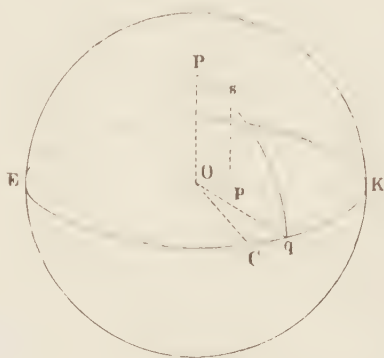
woraus:

$$\sin \frac{\delta - \beta}{2} = M \sec \frac{\delta + \beta}{2} \sin \frac{\varepsilon}{2} \cos \left(N - \frac{\varepsilon}{2} \right) \dots \dots \dots (13)$$

Je nachdem man das Centrum der Sphäre oder den Standpunkt des Beobachters und den Nullpunkt des Systemes in den Mittelpunkt der Sonne oder der Erde verlegt denkt, unterscheidet man zwischen dem heliocentrischen und dem geocentrischen Ort eines Gestirnes. Verbindet man den Ort eines Gestirnes im Raume (d. h. hier immer den Ort seines Schwerpunktes) mit dem Mittelpunkte der Sonne, und projecirt diese Verbindungslinie, den Radius vector des Gestirnes, durch Fällung eines Perpendikels rechtwinklig auf die Ekliptik, so ist der Winkel, welchen der projecirte Radius vector mit der durch die Sonne gelegten Linie des Frühlingsäquinocetiums macht, ebenfalls die heliocentrische Länge, der Winkel zwischen dem Radius vector und seiner Projection die heliocentrische Breite. Werden dieselben Operationen mit der Verbindungslinie zwischen Gestirn und Erde vorgenommen, so erhält man die

sogenannte curtirte Distanz, die geocentrische Länge und die geocentrische Breite. Um diese Projection dem Leser deutlicher zu machen, sei in Fig. 12 durch das Gestirn s eine Kugel gelegt, deren Mittelpunkt O die Sonne ist und welche von der Ekliptik in dem grössten Kreise ECK geschnitten wird. Von s fälle man zur Ebene der Ekliptik das Perpendikel sp und verlängere die Linie Op , bis sie den grössten Kreis ECK im Punkte q schneidet. Es ist dann sq ein Bogen eines gegen die Ekliptik senkrechten und demnach durch den Pol P gehenden grössten Kreises und stellt die heliocentrische Breite des Gestirnes vor. Ist OC die Linie oder Richtung des Frühlingsäquinoctiums, so stellt der Winkel COp oder COq die heliocentrische Länge von s vor.

Fig. 12.



Wenn anstatt der Sonne die Erde in den Mittelpunkt O gesetzt und die Entfernung des Gestirnes von der Erde zum Halbmesser gewählt wird, so liefert eine ähnliche Construction die geocentrische Breite und Länge.

In Beziehung auf die Richtung, in welcher die Längen gezählt werden, verdient noch Erwähnung, dass sie mit der Richtung der Bewegung der Erde um die Sonne zusammenfällt. Desgleichen nehmen die Rectascensionen in demselben Sinne zu, in welchem auch die Rotation der Erde geschieht.

Will man anstatt der Polarcordinaten rechtwinklige einführen, so ist es üblich, eine der beiden Fundamentebenen, den Aequator oder die Ekliptik, als Ebene der x, y und darin die Linie des Frühlingsäquinoctiums als Axe der x zu wählen. Leicht ist dann unter Wiederholung der eben angegebenen Operationen zu sehen, dass sowohl x als y , welche zu gegebenen Polarcordinaten gehören, durch eine doppelte Projection des Radius erhalten werden, die Coordinate x nämlich dadurch, dass die Projection des Radius in der Fundamentebene durch Fällung eines Perpendikels auf die Axe der x projicirt wird, y aber durch Projection zur y -Axe. Da nun ausserdem die Coordinate z offenbar gleich dem vom Orte des Gestirnes auf die Fundamentebene gefällten Projectionsperpendikel ist, so ergeben sich die folgenden, häufig angewandten Formeln zwischen den geocentrischen rechtwinkligen Coordinaten ξ, η, ζ und den drei Polarcordinaten ϱ, λ, β :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \varrho \cos \beta \cos \lambda \\ \eta &= \varrho \cos \beta \sin \lambda \\ \zeta &= \varrho \sin \beta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

wobei ϱ die Distanz von der Erde, λ und β beziehungsweise die geocentrische Länge und Breite vorstellen.

Ist die Fundamentebene der Aequator, so ist:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \varrho \cos \delta \cos \alpha \\ \eta' &= \varrho \cos \delta \sin \alpha \\ \zeta' &= \varrho \sin \delta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

Die Formeln, welche den Uebergang vom geocentrischen Orte auf den heliocentrischen bewerkstelligen und umgekehrt, werden in der folgenden Vorlesung ihren passenden Platz finden.

Hier wollen wir nur noch im Anschluss an Oppolzer die Transformation der Bahnlage durchführen und zunächst die Aufgabe lösen, wenn die Elemente der Bahnlage \oslash, i, ω bezüglich der Ekliptik gegeben sind, daraus die analogen Elemente

\odot' , i' , ω' in Bezug auf den Aequator zu finden. Die Anwendung der Gauss'schen Analogien auf das fundamentale sphärische Dreieck, welches von Ekliptik, Aequator und Planetenbahn gebildet wird, giebt diese Lösung unmittelbar. Bezeichnen wir mit d die dem Winkel ε , d. h. die der Schiefe der Ekliptik gegenüberliegende Seite dieses sphärischen Dreiecks, so hat man

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{1}{2} i' \sin \frac{1}{2} (\odot' + d) &= \cos \frac{1}{2} (i - \varepsilon) \sin \frac{1}{2} \odot \odot \\ \cos \frac{1}{2} i' \cos \frac{1}{2} (\odot' + d) &= \cos \frac{1}{2} (i + \varepsilon) \cos \frac{1}{2} \odot \odot \\ \sin \frac{1}{2} i' \sin \frac{1}{2} (\odot' - d) &= \sin \frac{1}{2} (i - \varepsilon) \sin \frac{1}{2} \odot \odot \\ \sin \frac{1}{2} i' \cos \frac{1}{2} (\odot' - d) &= \sin \frac{1}{2} (i + \varepsilon) \cos \frac{1}{2} \odot \odot \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

und weiter

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega + d \\ \pi' &= \omega' + \odot'. \end{aligned}$$

Als Controlformeln ergeben sich aus demselben Dreieck die folgenden:

$$\left. \begin{aligned} \sin i' \cos \odot' &= \sin \varepsilon \cos i + \cos \varepsilon \sin i \cos \odot \\ \sin i' \sin \odot' &= \sin i \sin \odot \\ \cos i' &= \cos \varepsilon \cos i - \sin \varepsilon \sin i \cos \odot \\ \sin i' \cos d &= \cos \varepsilon \sin i + \sin \varepsilon \cos i \cos \odot \\ \sin i' \sin d &= \sin \varepsilon \sin \odot \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

oder, wenn man zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} \sin i \cos \odot &= \sin a \sin A \\ \cos i &= \sin a \cos A \\ \sin i &= \sin b \sin B \\ \cos i \cos \odot &= \sin b \cos B \end{aligned}$$

setzt, einfacher:

$$\left. \begin{aligned} \sin i' \cos \odot' &= \sin a \sin (A + \varepsilon) \\ \sin i' \sin \odot' &= \sin i \sin \odot \\ \sin i' \cos d &= \sin b \sin (B + \varepsilon) \\ \sin i' \sin d &= \sin \varepsilon \sin \odot \\ \cos i' &= \sin a \cos (A + \varepsilon) \\ \omega' &= \omega + d \\ \pi' &= \omega' + \odot' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

und

da stets $i' < 180^\circ$, so ist $\sin \frac{1}{2} i'$, $\cos \frac{1}{2} i'$ und $\sin i'$ stets positiv und mithin kein Zweifel über die Wahl des Quadranten möglich.

Zur Illustration dieser Formeln soll die Verwandlung der auf die Ekliptik bezogenen Elemente des Kometen III 1862 in solche, die sich auf den Aequator beziehen, nach Oppolzer durchgeführt werden. Es ist:

$$\begin{aligned} \lambda &= 137^\circ 27' 10''.02 \\ i &= 113 \quad 34 \quad 12,24 \\ \omega &= 152 \quad 45 \quad 37,82 \\ \pi &= 290 \quad 12 \quad 47,84. \end{aligned}$$

Danach ergibt Schema I:

$\frac{1}{2} i$	56° 47' 6",12	$\cos \frac{1}{2} i' \sin \frac{1}{2} (\delta\delta' + d)$	9,818 4069
$\frac{1}{2} \varepsilon$	11 43 43,06	$\sin \text{ od. } \cos \frac{1}{2} (\delta\delta' + d)$	9,991 3254
$\frac{1}{2} (i - \varepsilon)$	45 3 23,06	$\cos \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} (\delta\delta' + d)$	9,123 5061
$\frac{1}{2} (i + \varepsilon)$	68 30 49,18	$\frac{1}{2} (\delta\delta' + d)$	78° 35' 10'',97
$\frac{1}{2} \delta\delta$	68 43 35,01		
$\cos \frac{1}{2} (i - \varepsilon)$	9,849 0570	$\sin \frac{1}{2} i' \sin \frac{1}{2} (\delta\delta' - d)$	9,819 2620
$\sin \frac{1}{2} \delta\delta$	9,969 3499	$\sin \text{ od. } \cos \frac{1}{2} (\delta\delta' - d)$	9,949 4704
$\sin \frac{1}{2} (i - \varepsilon)$	9,849 9121	$\sin \frac{1}{2} i' \cos \frac{1}{2} (\delta\delta' - d)$	9,528 4123
		$\frac{1}{2} (\delta\delta' - d)$	62° 53' 38'',25
$\cos \frac{1}{2} (i + \varepsilon)$	9,563 8125	d	15° 41' 32'',72
$\cos \frac{1}{2} \delta\delta$	9,559 6936	ω	152 45 37,82
$\sin \frac{1}{2} (i + \varepsilon)$	9,968 7187		
$\sin \frac{1}{2} i'$	9,869 7916	$\delta\delta'$	141° 28' 49'',22
$\cos \frac{1}{2} i'$	9,827 0815	i'	95 37 32,20
$\frac{1}{2} i'$	47° 48' 46'',10	ω'	168 27 10,54
		π'	309 55 59,76

Bei Anwendung des zweiten Rechenschemas hat man

$\sin \varepsilon$	9,599 9538	$\cos (A + \varepsilon)$	9,096 6059 _n
$\sin \delta\delta$	9,830 0736	$\sin a$	9,894 7438
$\sin i$	9,962 1664	$\sin (A + \varepsilon)$	9,996 5851 _n
$\cos \delta\delta$	9,867 3026 _n	$\sin i' \cos \delta\delta'$	9,891 3289 _n
$\cos i$	9,601 9191 _n	$\sin \text{ od. } \cos \delta\delta'$	9,893 4258 _n
		$\sin i' \sin \delta\delta'$	9,792 2400
$\sin \text{ od. } \cos A$	9,934 7252 _n	$\sin i'$	9,997 9031
$\sin a \sin A$	9,829 4690 _n		
A	239° 22' 1'',35	$\sin (B + \varepsilon)$	9,997 8928
$(A + \varepsilon)$	262 49 27,47	$\sin b$	9,983 5137
		$\sin i' \cos d$	9,981 4065
$\sin b \cos B$	9,469 2217	$\sin \text{ od. } \cos d$	9,983 5034
$\sin \text{ od. } \cos B$	9,978 6527	$\sin i' \sin d$	9,430 0274
B	72° 10' 56'',04	d	15° 41' 32'',74
$B + \varepsilon$	95 38 22,16	ω	152 45 37,82
$\delta\delta'$	141° 28' 49'',21	$\sin i'$	9,997 9031
i'	95 37 32,24	$\cos i'$	8,991 3497 _n
ω'	168 27 10,56		
π'	309 55 59,77		

Sind umgekehrt die Äquatorelemente gegeben und daraus die Eklipticalelemente zu berechnen, so folgt analog aus unserem Fundamentaldreieck:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} (\delta\delta + d) &= \sin \frac{1}{2} (i' + \varepsilon) \sin \frac{1}{2} \delta\delta' \\ \sin \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} (\delta\delta + d) &= \sin \frac{1}{2} (i' - \varepsilon) \cos \frac{1}{2} \delta\delta' \\ \cos \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} (\delta\delta - d) &= \cos \frac{1}{2} (i' + \varepsilon) \sin \frac{1}{2} \delta\delta' \\ \cos \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} (\delta\delta - d) &= \cos \frac{1}{2} (i' - \varepsilon) \cos \frac{1}{2} \delta\delta' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

und ebenfalls

$$\begin{aligned} \omega &= \omega' - d \\ \pi &= \omega + \delta\delta. \end{aligned}$$

Oder die andere Formelgruppe:

$$\left. \begin{array}{l} \sin a' \sin A' = \sin i' \cos \delta' \\ \sin a' \cos A' = \cos i' \\ \sin b' \sin B' = \sin i' \\ \sin b' \cos B' = \cos i' \cos \delta' \\ \sin i \sin \delta = \sin i' \sin \delta' \\ \sin i \cos \delta = \sin a' (A' - \varepsilon) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sin i \sin d = \sin \varepsilon \sin \delta' \\ \sin i \cos d = \sin b' \sin (B' - \varepsilon) \\ \cos i = \sin a' \cos (A' - \varepsilon) \\ \omega = \omega' - d \\ \pi = \omega + \delta \end{array} \dots (20)$$

Das Oppolzer'sche eben behandelte Beispiel wird jetzt, indem:

$$\begin{array}{ll} \delta' = 141^\circ 28' 49'',21 & \omega' = 168 \ 27 \ 10'',55 \\ i' = 95 \ 37 \ 32,22 & \pi' = 309 \ 55 \ 59,76 \end{array}$$

ist, nach den ersteren Formeln:

$\frac{1}{2} i'$	47° 48' 46'',11	$\sin \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} (\delta + d)$	9,9104922
$\frac{1}{2} \varepsilon$	11 43 43 ,06	$\sin \text{ od. } \cos \frac{1}{2} (\delta + d)$	9,9879633
$\frac{1}{2} (i' + \varepsilon)$	59 32 29 ,17	$\sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2} (\delta + d)$	9,2884155
$\frac{1}{2} (i' - \varepsilon)$	36 5 3 ,05	$\frac{1}{2} (\delta + d)$	76° 34' 21'',37
$\frac{1}{2} \delta'$	70 44 24 ,61	$\cos \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} (\delta - d)$	9,6799222
$\sin \frac{1}{2} (i' + \varepsilon)$	9,9355053	$\sin \text{ od. } \cos \frac{1}{2} (\delta - d)$	9,9413146
$\sin \frac{1}{2} \delta'$	9,9749869	$\cos \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} (\delta - d)$	9,4258132
$\cos \frac{1}{2} (i' + \varepsilon)$	9,7049353	$\frac{1}{2} (\delta - d)$	60° 52' 48'',67
$\sin \frac{1}{2} (i' - \varepsilon)$	9,7700956	d	15° 41' 32'',70
$\cos \frac{1}{2} \delta'$	9,5183199	ω'	168 27 10 ,55
$\cos \frac{1}{2} (i' - \varepsilon)$	9,9074933	δ	137° 27' 10'',04
$\sin \frac{1}{2} i$	9,9225289	i	113 34 12 ,24
$\cos \frac{1}{2} i$	9,7386076	ω	152 45 37 ,85
$\frac{1}{2} i$	56° 47' 6'',12	π	290 12 47 ,89

Die Anwendung der zweiten Formelgruppe giebt:

$\sin \varepsilon$	9,5999538	$\cos (A' - \varepsilon)$	9,7071752 _n
$\sin \delta'$	9,7943369	$\sin a'$	9,8947439
$\sin i'$	9,9979032	$\sin (A' - \varepsilon)$	9,9347252 _n
$\cos \delta'$	9,8934258 _n	$\sin i \cos \delta$	9,8294691 _n
$\cos i'$	8,9913495 _n	$\sin \text{ od. } \cos \delta$	9,8673026 _n
$\sin \text{ od. } \cos A'$	9,9965851 _n	$\sin i \sin \delta$	9,7922401
$\sin a' \sin A'$	9,8913290 _n	$\sin i$	9,9621665
A'	262° 49' 27'',49	$\sin (B' - \varepsilon)$	9,9464807
$(A' - \varepsilon)$	239 22 1 ,37	$\sin b'$	9,9991891
$\sin b' \cos B'$	8,8847753	$\sin i \cos d$	9,9456698
$\sin \text{ od. } \cos B'$	9,9987141	$\sin \text{ od. } \cos d$	9,9835034
B'	85° 35' 35'',02	$\sin i \sin d$	9,3942907
$B' - \varepsilon$	62 8 8 ,90	d	15° 41' 32'',74
δ	137° 27' 10'',00	ω'	168 27 10 ,55
i	113 34 12 ,26	$\sin i$	9,9621664
ω	152 45 37 ,81	$\cos i$	9,6019191 _n
π	290 12 47 ,81		

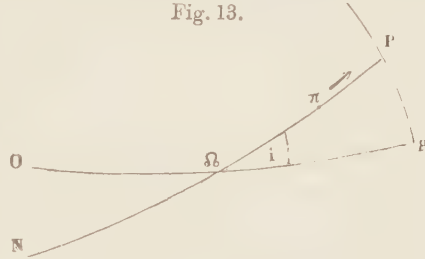
Zehnte Vorlesung.

Die Berechnung der heliocentrischen Coordinaten aus den Kepler'schen Elementen¹⁾.

Während die Bestimmung der wahren Anomalie v für jede der drei Gattungen von Kegelschnitten, für die Ellipse, die Parabel, die Hyperbel, wie wir gesehen, nach besonderen Formeln ausgeführt wird, sind dagegen die gebräuchlichsten Vorschriften für die Berechnung der heliocentrischen Coordinaten x, y, z aus v und dem zugehörigen Radius vector r in Verbindung mit den drei Elementen der Bahnlage Ω, i, π allen gemeinschaftlich.

Es sei (Fig. 13) Op die gegen die Ebene des Papiers senkrecht gedachte Ebene der Erdbahn, NP die dieselbe in Ω unter dem Winkel i schneidende Bahnebene eines in der Richtung des Pfeiles bewegten Gestirnes, dessen Perihel in π liegt. Ist ferner Pp ein Stück eines durch den Radius vector des Planeten gelegten und zur Ekliptik senkrechten grössten Kreises, so gelten für das rechtwinklige sphärische Dreieck ΩPp , welches seine Ecke im Mittelpunkte der Sonne hat, die folgenden Gleichungen:

Fig. 13.



$$\begin{aligned}\sin \overline{Pp} &= \sin i \sin \overline{\Omega P} = \sin i \sin (\overline{\Omega \pi} + \overline{\pi P}) \\ \operatorname{tg} \overline{\Omega p} &= \cos i \operatorname{tg} \overline{\Omega P} = \cos i \operatorname{tg} (\overline{\Omega \pi} + \overline{\pi P}).\end{aligned}$$

Offenbar ist aber der Bogen \overline{Pp} nichts anderes, als die heliocentrische Breite, $\overline{\pi P}$ aber die wahre Anomalie des Planeten. Ist ferner noch O der Ort des Frühlingsäquinocciums, so wird $\overline{\Omega p} + O\Omega$ die heliocentrische Länge des Planeten. Bezeichnen wir diese letztere mit l , die Breite mit b , so haben wir unter Anwendung der schon bekannten gewöhnlichen Bezeichnung

$$\begin{aligned}\sin b &= \sin i \sin (\pi - \Omega + v) \\ \operatorname{tg} (l - \Omega) &= \cos i \operatorname{tg} (\pi - \Omega + v).\end{aligned}$$

Die Grösse $\pi - \Omega + v$ nennt man auch das Argument der Breite (cf. S. 25). Für die richtige Wahl der Quadranten bei numerischen Rechnungen nach diesen Formeln ist es nöthig, sich zu merken, dass $l - \Omega$ und das Argument der Breite stets in demselben Quadranten liegen, da beide Grössen gleichzeitig die Grenzen der Quadranten $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ u. s. w. erreichen. Es ergeben dann l, b und der Radius vector r die rechtwinkligen heliocentrischen Coordinaten nach den Formeln:

$$x = r \cos b \cos l, \quad y = r \cos b \sin l, \quad z = r \sin b.$$

Um aus den geocentrischen Coordinaten die heliocentrischen desselben Systemes herzuleiten, hat man nur nöthig, zu den ersteren die heliocentrischen Coordinaten der Erde zu addiren. Sind x, y, z die heliocentrischen Coordinaten des Gestirnes, X, Y, Z die der Erde, so bestehen also die Gleichungen:

¹⁾ Für die in dieser Vorlesung (S. 65) auftretenden Gauss'schen Constanten für den Aequator hat Brendel eine neue sehr praktische Definition gefunden und im 4. Capitel des IV. Theiles seiner „*Theorie der kleinen Planeten*“ (vergl. Vorbemerkungen zur 3. Ausgabe des vorliegenden Werkes, S. XV) auf S. 28 und 29 gegeben, indem er statt der alten Gauss'schen Constanten A, a, B, b, C, c andere, bequemere eingeführt, die eine schärfere Rechnung gestatten; eine Idee, die Brendel's Schüler Boda in Nr. 4429 der *Astron. Nachrichten* gleichfalls behandelt hat.

$$\begin{aligned}x - X &= \varrho \cos \beta \cos \lambda \\y - Y &= \varrho \cos \beta \sin \lambda \\z - Z &= \varrho \sin \beta.\end{aligned}$$

Die astronomischen Jahrbücher liefern die Sonnenkoordinaten X, Y, Z , d. h. die heliocentrischen Erdekoordinaten mit entgegengesetzten Vorzeichen, auf den Aequator gezogen, für jeden Tag des Jahres. Man sieht hiermit die Berechnung des geocentrischen Ortes, wie ihn eine Ephemeride geben soll, in der einfachsten Weise auf die Berechnung der heliocentrischen Coordinaten zurückgeführt.

Bedeutend nun L und R beziehungsweise Länge und Radius vector der Erde, λ, β, ϱ die geocentrischen Coordinaten des Gestirnes, so hat man, da hier $X = R \cos L$, $Y = R \sin L$, $Z = 0$ zu setzen ist:

$$\left. \begin{aligned}\varrho \cos \beta \cos \lambda &= r \cos b \cos l - R \cos L \\ \varrho \cos \beta \sin \lambda &= r \cos b \sin l - R \sin L \\ \varrho \sin \beta &= r \sin b\end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

Der Berechnung der geocentrischen Länge und Breite kann man noch eine andere Gestalt geben. Wenn man alle Längen nicht auf das Frühlingsäquinocmium, sondern auf den aufsteigenden Knoten bezieht; was selbstverständlich dann auch mit der Länge der Erde geschehen muss, so erhält man schliesslich die geocentrische Länge selbst um den Betrag von \oslash verringert.

So findet man:

$$\left. \begin{aligned}\varrho \cos \beta \cos (\lambda - \oslash) &= r \cos b \cos (l - \oslash) - R \cos (L - \oslash) \\ \varrho \cos \beta \sin (\lambda - \oslash) &= r \cos b \sin (l - \oslash) - R \sin (L - \oslash) \\ \varrho \sin \beta &= r \sin b\end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot (2)$$

Ein kleiner Vortheil dieser Form besteht darin, dass sich die Coordinaten x, y, z einfacher ausdrücken lassen, wenn die Linie des aufsteigenden Knotens der Bahn in der Ekliptik als Axe der X gewählt wird. Man braucht dann, um x zu erhalten, nur durch das Gestirn ein Perpendikel zu fällen, durch welches der Radius vector auf jene Axe projectirt wird; da der Winkel der Projection hier dem Argumente der Breite $\pi - \oslash + v$ gleich wird, so hat man

$$x = r \cos (\pi - \oslash + v).$$

Da ausserdem schon nach dem Vorhergehenden $z = r \sin i \sin (\pi - \oslash + v)$ gefunden wird, auch nothwendig $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, und y für die beiden ersten Quadranten von $\pi - \oslash + v$ positiv werden muss, so gelten für x, y, z die einfacheren Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned}x &= r \cos (\pi - \oslash + v) \\ y &= r \cos i \sin (\pi - \oslash + v) \\ z &= r \sin i \sin (\pi - \oslash + v)\end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (3)$$

Ueberhaupt aber sind die Formelsysteme (1) und (2) nur für die Berechnung vereinzelter geocentrischer Oerter zu empfehlen.

Für die Berechnung einer ganzen Reihe von Oertern lohnt es sich, die unter dem Namen der Gauss'schen Constanten für den Aequator bekannten Hülfsgrössen zu berechnen, durch deren Einführung nicht nur die Arbeit sehr abgekürzt, sondern auch die Oerter in der für solche Zwecke passenderen Form der Rectascension und Declination erhalten werden. Bequeme Ausdrücke für die Gauss'schen Constanten erhält man leicht durch folgende Operationen: Wir denken uns zuerst die Coordinaten auf die Ekliptik und die Knotenlinie als X -Axe bezogen, und suchen, unter Anwendung bekannter Transformationsformeln, aus diesen Coordinaten, d. h. den Coordinaten x, y, z der Formel (3), die auf die Ekliptik und das Frühlingsäquinocmium als X -Axe bezogenen

im Folgenden mit x', y', z' bezeichneten Coordinaten herzuleiten. Das zweite Coordinatensystem entsteht aus dem ersteren durch eine Drehung um die gemeinschaftliche Z-Axe, den Pol der Ekliptik. Nach dem bekannten Satze der Coordinatentransformation, dass jede der drei neuen Coordinaten gleich der Summe der Projectionen der alten Coordinaten auf die neue Axe ist, hat man sofort

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varnothing - y \sin \varnothing \\y' &= x \sin \varnothing + y \cos \varnothing \\z' &= z.\end{aligned}$$

Durch eine zweite ähnliche Drehung des neuen Systemes um seine X-Axe, d. h. um das Frühlingsäquinocetium, wird man das System des Aequators mit derselben X-Axe erhalten.

Nennen wir die darauf bezüglichen Coordinaten x'', y'', z'' , so ergibt sich:

$$\begin{aligned}x'' &= x' = x \cos \varnothing - y \sin \varnothing \\y'' &= y' \cos \varepsilon - z' \sin \varepsilon = x \sin \varnothing \cos \varepsilon + y \cos \varnothing \cos \varepsilon - z \sin \varepsilon \\z'' &= y' \sin \varepsilon + z' \cos \varepsilon = x \sin \varnothing \sin \varepsilon + y \cos \varnothing \sin \varepsilon + z \cos \varepsilon,\end{aligned}$$

worin ε die Schiefe der Ekliptik vorstellt.

Setzt man hier auf der rechten Seite für x, y, z die Ausdrücke aus (3) und führt durch folgende sechs Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned}\sin a \sin A &= \cos \varnothing \\ \sin a \cos A &= - \sin \varnothing \cos i \\ \sin b \sin B &= \sin \varnothing \cos \varepsilon \\ \sin b \cos B &= \cos \varnothing \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon \\ \sin c \sin C &= \sin \varnothing \sin \varepsilon \\ \sin c \cos C &= \cos \varnothing \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

die sechs Gauss'schen Constanten für den Aequator: a, b, c, A, B, C ein, so werden die heliocentrischen Coordinaten für den Aequator x'', y'', z'' durch die einfachen Formeln erhalten

$$\left. \begin{aligned}x'' &= r \sin a \sin (\pi - \varnothing + A + v) \\ y'' &= r \sin b \sin (\pi - \varnothing + B + v) \\ z'' &= r \sin c \sin (\pi - \varnothing + C + v)\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

in denen selbstverständlich a nicht mit der halben grossen Axe verwechselt werden darf. Bei Einführung des Argumentes der Breite schreiben sich die letzteren Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned}x'' &= r \sin a \sin (A + u) \\ y'' &= r \sin b \sin (B + u) \\ z'' &= r \sin c \sin (C + u)\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Die Berechnung der Constanten b, B, c und C kann nach Oppolzer durch weitere Hilfsgrössen noch etwas vereinfacht werden. Setzt man nämlich

$$\begin{aligned}\cos \varnothing \cos i &= n \cos N \\ \sin i &= n \sin N,\end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned}n \cos (N + \varepsilon) &= \sin b \cos B \\ n \sin (N + \varepsilon) &= \sin c \cos C.\end{aligned}$$

Die Grössen $\sin a, \sin b$ und $\sin c$ wird man stets positiv annehmen können und danach die Quadranten, in denen A, B und C liegen, bestimmen. Um eine Controle für die Berechnung der Constanten zu erhalten, findet man zunächst durch Multiplication obiger Gleichungen

$$\begin{aligned}\sin b \sin c \sin C \cos B &= \sin \varnothing \sin \varepsilon (\cos \varnothing \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon) \\ \sin b \sin c \cos C \sin B &= \sin \varnothing \cos \varepsilon (\cos \varnothing \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon),\end{aligned}$$

deren Subtraction $\sin b \sin c \sin (C - B) = - \sin \delta \sin i$

ergiebt. Aus dieser Gleichung und der früheren

$$\sin \delta \cos i = - \sin a \cos A$$

folgt durch Division die Controlgleichung

$$tg i = \frac{\sin b \sin c \sin (C - B)}{\sin a \cos A} \dots \dots \dots (7)$$

Löst man noch nach Oppolzer in den Ausdrücken (6) für die rechtwinkligen Coordinaten das Argument der Breite u in $v + \omega$ auf und vereinigt ω mit den Constanten A, B und C , so hat man:

$$\left. \begin{aligned} A + \omega &= A' & x'' &= r \sin a \sin (A' + v) \\ B + \omega &= B' & y'' &= r \sin b \sin (B' + v) \\ C + \omega &= C' & z'' &= r \sin c \sin (C' + v) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Sind die Elemente auf den Aequator als Fundamentelebene bezogen, so ist ε in den vorstehenden Ausdrücken Null zu setzen und die Berechnung der Constanten ergiebt sich einfacher aus den leicht abzuleitenden folgenden Formeln:

$$\left. \begin{aligned} cotg A_1 &= - tg \delta' \cos i' & \sin a &= \frac{\cos \delta'}{\sin A_1} \\ cotg B_1 &= \frac{\cos i'}{tg \delta'} & \sin b &= \frac{\sin \delta'}{\sin B_1} \\ C_1 &= 0 & \sin c &= \sin i' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

Den Quadranten von A_1 und B_1 bestimmt man dabei so, dass $\sin a$ und $\sin b$ positiv werden und erhält:

$$\left. \begin{aligned} A' &= A_1 + \omega' & x'' &= r \sin a \sin (A' + v) \\ B' &= B_1 + \omega' & y'' &= r \sin b \sin (B' + v) \\ C' &= \omega' & z'' &= r \sin c \sin (C' + v) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Zusammengestellt sind die Formeln zur Berechnung der Aequatorconstanten aus den Eklipticalelementen also die folgenden:

$$\left. \begin{aligned} \sin a \sin A &= \cos \delta & n \sin N &= \sin i \\ \sin a \cos A &= - \cos i \sin \delta & n \cos N &= \cos \delta \cos i \\ \sin b \sin B &= \cos \varepsilon \sin \delta & \sin c \sin C &= \sin \varepsilon \sin \delta \\ \sin b \cos B &= n \cos (N + \varepsilon) & \sin c \cos C &= n \sin (N + \varepsilon) \\ A + \omega &= A' & x'' &= r \sin a \sin (A' + v) \\ B + \omega &= B' & y'' &= r \sin b \sin (B' + v) \\ C + \omega &= C' & z'' &= r \sin c \sin (C' + v) \end{aligned} \right\} \dots \dots (11)$$

mit der Controlgleichung

$$tg i = \frac{\sin b \sin c \sin (C - B)}{\sin a \cos A}.$$

Schliesslich giebt Oppolzer an Stelle der obigen noch die folgenden Rechenformeln, in denen nur darauf zu achten ist, dass die Quadranten, in den A, B und C genommen werden, so gewählt werden, dass $\sin a, \sin b$ und $\sin c$ positiv werden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{tg i}{\cos \delta} &= tg N & \sin a &= \frac{\cos \delta}{\sin A} \\ - tg \delta \cos i &= cotg A & \sin b &= \frac{\sin \delta \cos \varepsilon}{\sin B} \\ \frac{\cos i \cos (N + \varepsilon)}{tg \delta \cos N \cos \varepsilon} &= cotg B & \sin c &= \frac{\sin \delta \sin \varepsilon}{\sin C} \\ \frac{\cos i \sin (N + \varepsilon)}{tg \delta \cos N \sin \varepsilon} &= cotg C \end{aligned} \right\} \dots \dots (12)$$

Elfte Vorlesung.

Interpolationsformeln und allgemeine Bemerkungen über Ephemeridenberechnung.

A. Ableitung der Interpolationsformeln mittelst der Sätze über arithmetische Reihen.

Bei bahnberechnenden Arbeiten ist man häufig genöthigt, gewisse Grössen, z. B. die geocentrischen Coordinaten der Sonne zur Zeit einer Beobachtung den astronomischen Jahrbüchern zu entnehmen. Man findet diese Grössen z. B. im Berliner Jahrbuch für Mittag und Mitternacht mittlerer Berliner Ortszeit gegeben, und man muss hieraus ihre Werthe für den Zeitpunkt der Beobachtung interpoliren, wie man zu sagen pflegt. Um die wichtigsten der zu diesem Zwecke nöthigen Formeln abzuleiten, erinnern wir daran, dass sich jedes Glied einer arithmetischen Reihe k^{ter} Ordnung durch einen Ausdruck von folgender Form darstellen lässt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}.$$

In Fig. 14 stellt die Colonne *D* eine Reihe erster Ordnung dar, wo $n = 0$ im Felde *D* 10. Ebenso sind die Columnen *C*, *B* und *A* Reihen zweiter, dritter und vierter Ordnung, für welche $n = 0$ in den Feldern *C* 11, *B* 12 und *A* 13.

Die Glieder der Colonne *A* müssen sich demnach durch die Form darstellen lassen:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} c,$$

wobei n für *A* 13 gleich 0, für *A* 11 gleich 1 u. s. w., für *A* 1 schliesslich gleich 6 ist.

In der That:

$$15 = \frac{6 \cdot (6-1) \cdot (6-2) \cdot (6-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Auf ähnliche Weise lassen sich alle übrigen Zahlen der Fig. 14 ableiten. Man kann aber dieselben auf einfachere Weise wie folgt erhalten. Man schreibt zunächst in *A* 13, *B* 12, *C* 11, *D* 10, *F* 8 und *G* 7 Nullen, in *E* 9 c ein. Um dann von einer dieser Zahlen zur darunterstehenden in derselben Colonne zu gelangen, addirt man die zwischen beiden stehende Zahl der folgenden Colonne hinzu u. s. w.

Man bildet also z. B.:

$$C7 + D6 = C5 \quad \text{oder} \quad c + 2c = 3c.$$

Man erhält so die arithmetischen Reihen verschiedener Ordnung nach ihrer ursprünglichen Definition.

Fig. 14.

13	0					
12		0				
11	0		0			
10		0		0		
9	0		0		c	
8		0		c		0
7	0		c		c	0
6		c		$2c$		0
5	c		$3c$		c	
4		$4c$		$3c$		
3	$5c$		$6c$			
2		$10c$				
1	$15c$					
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i> <i>G</i>

Nach diesen Vorbemerkungen denken wir uns eine Function f , welche stetig mit einem Argumente t (der Zeit z. B.) variirt. Wir setzen f für gewisse, äquidistante Werthe des Argumentes

$$a - 2w, \quad a - w, \quad a, \quad a + w, \quad a + 2w \text{ u. s. w.}$$

als gegeben voraus (wobei w das „Intervall“ der auf einander folgenden Argumentwerthe genannt wird), und bilden folgende Zusammenstellung:

Fig. 15.

Argument	Function	1. Differenz	2. Differenz	3. Differenz	4. Differenz
$a - 2w$	$f(a - 2)$				
		$f'(a - \frac{3}{2})$			
$a - w$	$f(a - 1)$		$f''(a - 1)$		
		$f'(a - \frac{1}{2})$		$f'''(a - \frac{1}{2})$	
a	$f(a)$		$f''(a)$		$f^{IV}(a)$
		$f'(a + \frac{1}{2})$		$f'''(a + \frac{1}{2})$	
$a + w$	$f(a + 1)$		$f''(a + 1)$		
		$f'(a + \frac{3}{2})$			
$a + 2w$	$f(a + 2)$				

Die erste Differenzreihe erhält man, indem man von je einem folgenden Functionswerthe den vorhergehenden subtrahirt. So ist:

$$f'(a - \frac{1}{2}) = f(a) - f(a - 1).$$

Ebenso werden die höheren Differenzreihen gebildet, also z. B.:

$$f'''(a - \frac{1}{2}) = f''(a) - f''(a - 1).$$

Man pflegt, wie aus Obigem ersichtlich, die verschiedenen Differenzreihen durch römische Zahlen zu kennzeichnen. Unter dem Zeichen f setzt man der Kürze halber w gleich eins, und ertheilt der Differenz zweier Werthe das Mittel ihrer Argumente zu. Z. B.:

$$f^i(a + \frac{5}{2}) - f^i(a + \frac{3}{2}) = f^{i+1}(a + 2).$$

In Folge dessen haben alle auf derselben Linie stehenden Grössen dasselbe Argument.

Wir nehmen an, dass man im vorliegenden Falle die fünften Differenzen vernachlässigen kann.

Sind die Functionswerthe von $f(a - 2)$ bis $f(a + 2)$ gegeben, so kennt man alle in obiger Zusammenstellung gegebenen Differenzen. Man kann sich aber auch umgekehrt nur einen Functionswerth und eine gewisse Zahl von Differenzwerthen gegeben denken. Kennt man in unserem Beispiele:

$$f(a - 2), \quad f'(a - \frac{3}{2}), \quad f''(a - 1), \quad f'''(a - \frac{1}{2}) \quad \text{und} \quad f^{IV}(a),$$

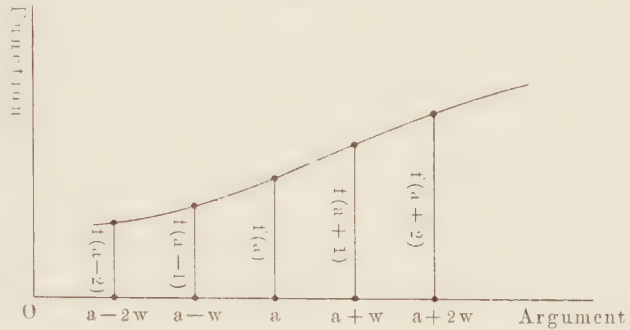
so sind alle übrigen Werthe gegeben.

Man will nun eine Formel zur Berechnung der Function f für ein beliebiges Argument in der Nähe von a erhalten. Dazu denken wir uns (Fig. 16) die Argumente $a - 2w, \dots, a + 2w$ als Abscissen, die entsprechenden Functionswerthe als Ordinaten eingetragen. Die Interpolationsverfahren bestehen dann darin, durch die so erhaltenen

Punkte eine Curve höheren Grades hindurchzulegen, um die Werthe von f für beliebige Argumente zu erhalten.

Lagrange hat diese Aufgabe für den allgemeinsten Fall gelöst, in welchem die Argumente der gegebenen Functionswerte nicht äquidistant sind und man könnte hieraus direct die gewöhnlichen Interpolationsformeln ableiten. Wir schlagen jedoch zu diesem Zwecke einen kürzeren Weg ein und kommen auf die Methode von Lagrange später zurück.

Fig. 16.



Wir denken uns $f(a)$, $f'(a + \frac{1}{2})$, $f''(a + 1)$ u. s. w. gegeben (also die Werthe einer fallenden Diagonale in Fig. 15) und wollen die folgenden Functionswerte $f(a + 1)$, $f(a + 2) \dots$ als Functionen derselben ausdrücken. Durch Lösung dieser Aufgabe erhalten wir eine Curve höheren Grades, welche durch die Punkte mit den Abscissen a , $a + w$, $a + 2w \dots$ hindurchgeht, oder nach dem eben Gesagten eine Interpolationsformel. Da $f(a + 1)$, $f'(a + 2)$ etc. durch auf einander folgende Additionen aus $f(a)$, $f'(a + \frac{1}{2})$, $f''(a + 1)$ etc. erhalten werden können, so kann man diese letzteren Grössen abwechselnd mit Ausnahme einer einzigen gleich Null setzen und so die ersteren daraus Theil für Theil zusammensetzen. Es sei zunächst:

$$0 = f'(a + \frac{1}{2}) = f''(a + 1) = f'''(a + \frac{3}{2}) \dots$$

Dann ist offenbar:

$$f(a + n) = f(a).$$

Dieses ist also der erste Theil der zu suchenden Interpolationsformel.

Wir setzen jetzt:

$$0 = f(a) = f''(a + 1) = f'''(a + \frac{3}{2}) \dots$$

und denken uns $f'(a + \frac{1}{2})$ an Stelle von c in das Feld E9 von Fig. 14 eingeschrieben. Dann fallen $f(a)$ auf D10, $f''(a + 1)$ auf F8, $f'''(a + \frac{3}{2})$ auf G7 u. s. w., d. h. auf Nullen, was der Voraussetzung entspricht und bei allen ähnlichen Betrachtungen immer zu beachten ist. Die Werthe $f(a)$, $f(a + 1)$ u. s. w. kommen dann in die Felder D10, D8 u. s. w. zu stehen. Hieraus folgt als zweiter Term der zu suchenden Interpolationsformel:

$$f(a + n) = n f'(a + \frac{1}{2}).$$

Um den dritten Theil zu erhalten, setzen wir:

$$0 = f(a) = f'(a + \frac{1}{2}) = f'''(a + \frac{3}{2}) \dots$$

und schreiben $f''(a + 1)$ an Stelle von c in dasselbe Feld E9 in Fig. 14 ein. Die gleich Null gesetzten Grössen fallen dann wieder in Felder, in denen in Fig. 14 Nullen stehen, $f(a)$, $f(a + 1) \dots$ aber kommen in C11, C9 ... zu stehen. Hieraus folgt unmittelbar der dritte Term:

$$f(a + n) = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} f''(a + 1).$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens und Zusammenstellung der so erhaltenen Terme gelangt man zu der Newton'schen Interpolationsformel:

$$f(a + n) = f(a) + n f'(a + \frac{1}{2}) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} f''(a + 1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a + \frac{3}{2}) \dots \quad (1)$$

Die hier angeführten Terme dieser Formel stellen

$$f(a), f(a+1), f(a+2) \text{ und } f(a+3)$$

strenge dar; in Einklang hiermit ist der Ausdruck auf der rechten Seite von (1) ein Polynom dritten Grades in Bezug auf n und hat somit vier Coëfficienten, welche vier Bedingungen genügen können.

Aus der Ableitung selbst geht hervor, dass n in Theilen des Intervalles ausgedrückt sein muss. Mittelst dieser Formel kann man Functionswerthe zwischen den Argumenten a und $a+1$ suchen; n ist dann positiv und man interpolirt nach „vorwärts“. Sucht man umgekehrt Functionswerthe zwischen a und $a-1$, so ist n negativ und man interpolirt nach „rückwärts“.

Beispiel: Es sei die Sonnencoordinate Y , bezogen auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges (1897,0), für 1897 October 17 für $12^h 35^m 26^s,3$ mittlere Berliner Ortszeit zu bestimmen. Man zählt in der Astronomie die mittlere Zeit von Mittag bis Mitternacht von 0 bis 24 Stunden. Der Mittag des 17. October ist also in astronomischer Zeitrechnung als 17,000 000 (in Bruchtheilen des Tages) zu bezeichnen. Der oben gegebene Zeitpunkt fällt nach Mitternacht, also nach bürgerlicher Zeitrechnung in den 18. October, nach astronomischer Zeitrechnung aber ist er: October 17,524 610¹⁾.

Aus dem Berliner Jahrbuche entnimmt man S. 39:

October	Y	I.	II.	III.
16,0	— 0,362 172 4	— 72 063		
16,5	— 0,369 378 7	— 71 791	+ 272	+ 6
17,0	— 0,376 557 8	— 71 513	+ 278	+ 6
17,5	— 0,383 709 1	— 71 229	+ 284	+ 6
18,0	— 0,390 832 0	— 70 939	+ 290	+ 6
18,5	— 0,397 925 9	— 70 643	+ 296	+ 5
19,0	— 0,404 990 2	— 70 342	+ 301	
19,5	— 0,412 024 4			

Die dritte Differenzreihe ist derartig constant, dass keine Veranlassung vorliegt, weiter zu gehen. Die Differenzreihen sind in Einheiten der siebenten Decimale ausgedrückt. Wir wollen nun zunächst das gesuchte Y bestimmen, indem wir von dem Werthe für October 17,5 aus vorwärts interpoliren.

Es ist jetzt also n positiv und in mittleren Sonnentagen ausgedrückt gleich 0,024 610. Da aber das Intervall ein halber Tag ist, so hat man zur Anwendung von Formel (1):

$$n = + 0,049 220 \text{ zu setzen.}$$

Es ist in Einheiten der siebenten Decimale:

$$\begin{array}{l|l} f(a) & = - 3\,837\,091 \quad \log n = 8,69214 \\ f^I(a + \frac{1}{2}) & = - 71\,229 \quad \log \frac{n \cdot (n-1)}{2} = 8,3692\,n \\ f^{II}(a + 1) & = + 290 \quad \log \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 8,182 \\ f^{III}(a + \frac{3}{2}) & = + 6 \end{array}$$

¹⁾ Zur Verwandlung von Stunden, Minuten und Secunden in Bruchtheile des Tages ist im Anhang die allen praktischen Bedürfnissen genügende Tafel gegeben.

Hieraus folgt:

$$Y = -0,384\,060\,4,$$

wobei das dritte Glied völlig unmerklich ist.

Zur Controle kann man dieselbe Formel anwenden und von October 18,0 ausgehend nach rückwärts interpoliren. Man hat dann:

$$n = -0,950\,780.$$

$$\begin{array}{lcl} f(a) & = -3\,908\,320 & \log n = 9,97808\,n \\ f'(a + \frac{1}{2}) & = -70\,939 & \log \frac{n(n-1)}{2} = 9,9672 \\ f''(a + 1) & = +296 & \\ f'''(a + \frac{3}{2}) & = +5 & \log \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 9,96\,n \end{array}$$

und findet:

$$Y = -0,384\,060\,4$$

Wir haben hier mit Hülfe der Werthe für October 18,0 bis 19,5 den ausserhalb liegenden Functionswerth für October 17,524 610 extrapolatorisch bestimmt, wie man zu sagen pflegt.

Das vorliegende Beispiel zeigt, dass sich diese Operation mit grosser Genauigkeit durchführen lässt.

Die Formel (1) gestattet einen praktisch wichtigen Schluss. Man hat häufig Tafeln vor sich, in denen sich die zweiten Differenzreihen gerade noch schwach fühlbar machen. Man ist dann a priori im Zweifel, ob man ihnen Rechnung tragen soll oder nicht.

Das Glied $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} f''(a+1)$ erreicht sein Maximum für $n = \frac{1}{2}$ und wird dann $-\frac{1}{8} f''(a+1)$. Mittelst dieser Formel kann der Rechner sofort entscheiden, ob er bei der zu erreichenden Genauigkeit die zweiten Differenzreihen zu berücksichtigen hat.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Anwendung von Formel (1) für $n = \frac{1}{2}$. Man findet in diesem Falle:

$$\left. \begin{aligned} f\left(a + \frac{1}{2}\right) &= f(a) + \frac{1}{2} f'\left(a + \frac{1}{2}\right) \\ &- \frac{1}{8} f''(a+1) + \frac{1}{16} f'''(a + \frac{3}{2}) \\ &- \frac{5}{128} f^{iv}(a+2) + \frac{7}{256} f^v(a + \frac{5}{2}) \\ &- \frac{21}{1024} f^{vi}(a+3) + \frac{33}{2048} f^{vn}(a + \frac{7}{2}) \\ &- \frac{429}{32768} f^{viii}(a+4) + \frac{715}{65536} f^{ix}(a + \frac{9}{2}) \\ &- \frac{2431}{262144} f^x(a+5) \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1')$$

Diese Formel, sowie einige analoge, welche wir bald kennen lernen werden, kann zur Interpolation in die Mitte verwendet werden.

Man pflegt, um Arbeit zu sparen, die Ephemeride eines Kometen oder Planeten zunächst nur von vier zu vier Tagen für Berliner Mitternacht zu berechnen, interpolirt dann einmal in die Mitte [z. B. mittelst Formel (1')] und erhält so eine Ephemeride mit zweitägigem Intervalle. Dieses Verfahren wiederholt man dann noch ein- oder nöthigenfalls zweimal und erhält so die Stellung des Objectes von Tag zu Tag oder 12 zu 12 Stunden.

Jede dieser Ephemeriden wird bei Gelegenheit der Bildung der Differenzreihen geprüft. Bemerkt man in einer der Differenzreihen einen Sprung, so muss man den entsprechenden Rechenfehler in den Functionswerthen suchen. Derselbe befindet sich gewöhnlich in der Nähe der Zeile des Sprunges.

Fig. 17.

Function	1. Differenz	2. Differenz	3. Differenz	4. Differenz	5. Differenz	6. Differenz	7. Differenz
+ 1	— 2						
— 1	+ 2	+ 4					
+ 1	— 2	— 4	— 8	+ 16	— 32	+ 64	— 128
— 1	+ 2	+ 4	+ 8	— 16	+ 32	— 64	+ 128
+ 1	— 2	— 4	— 8	+ 16	— 32	+ 64	
— 1	+ 2	+ 4	+ 8	— 16	+ 32		
+ 1	— 2	— 4	— 8	+ 16			
— 1	+ 2	+ 4	+ 8				
+ 1	— 2	— 4	— 8				
— 1	+ 2	+ 4	+ 8				

Es ist indessen zu bemerken, dass kleine, aber ungünstig vertheilte Fehler der Functionswerthe in den höheren Differenzreihen ziemlich bedeutende Sprünge verursachen

Fig. 18.

13	+ 15c					
12		— 10c				
11	+ 5c		+ 6c			
10		— 4c		— 3c		
9	+ c		+ 3c	c		
8		— c		— 2c	0	
7	0		+ c	c		0
6		0		— c	0	
5	0		0	c		
4		0		0		
3	0		0			
2		0				
1	0					
	A	B	C	D	E	F

können. Es seien (Fig. 17) bei Berechnung der auf einander folgenden Werthe einer Function die Fehler + 1, — 1, + 1, — 1 u. s. w. begangen worden. Man sieht, wie dieselben sehr schnell in den höheren Differenzreihen Sprünge hervorrufen. Betrügen diese Fehler nur $\frac{1}{30}''$ (ungefähre Unsicherheit einer Ephemeride bei siebenstelliger Rechnung), so könnte, wie aus Obigem ersichtlich, in der siebenten Differenzreihe ein Sprung von acht Bogensekunden auftreten, wodurch die Sicherheit der Controle durch die Differenzreihen wesentlich leidet.

Treten daher in einer Ephemeride hohe Differenzreihen auf, so ist es im Allgemeinen immer anzurathen, die in der Mitte liegenden Functionswerthe neu zu berechnen. Durch Interpolation in die Mitte werden unter diesen Verhältnissen die in der ursprünglichen Ephemeride befindlichen Fehler verdeckt.

Die übrigen Interpolationsformeln lassen sich ebenfalls leicht mittelst der Sätze über arithmetische Reihen höherer Ordnung gewinnen. Wir denken uns in Fig. 15:

$$f(a), f'\left(a - \frac{1}{2}\right), f''(a - 1), f'''\left(a - \frac{3}{2}\right) \text{ u. s. w.,}$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, $f(a)$ und die vorhergehenden Functionswerthe gegeben und verfahren nun wieder wie oben.

Wir denken uns $f(a)$ in das Feld E5 (Fig. 18) eingeschrieben und alle Differenzwerthe gleich Null gesetzt. Dann ist:

$$f(a + u) = f(a).$$

Denkt man sich $f'(a - \frac{1}{2})$ in dasselbe Feld geschrieben und alle übrigen Werthe gleich Null gesetzt, so kommt $f(a)$ in $D4$, $f(a - 1)$ in $D6$ zu stehen u. s. w. Man hat also:

$$f(a + n) = n f'(a - \frac{1}{2}).$$

Denkt man sich $f''(a - 1)$ in $E5$ eingeschrieben, so kommt $f(a)$ in $C3$, $f(a - 1)$ in $C5$ u. s. w. zu stehen. Also:

$$f(a + n) = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} f''(a - 1).$$

Auf ähnliche Weise folgt für das dritte Glied:

$$f(a + n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a - \frac{3}{2}).$$

Die vollständige Formel wird daher:

$$\left. \begin{aligned} f(a + n) &= f(a) + \frac{n}{1} f'(a - \frac{1}{2}) \\ &+ \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} f''(a - 1) + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a - \frac{3}{2}) \dots \end{aligned} \right\} \dots \quad (2)$$

Wir wenden diese Formel wiederum auf unser Beispiel an, indem wir, zunächst von October 17,5 ausgehend, vorwärts interpoliren:

$$n = + 0,049\,220.$$

$f(a)$	$= -\,3\,837\,091$	
$f'(a - \frac{1}{2})$	$= -\,71\,513$	$\log n = 8,69214$
$f''(a - 1)$	$= +\,278$	$\log \frac{n(n+1)}{2} = 8,4120$
$f'''(a - \frac{3}{2})$	$= +\,6$	

Das dritte Glied kann vernachlässigt werden. Man findet wie oben:

$$Y = -\,0,384\,060\,4.$$

Interpoliren wir von October 18,0 aus nach rückwärts, so ist:

$$n = -\,0,950\,780.$$

$f(a)$	$= -\,3\,908\,320$	
$f'(a - \frac{1}{2})$	$= -\,71\,229$	$\log n = 9,97808\,n$
$f''(a - 1)$	$= +\,284$	$\log \frac{n(n+1)}{2} = 8,36919\,n$
$f'''(a - \frac{3}{2})$	$= +\,6$	

$$Y = -\,0,384\,060\,5.$$

Von (2) ausgehend, leiten wir wiederum eine Formel für die Interpolation in die Mitte ab, indem wir $n = -\frac{1}{2}$ setzen. Man findet so:

$$\left. \begin{aligned} f\left(a - \frac{1}{2}\right) &= f(a) - \frac{1}{2} f^{\text{I}}\left(a - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad - \frac{1}{8} f^{\text{II}}(a - 1) - \frac{1}{16} f^{\text{III}}\left(a - \frac{3}{2}\right) \\ &\quad - \frac{5}{128} f^{\text{IV}}(a - 2) - \frac{7}{256} f^{\text{V}}\left(a - \frac{5}{2}\right) \\ &\quad - \frac{21}{1024} f^{\text{VI}}(a - 3) - \frac{33}{2048} f^{\text{VII}}\left(a - \frac{7}{2}\right) \\ &\quad - \frac{429}{32768} f^{\text{VIII}}(a - 4) - \frac{715}{65536} f^{\text{IX}}\left(a - \frac{9}{2}\right) \\ &\quad - \frac{2431}{262144} f^{\text{X}}(a - 5) \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2')$$

Die Anwendung der Formeln (1) und (1') ist dann geboten, wenn man die Werthe $f(a - 1)$, $f(a - 2) \dots$ nicht zur Hand hat, d. h. bei Interpolationen in der Nähe

Fig. 19.

13	$+c$						
12		$-c$					
11	0		$+c$				
10		0		$-c$			
9	0		0		c		
8		0		0		0	
7	0		0		c	0	
6		0		c		0	
5	0		c		c		
4		c		$2c$			
3	c		$3c$				
2		$4c$					
1	$5c$						
	A	B	C	D	E	F	G

des Anfangs einer Ephemeride. Aus demselben Grunde empfehlen sich die Formeln (2) und (2') zu Interpolationen in der Nähe des Schlusses. Kennt man aber alle in der Nähe einer Zeile befindlichen Differenzwerthe (also in der Mitte einer Ephemeride), so zieht man vor, die Function mit Hülfe derselben auszudrücken. Wir denken uns also:

$f(a)$, $f^{\text{I}}\left(a + \frac{1}{2}\right)$, $f^{\text{II}}(a)$, $f^{\text{III}}\left(a + \frac{1}{2}\right) \dots$
(resp. die entsprechenden Werthe von f) gegeben. Sind alle Differenzwerthe gleich 0, so ist:

$$f(a + n) = f(a).$$

Ferner denken wir uns alle übrigen Werthe gleich Null gesetzt und $f^{\text{I}}\left(a + \frac{1}{2}\right)$ in *E7* eingeschrieben (Fig. 19). Dann kommen $f(a)$ und $f(a + 1)$ in *D8* und *D6* zu stehen. Es ist also unter dieser Voraussetzung:

$$f(a + n) = n f^{\text{I}}\left(a + \frac{1}{2}\right).$$

Denken wir uns ferner alle obigen Werthe mit Ausnahme von $f^{\text{II}}(a)$ gleich 0 und diesen letzteren in *E9* eingeschrieben, so kommen $f(a)$, $f(a + 2)$ u. s. w. in *C9*, *C7* u. s. w. zu stehen. Es wird also:

$$f(a + n) = \frac{n(n - 1)}{1 \cdot 2} f^{\text{II}}(a).$$

Betrachtet man nur $f^{\text{III}}\left(a + \frac{1}{2}\right)$ und schreibt diese Grösse in *E7* ein, so kommt $f(a)$ in *B8*, $f(a + 1)$ in *B6* zu stehen; $f(a + n)$ wird dann:

$$\frac{(n + 1)(n)(n - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^{\text{III}}\left(a + \frac{1}{2}\right).$$

Denkt man sich ferner $f^{iv}(a)$ in *E 9* gesetzt, so fallen $f(a)$ und $f(a+1)$ in *A 9* und *A 7*, und man erhält:

$$f(a+n) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{iv}(a).$$

Die vollständige Formel wird also:

$$\left. \begin{aligned} f(a+n) = f(a) + n f^I\left(a + \frac{1}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} f^{II}(a) \\ + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^{III}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{IV}(a) \dots \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

Für unser Beispiel ist, wenn man von Oktober 17,5 ausgehend vorwärts interpoliert:

$$n = + 0.049220.$$

$$\left. \begin{aligned} f(a) &= - 3837091 \\ f^I\left(a + \frac{1}{2}\right) &= - 71229 \\ f^{II}(a) &= + 284 \\ f^{III}\left(a + \frac{1}{2}\right) &= + 6 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \log n &= 8,69214 \\ \log \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} &= 8,3692n \end{aligned}$$

$$Y = - 0,3840604.$$

Indem man in (3) $n = + \frac{1}{2}$ setzt, erhält man zur Interpolation in die Mitte die Formel:

$$\left. \begin{aligned} f\left(a + \frac{1}{2}\right) = f(a) + \frac{1}{2} f^I\left(a + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8} f^{II}(a) \\ - \frac{1}{16} f^{III}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{128} f^{IV}(a) \\ - \frac{3}{256} f^{V}\left(a + \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{1024} f^{VI}(a) \\ - \frac{5}{2048} f^{VII}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \frac{35}{32768} f^{VIII}(a) \\ + \frac{35}{65536} f^{IX}\left(a + \frac{1}{2}\right) - \frac{63}{262144} f^{X}(a) \dots \end{aligned} \right\} \dots (3')$$

Um eine der Formel (3) analoge abzuleiten, denken wir uns

$$f(a), f^I\left(a - \frac{1}{2}\right), f^{II}(a), f^{III}\left(a - \frac{1}{2}\right) \dots$$

gegeben. Sind alle Differenzen gleich Null, so ist:

$$f(a+n) = f(a).$$

Betrachtet man nur $f^I\left(a - \frac{1}{2}\right)$ und schreibt diese Grösse in *E 9* (Fig. 19) ein, so fallen $f(a)$ und $f(a+1)$ in *D 8* und *D 6*. Das zweite Glied ist also:

$$\frac{n}{1} \cdot f^I\left(a - \frac{1}{2}\right).$$

Berücksichtigt man nur $f^{II}(a)$ und schreibt diese Grösse in *E 7* ein, so kommen $f(a)$ und $f(a+1)$ in *C 7* und *C 5* zu stehen. Das dritte Glied wird demnach:

$$\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} f^{II}(a).$$

Betrachtet man endlich nur das Glied $f''' \left(a - \frac{1}{2} \right)$ und setzt es in E9, so stehen $f(a)$ und $f(a+1)$ in B8 und B6. Das vierte Glied wird also:

$$\frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f''' \left(a - \frac{1}{2} \right) \text{ u. s. w.}$$

Man erhält so:

$$\left. \begin{aligned} f(a+n) &= f(a) + \frac{n}{1} f' \left(a - \frac{1}{2} \right) \\ &+ \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} f''(a) + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f''' \left(a - \frac{1}{2} \right) \dots \\ &+ \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^{iv}(a) \\ &+ \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} f^v \left(a - \frac{1}{2} \right) \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

Indem wir in (4) a durch $a+1$ und n durch $-\frac{1}{2}$ ersetzen, ergibt sich folgende Formel zur Interpolation in die Mitte:

$$\left. \begin{aligned} f \left(a + \frac{1}{2} \right) &= f(a+1) - \frac{1}{2} f' \left(a + \frac{1}{2} \right) \\ &- \frac{1}{8} f''(a+1) + \frac{1}{16} f''' \left(a + \frac{1}{2} \right) \\ &+ \frac{3}{128} f^{iv}(a+1) - \frac{3}{256} f^v \left(a + \frac{1}{2} \right) \\ &- \frac{5}{1024} f^{vi}(a+1) + \frac{5}{2048} f^{vii} \left(a + \frac{1}{2} \right) \\ &+ \frac{35}{32768} f^{viii}(a+1) - \frac{35}{65536} f^{ix} \left(a + \frac{1}{2} \right) \\ &- \frac{63}{262144} f^x(a+1) \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots (4')$$

Die Formeln (3') und (4') haben alle ungeraden Glieder mit entgegengesetzten Vorzeichen gemeinsam. Man kann dieselben daher zum Verschwinden bringen, indem man aus beiden Formeln das Mittel nimmt. Wir setzen der Kürze halber:

$$f^{2k} \left(a + \frac{1}{2} \right) = \frac{f^{2k}(a) + f^{2k}(a+1)}{2}.$$

Eine Verwechslung ist hier nicht zu befürchten, da gebrochene Argumente nur in den ungeraden Differenzreihen vorkommen (siehe Fig. 15). In analoger Weise versteht man z. B. unter $f'(a+1)$ die Grösse

$$\frac{f' \left(a + \frac{1}{2} \right) + f' \left(a + \frac{3}{2} \right)}{2}.$$

Auch hier ist ein Irrthum ausgeschlossen, da $f'(a+1)$ in Fig. 15 überhaupt nicht vorkommt.

Nimmt man also aus (3') und (4') das Mittel, so erhält man unter Einführung obiger Bezeichnungsweise:

$$\left. \begin{aligned} f\left(a + \frac{1}{2}\right) &= f\left(a + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8} f''\left(a + \frac{1}{2}\right) \\ &+ \frac{3}{128} f^{iv}\left(a + \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{1024} f^{vi}\left(a + \frac{1}{2}\right) \\ &+ \frac{35}{32 \cdot 768} f^{viii}\left(a + \frac{1}{2}\right) - \frac{63}{262 \cdot 144} f^x\left(a + \frac{1}{2}\right) \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots (5)$$

Diese Formel unterscheidet sich durch ihre schnelle Convergenz von (1'), (2'), (3') und (4') und wird daher vorwiegend zum Zwecke der Interpolation auf die Mitte verwandt.

Hat man innerhalb eines und desselben Intervalles eine grössere Zahl von Interpolationen auszuführen (was z. B. vorkommt, wenn man mehrere Beobachtungen eines Kometen an demselben Tage mit einer Ephemeride vergleichen will), so ist es vorteilhafter, die Formeln (1), (2), (3) und (4) nach Potenzen von n zu entwickeln und die Coëfficienten derselben ein- für allemal auszurechnen. Wir führen diese Entwicklung hier vollständig durch.

Wir beginnen mit der Entwicklung der Formel (2) nach Potenzen von n . Man findet unschwer, indem man jedesmal mit dem neu hinzutretenden Factor multiplicirt:

- I. $n = n$
- II. $n(n+1) = n^2 + n$
- III. $n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n$
- IV. $n(n+1)(n+2)(n+3) = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$
- V. $n(n+1) \dots (n+4) = n^5 + 10n^4 + 35n^3 + 50n^2 + 24n$
- VI. $n(n+1) \dots (n+5) = n^6 + 15n^5 + 85n^4 + 225n^3 + 274n^2 + 120n$
- VII. $n(n+1) \dots (n+6) = n^7 + 21n^6 + 175n^5 + 735n^4 + 1624n^3 + 1764n^2 + 720n$
- VIII. $n(n+1) \dots (n+7) = n^8 + 28n^7 + 322n^6 + 1960n^5 + 6769n^4 + 13132n^3 + 13068n^2 + 5040n$
- IX. $n(n+1) \dots (n+8) = n^9 + 36n^8 + 546n^7 + 4536n^6 + 22449n^5 + 67284n^4 + 118124n^3 + 109584n^2 + 40320n$
- X. $n(n+1) \dots (n+9) = n^{10} + 45n^9 + 870n^8 + 9450n^7 + 63273n^6 + 269325n^5 + 723680n^4 + 1172700n^3 + 1026576n^2 + 362880n$

In jedem dieser Ausdrücke ist die Summe der Coëfficienten der geraden Potenzen von n gleich derjenigen für die ungeraden Potenzen (wegen der Theilbarkeit durch $n+1$). So ist in (V.):

$$1 + 35 + 24 = 60 = 10 + 50.$$

Durch diese einfache Controle werden vereinzelte Rechenfehler sofort aufgedeckt.

Die vollständige Entwicklung der Formel (2) ergibt:

$$\begin{aligned} f(a+n) &= f(a) + f'(a - \frac{1}{2}) \left[n \right] + f''(a-1) \left[\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \right] \\ &+ f'''(a - \frac{3}{2}) \left[\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3} \right] + f^{iv}(a-2) \left[\frac{n^4}{24} + \frac{n^3}{4} + \frac{11n^2}{24} + \frac{n}{4} \right] \\ &+ f^v(a - \frac{5}{2}) \left[\frac{n^5}{120} + \frac{n^4}{12} + \frac{7n^3}{24} + \frac{5n^2}{12} + \frac{n}{5} \right] \\ &+ f^{vi}(a-3) \left[\frac{n^6}{720} + \frac{n^5}{48} + \frac{17n^4}{144} + \frac{5n^3}{16} + \frac{137n^2}{360} + \frac{n}{6} \right] \\ &+ f^{vii}(a - \frac{7}{2}) \left[\frac{n^7}{5040} + \frac{n^6}{240} + \frac{5n^5}{144} + \frac{7n^4}{48} + \frac{29n^3}{90} + \frac{7n^2}{20} + \frac{n}{7} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + f^{\text{viii}}(a-4) \left[\frac{n^8}{40320} + \frac{n^7}{1440} + \frac{23n^6}{2880} + \frac{7n^5}{144} + \frac{967n^4}{5760} + \frac{469n^3}{1440} \right. \\
& \quad \left. + \frac{363n^2}{1120} + \frac{n}{8} \right] \\
& + f^{\text{ix}}\left(a-\frac{9}{2}\right) \left[\frac{n^9}{362880} + \frac{n^8}{10080} + \frac{13n^7}{8640} + \frac{n^6}{80} + \frac{1069n^5}{17280} + \frac{89n^4}{480} + \frac{29531n^3}{90720} \right. \\
& \quad \left. + \frac{761n^2}{2520} + \frac{n}{9} \right] \\
& + f^{\text{x}}(a-5) \left[\frac{n^{10}}{3628800} + \frac{n^9}{80640} + \frac{29n^8}{120960} + \frac{n^7}{384} + \frac{3013n^6}{172800} + \frac{19n^5}{256} + \frac{4523n^4}{22680} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1303n^3}{4032} + \frac{7129n^2}{25200} + \frac{n}{10} \right].
\end{aligned}$$

Ordnet man diesen Ausdruck nach Potenzen von n , so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
f(a+n) = f(a) & + n \left[f^{\text{i}}\left(a-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f^{\text{ii}}(a-1) + \frac{1}{3} f^{\text{iii}}\left(a-\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{4} f^{\text{iv}}(a-2) \right. \\
& \quad + \frac{1}{5} f^{\text{v}}\left(a-\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{6} f^{\text{vi}}(a-3) + \frac{1}{7} f^{\text{vii}}\left(a-\frac{7}{2}\right) \\
& \quad \left. + \frac{1}{8} f^{\text{viii}}(a-4) + \frac{1}{9} f^{\text{ix}}\left(a-\frac{9}{2}\right) + \frac{1}{10} f^{\text{x}}(a-5) \right] \\
& + n^2 \left[\frac{1}{2} f^{\text{ii}}(a-1) + \frac{1}{2} f^{\text{iii}}\left(a-\frac{3}{2}\right) + \frac{11}{24} f^{\text{iv}}(a-2) + \frac{5}{12} f^{\text{v}}\left(a-\frac{5}{2}\right) \right. \\
& \quad + \frac{137}{360} f^{\text{vi}}(a-3) + \frac{7}{20} f^{\text{vii}}\left(a-\frac{7}{2}\right) + \frac{363}{1120} f^{\text{viii}}(a-4) \\
& \quad \left. + \frac{761}{2520} f^{\text{ix}}\left(a-\frac{9}{2}\right) + \frac{7129}{25200} f^{\text{x}}(a-5) \right] \\
& + n^3 \left[\frac{1}{6} f^{\text{iii}}\left(a-\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{4} f^{\text{iv}}(a-2) + \frac{7}{24} f^{\text{v}}\left(a-\frac{5}{2}\right) + \frac{5}{16} f^{\text{vi}}(a-3) \right. \\
& \quad + \frac{29}{90} f^{\text{vii}}\left(a-\frac{7}{2}\right) + \frac{469}{1440} f^{\text{viii}}(a-4) + \frac{29531}{90720} f^{\text{ix}}\left(a-\frac{9}{2}\right) \\
& \quad \left. + \frac{1303}{4032} f^{\text{x}}(a-5) \right] \dots (2'') \\
& + n^4 \left[\frac{1}{24} f^{\text{iv}}(a-2) + \frac{1}{12} f^{\text{v}}\left(a-\frac{5}{2}\right) + \frac{17}{144} f^{\text{vi}}(a-3) \right. \\
& \quad + \frac{7}{48} f^{\text{vii}}\left(a-\frac{7}{2}\right) + \frac{967}{5760} f^{\text{viii}}(a-4) + \frac{89}{480} f^{\text{ix}}\left(a-\frac{9}{2}\right) \\
& \quad \left. + \frac{4523}{22680} f^{\text{x}}(a-5) \right] \\
& + n^5 \left[\frac{1}{120} f^{\text{v}}\left(a-\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{48} f^{\text{vi}}(a-3) + \frac{5}{144} f^{\text{vii}}\left(a-\frac{7}{2}\right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{7}{144} f^{\text{viii}}(a-4) + \frac{1069}{17280} f^{\text{ix}}\left(a-\frac{9}{2}\right) + \frac{19}{256} f^{\text{x}}(a-5) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + n^6 \left[\frac{1}{720} f^{vi} \left(a - \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{240} f^{vn} \left(a - \frac{7}{2} \right) + \frac{23}{2880} f^{vni} \left(a - 4 \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{80} f^{ix} \left(a - \frac{9}{2} \right) + \frac{3013}{172800} f^x \left(a - 5 \right) \right] \\
& + n^7 \left[\frac{1}{5040} f^{vni} \left(a - \frac{7}{2} \right) + \frac{1}{1440} f^{vni} \left(a - 4 \right) + \frac{13}{8640} f^{ix} \left(a - \frac{9}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{384} f^x \left(a - 5 \right) \right] \\
& + n^8 \left[\frac{1}{40320} f^{vni} \left(a - 4 \right) + \frac{1}{10080} f^{ix} \left(a - \frac{9}{2} \right) + \frac{29}{120960} f^x \left(a - 5 \right) \right] \\
& + n^9 \left[\frac{1}{362880} f^{ix} \left(a - \frac{9}{2} \right) + \frac{1}{80640} f^x \left(a - 5 \right) \right] \\
& + n^{10} \left[\frac{f^x \left(a - 5 \right)}{3628800} \right] \left. \vphantom{\begin{aligned} & + n^6 \\ & + n^7 \\ & + n^8 \\ & + n^9 \\ & + n^{10} \end{aligned}} \right\} \dots (2'')
\end{aligned}$$

In ähnlicher Weise findet man aus (1) mit Benutzung der vorstehenden Rechnungen:

$$\begin{aligned}
& f(a+n) - f(a) \\
& + n \left[f' \left(a + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} f'' \left(a + 1 \right) + \frac{1}{3} f''' \left(a + \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{4} f^{iv} \left(a + 2 \right) \right. \\
& \quad + \frac{1}{5} f^v \left(a + \frac{5}{2} \right) - \frac{1}{6} f^{vi} \left(a + 3 \right) + \frac{1}{7} f^{vni} \left(a + \frac{7}{2} \right) \\
& \quad \left. - \frac{1}{8} f^{vni} \left(a + 4 \right) + \frac{1}{9} f^{ix} \left(a + \frac{9}{2} \right) - \frac{1}{10} f^x \left(a + 5 \right) \right] \\
& + n^2 \left[\frac{1}{2} f'' \left(a + 1 \right) - \frac{1}{2} f''' \left(a + \frac{3}{2} \right) + \frac{11}{24} f^{iv} \left(a + 2 \right) - \frac{5}{12} f^v \left(a + \frac{5}{2} \right) \right. \\
& \quad + \frac{137}{360} f^{vi} \left(a + 3 \right) - \frac{7}{20} f^{vni} \left(a + \frac{7}{2} \right) + \frac{363}{1120} f^{vni} \left(a + 4 \right) \\
& \quad \left. - \frac{761}{2520} f^{ix} \left(a + \frac{9}{2} \right) + \frac{7129}{25200} f^x \left(a + 5 \right) \dots \right] \\
& + n^3 \left[\frac{1}{6} f''' \left(a + \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{4} f^{iv} \left(a + 2 \right) + \frac{7}{24} f^v \left(a + \frac{5}{2} \right) - \frac{5}{16} f^{vi} \left(a + 3 \right) \right. \\
& \quad + \frac{29}{90} f^{vni} \left(a + \frac{7}{2} \right) - \frac{469}{1440} f^{vni} \left(a + 4 \right) + \frac{29531}{90720} f^{ix} \left(a + \frac{9}{2} \right) \\
& \quad \left. - \frac{1303}{4032} f^x \left(a + 5 \right) \right] \\
& + n^4 \left[\frac{1}{24} f^{iv} \left(a + 2 \right) - \frac{1}{12} f^v \left(a + \frac{5}{2} \right) + \frac{17}{144} f^{vi} \left(a + 3 \right) \right. \\
& \quad - \frac{7}{48} f^{vni} \left(a + \frac{7}{2} \right) + \frac{967}{5760} f^{vni} \left(a + 4 \right) - \frac{89}{480} f^{ix} \left(a + \frac{9}{2} \right) \\
& \quad \left. + \frac{4523}{22680} f^x \left(a + 5 \right) \right] \\
& + n^5 \left[\frac{1}{120} f^v \left(a + \frac{5}{2} \right) - \frac{1}{48} f^{vi} \left(a + 4 \right) + \frac{5}{144} f^{vni} \left(a + \frac{7}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{7}{144} f^{vni} \left(a + 4 \right) + \frac{1069}{17280} f^{ix} \left(a + \frac{9}{2} \right) - \frac{19}{256} f^x \left(a + 5 \right) \right] \left. \vphantom{\begin{aligned} & + n^2 \\ & + n^3 \\ & + n^4 \\ & + n^5 \end{aligned}} \right\} \dots (1'')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + n^6 \left[\frac{1}{720} f^{vi} (a + 3) - \frac{1}{240} f^{vii} \left(a + \frac{7}{2} \right) + \frac{23}{2880} f^{viii} (a + 4) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{80} f^{ix} \left(a + \frac{9}{2} \right) + \frac{3013}{172800} f^x (a + 5) \right] \\
 & + n^7 \left[\frac{1}{5040} f^{vii} \left(a + \frac{7}{2} \right) - \frac{1}{1440} f^{viii} (a + 4) + \frac{13}{8640} f^{ix} \left(a + \frac{9}{2} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{384} f^x (a + 5) \right] \\
 & + n^8 \left[\frac{1}{40320} f^{viii} (a + 4) - \frac{1}{10080} f^{ix} \left(a + \frac{9}{2} \right) + \frac{29}{120960} f^x (a + 5) \right] \\
 & + n^9 \left[\frac{1}{362880} f^{ix} \left(a + \frac{9}{2} \right) - \frac{1}{80640} f^x (a + 5) \right] \\
 & + n^{10} \left[\frac{f^x (a + 5)}{3628800} \right] \dots \left. \vphantom{\frac{1}{3628800}} \right\} \dots (1'')
 \end{aligned}$$

Die Formeln (1'') und (2'') convergiren verhältnissmässig langsam. Formel (1'') kann aber trotzdem mit Vorthail am Anfang, (2'') am Ende einer Ephemeride verwendet werden. Hat man hingegen alle in der Nähe der Zeile a befindlichen Differenzwerthe zur Verfügung, so verdienen die aus (3) und (4) folgenden Formeln den Vorzug.

Zur Entwicklung von (3) hat man zunächst:

- I. $n = n$
- II. $n(n-1) = n^2 - n$
- III. $(n+1)(n)(n-1) = n^3 - n$
- IV. $(n+1)(n)(n-1)(n-2) = n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n$
- V. $(n+2)(n+1)(n)(n-1)(n-2) = n^5 - 5n^3 + 4n$
- VI. $(n+2)(n+1)(n)(n-1)(n-2)(n-3)$
 $= n^6 - 3n^5 - 5n^4 + 15n^3 + 4n^2 - 12n$
- VII. $(n+3)(n+2)(n+1)(n)(n-1)(n-2)(n-3)$
 $= n^7 - 14n^5 + 49n^3 - 36n$
- VIII. $(n+3)(n+2)(n+1)(n)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$
 $= n^8 - 4n^7 - 14n^6 + 56n^5 + 49n^4 - 196n^3 - 36n^2 + 144n$
- IX. $(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$
 $= n^9 - 30n^7 + 273n^5 - 820n^3 + 576n$
- X. $(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$
 $= n^{10} - 5n^9 - 30n^8 + 150n^7 + 273n^6 - 1365n^5 - 820n^4 + 4100n^3 + 576n^2 - 2880n.$

In Folge der Theilbarkeit dieser Ausdrücke durch $n^2 - 1$ muss die Summe der Coëfficienten der geraden Potenzen von n und diejenige für die ungeraden Potenzen von n gleich 0 sein. So ist z. B. für (V.) $1 - 5 + 4 = 0$ und für (VI.) $1 - 5 + 4 = -3 + 15 - 12 = 0$. Mit Hülfe dieser Ausdrücke wird Formel (3):

$$\begin{aligned}
 f(a+n) &= f(a) + n f^i \left(a + \frac{1}{2} \right) + f^{ii}(a) \left[\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \right] + f^{iii} \left(a + \frac{1}{2} \right) \left[\frac{n^3}{6} - \frac{n}{6} \right] \\
 &+ f^{iv}(a) \left[\frac{n^4}{24} - \frac{n^3}{12} - \frac{n^2}{24} + \frac{n}{12} \right] + f^v \left(a + \frac{1}{2} \right) \left[\frac{n^5}{120} - \frac{n^3}{24} + \frac{n}{30} \right] \\
 &+ f^{vi}(a) \left[\frac{n^6}{720} - \frac{n^5}{240} - \frac{n^4}{144} + \frac{n^3}{48} + \frac{n^2}{180} - \frac{n}{60} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + f^{\text{vii}} \left(a + \frac{1}{2} \right) \left[\frac{n^7}{5040} - \frac{n^5}{360} + \frac{7n^3}{720} - \frac{n}{140} \right] \\
& + f^{\text{viii}}(a) \left[\frac{n^8}{40320} - \frac{n^7}{10080} - \frac{n^6}{2880} + \frac{n^5}{720} + \frac{7n^4}{5760} - \frac{7n^3}{1440} - \frac{n^2}{1120} + \frac{n}{280} \right] \\
& + f^{\text{ix}} \left(a + \frac{1}{2} \right) \left[\frac{n^9}{362880} - \frac{n^7}{12096} + \frac{13n^5}{17280} - \frac{41n^3}{18144} + \frac{n}{630} \right] \\
& + f^{\text{x}}(a) \left[\frac{n^{10}}{3628800} - \frac{n^9}{725760} - \frac{n^8}{120960} + \frac{n^7}{24192} + \frac{13n^6}{172800} \right. \\
& \quad \left. - \frac{13n^5}{34560} - \frac{41n^4}{181440} + \frac{41n^3}{36288} + \frac{n^2}{6300} - \frac{n}{1260} \right]
\end{aligned}$$

Ordnet man diesen Ausdruck nach Potenzen von n , so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& f(a+n) = f(a) \\
& + n \left[f' \left(a + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} f''(a) - \frac{1}{6} f''' \left(a + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{12} f^{(iv)}(a) \right. \\
& \quad - \frac{1}{30} f^{(v)} \left(a + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{60} f^{(vi)}(a) - \frac{1}{140} f^{(vii)} \left(a + \frac{1}{2} \right) \\
& \quad \left. + \frac{1}{280} f^{(viii)}(a) + \frac{1}{630} f^{(ix)} \left(a + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{1260} f^{(x)}(a) \right] \\
& + n^2 \left[\frac{1}{2} f''(a) - \frac{1}{24} f^{(iv)}(a) + \frac{1}{180} f^{(vi)}(a) - \frac{1}{1120} f^{(viii)}(a) + \frac{1}{6300} f^{(x)}(a) \right] \\
& + n^3 \left[\frac{1}{6} f''' \left(a + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{12} f^{(iv)}(a) - \frac{1}{24} f^{(v)} \left(a + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{48} f^{(vi)}(a) \right. \\
& \quad + \frac{7}{720} f^{(vii)} \left(a + \frac{1}{2} \right) - \frac{7}{1440} f^{(viii)}(a) - \frac{41}{18144} f^{(ix)} \left(a + \frac{1}{2} \right) \\
& \quad \left. + \frac{41}{36288} f^{(x)}(a) \right] \\
& + n^4 \left[\frac{1}{24} f^{(iv)}(a) - \frac{1}{144} f^{(vi)}(a) + \frac{7}{5760} f^{(viii)}(a) - \frac{41}{181440} f^{(x)}(a) \right] \\
& + n^5 \left[\frac{1}{120} f^{(v)} \left(a + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{240} f^{(vi)}(a) - \frac{1}{360} f^{(vii)} \left(a + \frac{1}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{720} f^{(viii)}(a) + \frac{13}{17280} f^{(ix)} \left(a + \frac{1}{2} \right) - \frac{13}{34560} f^{(x)}(a) \right] \\
& + n^6 \left[\frac{1}{720} f^{(vi)}(a) - \frac{1}{2880} f^{(viii)}(a) + \frac{13}{172800} f^{(x)}(a) \right] \\
& + n^7 \left[\frac{1}{5040} f^{(vii)} \left(a + \frac{1}{2} \right) - \frac{f^{(viii)}(a)}{10080} - \frac{1}{12096} f^{(ix)} \left(a + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{24192} f^{(x)}(a) \right] \\
& + n^8 \left[\frac{1}{40320} f^{(viii)}(a) - \frac{1}{120960} f^{(x)}(a) \right] \\
& + n^9 \left[\frac{1}{362880} f^{(ix)} \left(a + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{725760} f^{(x)}(a) \right] \\
& + n^{10} \left[\frac{1}{3628800} f^{(x)}(a) \dots \right]
\end{aligned} \quad \dots (3'')$$

Aus dieser Formel leitet sich leicht die (4) entsprechende ab:

$$\begin{aligned}
 f(a+n) = f(a) & \\
 + n \left[f^I \left(a - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} f^{II} (a) - \frac{1}{6} f^{III} \left(a - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{12} f^{IV} (a) \right. & \\
 + \frac{1}{30} f^V \left(a - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{60} f^{VI} (a) - \frac{1}{140} f^{VII} \left(a - \frac{1}{2} \right) & \\
 \left. - \frac{1}{280} f^{VIII} (a) + \frac{1}{630} f^{IX} \left(a - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{1260} f^X (a) \right] & \\
 + n^2 \left[\frac{1}{2} f^{II} (a) - \frac{1}{24} f^{IV} (a) + \frac{1}{180} f^{VI} (a) - \frac{1}{1120} f^{VIII} (a) + \frac{1}{6300} f^X (a) \right] & \\
 + n^3 \left[\frac{1}{6} f^{III} \left(a - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{12} f^{IX} (a) - \frac{1}{24} f^V \left(a - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{48} f^{XI} (a) \right. & \\
 + \frac{7}{720} f^{VII} \left(a - \frac{1}{2} \right) + \frac{7}{1440} f^{VIII} (a) - \frac{41}{18144} f^{IX} \left(a - \frac{1}{2} \right) & \\
 \left. - \frac{41}{36288} f^X (a) \right] & \\
 + n^4 \left[\frac{1}{24} f^{IV} (a) - \frac{1}{144} f^{VI} (a) + \frac{7}{5760} f^{VIII} (a) - \frac{41}{181440} f^X (a) \right] & \dots (4'') \\
 + n^5 \left[\frac{1}{120} f^V \left(a - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{240} f^{VI} (a) - \frac{1}{360} f^{VII} \left(a - \frac{1}{2} \right) \right. & \\
 \left. - \frac{1}{720} f^{VIII} (a) + \frac{13}{17280} f^{IX} \left(a - \frac{1}{2} \right) + \frac{13}{34560} f^X (a) \right] & \\
 + n^6 \left[\frac{1}{720} f^{VI} (a) - \frac{1}{2880} f^{VIII} (a) + \frac{13}{172800} f^X (a) \right] & \\
 + n^7 \left[\frac{1}{5040} f^{VIII} \left(a - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{10080} f^{VIII} (a) - \frac{1}{12096} f^{IX} \left(a - \frac{1}{2} \right) \right. & \\
 \left. - \frac{1}{24192} f^X (a) \right] & \\
 + n^8 \left[\frac{1}{40320} f^{VIII} (a) - \frac{1}{120960} f^X (a) \right] & \\
 + n^9 \left[\frac{1}{362880} f^{IX} \left(a - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{725760} f^X (a) \right] & \\
 + n^{10} \left[\frac{1}{3628800} f^X (a) \right] &
 \end{aligned}$$

Die Formeln (1''), (2''), (3'') und (4'') sind hier viel weiter entwickelt, als sie gewöhnlich gebraucht werden. Man sollte, wie oben aus einander gesetzt wurde, die Intervalle einer Ephemeride stets so eng wählen, dass sich höchstens siebente Differenzen fühlbar machen.

Hat man also eine grosse Zahl von Interpolationen auszuführen, so berechnet man nach einer der vier obigen Formeln die Logarithmen der Coëfficienten von n , n^2 u. s. w. mit der nöthigen Stellenzahl für alle Epochen der Ephemeride.

Zur Controle dieser Grössen empfiehlt es sich, die so erhaltenen Interpolationsformeln für den Fall $n = +1$ anzuwenden, d. h. durch Interpolation den nächstfolgenden Functionswerth zu berechnen. Ausserdem müssen alle diese Grössen durch Bildung von Differenzreihen geprüft werden. Man schreibt also z. B. die Logarithmen der Coëfficienten von n^3 für die verschiedenen Epochen unter einander und überzeugt

sich, dass ihre Differenzen einen genügend regelmässigen Gang zeigen. Bei der Interpolation selbst sollte man zur Controle stets vom vorhergehenden Functionswerthe nach vorwärts (n positiv), und vom folgenden nach rückwärts (n negativ) interpoliren.

Bei den bisher aus einander gesetzten Interpolationsverfahren wurden die Argumentwerthe als äquidistant vorausgesetzt.

Lagrange hat ein Verfahren gegeben, welches von dieser Voraussetzung frei ist und alle im Vorhergehenden entwickelten Formeln als Specialfälle in sich schliesst. Seien für die beliebig vertheilten Argumentwerthe $t_1, t_2 \dots t_p$ die Functionswerthe $f_1, f_2 \dots f_p$ gegeben, so hat der Ausdruck:

$$f = \sum_{i=1}^{i=p} f_i \frac{(t - t_1)(t - t_2) \dots (t - t_{i-1})(t - t_{i+1})(t - t_{i+2}) \dots (t - t_p)}{(t_i - t_1)(t_i - t_2) \dots (t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1})(t_i - t_{i+2}) \dots (t_i - t_p)}$$

die Eigenschaft, für jeden Argumentwerth t_i den Werth f_i anzunehmen. Vorstehende Gleichung stellt also eine Curve $p - 1$ ten Grades in t dar, welche durch die gegebenen Punkte hindurchgeht, oder die gesuchte Interpolationsformel. — Des Interesses wegen sei hier noch der berühmte Encke'sche Aufsatz über Interpolation mitgetheilt, den dieser auf Grund von Vorträgen, die er bei Gauss gehört, ausgearbeitet hat.

B. Ableitung der Interpolationsformeln von **Encke** (nach **Gauss**).

Interpoliren heisst im Allgemeinen das Verfahren, wodurch man aus gegebenen numerischen Werthen irgend welcher Function einer Grösse, oder nach dem astronomischen Sprachgebrauch, eines Argumentes, den Werth dieser Function für einen anderen gegebenen Werth des Argumentes bestimmt, ohne die Form der Function selbst zu kennen, ja ohne sie kennen zu wollen. Als Hülfstheorem dient hierzu der Taylor'sche Lehrsatz, insofern er allgemein die Entwicklung jeder Function umfasst. Nach ihm lässt sich jede Function einer zweitheiligen Grösse in eine Reihe auflösen, die zum ersten Gliede die Function des ersten Theiles selbst hat, und in den folgenden nach Potenzen des zweiten Theiles fortschreitet, wobei die Coëfficienten aus den derivirten Functionen oder den Differentialen des ersten Theiles gebildet werden. Um die Reihe schnell convergiren zu machen, nimmt man gewöhnlich diesen zweiten Theil sehr klein an. Man muss daher auch bei der Anwendung auf das Interpoliren den Werth, von welchem man ausgehen will, so nahe als möglich dem gegebenen zu bringen suchen.

Die Fälle, in welchen der Taylor'sche Satz eine Ausnahme erleidet, kommen bei der Interpolation nicht vor, wenn man sie nur so anwendet, wie sie allein angewandt werden sollte, das heisst, wenn der gesuchte numerische Werth der Function von den gegebenen eingeschlossen ist, und sie innerhalb dieser Grenzen nicht unendlich oder unmöglich wird.

Der leichteren Uebersicht wegen soll angenommen werden, dass vier Werthe gegeben sind. Das Verfahren wird sich ohne Mühe auf jede grössere Zahl ausdehnen lassen. Die vier Werthe des Argumentes sollen mit p, q, r, s , die zugehörigen der Function mit P, Q, R, S bezeichnet werden. Für das Argument x sucht man den numerischen Werth der Function X .

Nach dem Taylor'schen Lehrsatz ist:

$$f(A + \omega) = c + c_1 \omega + c_2 \omega^2 + c_3 \omega^3 \dots$$

Nimmt man einen Werth a nahe an x , so dass

$$\omega = x - a,$$

so wird:

$$f(x) = \alpha + \beta(x - a) + \gamma(x - a)^2 + \delta(x - a)^3 \dots$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ unbekannte Coëfficienten sind. Zu ihrer Bestimmung dienen die vier Bedingungen, dass für

$$\begin{aligned} x = p & & f(x) = P \\ x = q & & f(x) = Q \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Man hat also die vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} P &= \alpha + \beta(p - a) + \gamma(p - a)^2 + \delta(p - a)^3 \\ Q &= \alpha + \beta(q - a) + \gamma(q - a)^2 + \delta(q - a)^3 \\ R &= \alpha + \beta(r - a) + \gamma(r - a)^2 + \delta(r - a)^3 \\ S &= \alpha + \beta(s - a) + \gamma(s - a)^2 + \delta(s - a)^3, \end{aligned}$$

aus welchen sich die vier Coëfficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, aber auch nicht mehrere, durch Elimination bestimmen lassen. Folglich erhält man auch nur die Entwicklung von $f(x)$ bis zu $(x - a)^3$ inclusive, und muss annehmen, dass die folgenden Glieder der Reihe als verschwindend betrachtet werden können.

Die Elimination ist leicht zu übersehen, und bedarf nicht einer weiteren Ausführung. Statt indessen die Werthe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in jedem einzelnen Falle zu suchen und dann in $f(x)$ zu substituiren, kommt man durch eine andere Betrachtung kürzer zum Ziele.

Aus der Uebersicht des Geschäftes der Elimination ergibt sich sogleich, wie die Werthe von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in Bezug auf die Potenzen von P, Q, R, S beschaffen sein werden. Bei der linearen Form der Gleichungen werden P, Q, R, S nur linear darin vorkommen, zugleich wird es aber auch in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kein Glied geben, welches nicht eine der Grössen P, Q, R, S als Factor enthielte. Oder die Form von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ wird im Allgemeinen sein:

$$cP + c_1 Q + c_2 R + c_3 S.$$

Substituirt man diese Werthe nun in $f(x)$, so wird auch in $f(x)$ kein Glied ohne eine der Grössen P, Q, R, S vorkommen, oder es wird

$$X = \pi P + \chi Q + \varrho R + \sigma S,$$

wo $\pi, \chi, \varrho, \sigma$ bis jetzt noch unbestimmte Coëfficienten sind, welche indessen, wie sie auch beschaffen sein mögen, x nur auf die dritte Potenz inclusive enthalten dürfen, weil in der ursprünglichen Gleichung nur $(x - a)^3$ vorkommt.

Wendet man nun auf diese letzte Form die vier Bedingungen des Problems an, so hat man offenbar für:

$$\begin{array}{ccccc} x = p & \pi = 1 & \chi = 0 & \varrho = 0 & \sigma = 0 \\ x = q & \pi = 0 & \chi = 1 & \varrho = 0 & \sigma = 0 \\ x = r & \pi = 0 & \chi = 0 & \varrho = 1 & \sigma = 0 \\ x = s & \pi = 0 & \chi = 0 & \varrho = 0 & \sigma = 1 \end{array}$$

Soll aber $\pi = 0$ werden für $x = q, x = r, x = s$, so lehrt die Algebra, dass π die Factoren $x - q, x - r, x - s$ enthalten muss, und zwar wenn, was hier stillschweigend vorausgesetzt wird, q, r, s verschiedene Grössen sind, alle drei Factoren zugleich. In dem, was π sonst noch enthält, darf kein x mehr vorkommen, weil x sonst gegen die Voraussetzung die dritte Potenz überschreiten würde. Nennt man also C den Inbegriff der übrigen constanten Factoren von π , so ist

$$\pi = Cx - qx - rx - s.$$

Nach der ersten Bedingung ist aber $\pi = 1$ für $x = p$, folglich

$$1 = C \quad p - q \quad p - r \quad p - s$$

oder:

$$C = \frac{1}{p - q \quad p - r \quad p - s},$$

und also:

$$\pi = \frac{x - q \quad x - r \quad x - s}{-q \quad p - r \quad p - s}.$$

Dieselben Schlüsse auf χ, q, σ angewendet, geben den allgemeinen Ausdruck:

$$X = P \frac{x-p}{p-q} \frac{x-r}{p-r} \frac{x-s}{p-s} + Q \frac{x-p}{q-p} \frac{x-r}{q-r} \frac{x-s}{q-s} \left. \begin{array}{l} R \frac{x-p}{r-p} \frac{x-q}{r-q} \frac{x-s}{r-s} \\ S \frac{x-p}{s-p} \frac{x-q}{s-q} \frac{x-r}{s-r} \end{array} \right\} \dots \dots (I)$$

welcher die gegebenen Bedingungen nicht nur erfüllt, sondern auch, wenn x die dritte Potenz nicht überschreiten soll, der einzige ist, der sie vollständig erfüllt. Die Differenz eines jeden anderen nicht damit identischen von (I) müsste nämlich, den Bedingungen der Aufgabe zufolge, Null werden für die Werthe:

$$x = p \quad x = q \quad x = r \quad x = s.$$

folglich die vier Factoren $x - p \quad x - q \quad x - r \quad x - s$ zugleich enthalten, oder x auf die vierte Potenz erhoben, gegen die Voraussetzung.

Man kann der Gleichung (I) noch eine elegantere Form geben, wenn man auf beiden Seiten mit

$$x - p \quad x - q \quad x - r \quad x - s$$

dividirt. Sie wird dann:

$$0 = \frac{X}{x-p \quad x-q \quad x-r \quad x-s} + \frac{P}{p-x \quad p-q \quad p-r \quad p-s} \\ + \frac{Q}{q-x \quad q-p \quad q-r \quad q-s} + \frac{R}{r-x \quad r-p \quad r-q \quad r-s} \\ + \frac{S}{s-x \quad s-p \quad s-q \quad s-r}.$$

Nimmt man hier, da die Form von $f(x)$ ganz willkürlich gelassen ist, für $X \dots x^m$ an, wodurch also $P \dots p^m \cdot Q \dots q^m$ u. s. w. wird, so lässt sich diese Gleichung auch so ausdrücken: Wenn n Grössen a, b, c, d gegeben sind (statt der vorigen x, p, q, r), und die m te Potenz einer jeden derselben dividirt wird durch das Product aller Differenzen der zur Potenz erhobenen Grösse von jeder der übrigen, so ist die Summe aller n Quotienten jedesmal $= 0$, so lange m zwischen 0 und $n - 2$ beides inclusive liegt. Diese letztere Beschränkung wird durch die Bedingung herbeigeführt, dass bei der Herleitung der Reihe die Potenzen höher als x^3 ausgeschlossen wurden.

Die Untersuchung über den Werth der Reihe:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a^m}{a-b \quad a-c \quad a-d \dots} + \frac{b^m}{b-a \quad b-c \quad b-d \dots} \\ + \frac{c^m}{c-a \quad c-b \quad c-d \dots} \text{ etc.} \end{array} \right\} \dots \dots (\Lambda)$$

bei n Grössen für jeden beliebigen Werth von m , führt zu einer näheren Schätzung des Fehlers einer Interpolation. Zu diesem Ende entwickle man den Bruch

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{y-a \quad y-b \quad y-c \quad y-d \dots}$$

auf zweifache Weise. Zuerst, indem man ihn ansieht als das Product der einzelnen Brüche

$$\frac{1}{y-a}, \frac{1}{y-b}, \frac{1}{y-c} \text{ etc.}$$

jeden von diesen für sich entwickelt, und dann alle multiplicirt. Da

$$\frac{1}{y-a} = y^{-1} + ay^{-2} + a^2y^{-3} \dots$$

$$\frac{1}{y-b} = y^{-1} + by^{-2} + b^2y^{-3} \dots,$$

so wird:
$$\frac{1}{Y} = y^{-n} + Ay^{-(n+1)} + By^{-(n+2)} + \dots \quad (B)$$

Für den gegenwärtigen Zweck braucht man die Coëfficienten $A, B \dots$ nicht weiter zu kennen. Sie sind übrigens nach combinatorischen Lehren für die $-(n+r)$ te Potenz von y , die r te Classe der Combinationen mit Wiederholungen aus n Elementen, nach Posselt's Bezeichnung, welcher diese Reihen (A) näher untersucht hat¹⁾,

$$r(0)^n.$$

Löst man zweitens $\frac{1}{Y}$ in die Summe der einzelnen Partialbrüche auf, deren Nenner respective $y - a, y - b, y - c$ sind, so lehrt das bekannte Verfahren, dass die Zähler dieser Brüche erhalten werden, wenn man in die übrigen Factoren von $\frac{1}{Y}$, für y bei jedem Partialbruche den Werth substituirt, der entsteht, wenn man den Nenner des Partialbruches $= 0$ setzt, insofern a, b, c, d alle von einander verschieden sind. Folglich wird:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Y} &= \frac{1}{a-b} \frac{1}{a-c} \frac{1}{a-d} \cdot \frac{1}{y-a} \\ &+ \frac{1}{b-a} \frac{1}{b-c} \frac{1}{b-d} \cdot \frac{1}{y-b} \text{ etc.} \end{aligned}$$

Entwickelt man hier wieder die Brüche

$$\frac{1}{y-a}, \quad \frac{1}{y-b} \text{ etc.}$$

in Reihen, so wird:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Y} &= \frac{1}{a-b} \frac{1}{a-c} \frac{1}{a-d} \dots \left\{ y^{-1} + ay^{-2} + a^2y^{-3} \dots \right. \\ &+ \frac{1}{b-a} \frac{1}{b-c} \frac{1}{b-d} \dots \left\{ y^{-1} + by^{-2} + b^2y^{-3} \dots \right. \\ &+ \frac{1}{c-a} \frac{1}{c-b} \frac{1}{c-d} \dots \left\{ y^{-1} + cy^{-2} + c^2y^{-3} \dots \right. \end{aligned}$$

Summirt man alle diese, so werden die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von y lauter Reihen von derselben Form wie (A). Bezeichnet man also die Summe einer solchen Reihe mit $[0], [1] \dots [m]$, je nach dem Grade der Potenz, zu welcher die Zähler der Brüche erhoben sind, so wird:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Y} &= [0]y^{-1} + [1]y^{-2} + [2]y^{-3} \dots \\ &+ [n-2]y^{-(n-1)} + [n-1]y^{-n} \dots + [n+r-1]y^{-(n+r)} \end{aligned} \quad (C)$$

und die Vergleichung der Coëfficienten derselben Potenz von y in (B) und (C) giebt sogleich übereinstimmend mit dem Obigen

$$[0] = 0, [1] = 0 \dots \text{bis } [n-2] = 0,$$

dagegen aber:

$$[n-1] = 1 \quad \text{und allgemein} \quad [n+r-1] = r(0)^n.$$

Aus dem ersten Resultate:

$$[n-1] = 1$$

wird sich das für die Interpolation Verlangte ergeben.

Gesetzt nämlich, es sei in dem vollständigen Ausdrücke von $f(x)$, das vierte oder

¹⁾ In seiner vortrefflichen Dissertation: „De functionibus quibusdam symmetricis“. Auctore Posselt. Göttingen 1818.

merklichste Glied ausser den angewandten noch

$$+ \varepsilon \cdot (x - a)^4,$$

so werden auch P, Q, R, S , da sie aus dem vollständigen Ausdrucke berechnet sind, noch die Glieder $\varepsilon(p - a)^4, \varepsilon(q - a)^4, \varepsilon(r - a)^4, \varepsilon(s - a)^4$ enthalten, und der Ausdruck (I) wird ausser den Werthen, die von den niederen Potenzen bis zur 3ten inclusive herrühren, noch das Increment haben:

$$- \varepsilon \cdot x - p \quad x - q \quad x - r \quad x - s \left\{ \frac{(p - a)^4}{p - x \quad p - q \quad p - r \quad p - s} \right. \\ + \frac{(q - a)^4}{q - x \quad q - p \quad q - r \quad q - s} \\ + \frac{(r - a)^4}{r - x \quad r - p \quad r - q \quad r - s} \\ \left. + \frac{(s - a)^4}{s - x \quad s - p \quad s - q \quad s - r} \right\}.$$

Es werden aber die Nenner dieser Brüche nicht geändert, wenn man in ihnen die Werthe von x, p, q, r, s sämmtlich um a vermindert, folglich wird man nach dem eben bewiesenen Theorem den in $\{ \}$ eingeschlossenen Theil auch so schreiben können:

$$1 - \frac{(x - a)^4}{x - p \quad x - q \quad x - r \quad x - s}$$

und die Formel (I) giebt folglich den Werth:

$$X = \alpha + \beta (x - a) + \gamma (x - a)^2 + \delta (x - a)^3 \\ + \varepsilon (x - a)^4 - \varepsilon x - p x - q x - r x - s.$$

Oder in Bezug auf die vierten Potenzen allein, ist der Fehler der Interpolation, d. h. das, was man hier noch hinzufügen müsste, um den wahren Werth zu erhalten:

$$+ \varepsilon (x - p) (x - q) (x - r) (x - s).$$

Die Bedingungen der Aufgabe lehren zwar nichts über den Werth von ε , allein, wenn man die Wahl hat, welche Argumente man zur Interpolation anwenden kann, so kann man sie wenigstens so wählen, dass das Product

$$x - p \quad x - q \quad x - r \quad x - s$$

ein Minimum wird. Offenbar aber wird das der Fall sein, wenn einer der Werthe p, q, r, s dem x so nahe als möglich liegt, und die anderen zu beiden Seiten so gleichförmig, als die gegebenen Daten verstatten, vertheilt sind. Wollte man z. B. für $x = 41\frac{1}{3}$ interpoliren, so würde, wenn man die Argumente 40, 41, 42, 43 wählte, der Fehler der kleinstmöglichste

$$= + \frac{40}{81} \varepsilon,$$

für 41, 42, 43, 44 würde er $= - \frac{80}{81} \varepsilon$, und für die Argumente 39, 40, 41, 42 $= - \frac{56}{81} \varepsilon$;

so dass das Verhältniss der Fehler, abgesehen von dem Zeichen, sein würde:

$$10 : 20 : 14.$$

Diese Regel, die anzuwendenden Werthe p, q, r, s stets so zu wählen, dass x möglichst nahe ihrer Mitte fällt, sollte nie ausser Acht gelassen werden.

Die allgemeine Formel (I) kann bei einer einzelnen Interpolation manchmal mit Nutzen gebraucht werden. Sie hat den Vortheil, dass, wenn vielleicht eine der Grössen P, Q, R, S fehlerhaft sein sollte, man bei ihr sogleich übersieht, wie gross der Einfluss dieses Fehlers auf X sei. Sie hat aber den Nachtheil, dass man gewöhnlich nicht weiss, wie viele Glieder P, Q, R, S zur genauen Interpolation hinreichen und nöthig sind, und

darum auch bei ihrer einzelnen Anwendung nicht sicher ist, ob man die äusserste Genauigkeit erreicht hat.

Um diese Uebersicht zu erleichtern, entwickle man die Formel (I) in eine Reihe, die successive von dem Gebrauche zweier Grössen zu dem von dreien u. s. w. aufsteigt. Nennt man den Werth von X aus n Grössen hergeleitet X_n , so hat man:

$$\begin{aligned} X_4 - X_3 &= S \frac{x-p}{s-p} \frac{x-q}{s-q} \frac{x-r}{s-r} \\ &+ R \left(\frac{x-p}{r-p} \frac{x-q}{r-q} \frac{x-s}{r-s} - \frac{x-p}{r-p} \frac{x-q}{r-q} \right) \\ &+ Q \left(\frac{x-p}{q-p} \frac{x-r}{q-r} \frac{x-s}{q-s} - \frac{x-p}{q-p} \frac{x-r}{q-r} \right) \\ &+ P \left(\frac{x-q}{p-q} \frac{x-r}{p-r} \frac{x-s}{p-s} - \frac{x-q}{p-q} \frac{x-r}{p-r} \right) \end{aligned}$$

oder wenn man zusammenzieht:

$$\begin{aligned} X_4 - X_3 &= x-p \ x-q \ x-r \left\{ \frac{P}{p-q \ p-r \ p-s} + \frac{Q}{q-p \ q-r \ q-s} \right. \\ &\quad \left. + \frac{R}{r-p \ r-q \ r-s} + \frac{S}{s-p \ s-q \ s-r} \right\}. \end{aligned}$$

Ebenso wird:

$$\begin{aligned} X_3 - X_2 &= x-p \ x-q \left\{ \frac{P}{p-q \ p-r} + \frac{Q}{q-p \ q-r} + \frac{R}{r-p \ r-q} \right\} \\ X_2 - X_1 &= x-p \left\{ \frac{P}{p-q} + \frac{Q}{q-p} \right\}. \end{aligned}$$

$X_1 = P$, da bei einem gegebenen Werthe von Interpolation eigentlich nicht die Rede sein kann. Ebenso ist $X_2 - X_1$ nichts Anderes als der einfache Proportionaltheil.

Die in $\{ \}$ eingeschlossenen Grössen sind ganz symmetrische Functionen von 2, 3, 4 und, wie man ohne vollständigen Beweis doch bald übersieht, von fünf und mehreren Grössen. Jeder Functionswerth ist in ihnen dividirt durch das Product aller Differenzen des zugehörigen Argumentes von jedem der übrigen. Man nenne sie Differenzgrössen und bezeichne sie, je nach den Grössen, die zu ihrer Bildung beitragen, durch $[p q]$, $[p q r]$ u. s. w. Bei der Symmetrie der Formeln sind $[p q r]$ und $[q r p]$ identisch, oder die Buchstaben lassen sich willkürlich vertauschen.

Durch die Addition der verschiedenen Werthe erhält jetzt die Formel (I) die zum Gebrauche bequemere Gestalt:

$$\begin{aligned} X_4 &= P + x-p [p \cdot q] + x-p \ x-q [p \cdot q \cdot r] \left\{ \begin{array}{l} \\ + x-p \ x-q \ x-r [p \cdot q \cdot r \cdot s] \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (\text{II}) \end{aligned}$$

Am leichtesten wird die Bildung der Differenzgrössen übersehen, wenn man zwei von denselben Dimensionen, in welchen alle Elemente bis auf eines dieselben sind, von einander abzieht. So z. B. ist:

$$\begin{aligned} [q \cdot r \cdot s] - [p \cdot q \cdot r] &= \frac{S}{s-q \ s-r} + R \left\{ \frac{1}{r-q \ r-s} - \frac{1}{r-p \ r-q} \right\} \\ &+ Q \left\{ \frac{1}{q-r \ q-s} - \frac{1}{q-p \ q-r} \right\} - P \frac{1}{p-q \ p-r} \\ &= \frac{S}{s-q \ s-r} + \frac{R \ s-p}{r-p \ r-q \ r-s} \\ &\quad + \frac{Q \ s-p}{q-p \ q-r \ q-s} - \frac{P}{p-q \ p-r} \\ &\quad (s \quad p) \mid p \cdot q \cdot r \cdot s \end{aligned}$$

und wie man bald übersieht, ganz allgemein:

$$[q \dots yz] - [p \dots y] = (z - p) [p \dots yz].$$

Denkt man sich also die Differenzgrößen, wozu man der Symmetrie wegen P, Q, R, S selbst rechnen kann, so unter einander gesetzt:

$$\begin{array}{c|c} p & P \\ q & Q \\ r & R \\ s & S \\ t & T \end{array} \left| \begin{array}{c} [p \cdot q] \\ [q \cdot r] \\ [r \cdot s] \\ [s \cdot t] \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} [p \cdot q \cdot r] \\ [q \cdot r \cdot s] \\ [r \cdot s \cdot t] \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} [p \cdot q \cdot r \cdot s] \\ [q \cdot r \cdot s \cdot t] \end{array} \right|$$

so entsteht jede folgende Verticalreihe, indem man ein Glied der vorhergehenden von dem darunter stehenden abzieht, und diese Differenz dividirt durch die Differenz der Argumente, auf welche die beiden durch die nächst höhere und nächst tiefere Differenzgrösse gezogenen Diagonalen hinweisen. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} [p \cdot q] &= \frac{Q - P}{q - p} \\ [p \cdot q \cdot r] &= \frac{[q \cdot r] - [p \cdot q]}{r - p} \\ [p \cdot q \cdot r \cdot s] &= \frac{[q \cdot r \cdot s] - [p \cdot q \cdot r]}{s - p} \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Bei dieser Anwendung der Formel (II) wird man immer von oben herunter interpoliren, und auf die verschiedenen Zeichen Rücksicht nehmen müssen. Vorthailhafter und leichter zu übersehen ist es, wenn man aus der Mitte, oder aus der Gegend, wo x sich befindet, heraus interpolirte. Bei allen Formeln ist bisher auf eine bestimmte Anordnung gar keine Rücksicht genommen worden. Man wird also auch eine andere Grösse als P zur ersten machen können. Wählt man die Anordnung R, Q, S, P, T , so wird die Formel (II):

$$X_4 = R + x - r [r \cdot q] + x - r \quad x - q [r \cdot q \cdot s] \\ + x - r \quad x - q \quad x - s [r \cdot q \cdot s \cdot p]$$

oder mit erlaubter Vertauschung der Buchstaben:

$$X_4 = R + x - r [q \cdot r] + x - r \quad x - q [q \cdot r \cdot s] \left\{ \begin{array}{l} \\ + x - r \quad x - q \quad x - s [p \cdot q \cdot r \cdot s] \end{array} \right\} \quad \text{(III)}$$

und wenn man einen Blick auf das obige Schema wirft, so sieht man, dass die hier gebrauchten Differenzgrößen $[q \cdot r], [q \cdot r \cdot s], [p \cdot q \cdot r \cdot s]$ alle wechselweise über und unter einer horizontalen Linie liegen, die man zwischen R und $[q \cdot r]$ mitten durchziehen kann. Ebenso würde die Anordnung R, S, Q, T, P die Formel geben:

$$X_4 = R + x - r [r \cdot s] + x - r \quad x - s [q \cdot r \cdot s] \left\{ \begin{array}{l} \\ + x - r \quad x - s \quad x - q [q \cdot r \cdot s \cdot t] \end{array} \right\} \quad \text{(IV)}$$

wo die horizontale Linie zwischen R und $[r \cdot s]$ durchgezogen werden muss. Die Formel (III) gilt für den Fall, wo x zwischen q und r , (IV), wo x zwischen r und s liegt.

Man kann beide in einen Ausdruck zusammenfassen, wenn man alle Größen p, q, r u. s. w., die auf der einen Seite von x liegen, mit $a_n, a_{n-1} \dots a_1, a$ bezeichnet, wobei a dem x am nächsten, die auf der anderen Seite liegenden $s, t \dots$ mit $b, b_1, b_2 \dots b_n$, wobei wiederum b dem x am nächsten. Setzt man nun überhaupt fest, dass unter a

immer die dem x nähere Grösse, unter b die entferntere verstanden werden soll, so werden beide Formeln:

$$\left. \begin{aligned} X &= A + x - a [a \cdot b] + x - a + x - b [a_1 a b] \\ &\quad + x - a \quad x - b \quad x - a_1 [a_1 a b b_1] \\ &\quad + x - a \quad x - b \quad x - a_1 \quad x - b_1 [a_2 a_1 a b b_1] \dots \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (V)$$

Zur Berechnung ist es am bequemsten, die Differenzgrössen successive durch die folgenden zu verbessern, oder die Formel, mit Absonderung der gemeinschaftlichen Factoren, so zu schreiben:

$$X = A + x - a \left\{ [a b] + x - b \left\{ [a_1 a b] + x - a_1 \left\{ [a_1 a b b_1] \dots \right\} \right\} \right\} \cdot \cdot \quad (VI)$$

Man gebraucht dabei die Factoren in folgender Ordnung:

$$x - b_n, x - a_n, x - b_{n-1}, x - a_{n-1} \dots x - a_1, x - b, x - a.$$

Wenn man also von x ausgeht, und zuerst das nächste Glied nimmt, um $x - a$ zu erhalten, dann auf der andern Seite $x - b$ bildet, jetzt wieder $x - a_1$ und so immer abwechselnd, so muss man beim Gebrauch die Reihe der Factoren gänzlich umkehren.

Diese letzteren Formeln haben den erheblichen Vorzug, dass man bei ihnen die Zeichen nicht zu berücksichtigen braucht, wenn man sich nur zur Regel macht, die Differenzgrössen immer so zu verbessern, dass sie dadurch dem früher erwähnten Striche, über und unter welchem sie wechselseitig liegen, stets näher gebracht werden, oder dass die Correction sie der jenseits des Striches liegenden Differenzgrösse annähert. Den Grund hiervon ersieht man, wenn man die beiden Fälle, wo der Correctionsfactor von der Form $x - a_n$, und wo er von der $x - b_n$ ist, unterscheidet. Im ersteren Falle ist die Correction stets

$$+ x - a_n [a_n a_{n-1} \dots a b \dots b_{n-1} b_n].$$

Wählt man der Kürze wegen ein bestimmtes Beispiel, wo n etwa $= 1$, und entwirft sich das gehörige Schema, so wird man finden, dass die angegebene Regel verlangt, dass

$$[a_1 a b] + (x - a_1) [a_1 a b b_1] \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (C)$$

immer falle zwischen

$$[a b b_1] \quad \text{und} \quad [a_1 a b].$$

Nun ist aber nach dem früher Bewiesenen

$$[a_1 a b b_1] = \frac{[a b b_1] - [a_1 a b]}{b_1 - a_1}.$$

folglich wird der Ausdruck (C):

$$= [a_1 a b] + \frac{x - a_1}{b_1 - a_1} \{ [a b b_1] - [a_1 a b] \}$$

und der Factor:

$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1}$$

ist in allen Fällen, vermöge der angenommenen Bezeichnung, positiv und kleiner als 1. Da man nun statt $[a b b_1]$ auch schreiben kann:

$$[a_1 a b] + \{ [a b b_1] - [a_1 a b] \},$$

so sieht man, dass die Correction stets, der Regel gemäss, nach $[a b b_1]$ zu, die Differenzgrösse $[a_1 a b]$ hin corrigirt, den einzigen Fall ausgenommen, dass durch eine frühere Correction die Differenzgrösse $[a_1 a b b_1]$ in ihrem Zeichen geändert wäre. In diesem einzigen Ausnahmefalle wird eine Entfernung stattfinden. Allein bei einiger Aufmerksamkeit wird man besonders bei mehreren Interpolationen sich hierin nicht irren können.

Dasselbe findet bei dem zweiten Falle, wo der Correctionsfactor von der Form $x - b_n$ ist, statt. Die Correction ist dann:

$$(x - b_n) [a_{n+1} a_n \dots a b \dots b_n],$$

wird angebracht an $[a_n \dots a b \dots b_n]$, und soll dieses der Differenzgrösse:

$$[a_{n+1} \dots a b \dots b_{n-1}]$$

näher bringen. Die beiden Ausdrücke werden hier:

$$[a_n \dots a b \dots b_n] - \frac{x - b_n}{a_{n+1} - b_n} ([a_n \dots a b \dots b_n] - [a_{n+1} \dots a b \dots b_{n-1}])$$

$$[a_n \dots a b \dots b_n] - ([a_n \dots a b \dots b_n] - [a_{n+1} \dots a b \dots b_{n-1}]),$$

wobei wiederum der Factor

$$\frac{x - b_n}{a_{n+1} - b_n}$$

stets positiv und kleiner als 1 ist. Dieselbe Ausnahme findet auch hier wie oben statt.

Wendet man nun diese allgemeinen Formeln auf den bei astronomischen Interpolationen häufigsten Fall an, wo p, q, r, s eine arithmetische Reihe bilden, so sieht man sogleich, dass die Differenzgrößen in die sogenannten ersten, zweiten, dritten und folgenden Differenzen übergehen, jede respective durch das Product aller ganzen Zahlen bis zu ihrem Zeiger inclusive dividirt. Oder es wird:

$$|p \cdot q| = \Delta P$$

$$[p \cdot q \cdot r] = \frac{\Delta^2 P}{1 \cdot 2}$$

$$|p \cdot q \cdot r \cdot s| = \frac{\Delta^3 P}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

wobei die gleichen Intervalle $q - p, r - q$ etc. als Einheiten angesehen werden. Setzt man

$$x - p = t$$

in diesen Einheiten ausgedrückt, und schreibt überall statt

$$\begin{aligned} x - q &\dots x - p = (q - p) \\ x - r &\dots x - p = (r - p), \end{aligned}$$

so wird die Formel (II):

$$X = P + t \cdot \Delta P + \frac{t \cdot t - 1}{1 \cdot 2} \Delta^2 P + \frac{t \cdot t - 1}{1 \cdot 2} \frac{t - 2}{3} \Delta^3 P \dots \dots \text{(II)*}$$

die gewöhnliche Interpolationsformel.

Versteht man dagegen unter $\Delta, \Delta^2, \Delta^3$ die Differenzen, welche wechselweise unter und über dem horizontalen Striche liegen, der von der Gegend des x aus gezogen wird, so wird bei aufsteigendem Argument aus (III), wenn $r - x = t$, oder x zwischen q und r liegt:

$$X = R - t \cdot \Delta Q + \frac{t \cdot t - 1}{1 \cdot 2} \Delta^2 R - \frac{t \cdot t - 1}{1 \cdot 2} \frac{t + 1}{3} \Delta^3 Q \dots \dots \text{(III)*}$$

und aus (IV), wenn $x - r = t$, oder x zwischen r und s liegt:

$$X = R + t \cdot \Delta R + \frac{t \cdot t - 1}{1 \cdot 2} \Delta^2 R + \frac{t \cdot t - 1}{1 \cdot 2} \frac{t + 1}{3} \Delta^3 R \dots \dots \text{(IV)*}$$

Wäre das Argument bei den letzten Formeln nicht aufsteigend, sondern niedersteigend, so würden die Zeichen der Glieder in beiden nur zu vertauschen sein, wenn man t immer als positiv ansehen will. Für die successive Verbesserung der Differenzen erhält man:

$$X = R - t \left\{ \Delta Q - \frac{t-1}{2} \left\{ \Delta^2 R - \frac{t-1}{3} \left\{ \Delta^3 Q - \frac{t-2}{4} \{ \Delta^4 R \dots \} \right\} \right\} \right\}$$

$$X = R + t \left\{ \Delta R + \frac{t-1}{2} \left\{ \Delta^2 R + \frac{t-1}{3} \left\{ \Delta^3 Q + \frac{t-2}{4} \{ \Delta^4 R \dots \} \right\} \right\} \right\}$$

Wenn t genau gleich $\frac{1}{2}$, oder wenn x genau in der Mitte zwischen q und r liegt, so ist es, in Hinsicht auf die Genauigkeit, einerlei, ob man von q aus vorwärts, oder von r aus rückwärts interpolirt. Der erste Ausdruck würde nach (IV)* werden:

$$X = Q + \frac{1}{2} \Delta Q + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{1} \frac{1}{2} \Delta^2 Q + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{1} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \Delta^3 Q$$

und der zweite nach (III)*:

$$X = R - \frac{1}{2} \Delta Q + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{1} \frac{1}{2} \Delta^2 R - \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{1} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \Delta^3 Q.$$

Bei der Verbindung beider fallen alle ungeraden Differenzen heraus, und wenn man die jedesmaligen Summen der geraden Differenzen, die auf derselben horizontalen Linie mit Q und R stehen, durch k' , k'' u. s. w. bezeichnet, oder setzt:

$$\begin{aligned} Q + R &= k \\ \Delta^2 Q + \Delta^2 R &= k' \\ \Delta^4 Q + \Delta^4 R &= k'' \text{ u. s. w.,} \end{aligned}$$

so heisst die Formel:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} k - \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{k'}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{3}{6} \frac{3}{8} \frac{k''}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{3}{6} \frac{3}{8} \frac{5}{10} \frac{5}{12} \frac{k'''}{2} \dots \\ &= \frac{1}{2} \left\{ k - \frac{1}{8} \left\{ k' - \frac{3}{16} \left\{ k'' - \frac{5}{24} \{ k''' \dots \} \right\} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (V)^*$$

Bei dieser Formel kann man sich wieder die Rücksicht auf die Zeichen durch eine andere Betrachtung ersparen. Bezeichnet man nämlich die beiden Differenzen, die irgend welches k bilden, mit β und β' , und die nächstvorhergehende und folgende mit β'' und β''' , und bildet sich das Schema:

$$\begin{array}{rcccl} & \beta & & \beta' & \\ \beta & & \beta & - & \beta' \\ \beta' & \beta' & - & \beta & \beta'' - 2\beta + \beta' \\ \beta'' & \beta'' & - & \beta' & \beta''' - 2\beta' + \beta \end{array}$$

so wird, wenn

$$\begin{aligned} k^n &= \beta + \beta' & k^{n+1} &= \beta'' - \beta' - \beta + \beta' \\ & & &= \beta'' + \beta - k^n, \end{aligned}$$

oder es ist immer:

$$k^n + k^{n+1} = \beta'' + \beta.$$

Die Correction hat aber immer die Form:

$$k^n - \alpha k^{n+1},$$

wo α positiv und kleiner als 1. Folglich wird die an k^n oder $\beta + \beta'$ angebrachte

Correction stets so wirken, dass sie die Summe $\beta + \beta'$ von der Summe der nächstfolgenden und nächstvorhergehenden Differenz entfernt, den Fall ausgenommen, wo k^{n+1} durch eine frühere Correction sein Zeichen geändert haben sollte, was bei mehreren auf einander folgenden Interpolationen leicht zu übersehen ist, und nie zu Irrthümern führen wird. Diese letzte Formel (V)* ist so genau, und zugleich so bequem, dass bei Berechnung einer Tafel man immer wohl thun wird, für Intervalle, die um eine ganze Potenz von 2 von einander entfernt sind, die strengen Werthe zu berechnen, und dann die zwischenliegenden dieser Formel zu suchen.

Als Beispiel möge die Länge des Mondes für die im Berliner Jahrbuch für 1830 berechnete Sternbedeckung Apr. 5. dienen. Aus der Ephemeride hat man:

		λ	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
Apr. 4.	0 ^h	152° 15' 56",6				
	12	158 15 45,5	+ 5 59 48,9			
				- 1 48,2		
" 5.	0	164 13 46,2	5 58 0,7	1 25,1	+ 23,1	
			5 56 35,6	1 25,1	21,9	- 1,2
	12	170 10 21,8	5 55 32,4	1 3,2	19,4	2,5
" 6.	0	176 5 54,2	5 54 48,6	0 43,0		
	12	182 0 42,8				

Wollte man hier die Länge für Apr. 5. 7^h haben, so müsste man von Apr. 5. 12^h ausgehen und die Formel (III)* anwenden. Die Factoren $x - a$ $x - b$ etc. nach (V) und (VI), immer durch die Ordnungszahl der Differenz dividirt, sind dasselbe, was in (III)* durch t , $\frac{t-1}{2}$ etc. ausgedrückt wird; man hat also die Correctionsfactoren:

$$\frac{5}{12} \quad \frac{7}{24} \quad \frac{17}{36} \quad \frac{19}{48}$$

und wenn man die Reihe umkehrt:

$$\frac{19}{48} \quad \frac{17}{36} \quad \frac{7}{24} \quad \frac{5}{12}$$

Die Verbesserung der dritten Differenz durch die vierte wird:

$$\frac{2,5 \cdot 19}{48} = 1,0$$

und ist, ohne weitere Rücksicht auf das Zeichen zu nehmen, so anzubringen, dass 21,9 dem 19,4 genähert wird. Folglich wird die verbesserte dritte Differenz 20,9. Hiermit wird die zweite:

$$1 \ 3,2 + \frac{17}{36} \ 20,9 = 1 \ 13,07,$$

weil die Verbesserung eine Annäherung an 1 25,1 bewirken soll. Die verbesserte erste wird jetzt:

$$5 \ 56 \ 35,6 - \frac{7}{24} \ 73,07 = 5 \ 56 \ 14,29$$

aus dem nämlichen Grunde. Nimmt man hiervon $\frac{5}{12}$ und subtrahirt sie von 170 10 21,8, so hat man:

$$\text{Apr. 5. } 7^h \dots 167^\circ 41' 55'',85.$$

Wäre man von Apr. 5. 0^h nach der Formel (IV)* ausgegangen, gegen die obige Regel, so würden die Factoren gewesen sein:

$$\frac{7}{12} \quad \frac{5}{24} \quad \frac{19}{36} \quad \frac{17}{48}$$

und die verbesserten Differenzen nach der Ordnung:

$$22,3 \quad 1 \quad 13,3 \quad 5 \quad 56 \quad 50,87,$$

wodurch ebenfalls dieselbe Länge erhalten wäre. Dass die gegebene Regel vollkommen mit dem Wechsel der Zeichen in diesem Beispiele übereinstimmt, wird Jeder bei entsprechender Rücksichtnahme darauf finden.

Um die Leichtigkeit der Interpolation in die Mitte hinein nach der Formel (V)* zu bemerken, suche man die Längen für Apr. 5. 6^h und 18^h. Da die vierten Differenzen unsicher sind, so braucht man sie eigentlich nicht einmal mitzunehmen, auch wird ihr Einfluss nur dann merklich sein, wenn sie beträchtlicher sind wie hier, da die Summe k'' multiplicirt wird mit

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{256}.$$

Man hat folglich für:

$$6^h \dots k' = - 2 \ 28,3 \dots - \frac{1}{8} k' = + 18,54$$

$$18^h \dots k' = - 1 \ 47,0 \dots - \frac{1}{8} k' = + 13,38$$

Und dann:

Apr. 5.	0 ^h 164 ⁰ 13' 46'',2	+ 2 58 27,1	— 18,6
	6 167 12 13,3	58 8,5	
	12 170 10 21,8	57 52,9	15,6
	18 173 8 14,7	57 39,5	13,4
	6. 0 176 5 54,2		

Interpolirt man wieder in die Mitte hinein, so hat man für:

$$9^h \dots k' = - 34,2 \quad - \frac{1}{8} k' = + 4,3$$

Apr. 5.	6 ^h 167 ⁰ 12' 13'',3	+ 1 29 6,4	— 4,3,
	9 168 41 19,7	1 29 2,1	
	12 170 10 24,8		

woraus nach der gewöhnlichen Interpolationsformel (II)* für 7^h $t = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} & 167 \ 12 \ 13,3 \\ & + \ 29 \ 42,13 \\ & + \quad \quad 0,48 \\ 7^h \dots & 167 \ 41 \ 55,9 \end{aligned}$$

wie oben. Die Rücksicht auf die Zeichen hätte man sich bei der Interpolation in die Mitte hinein wieder ersparen können, weil ein Blick zeigt, dass die k vergrößert werden müssen.

Hat man nicht für ganze Stunden zu interpoliren, sondern für eine Zeit, die einzelne Secunden enthält, so kann man sich erlauben, bei den Correctionsfactoren der höheren Differenzen einen genäherten echten Bruch statt des wahren t zu substituiren. So wenn man die Länge für den Austritt von 82 Leonis 7^h 24' 16'' haben will, so wird, wenn man von Apr. 5 12^h ausgeht:

$$t = \frac{4^h \ 35' \ 44''}{12},$$

wofür man aus den Kettenbrüchen den genäherten Werth $\frac{5}{13}$ erhält. Die Factoren

werden also:

$$\frac{8}{26} \quad \frac{18}{39} \quad \frac{21}{52},$$

die verbesserten Differenzen:

$$20,9 \quad 1 \ 12,8 \quad 5^{\circ} \ 56' \ 13'',20.$$

Wendet man bei dieser letzten den genauen Werth von t an, so erhält man:

$$7^{\text{h}} \ 24' \ 16'' \ . \ . \ . \ 167^{\circ} \ 53' \ 56'',7,$$

übereinstimmend mit der Interpolation aus den gefundenen Werthen für 6^{h} , 9^{h} und 12^{h} .

Zwölfte Vorlesung.

Die Parallaxe.

Im Vorhergehenden sind alle zum Berechnen einzelner Oerter oder ganzer Ephemeriden nöthigen Formeln entwickelt worden. Um dieselben in Schärfe mit den Beobachtungen vergleichen zu können, ist noch die Wirkung der Parallaxe, sowie diejenige der Aberration der Himmelskörper zu berücksichtigen. Wir behandeln zuerst die Parallaxe, wobei wir die „tägliche“ und „jährliche“ Parallaxe zu unterscheiden haben. Die erstere tritt nur auf bei den Oertern derjenigen Körper, die zu unserem Sonnensystem gehören, die zweite nur bei den Oertern der Fixsterne.

Die tägliche Parallaxe ist die Verschiebung, welche der Ort eines Gestirnes dadurch erleidet, dass man es nicht aus dem Mittelpunkte der Erde, sondern aus einem Punkte auf deren Oberfläche beobachtet, anders ausgedrückt, der Winkel, welchen die vom Gestirne nach dem Erdmittelpunkte und nach dem Beobachtungsorte gezogenen Linien mit einander bilden. Bei den Fixsternen verschwindet die tägliche Parallaxe wegen der grossen Entfernung vollkommen.

Die jährliche Parallaxe ist nichts anderes, als der Unterschied zwischen heliocentrischen und geocentrischen Orten, oder anders ausgedrückt, der Winkel, den die vom Gestirn nach dem Erdmittelpunkte und nach dem Sonnenmittelpunkte gezogenen Linien mit einander bilden. Bei den Körpern unseres Sonnensystemes ist dieser Winkel aber keine kleine Grösse, sondern kann unter Umständen sogar bis 180° betragen und darum hier nicht als Parallaxe bezeichnet werden, sondern wird durch die Formeln der zehnten Vorlesung berücksichtigt. Bei den Fixsternen ist diese jährliche Parallaxe ausserordentlich klein und nur bei den nächsten Fixsternen nachweisbar.

Wir betrachten zunächst die jährliche oder „Fixsternparallaxe“ in Länge λ und Breite β .

Bezeichnen α , δ , r die heliocentrische Rectascension, Declination und Radius vector, α' , δ' , Δ die geocentrische Rectascension, Declination und Entfernung des Gestirnes, X , Y , Z die geocentrischen Coordinaten des Sonnenmittelpunktes, indem die xy -Ebene mit dem Aequator zusammenfällt, die x -Axe durch den Frühlingspunkt, die z -Axe durch den Weltpol geht, dann hat man allgemein die folgenden bekannten Relationen, welche den Uebergang vom heliocentrischen zum geocentrischen Orte darstellen:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \cos \delta' \cos \alpha' &= r \cos \delta \cos \alpha + X \\ \Delta \cos \delta' \sin \alpha' &= r \cos \delta \sin \alpha + Y \\ \Delta \sin \delta' &= r \sin \delta + Z \end{aligned} \right\} (1)$$

Dabei muss die Drehung von der positiven x -Axe zur positiven y -Axe, vom Nordpol aus gesehen, der des Uhrzeigers entgegengesetzt sein (directer Sinn in unserem Sonnensysteme).

Seien nun λ , β und Δ die heliocentrische Länge, Breite und Entfernung und ferner, indem man sich zu diesem heliocentrischen ein paralleles geocentrisches Coordinatensystem denkt, λ' , β' , Δ' die Entfernung eines Fixsternes von der Erde, so sind ja die Coordinaten des Gestirnes bezüglich beider Systeme

$$\begin{aligned} x &= \Delta \cos \beta \cos \lambda & x' &= \Delta' \cos \beta' \cos \lambda' \\ y &= \Delta \cos \beta \sin \lambda & y' &= \Delta' \cos \beta' \sin \lambda' \\ z &= \Delta \sin \beta & z' &= \Delta' \sin \beta', \end{aligned}$$

während die geocentrischen Coordinaten der Sonne

$$\begin{aligned} X &= R \cos \odot \\ Y &= R \sin \odot \\ Z &= 0 \end{aligned}$$

sind, wobei R den Radius vector der Erdbahn, und \odot die wahre Länge der Sonne bezeichnet.

Unser allgemeines System wird daher:

$$\left. \begin{aligned} \Delta' \cos \beta' \cos \lambda' &= \Delta \cos \beta \cos \lambda + R \cos \odot \\ \Delta' \cos \beta' \sin \lambda' &= \Delta \cos \beta \sin \lambda + R \sin \odot \\ \Delta' \sin \beta' &= \Delta \sin \beta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Multipliziert man jetzt einerseits die erste Gleichung in diesem Systeme mit $-\sin \lambda$, die zweite mit $+\cos \lambda$ und andererseits die erste mit $+\cos \lambda$, die zweite mit $+\sin \lambda$ und addirt, so folgt:

$$\begin{aligned} \Delta' \cos \beta' \sin (\lambda' - \lambda) &= R \sin (\odot - \lambda) \\ \Delta' \cos \beta' \cos (\lambda' - \lambda) &= \Delta \cos \beta + R \cos (\odot - \lambda). \end{aligned}$$

Nun sind aber sämmtliche Fixsterne so weit entfernt, dass $\lambda' - \lambda$ eine sehr kleine Grösse ist, deren Betrag noch nie über eine Bogensekunde stieg. Man kann somit in der zweiten Gleichung $\cos (\lambda' - \lambda) = 1$ setzen, und findet so

$$\Delta' \cos \beta' = \Delta \cos \beta + R \cos (\odot - \lambda),$$

während in der ersten Gleichung der Sinus von $(\lambda' - \lambda)$ mit seinem Bogen vertauschbar ist. Durch Multiplication ferner dieser letzten Gleichung mit $-\sin \beta$, sowie der dritten des Systemes (2) mit $+\cos \beta$ und Addition folgt:

$$\Delta' \sin (\beta' - \beta) = -R \cos (\odot - \lambda) \sin \beta.$$

Als Formeln für die Parallaxe eines Fixsternes findet man somit:

$$\left. \begin{aligned} \lambda' - \lambda &= -\frac{R}{\Delta'} \sin (\lambda - \odot) \sec \beta \\ \beta' - \beta &= -\frac{R}{\Delta'} \cos (\lambda - \odot) \sin \beta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

oder in endgültiger Gestalt:

$$\left. \begin{aligned} \lambda' - \lambda &= -\pi' \sin (\lambda - \odot) \sec \beta \\ \beta' - \beta &= -\pi' \cos (\lambda - \odot) \sin \beta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

wo dann

$$\pi' = \frac{R}{\Delta'}$$

die Fixsternparallaxe ist, die eine Bogensekunde nie übersteigt. Nimmt man den

Radius vector der Erdbahn als Einheit, so ist

$$\pi' = \frac{1}{\Delta'}.$$

Die Fixsternparallaxe π' variirt also von Stern zu Stern.

Aus letzteren Formeln ersieht man zugleich, dass das Maximum der Fixsternparallaxenwirkung für die Länge eintritt, wenn $\odot - \lambda = 90^\circ$ oder 270° , d. h. wenn $\lambda = \odot \mp 90^\circ$ ist, mit anderen Worten, wenn die Sonne und das Gestirn in Quadratur stehen, wenn wir uns gestatten wollen, diesen Ausdruck auch von Fixsternen zu gebrauchen; und für die Breite, wenn $\odot - \lambda = 0$ und 180° , d. h. $\lambda = \odot$ oder $= \odot + 180^\circ$ ist, also dann, wenn Sonne und Stern die gleiche oder eine um 180° verschiedene Länge haben.

Die Formeln für die jährliche Parallaxe in Rectascension und Declination folgen direct, indem wir mit $\alpha', \delta', \Delta'$ die geocentrische Rectascension, Declination und Entfernung des Fixsternes, mit α, δ, Δ die analogen Grössen für die Sonne, mit ε die Schiefe der Ekliptik bezeichnen und das dann resultirende System:

$$\left. \begin{aligned} \Delta' \cos \delta' \cos \alpha' &= \Delta \cos \delta \cos \alpha + R \cos \odot \\ \Delta' \cos \delta' \sin \alpha' &= \Delta \cos \delta \sin \alpha + R \sin \odot \cos \varepsilon \\ \Delta' \sin \delta' &= \Delta \sin \delta + R \sin \odot \sin \varepsilon \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (5)$$

analogen Operationen unterwerfen:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -\pi' (\cos \odot \sin \alpha - \sin \odot \cos \alpha \cos \varepsilon) \sec \delta \\ \delta' - \delta &= -\pi' (\cos \varepsilon \sin \alpha \sin \delta - \sin \varepsilon \cos \delta) \sin \odot - \pi' \cos \odot \sin \delta \cos \alpha \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \quad (6)$$

Ausdrücke, welche man durch Einführung der Hülfsgrössen k, l, K, L vereinfachen kann, die durch folgende Bedingungsbedingungen gegeben seien:

$$\begin{aligned} -\cos \varepsilon \cos \alpha &= k \sin K \\ -\sin \alpha &= k \cos K \\ \sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon &= l \sin L \\ -\cos \alpha \sin \delta &= l \cos L. \end{aligned}$$

So erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= \pi' k \cos (K + \odot) \sec \delta \\ \delta' - \delta &= \pi' l \cos (L + \odot) \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (7)$$

Bei den Körpern unseres Sonnensystemes kommt die Verschiebung der Richtung dieser Körper durch die Lagenänderung auf der Erdoberfläche, die tägliche Parallaxe, die man als „Parallaxe“ schlechthin, oder als „allgemeine Parallaxe“ zu bezeichnen pflegt, in Betracht. Dieselbe behandeln wir nun allgemein, indem wir die Erde als Rotationsellipsoid voraussetzen.

Zuerst leiten wir diese allgemeinen Parallaxenformeln in Rectascension und Declination ab. Dazu denken wir uns ein Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt im Erdcentrum liegt, dessen xy -Ebene mit dem Aequator zusammenfällt, so dass die positive x -Axe durch den Frühlingspunkt geht und von dem aus gesehen die Rectascension, Declination und Entfernung des Gestirnes α, δ, Δ seien. Die Coordinaten des Sternes, bezogen auf dieses System, sind dann:

$$\begin{aligned} x &= \Delta \cos \delta \cos \alpha \\ y &= \Delta \cos \delta \sin \alpha \\ z &= \Delta \sin \delta. \end{aligned}$$

Seine Coordinaten bezüglich eines zweiten, dem eben genannten parallelen Systems,

dessen Anfangspunkt im Beobachtungsort liegt, bezogen auf welches seine Rectascension, Declination und Entfernung $\alpha', \delta', \Delta'$ seien, aber sind:

$$\begin{aligned}x' &= \Delta' \cos \delta' \cos \alpha' \\y' &= \Delta' \cos \delta' \sin \alpha' \\z' &= \Delta' \sin \delta'.\end{aligned}$$

Die Coordinaten schliesslich des Erdmittelpunktes bezüglich des Beobachtungsortes werden:

$$\begin{aligned}\mathfrak{X} &= - \varrho \cos \varphi' \cos \theta \\ \mathfrak{Y} &= - \varrho \cos \varphi' \sin \theta \\ \mathfrak{Z} &= - \varrho \sin \varphi',\end{aligned}$$

wobei θ der Winkel, den die Meridianebene des Beobachtungsortes mit dem Declinationskreise, der durch die Richtung nach dem Frühlingspunkte geht, einschliesst, d. h. nichts Anderes als die Sternzeit des Beobachtungsortes ist, ϱ die Entfernung der Anfangspunkte beider Coordinatensysteme, d. h. der Abstand des Beobachtungsortes vom Erdmittelpunkte und φ' der Winkel von ϱ mit der xy -Ebene (dem Aequator), d. h. die geocentrische Breite ist.

Dann hat man wieder die Beziehungen zwischen den Coordinaten beider Systeme

$$\left. \begin{aligned}\Delta' \cos \delta' \cos \alpha' &= \Delta \cos \delta \cos \alpha - \varrho \cos \varphi' \cos \theta \\ \Delta' \cos \delta' \sin \alpha' &= \Delta \cos \delta \sin \alpha - \varrho \cos \varphi' \sin \theta \\ \Delta' \sin \delta' &= \Delta \sin \delta - \varrho \sin \varphi'\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Aus ihnen ergibt sich unmittelbar die Parallaxe in Rectascension, indem man einerseits die erste Gleichung mit $-\sin \alpha$, die zweite mit $+\cos \alpha$ und andererseits die erste mit $+\cos \alpha$, die zweite mit $+\sin \alpha$ multiplicirt und dann beide Male addirt. So folgen die Relationen:

$$\begin{aligned}(a) \quad \Delta' \cos \delta' \sin (\alpha' - \alpha) &= - \varrho \cos \varphi' \sin (\theta - \alpha) \\ (b) \quad \Delta' \cos \delta' \cos (\alpha' - \alpha) &= \Delta \cos \delta - \varrho \cos \varphi' \cos (\theta - \alpha),\end{aligned}$$

durch deren Division sich die strenge Formel für die Parallaxe in Rectascension ergibt, indem man gleich noch mit $\Delta \cos \delta$ dividirt:

$$tg (\alpha' - \alpha) = - \frac{\frac{\varrho}{\Delta} \frac{\cos \varphi' \sin (\theta - \alpha)}{\cos \delta}}{1 - \frac{\varrho}{\Delta} \frac{\cos \varphi' \cos (\theta - \alpha)}{\cos \delta}} \left\} \dots \dots \dots (9)$$

Entwickelt man jetzt, da $\frac{\varrho}{\Delta}$ eine kleine Grösse ist, deren höhere Potenzen wir vernachlässigen können:

$$\frac{1}{1 - \frac{\varrho}{\Delta} \frac{\cos \varphi' \cos (\theta - \alpha)}{\cos \delta}}$$

in eine Taylor'sche Reihe und vertauscht die Tangente mit dem Bogen, so folgt:

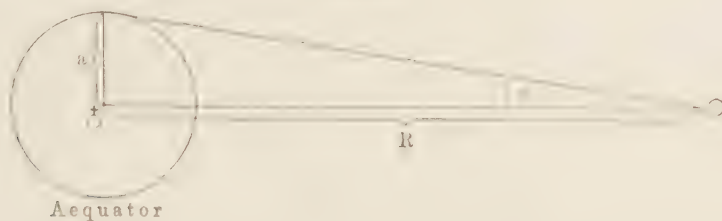
$$\alpha' - \alpha = - \frac{\varrho}{\Delta} \frac{\cos \varphi'}{\cos \delta} \sin (\theta - \alpha) \dots \dots \dots (10)$$

indem rechts die folgenden Glieder $+\frac{1}{2} \left(\frac{\varrho}{\Delta} \frac{\cos \varphi'}{\cos \delta} \right)^2 \sin 2 (\theta - \alpha)$ etc. fortgelassen sind.

Allgemein drückt man ja nun ϱ in Einheiten des Aequatorealhalbmessers der Erde, Δ in solchen der grossen Halbaxe der Erdbahn aus. Da aber unsere Formel ein und dieselbe Einheit voraussetzt, müssen wir sie noch mit dem Verhältnisse dieser beiden

Einheiten multipliciren. Bezeichnet π die Aequatorealhorizontalparallaxe der Sonne, d. h. den Winkel, unter welchem der Halbmesser des Erdäquators von der Sonne aus gesehen

Fig. 20.



wird, mit anderen Worten, ist π der grösste Halbmesser der Erde von der Sonne aus gesehen, wenn der Abstand R beider Körper gleich 1 ist, so ist der Aequatorealhalbmesser der Erde:

$$a = R \sin \pi = \sin \pi.$$

Oder, da π sehr klein, nämlich nach den besten modernen Untersuchungen von Gill:

$$\pi = 8'',802 \text{ (wahrscheinlicher Fehler } 0'',005),$$

also der Winkel selbst mit dem Bogen vertauschbar ist, so wird:

$$a \text{ (in Sec.)} = \frac{\pi''}{206264,8...},$$

indem R gleich 1 gesetzt ist. Mithin hat ϱ , ausgedrückt in Einheiten des Erdbahnhalbmessers, den Werth:

$$\frac{\varrho \pi''}{206264,8...}.$$

Jetzt darf man in:

$$\alpha' - \alpha = - \varrho \pi \cos \varphi' \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\Delta \cos \delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

eine Formel, die durch Multiplication mit dem Verhältniss der beiden Einheiten des Aequatorealhalbmessers und des Erdbahnhalbmessers:

$$\sin \pi = \frac{a}{R} = \pi$$

aus unseren vorhergehenden hervorgegangen ist, ϱ in Einheiten des Erdäquatorealhalbmessers und Δ in solchen des Erdbahnhalbmessers ausdrücken.

Um noch die Parallaxe in Declination zu berechnen, ersetzen wir in Gleichung (b)

$$\cos(\alpha' - \alpha) \text{ durch } 1 - 2 \left(\sin \frac{\alpha' - \alpha}{2} \right)^2$$

und erhalten:

$$\Delta' \cos \delta' = \Delta \cos \delta - \varrho \cos \varphi' \cos(\theta - \alpha) + 2 \left(\sin \frac{\alpha' - \alpha}{2} \right)^2 \Delta' \cos \delta' \frac{\cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}},$$

oder

$$\Delta' \cos \delta' = \Delta \cos \delta - \varrho \cos \varphi' \cos(\theta - \alpha) + \sin(\alpha' - \alpha) \Delta' \cos \delta' \frac{\sin \frac{\alpha' - \alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}},$$

oder auf Grund von Gleichung (a)

$$\Delta' \cos \delta' = \Delta \cos \delta - \varrho \cos \varphi' \left\{ \cos(\theta - \alpha) + \sin(\theta - \alpha) \frac{\sin \frac{\alpha' - \alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}} \right\},$$

oder

$$\Delta' \cos \delta' = \Delta \cos \delta - \varrho \cos \varphi' \frac{\cos \left(\theta - \frac{\alpha' + \alpha}{2} \right)}{\cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}}.$$

Führen wir jetzt noch die Hülfswinkel β und γ ein durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \beta \sin \gamma &= \sin \varphi' \\ \beta \cos \gamma &= \frac{\cos \varphi' \cos \left(\theta - \frac{\alpha' + \alpha}{2} \right)}{\cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}}, \end{aligned}$$

so wird unsere Gleichung schliesslich:

$$\Delta' \cos \delta' = \Delta \cos \delta - \varrho \beta \cos \gamma.$$

Aus (8) folgt

$$\Delta' \sin \delta' = \Delta \sin \delta - \varrho \beta \sin \gamma.$$

Und wenn man einerseits die erste dieser zwei Gleichungen mit $+\cos \delta$, die zweite mit $+\sin \delta$ und andererseits die erste mit $-\sin \delta$, die zweite mit $+\cos \delta$ multiplicirt und addirt, so folgt:

$$\begin{aligned} \Delta' \cos (\delta' - \delta) &= \Delta - \varrho \beta \cos (\gamma - \delta) \\ \Delta' \sin (\delta' - \delta) &= -\varrho \beta \sin (\gamma - \delta). \end{aligned}$$

Gleichungen, durch deren Division sich die strenge Parallaxenformel in Declination ergibt:

$$\operatorname{tg} (\delta' - \delta) = \frac{-\frac{\varrho}{\Delta} \beta \sin (\gamma - \delta)}{1 - \frac{\varrho}{\Delta} \beta \cos (\gamma - \delta)} \quad \dots \quad (12)$$

Entwickelt man hier ganz analog wieder in eine Taylor'sche Reihe, deren höhere Glieder $-\frac{1}{2} \left(\frac{\varrho \beta}{\Delta} \right)^2 \sin 2 (\gamma - \delta)$ etc. man vernachlässigt auf Grund der Kleinheit von $\frac{\varrho}{\Delta}$, vertauscht die Tangente mit dem Bogen und führt für β gleich seinen Werth ein:

$$\beta = \frac{\sin \varphi'}{\sin \gamma},$$

so folgt für die Parallaxe in Declination:

$$\delta' - \delta = -\varrho \frac{\sin \varphi'}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin (\gamma - \delta)}{\Delta} \quad \dots \quad (13)$$

wobei sich γ aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{\cos (\theta - \alpha)}$$

ergiebt, wenn man mit Hinblick darauf, dass die Parallaxe ein kleiner Winkel ist,

$$\frac{\alpha' + \alpha}{2} = \alpha$$

setzt.

Die allgemein gültigen Parallaxenformeln ausser beim Monde, wo $\frac{\varrho}{\Delta}$ nicht eine kleine Grösse ist, und die höheren Glieder der Taylor'schen Entwicklung nicht vernachlässigt werden dürfen, sind also:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -\varrho \pi \cos \varphi' \frac{\sin (\theta - \alpha)}{\Delta \cos \delta} \\ \delta' - \delta &= -\varrho \pi \frac{\sin \varphi'}{\sin \gamma} \frac{\sin (\gamma - \delta)}{\Delta} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (14)$$

Aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{\cos (\theta - \alpha)}$$

ergeben sich zwei um 180° verschiedene Werthe von γ ; $(\delta' - \delta)$ aber ist für beide dasselbe nach (14), und daher kann für γ immer der Werth zwischen 0° und 180° angewendet werden.

Die zweite der Relationen (14) hat Hansen noch in einer anderen Form gegeben. Setzt man gleich von vornherein:

$$\frac{\alpha' + \alpha}{2} = \alpha$$

$$\cos \frac{\alpha' - \alpha}{2} = 1$$

so wird:

$$\begin{aligned} \Delta' \cos \delta' &= \Delta \cos \delta - \varrho \cos \varphi' \cos (\theta - \alpha) \\ \Delta' \sin \delta' &= \Delta \sin \delta - \varrho \sin \varphi'. \end{aligned}$$

Addirt man nun das Product der ersten dieser Gleichungen in $-\sin \delta$ zum Producte der zweiten in $+\cos \delta$ so folgt:

$$\Delta' \sin (\delta' - \delta) = \varrho \cos \varphi' \cos (\theta - \alpha) \sin \delta - \varrho \sin \varphi' \cos \delta,$$

oder, wenn, da es sich nur um eine Näherungsformel handelt und δ und δ' , sowie Δ und Δ' sich nur wenig unterscheiden, statt des Sinus der Bogen gesetzt und wieder mit π multiplicirt wird, um ϱ und Δ in den gewöhnlichen Einheiten zählen zu können, so resultirt:

$$\left. \begin{aligned} \delta' - \delta &= \frac{\varrho \pi}{\Delta} [\cos \varphi' \cos (\theta - \alpha) \sin \delta - \sin \varphi' \cos \delta] \\ \alpha' - \alpha &= - \frac{\varrho \pi}{\Delta} \frac{\cos \varphi' \sin (\theta - \alpha)}{\cos \delta} \end{aligned} \right\} \dots \dots (15)$$

Oder, wenn noch

$$\begin{aligned} T &= \varrho \pi \cos \varphi' \sin (\theta - \alpha) \\ D &= - \varrho \pi \cos \varphi' \cos (\theta - \alpha) \\ T' &= \varrho \pi \sin \varphi' \end{aligned}$$

gesetzt wird, so lautet die Hansen'sche Form der allgemeinen Parallaxengleichungen in Rectascension und Declination:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= - \frac{T}{\Delta \cos \delta} \\ \delta' - \delta &= - \frac{D \sin \delta}{\Delta} - \frac{T' \cos \delta}{\Delta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

Hat man für eine bestimmte Sternwarte (für die also ϱ , der Abstand vom Erdcentrum und φ' , die geocentrische Breite, bestimmte, gegebene Werthe haben) eine grosse Zahl von Beobachtungen, so kann man wie folgt verfahren. Man bringt die Grösse T in eine Tafel mit dem Argument $(\theta - \alpha)$. Diese giebt dann gleichzeitig auch D , weil D aus T folgt, wenn sich $\theta - \alpha$ um 90° ändert; T' aber hat für jeden Beobachtungsort und also für jede Sternwarte einen bestimmten constanten Werth. — Gewöhnlich werden jedoch die Formeln (14) angewendet.

Für den Mond hingegen, dessen Aequatoreal-Horizontalparallaxe zwischen $54'$ und $61'$ beträgt, gelten, wie schon erwähnt, die abgeleiteten Näherungsformeln nicht, sondern es sind die strengen Parallaxenformeln anzuwenden, also bei Einführung des durch die astronomischen Jahrbücher gegebenen Aequatorealhorizontalparallaxenwinkels p , der definirt ist durch die Gleichung:

$$\sin p = \frac{1}{\Delta},$$

wo 1 der Aequatorealhalbmesser der Erde, Δ die Entfernung des Erdmittelpunktes vom Mondmittelpunkte ist, in Rectascension:

$$\operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = \frac{\varrho \cos \varphi' \sin p \sin(\alpha - \theta) \sec \delta}{1 - \varrho \cos \varphi' \sin p \cos(\alpha - \theta) \sec \delta} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (17)$$

während man in Declination beim Monde nicht die Differenz $\delta' - \delta$, sondern δ direct rechnet, indem sich durch Division von:

$$\begin{aligned} \Delta' \sin \delta' &= \Delta (\sin \delta - \varrho \sin p \sin \varphi') \\ \Delta' \cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha) &= \Delta [\cos \delta - \varrho \sin p \cos \varphi' \cos(\alpha - \theta)] \end{aligned}$$

bezüglich:

$$\operatorname{tg} \delta' = \frac{(\sin \delta - \varrho \sin p \sin \varphi') \sec \delta \cos(\alpha' - \alpha)}{1 - \varrho \sin p \cos \varphi' \cos(\alpha - \theta) \sec \delta} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (18)$$

ergiebt.

Da aber der Mond eine sichtbare Scheibe hat, so wird sein scheinbarer Halbmesser, vom Beobachtungsorte aus gesehen, wenn er für den Erdmittelpunkt gegeben ist, durch die Parallaxe auch geändert. Indem der Mondhalbmesser unter dem Winkel w vom Erdmittelpunkte und unter dem Winkel w' vom Beobachtungsorte aus gesehen erscheint, verhält sich:

$$\frac{\sin w}{\sin w'} = \frac{\Delta'}{\Delta}.$$

Bei Gestirnen mit kleiner sichtbarer Scheibe ist:

$$w' = w \frac{\Delta}{\Delta'}.$$

Durch Multiplication der ersten der bereits abgeleiteten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta' \sin \delta' &= \Delta \sin \delta - \varrho \beta \sin \gamma \\ \Delta' \cos \delta' &= \Delta \cos \delta - \varrho \beta \cos \gamma \end{aligned}$$

mit $\cos \gamma$, der zweiten mit $-\sin \gamma$ und Addition folgt dann für solche Gestirne:

$$\Delta' = \Delta \frac{\sin(\delta - \gamma')}{\sin(\delta' - \gamma')},$$

also:

$$w' = w \frac{\sin(\delta' - \gamma')}{\sin(\delta - \gamma')} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (19)$$

Für den Mond hingegen, wo der Halbmesser gross erscheint, also der Sinus nicht mit dem Bogen vertauschbar, ist:

$$\sin w' = \sin w \cdot \frac{\Delta}{\Delta'} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (20)$$

wobei:

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha) \sec \delta}{1 - \varrho \sin p \cos \varphi' \cos(\alpha - \theta) \sec \delta} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (21)$$

Führt man noch die Hilfsgrössen A und C ein durch die Gleichungen

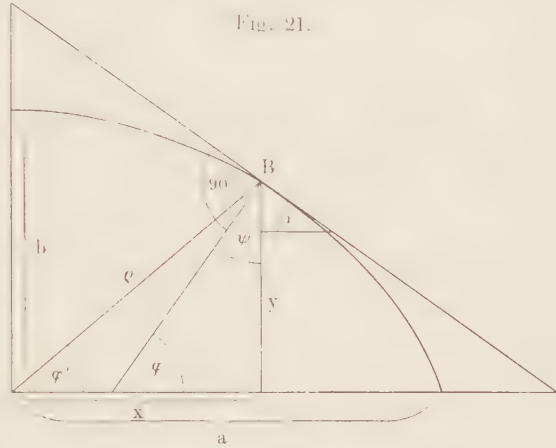
$$\cos A = \frac{\varrho \sin p \cos \varphi' \cos(\alpha - \theta)}{\cos \delta}$$

$$\sin C = \varrho \sin p \sin \varphi',$$

so ergeben sich die für die logarithmische Rechnung bequemen Formeln, aus denen man, wenn α und δ für den Erdmittelpunkt gegeben sind, die wahre Lage des Mondes, gesehen von einem beliebigen Erdorte aus, allgemein berechnen kann:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) &= \frac{\varrho \cos \varphi' \sin p \sin(\alpha - \delta)}{2 \left(\sin \frac{A}{2} \right)^2 \cos \delta} \\ \operatorname{tg} \delta' &= \frac{\sin \frac{\delta - C}{2} \cos \frac{\delta + C}{2} \cos(\alpha' - \alpha)}{\left(\sin \frac{A}{2} \right)^2 \cos \delta} \\ \sin w' &= \sin w \frac{\cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha)}{2 \cos \delta \left(\sin \frac{A}{2} \right)^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (22)$$

In den vorhergehenden Formeln traten überall die beiden Grössen ϱ und φ' auf und wir haben also noch zu zeigen, in welcher Weise dieselben für jeden Erdort allgemein berechenbar sind. Dabei ist die geographische Breite φ durch die Richtung der Schwerkraft (Lothrichtung) gegeben; die Lothlinie aber steht auf der Erdellipsoidoberfläche senkrecht; die geocentrische Breite φ' ist durch die Richtung nach dem Erdmittelpunkte gegeben. Die beiden Grössen φ' und φ sind für fast alle Sternwarten im Berliner Jahrbuche vorhanden, an dessen Stelle man nöthigenfalls auch die *Connaissance des Temps*, den *Nautical Almanac*, oder die *American Ephemeris* zu Rathe ziehen kann. Findet man die betreffende Sternwarte nirgends erwähnt, so bestimmt man φ genähert und berechnet dann φ' und ϱ mittelst folgender Formeln.



Wir betrachten die Erde als abgeplattetes Rotationsellipsoid, dessen grosse Halbaxe a , während die kleine b sei. Dann ergibt sich zunächst die geocentrische Breite φ' als Function der geographischen Breite φ und der Abplattung α . Diese ist:

$$\alpha = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{299,1528},$$

indem nach Bessel für die Erde:

$$a = 6377397^m,15;$$

$$b = 6356078^m,96.$$

Die Gleichung einer Meridianellipse, deren y -Axe durch den Nordpol der Erde geht, während die x -Axe durch den Schnittpunkt vom Aequator und der Ellipse geht, ist definirt durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Coordinaten eines Punktes der Ellipse sind:

$$x = \varrho \cos \varphi', \quad y = \varrho \sin \varphi',$$

wobei ϱ der Abstand des Punktes vom Erdcentrum und φ' die geocentrische Breite des Punktes sind. Durch Differentiation der Ellipsengleichung folgt:

$$\frac{2x dx}{a^2} + \frac{2y dy}{b^2} = 0.$$

woraus:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y} = - \frac{b^2}{a^2} \cotg \varphi';$$

da aber auch:

$$\frac{dy}{dx} = - \cotg \varphi$$

indem:

$$\nu = 90 - \psi = \varphi$$

ist, — d. h. die Lothlinie, welche die geographische Breite bestimmt, steht auf der Ellipsoidoberfläche senkrecht, — so wird:

$$\frac{1}{\cotg \varphi'} = \frac{\frac{b^2}{a^2}}{\cotg \varphi},$$

also:

$$tg \varphi' = (1 - \alpha)^2 tg \varphi \dots \dots \dots (23)$$

Der Radius ϱ lässt sich ebenfalls als Function von α , φ und von φ' darstellen, indem nach der Figur

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} = x \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = x \sqrt{1 + tg \varphi'^2} = \frac{x}{\cos \varphi'}$$

ist, und sich für x aus der Ellipsengleichung:

$$x = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2} tg \varphi'^2}} = \frac{a}{\sqrt{1 + tg \varphi tg \varphi'}}$$

ergiebt. Daher wird:

$$\varrho = \frac{a \sec \varphi'}{\sqrt{1 + tg \varphi tg \varphi'}}$$

oder:

$$\varrho = a \sqrt{\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi' \cos (\varphi' - \varphi)}} \dots \dots \dots (24)$$

In dieser Formel ist ϱ in Einheiten der grossen Halbaxe der Erde, a , ausgedrückt.

Die Parallaxe in Azimuth und Höhe spielt für die Bahnberechnung keine Rolle, sondern kommt bei manchen Beobachtungen in Betracht. Nichtsdestoweniger wollen wir die diesbezüglichen Formeln hier noch kurz mit anführen, zumal sie nach den vorhergehenden Auseinandersetzungen eigentlich sofort hingeschrieben werden können. Denkt man sich, wie früher, ein Coordinatensystem durch den Erdmittelpunkt und ein zweites, paralleles durch den Beobachtungsort gelegt, dessen xy -Ebene aber jetzt nicht mit dem Aequator, sondern mit dem Horizont zusammenfallend, so dass also die z -Axe durch das Zenith, die x -Axe durch den Südpunkt und die y -Axe durch den Westpunkt geht, und seien bezüglich A' , z' und A das Azimuth, die Zenithdistanz und Entfernung eines Gestirnes bezogen auf den Beobachtungsort, A , z , A aber auf den Erdmittelpunkt, so folgt, indem die xz -Ebene in beiden Coordinatensystemen dieselbe ist, aus der Anschauung:

$$\begin{aligned} A' \sin z' \cos A' &= A \sin z \cos A - \varrho \sin (\varphi - \varphi') \\ A' \sin z' \sin A' &= A \sin z \sin A \\ A' \cos z' &= A \cos z - \varrho \cos (\varphi - \varphi'). \end{aligned}$$

Multiplieirt man jetzt die erste dieser Gleichungen mit $-\sin A$, die zweite mit $+\cos A$ und hierauf die erste mit $+\cos A$, die zweite mit $+\sin A$ und addirt beide Male, so folgt:

$$\left. \begin{aligned} \Delta' \sin z' \sin(A' - A) &= \varrho \sin(\varphi - \varphi') \sin A \\ \Delta' \sin z' \cos(A' - A) &= \Delta \sin z - \varrho \sin(\varphi - \varphi') \cos A \\ \Delta' \cos z' &= \Delta \cos z - \varrho \cos(\varphi - \varphi') \end{aligned} \right\} \dots (25)$$

Multiplieirt man nun die erste dieser Gleichungen mit $\sin \frac{A' - A}{2}$, die zweite mit $\cos \frac{A' - A}{2}$ und addirt, so folgt:

$$\Delta' \sin z' = \Delta \sin z - \varrho \sin(\varphi - \varphi') \frac{\cos \frac{A' + A}{2}}{\cos \frac{A' - A}{2}};$$

ferner:

$$\Delta' \cos z' = \Delta \cos z - \varrho \cos(\varphi - \varphi'),$$

oder:

$$\begin{aligned} \Delta' \sin z' &= \Delta \sin z - \varrho \cos(\varphi - \varphi') \operatorname{tg} \gamma \\ \Delta' \cos z' &= \Delta \cos z - \varrho \cos(\varphi - \varphi'), \end{aligned}$$

indem wir zur Abkürzung:

$$\frac{\cos \frac{A' + A}{2}}{\cos \frac{A' - A}{2}} \operatorname{tg}(\varphi - \varphi') = \operatorname{tg} \gamma$$

gesetzt haben. Und multipliciren wir nun noch einmal die erste der zwei letzten Gleichungen mit $+\cos z$, die zweite mit $-\sin z$ und dann die erste mit $+\sin z$, die zweite mit $+\cos z$ und addiren beide Male, so folgt leicht nach einer kleinen Reduction:

$$\left. \begin{aligned} \Delta' \sin(z' - z) &= \varrho \cos(\varphi - \varphi') \frac{\sin(z - \gamma)}{\cos \gamma} \\ \Delta' \cos(z' - z) &= \Delta - \varrho \cos(\varphi - \varphi') \frac{\cos(z - \gamma)}{\cos \gamma} \end{aligned} \right\} \dots (26)$$

Gleichungen, durch deren Division sich, wenn man noch mit Δ dividirt und wieder den Aequatorealhorizontalparallaxenwinkel p einführt mittelst der Gleichung:

$$\sin p = \frac{1}{\Delta},$$

die Formel für die Parallaxe in Zenithdistanz ergibt:

$$\operatorname{tg}(z' - z) = \frac{\varrho \sin p \cos(\varphi - \varphi') \frac{\sin(z - \gamma)}{\cos \gamma}}{1 - \varrho \sin p \cos(\varphi - \varphi') \frac{\cos(z - \gamma)}{\cos \gamma}} \dots (27)$$

Für den Mond ist dieser strenge Ausdruck wirklich anzuwenden. In allen übrigen Fällen aber ist genügend genau, indem das zweite Glied im Nenner so klein, dass wieder nach dem Taylor'schen Satze entwickelbar und die Tangente mit dem Bogen vertauschbar:

$$z' - z = \varrho \sin p \cos(\varphi - \varphi') \frac{\sin(z - \gamma)}{\cos \gamma} \dots (28)$$

Indem nun aber in unserem Ausdruck für $\operatorname{tg} \gamma$, da $\operatorname{tg}(\varphi - \varphi')$ klein ist und A sich, wie wir bei Herleitung der Parallaxe im Azimuth sehen werden, nur wenig von A' unterscheidet:

$$\cos \frac{A' - A}{2} = 1$$

$$\cos \frac{A' + A}{2} = \cos A$$

gesetzt werden kann, so folgt für:

$$\operatorname{tg} \gamma = \cos A \operatorname{tg} (\varphi - \varphi')$$

oder:

$$\gamma = (\varphi - \varphi') \cos A.$$

Mithin wird:

$$z' - z = \varrho \sin p \cos (\varphi - \varphi') \sin [z - (\varphi - \varphi') \cos A] \dots (29)$$

Vernachlässigt man noch die Abplattung des Erdkörpers, wodurch $\varphi - \varphi' = 0$ wird, so wird in diesem Specialfalle die Parallaxe in Zenithdistanz:

$$z' - z = \varrho \sin p \sin z \dots (30)$$

Die Parallaxe im Azimuth hingegen folgt ganz einfach durch Division der beiden ersten Gleichungen vom System (25), nämlich:

$$\operatorname{tg} (A' - A) = \frac{\varrho \sin (\varphi - \varphi') \sin A}{A \sin z - \varrho \sin (\varphi - \varphi') \cos A}$$

oder bei Einführung von p :

$$\operatorname{tg} (A' - A) = \frac{\varrho \sin p \sin (\varphi - \varphi') \sin A}{\sin z \left(1 - \frac{\varrho \sin p \sin (\varphi - \varphi') \cos A}{\sin z} \right)} \dots (31)$$

Das ist die strenge Formel, die beim Monde anzuwenden ist.

Um die genäherte Formel für die Parallaxe in Azimuth zu erhalten, bedenken wir, dass für eine kugelförmige Erde, wo $\alpha = 0$ ist, auch $A' - A = 0$ wird, dass also $A' - A$ vom Range der Abplattung und mithin ein kleiner Winkel ist, dessen Tangente mit dem Bogen vertauscht werden kann. Ferner ist $\varphi - \varphi'$ und ebenso p für alle Himmelskörper ausser beim Monde sehr klein, also das zweite Glied im Nenner sehr klein und folglich wieder auf Grund einer Taylor'schen Entwicklung, deren höhere Glieder man vernachlässigt:

$$A' - A = \frac{\varrho \sin p \sin (\varphi - \varphi') \sin A}{\sin z} \dots (32)$$

Sehen wir von der ellipsoidischen Gestalt der Erde ab, setzen also $\varphi = \varphi'$, so wird in diesem speciellen Falle die Parallaxe im Azimuth:

$$A - A' = 0 \dots (33)$$

Die Parallaxe in Höhe ist somit im Zenith Null, im Horizont ein Maximum und im Uebrigen dem Sinus der Zenithdistanz proportional.

Schliesslich wollen wir noch zeigen, dass sich die Grösse A' durch die Entfernung A , „Erdmittelpunkt — Stern“, ausdrücken lässt. Multiplicirt man dazu im System (26) die erste Gleichung mit $\sin \frac{z' - z}{2}$, die zweite mit $\cos \frac{z' - z}{2}$, und addirt die Producte, so folgt:

$$A' = A - \varrho \frac{\cos (\varphi - \varphi') \cos [\frac{1}{2}(z' + z) - \gamma]}{\cos \gamma \cos \frac{z' - z}{2}} \dots (34)$$

Ausserdem findet man aber auch:

$$A = A \frac{\sin (z - \gamma)}{\sin (z' - \gamma)} \dots (35)$$

Zusammenstellung.

Zum Schlusse dieser Vorlesung seien die verschiedenen Parallaxenformeln der Uebersicht halber zusammengestellt:

I. Jährliche Parallaxe (Fixsternparallaxe).

A. In Länge und Breite:

$$\begin{aligned}\lambda' - \lambda &= - \pi' \sin(\lambda - \odot) \sec \beta \\ \beta' - \beta &= - \pi' \cos(\lambda - \odot) \sin \beta.\end{aligned}$$

B. In Rectascension und Declination:

$$\begin{aligned}\alpha' - \alpha &= \pi' k \cos(K + \odot) \sec \delta \\ \delta' - \delta &= \pi' l \cos(L + \odot).\end{aligned}$$

II. Tägliche Parallaxe (allgemeine Parallaxe).

A. In Rectascension und Declination.

a) Streng (für den Mond):

$$\begin{aligned}tg(\alpha' - \alpha) &= \frac{\varrho \cos \varphi' \sin p \sin(\alpha - \theta)}{2 \left(\sin \frac{A}{2}\right)^2 \cos \delta} \\ tg \delta' &= \frac{\sin \frac{\delta - C}{2} \cos \frac{\delta + C}{2} \cos(\alpha' - \alpha)}{\left(\sin \frac{A}{2}\right)^2 \cos \delta}, \\ \sin w' &= \sin w \frac{\cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha)}{2 \cos \delta \left(\sin \frac{A}{2}\right)^2}.\end{aligned}$$

b) Genähert (für die übrigen Himmelskörper):

$$\begin{aligned}\alpha' - \alpha &= - \varrho \pi \cos \varphi' \frac{\sin(\theta - \alpha)}{A \cos \delta} \\ \delta' - \delta &= - \varrho \pi \frac{\sin \varphi'}{\sin \gamma} \frac{\sin(\gamma - \delta)}{A}.\end{aligned}$$

Nach Multiplication der rechten Seiten mit A sind das die gewöhnlich gegebenen Parallaxenfactors $p_\alpha A$ und $p_\delta A$.

Oder nach Hansen:

$$\left. \begin{aligned}\alpha' - \alpha &= - \frac{T}{A \cos \delta} \\ \delta' - \delta &= - \frac{D \sin \delta}{A} - \frac{T' \cos \delta}{A}\end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{wo } T \text{ und } D \text{ aus Tafeln,} \\ T' \text{ constant.} \end{array}$$

B. In Azimuth und Zenithdistanz.

a) Streng (für den Mond):

$$\begin{aligned}tg(A' - A) &= \frac{\varrho \sin p \sin(\varphi - \varphi') \sin A}{\sin z \left(1 - \frac{\varrho \sin p \sin(\varphi - \varphi') \cos A}{\sin z}\right)} \\ tg(z' - z) &= \frac{\varrho \sin p \cos(\varphi - \varphi') \frac{\sin(z - \gamma)}{\cos \gamma}}{1 - \varrho \sin p \cos(\varphi - \varphi') \frac{\cos(z - \gamma)}{\cos \gamma}}.\end{aligned}$$

b) Genähert (für die übrigen Himmelskörper):

$$A' - A = \frac{\varrho \sin p \sin(\varphi - \varphi') \sin A}{\sin z}$$

$$z' - z = \varrho \sin p \cos(\varphi - \varphi') \frac{\sin(z - \gamma)}{\cos \gamma}.$$

c) Specieell für eine kugelförmige Erde:

$$A' - A = 0$$

$$z' - z = \varrho \sin p \sin z.$$

III. Werth der Sonnenparallaxe nach Gill:

$$\pi = 8'',80 \text{ w. F. } \pm 0'',005.$$

Dreizehnte Vorlesung.

Die Aberration.

Nicht weniger nothwendig für astronomische Rechnungen, als die Rücksichtnahme auf Parallaxe, ist die Berücksichtigung der Aberration des Lichtes. Es ist bekannt, dass der Lichtstrahl merkliche Zeit gebraucht, die Zwischenräume zwischen den Himmelskörpern zu durchlaufen, und zwar nach Glasenapp: 498,5 Secunden mittlerer Zeit für den Halbmesser der Erdbahn, der in der theoretischen Astronomie als Längeneinheit angenommen wird. Hat ein Himmelskörper gegen die Erde den Abstand ϱ , so ist ein Strahl dieses Gestirnes, welcher zur Zeit t unser Auge trifft, zu der Zeit $t - 498^s,5 \varrho$ von demselben ausgegangen. Wenn also der vom Gestirn ausgehende Strahl im Beobachtungsorte anlangt, so hat dasselbe seinen Ort im Raume oft schon sehr merklich geändert. Aber auch der Beobachter selbst bewegt sich mit der Erde im Raume und ihm scheint daher der Lichtstrahl aus einer anderen Richtung zu kommen, als einem ruhenden Beobachter, da er nur die relative Bewegung des Strahles wahrnimmt, weil er sich selbst ruhend glaubt. Man hat demnach zwei Arten von Aberration zu unterscheiden, oder besser gesagt, zwei Ursachen, welche zusammen die Ablenkung des wahren Lichtstrahles bewirken und uns nur den scheinbaren liefern. Nämlich erstens die durch die translatorische und rotatorische Bewegung der Erde gemeinsam bedingte „Fixsternaberration“, die indess nicht die Fixsterne allein, sondern ebenso die Planeten, d. h. alle Gestirne überhaupt betrifft. Zweitens die durch die Bewegung des Objectes selbst, von dem der Strahl ausgeht, bedingte Aberration. Diese dadurch, dass das Licht die Aberrationszeit braucht, um vom Planeten auf die Erde zu gelangen (event. mehrere Stunden), verursachte Lagenänderung eines Sternes, bezeichnet man mit „Planetenaberration“. Dieselbe beeinflusst eigentlich sowohl Planeten- wie Fixsternbeobachtungen, kann aber, da wir die Entfernung der Fixsterne im Allgemeinen nicht kennen, nur bei ersteren berücksichtigt werden. Um die Gesamtwirkung beider Aberrationen geometrisch zu veranschaulichen, sei in Fig. 22 C der Ort des Gestirnes im Weltenraume zur Zeit $t - 498^s,5 \varrho$, T_0 der Ort der Erde zu derselben Zeit, T aber der Ort, an welchem die Erde und das Auge zur Zeit t von dem von C zur Zeit $t - 498^s,5 \varrho$ ausgegangenen Strahle ereilt wird. Das Auge würde das Gestirn in der Richtung TC erblicken, wenn die Erde in dem Punkte T in Ruhe wäre; es verursacht nun aber die Bewegung der Erde die von uns als Fixsternaberration bezeichnete Täuschung über die Richtung des Strahles, vermöge deren auch der Strahl CT eine andere, die Richtung von $C'T$, zu haben scheint. Es ist erstens

ersichtlich, dass die Richtung $C'T$ des scheinbaren Strahles mit den Richtungen von CT und der Erdbewegung in dieselbe Ebene fallen muss, also in die Ebene, in welcher das Dreieck T_0TC liegt; zweitens, dass jene Täuschung, oder der Winkel CTC' , gleich dem Winkel T_0CT wird. Denn die trigonometrische Tangente der Fixsternaberration ist gleich dem Verhältniss: die zum Strahle senkrechte Componente der Erdbewegung dividirt durch die Geschwindigkeit des Lichtes. Den Weg der Erde T_0T während der 498^s,5 q Secunden wird man als mit gleichmässiger Geschwindigkeit zurückgelegt ansehen dürfen, wenn das Gestirn zu unserem Sonnensystem gehört; es kann also für das obige Verhältniss der Geschwindigkeiten das der in 498^s,5 q Secunden zurückgelegten Wege gesetzt werden, oder, wenn T' der Fusspunkt des von T_0 auf CT gefällten Perpendikels ist, das Verhältniss:

$$\frac{T_0 T'}{C T}$$

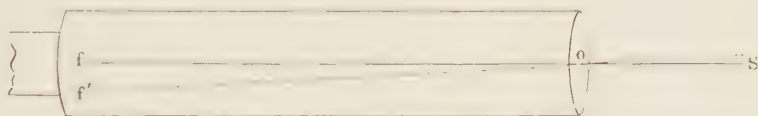
bis auf Unmerkliches gleich dem Verhältniss:

$$\frac{T_0 T'}{C T'}$$

oder gleich der trigonometrischen Tangente des Winkels T_0CT' . Folglich ist TC' parallel T_0C , d. h. es wird unter dem Einflusse der Erdbewegung das Gestirn zu der Zeit t in derjenigen Richtung oder an demjenigen Orte der Sphäre beobachtet, wie sie der Verbindungslinie von Erde und Gestirn zu der Zeit $t - 498^s,5 q$ entspricht.

Es mögen hier noch der Gauss'schen Erklärung der Fixsternaberration einige Worte gewidmet sein, da sie eine sehr klare Anschauung giebt. Man nennt ein Fernrohr auf einen Fixstern gerichtet oder eingestellt, wenn das Bild des Sternes in das Fadenkreuz des Fernrohres fällt. Gesetzt, diese Bedingung sei für ein ruhendes Fern-

Fig. 23.



rohr erfüllt, so wird sie es nicht mehr zu sein scheinen, sobald das Fernrohr, an der Bewegung der Erde theilnehmend, eine zum Strahle senkrechte Geschwindigkeit hat, und das Fadenkreuz, während der Strahl die Axe des Fernrohres durchläuft, einen gewissen Weg zurücklegt. In Fig. 23 z. B. wird durch das Objectiv o in f ein Bild des unendlich entfernten Sternes S entworfen, welches mit dem Fadenkreuz zusammenfallen würde, wenn nicht eben, während der Strahl den Weg of zurücklegte, das Fadenkreuz von f nach f' gelangte. Das Bild in das Fadenkreuz zu bringen, würde es einer Drehung von dem Betrage des Winkels fof' bedürfen, dessen trigonometrische Tangente offenbar das Verhältniss der gegen den Strahl senkrechten Erdgeschwindigkeit zur Geschwindigkeit des Lichtes ist.

Ehe wir den Einfluss der durch die translatorische Bewegung der Erde bedingten „jährlichen“ (Fixstern-) Aberration, sowie denjenigen der durch die rotatorische Bewegung der Erde bedingten der „täglichen“ (Fixstern-) Aberration auf

die Coordinaten der Ekliptik und des Aequators feststellen (die durch das gemeinsame Vorwärtsgen der Erde mit der Sonne im Raume bedingte sogenannte säculare Aberration ist nicht berechenbar, weil man die Eigenbewegung der Sterne nicht genügend kennt), wollen wir uns die Entstehung und Bedeutung der allgemeinen, für jede beliebige Bewegung des Beobachters gültigen Aberrationsformeln vergegenwärtigen, durch deren Specialisirung sich die Formeln der täglichen und jährlichen Aberration für Rectascension und Declination und für Länge und Breite sofort ergeben.

Sei l die Länge des Fernrohres, μ die Geschwindigkeit des Lichtes, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ die Geschwindigkeitscomponenten des Beobachtungsortes in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, α und δ die Polarcoordinaten des wahren, α' und δ' hingegen diejenigen des scheinbaren Strahles (der in die Richtung des Fernrohres fällt) in Bezug auf dasselbe System. Dann sind die Componenten des Lichtweges des scheinbaren Strahles im Fernrohre nach den drei Axen:

$$\begin{aligned} l \cos \alpha' \cos \delta' \\ l \sin \alpha' \cos \delta' \\ l \sin \delta', \end{aligned}$$

während die Componenten des Lichtweges des wahren Strahles im Fernrohre nach den drei Coordinatenachsen:

$$\begin{aligned} \mu (t' - t) \cos \alpha \cos \delta \\ \mu (t' - t) \sin \alpha \cos \delta \\ \mu (t' - t) \sin \delta \end{aligned}$$

sind, wenn die Länge des Fernrohres in der Zeit $(t' - t)$ vom Lichte durchlaufen wird.

Schliesslich sind die Componenten der Bewegung des Beobachtungsortes:

$$(t' - t) \frac{dx}{dt}, \quad (t' - t) \frac{dy}{dt}, \quad (t' - t) \frac{dz}{dt},$$

daher ergeben sich unmittelbar die folgenden allgemeinen Aberrationsformeln:

$$\left. \begin{aligned} (t' - t) \mu \cos \alpha \cos \delta &= l \cos \delta' \cos \alpha' - \frac{dx}{dt} (t' - t) \\ (t' - t) \mu \sin \alpha \cos \delta &= l \cos \delta' \sin \alpha' - \frac{dy}{dt} (t' - t) \\ (t' - t) \mu \sin \delta &= l \sin \delta' - \frac{dz}{dt} (t' - t) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

oder, weil bis auf unmerklich kleine Glieder höherer Ordnung:

$$l = (t' - t) \mu$$

ist, da die Länge des Fernrohres in der Zeit $(t' - t)$ mit der Geschwindigkeit μ gleichmässig durchlaufen wird:

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta' \cos \alpha' - \cos \alpha \cos \delta &= \frac{1}{\mu} \frac{dx}{dt} \\ \cos \delta' \sin \alpha' - \sin \alpha \cos \delta &= \frac{1}{\mu} \frac{dy}{dt} \\ \sin \delta' - \sin \delta &= \frac{1}{\mu} \frac{dz}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Da nun aber die Lichtgeschwindigkeit μ sehr gross, also $\frac{1}{\mu}$ sehr klein ist, so ist der Richtungsunterschied des wahren und scheinbaren Strahles sehr klein, d. h. die

Größen $\alpha' - \alpha = \Delta\alpha$ und $\delta' - \delta = \Delta\delta$ sind kleine Winkel, deren Cosinus gleich 1 und deren Sinus mit dem Bogen vertauschbar ist. Führen wir das ein und setzen für α' und δ' bezüglich

$$\begin{aligned}\alpha' &= \alpha + \Delta\alpha \\ \delta' &= \delta + \Delta\delta\end{aligned}$$

so werden unsere Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} - \cos \delta \sin \alpha \Delta\alpha - \cos \alpha \sin \delta \Delta\delta &= \frac{1}{\mu} \frac{dx}{dt} \\ + \cos \delta \cos \alpha \Delta\alpha - \sin \alpha \sin \delta \Delta\delta &= \frac{1}{\mu} \frac{dy}{dt} \\ + \cos \delta \Delta\delta &= \frac{1}{\mu} \frac{dz}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Durch Multiplication der ersten dieser Relationen mit $-\sin\alpha$, der zweiten mit $+\cos\alpha$ und Addition folgt direct der Unterschied des wahren und scheinbaren Ortes in Rectascension:

$$\alpha' - \alpha = \Delta\alpha = -\frac{1}{\mu} \left\{ \frac{dx}{dt} \sin \alpha - \frac{dy}{dt} \cos \alpha \right\} \sec \delta.$$

Durch Multiplication hingegen der ersten Gleichung mit $\cos\alpha$, der zweiten mit $\sin\alpha$ und Addition folgt:

$$\sin \delta \Delta\delta = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{dx}{dt} \cos \alpha + \frac{dy}{dt} \sin \alpha \right).$$

Und wenn wir diese Gleichung mit $\sin\delta$, die dritte des Systemes (3) mit $\cos\delta$ multiplizieren und addiren, ergibt sich als Unterschied in der anderen Coordinate:

$$\Delta\delta = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{dx}{dt} \cos \alpha \sin \delta + \frac{dy}{dt} \sin \alpha \sin \delta - \frac{dz}{dt} \cos \delta \right).$$

Die allgemeinen Aberrationsformeln sind also:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -\frac{1}{\mu} \left\{ \sin \alpha \frac{dx}{dt} - \cos \alpha \frac{dy}{dt} \right\} \sec \delta \\ \delta' - \delta &= -\frac{1}{\mu} \left\{ \cos \alpha \sin \delta \frac{dx}{dt} + \sin \alpha \sin \delta \frac{dy}{dt} - \cos \delta \frac{dz}{dt} \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Oder, wenn man bis zu Gliedern zweiter Ordnung inclusive geht, wie leicht abzuleiten:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= -\frac{1}{\mu} \left\{ \sin \alpha \frac{dx}{dt} - \cos \alpha \frac{dy}{dt} \right\} \sec \delta \\ &\quad + \frac{1}{\mu^2} \left\{ \sin \alpha \frac{dx}{dt} - \cos \alpha \frac{dy}{dt} \right\} \left\{ \cos \alpha \frac{dx}{dt} + \sin \alpha \frac{dy}{dt} \right\} \sec \delta^2 \\ \delta' - \delta &= -\frac{1}{\mu} \left\{ \cos \alpha \sin \delta \frac{dx}{dt} + \sin \alpha \sin \delta \frac{dy}{dt} - \cos \delta \frac{dz}{dt} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2\mu^2} \left\{ \sin \alpha \frac{dx}{dt} - \cos \alpha \frac{dy}{dt} \right\}^2 \tan \delta \\ &\quad + \frac{1}{\mu^2} \left\{ \cos \alpha \cos \delta \frac{dx}{dt} + \sin \alpha \cos \delta \frac{dy}{dt} + \sin \delta \frac{dz}{dt} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \cos \alpha \sin \delta \frac{dx}{dt} + \sin \alpha \sin \delta \frac{dy}{dt} - \cos \delta \frac{dz}{dt} \right\} \end{aligned} \right\} \dots (4a)$$

Je nachdem wir nun die xy -Ebene als Ekliptik oder als Aequator wählen und die drei Geschwindigkeitscomponenten für die translatorische und die rotatorische Bewegung der Erde bilden, und in die allgemeinen Formeln einsetzen, erhalten wir die

jährliche und tägliche Aberration bezüglich in Länge und Breite und in Rectascension und Declination.

Zunächst wollen wir den Einfluss der jährlichen Aberration auf die Coordinaten beider Systeme betrachten, und zwar zuerst auf diejenigen des Systemes der Ekliptik, auf Länge und Breite. Die xy -Ebene sei also die Ekliptik und die x -Axe gehe durch den Widderpunkt, so dass sich die Erde jetzt in der Fundamentalebene selbst bewegt. Führen wir nun an Stelle der heliocentrischen Länge der Erde, d. h. des Winkelabstandes der Erde vom Frühlingspunkte, da man nicht von der Sonne die Erde beobachten kann, sondern umgekehrt nur die Sonne von der Erde, den Winkel ein, unter dem die Sonne von der Erde aus gesehen erscheint, so hat derselbe offenbar eine vom ersteren um 180° verschiedene Länge. Bezeichnen wir also mit „ \odot “ die Länge der Sonne von der Erde aus gesehen, so wird der Winkel des Radius vectors R nach der Erde mit der x -Axe bezüglich $180 + \odot$ sein und die drei Coordinaten der Erde bezogen auf die Sonne als Anfangspunkt werden:

$$\begin{aligned} x &= R \cos (180 + \odot) = - R \cos \odot \\ y &= R \sin (180 + \odot) = - R \sin \odot \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Mithin die drei Geschwindigkeitscomponenten der translatorischen Erdbewegung:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= - \frac{dR}{dt} \cos \odot + R \sin \odot \frac{d\odot}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= - \frac{dR}{dt} \sin \odot - R \cos \odot \frac{d\odot}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Trägt man diese drei Differentialquotienten in die allgemeinen Aberrationsformeln (4) ein und ersetzt in denselben α und δ bezüglich durch λ und β , so ergibt sich die Abweichung des wahren Ortes vom scheinbaren in Länge und Breite.

Sei, wie gewöhnlich, die grosse Halbaxe der Erdbahn $a = 1$, Γ die Länge des Perihels der Sonnenbahn, v die wahre Anomalie der Sonne, \odot ihre Länge, R der Radius vector der Erdbahn, so ist:

$$\odot = v + \Gamma,$$

also, wenn man von den kleinen Störungen absieht, d. h. $\Gamma = \text{const.}$ setzt:

$$\frac{d\odot}{dt} = \frac{dv}{dt}.$$

Um die obigen Differentialquotienten berechnen zu können, müssen wir R und v durch bekannte Grössen ausdrücken. Die diesbezüglichen Relationen ergeben sich aber aus der Theorie der elliptischen Bewegung (cf. Vorlesung 4) sofort. Es ergibt sich nämlich einerseits durch Differentiation der Ellipsengleichung:

$$r = \frac{a \cos \varphi^2}{1 + e \cos v} = a (1 - e \cos E).$$

nach einer leichten Transformation:

$$dv = \frac{a \cos \varphi}{r} dE,$$

während durch Differentiation der Kepler'schen Gleichung:

$$dE = \frac{a}{r} dM$$

folgt. Mithin wird:

$$dr = \frac{a^2 \cos \varphi}{r^2} dM.$$

Setzen wir diesen Werth in die differentirte Ellipsengleichung ein:

$$dr = \frac{a \cos \varphi^2}{(1 + e \cos v)^2} e \sin v dv,$$

so folgt:

$$dr = \frac{a^3 \cos \varphi^3}{(1 + e \cos v)^2 r^2} e \sin v dM.$$

Da aber:

$$\frac{a^2 \cos \varphi^4}{(1 + e \cos v)^3} = r^3,$$

so folgt, wenn wir dr mit $a \cos \varphi$ multipliciren und dividiren und für r gleich die Bezeichnung R wählen:

$$dR = a \operatorname{tg} \varphi \sin v dM.$$

Durch Einführen dieser zwei Werthe:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\odot}{dt} &= \frac{dv}{dt} = \frac{a^2 \cos \varphi}{R^2} \frac{dM}{dt} \\ \text{und} \quad \frac{dR}{dt} &= a \operatorname{tg} \varphi \sin v \frac{dM}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

in die obigen drei Ausdrücke für die Geschwindigkeitscomponenten, werden diese nach entsprechender Reduction, indem wir die grosse Halbaxe der Erdbahn gleich 1 setzen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{dM}{dt} (\sin \varphi \sin \Gamma + \sin \odot) \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{dM}{dt} (\sin \varphi \cos \Gamma + \cos \odot) \\ \frac{dz}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Tragen wir schliesslich diese drei Relationen in die allgemeinen Aberrationsgleichungen (4) ein, wobei in denselben noch λ und β an Stelle von α und δ zu setzen ist, so ergeben sich als Formeln für die Unterschiede der wahren und scheinbaren Oerter in Länge und Breite nach kleiner Reduction analytisch die Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} \lambda' - \lambda &= -\frac{1}{\mu} \frac{\sec \beta}{\cos \varphi} \frac{dM}{dt} \{ \sin \varphi \cos (\lambda - \Gamma) + \cos (\lambda - \odot) \} \\ \beta' - \beta &= +\frac{1}{\mu} \frac{\sin \beta}{\cos \varphi} \frac{dM}{dt} \{ \sin \varphi \sin (\lambda - \Gamma) + \sin (\lambda - \odot) \} \end{aligned} \right\} \dots \dots (8)$$

In diesen Formeln haben wir, damit sie numerischen Rechnungen zu Grunde gelegt werden können, noch die betreffenden Constanten durch Zahlen auszudrücken. Auf Grund der am Pulkovaer Passageinstrument im ersten Vertical angestellten berühmten Beobachtungen von Struve ermittelte dieser den constanten Factor in letzteren Gleichungen, die sogenannte Aberrationsconstante (deren geometrische Bedeutung siehe S. 115) zu:

$$\frac{1}{\mu} \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dM}{dt} = C_j = 20'',445.$$

Weitere gleichfalls in Pulkova angestellten Beobachtungen ergaben folgende Werthe:

	$20'',507 \pm 0'',021$. . .	Peters	} Verticalkreis
	$20,469 \pm 0,026$. . .	Gyldén	
	$20,495 \pm 0,021$. . .	Nyrén	
<hr/>				
Mittel:	$20'',495 \pm 0'',013$			
Ferner:				
	$20'',498 \pm 0'',012$. . .	Schweizer	} Meridiankreis
	$20,483 \pm 0,012$. . .	Wagner	
<hr/>				
Mittel:	$20'',491 \pm 0'',009$			
	$20'',463 \pm 0'',017$. . .	Struve	} Passageinstrument im ersten Vertical
	$20,517 \pm 0,014$. . .	Nyrén	
<hr/>				
Mittel:	$20'',490 \pm 0'',011$			

In seiner Abhandlung: „l'Aberration des étoiles fixes“ (Mém. de l'Acad. imp. des sciences de St. Petersbourg, Tome XXXI, 9, 1883) hat Nyrén, auf Grund dieser zuverlässigen Beobachtungen, für die Aberrationsconstante den Werth:

$$\frac{1}{\mu} \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dM}{dt} = C_j = 20'',492 \pm 0'',006$$

gegeben. Auf Grund dieses Werthes ergibt sich für die Zeit, die das Licht braucht, um die astronomische Längeneinheit, den Halbmesser der Erdbahn, $a = 1$, zu durchlaufen, der Werth:

$$\frac{1}{\mu} = 498^s,92,$$

während der Glasenapp'sche etwas abweichende Werth:

$$\frac{1}{\mu} = 498^s,46,$$

das Mittel aus verschiedenen Beobachtungen ist.

Für die Sonnenparallaxe π aber ergibt sich aus dem Nyrén'schen Werth der Aberrationsconstanten und dem Newcomb'schen Werth der Lichtgeschwindigkeit:

$$\mu = 299860 \text{ km}$$

der Werth:

$$\pi = 8'',79,$$

während der früher schon erwähnte Gill'sche, etwas abweichende Werth:

$$\pi = 8'',80$$

von der Pariser Conferenz adoptirt ist. Für den Factor:

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dM}{dt} \sin \varphi = C_j \sin \varphi$$

in den Gleichungen (8) aber ergibt sich nach Nyrén der Werth:

$$C_j \sin \varphi = 0'',343.$$

Die Formeln für die jährliche Aberration in Länge und Breite werden bei Annahme des Pariser Conferenzwerthes der Aberrationsconstanten numerisch:

$$\left. \begin{aligned} \lambda' - \lambda &= -20',47 \cos(\odot - \lambda) \sec \beta - 0'',343 \cos(\lambda - I) \sec \beta \\ \beta' - \beta &= -20',17 \sin(\odot - \lambda) \sin \beta + 0'',343 \sin(\lambda - I) \sin \beta \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

Berücksichtigt man in diesen Gleichungen nur die ersten Glieder, indem man die Constante $20'',47$ mit c bezeichnet:

$$\left. \begin{aligned} \lambda' - \lambda &= -c \cos(\lambda - \odot) \sec \beta \\ \beta' - \beta &= +c \sin(\lambda - \odot) \sin \beta \end{aligned} \right\}$$

und denkt sich an der scheinbaren Himmelskugel an den mittleren Ort des Sternes eine Tangentialebene gelegt, deren Schnittlinien bezüglich mit einem Parallel- und einem Breitenkreise:

$$\begin{aligned}\xi &= \cos \beta (\lambda' - \lambda) \\ \eta &= \beta' - \beta\end{aligned}$$

nichts anderes als die Coordinaten des wahren (mit Aberration behafteten) Ortes in Bezug auf den mittleren darstellen, dann ergibt sich durch Quadriren und Addiren obiger Gleichungen mit Rücksicht auf die Werthe von ξ und η die Gleichung:

$$\frac{\xi^2}{c^2} + \frac{\eta^2}{c^2 \sin^2 \beta} = 1.$$

Es beschreibt mithin ein Fixstern in Folge der jährlichen Aberration um seinen mittleren Ort eine Ellipse, die sogenannte Aberrationsellipse, deren grosse Halbaxe, die sogenannte Aberrationsconstante:

$$c = \frac{1}{\mu} \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dM}{dt} = 20'',47,$$

und deren kleine Halbaxe, $c \sin \beta$, das Maximum der Aberration in Breite ist. Ein Stern im Pol der Ekliptik, wo $\beta = 90^\circ$, aber beschreibt einen Kreis vom Radius $20'',47$ um seinen mittleren Ort, ein Stern hingegen, der in der Ekliptik steht, wo $\beta = 0$, beschreibt eine gerade Linie. — Speciell für die Sonne, wo $\lambda = \odot$, $\beta = 0$, also $\sec \beta = 1$ ist, wird die jährliche Aberration in Länge und Breite:

$$\left. \begin{aligned}\lambda' - \lambda &= -20'',47 - 0'',343 \cos(\odot - \Gamma) \\ \beta' - \beta &= 0\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

d. h. die Sonne entfernt sich durch die Aberration nicht aus der Ekliptik, während die wahre Sonne der scheinbaren stets um den Winkel $\lambda' - \lambda$ voraus ist.

Um den Einfluss der jährlichen Aberration auf Rectascension und Declination festzustellen, wählen wir wieder die Sonne als Anfangspunkt des Coordinatensystems, als xy -Ebene aber den Aequator, die x -Axe gehe wieder durch den Widderpunkt. Dann zeigt die räumliche Vorstellung leicht, dass x als Hypotenuse, die y - und z -Coordinate aber als Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes folgende Werthe haben, wenn \odot wieder die Länge der Sonne bezeichnet:

$$\begin{aligned}x &= R \cos(180 + \odot) = -R \cos \odot \\ y &= -R \sin \odot \cos \varepsilon \\ z &= -R \sin \odot \sin \varepsilon.\end{aligned}$$

Also, da $\odot = v + \Gamma$, durch Differentiation:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\cos \odot \frac{dR}{dt} + R \sin \odot \frac{dv}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= -\sin \odot \cos \varepsilon \frac{dR}{dt} - R \cos \odot \cos \varepsilon \frac{dv}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= -\sin \odot \sin \varepsilon \frac{dR}{dt} - R \cos \odot \sin \varepsilon \frac{dv}{dt}\end{aligned}$$

oder, da:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{a^2 \cos \varphi}{R^2} \frac{dM}{dt} \\ \frac{dR}{dt} &= a \operatorname{tg} \varphi \sin v \frac{dM}{dt}\end{aligned}$$

ist, auch, wenn wir wieder $a = 1$ setzen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dM}{dt} \{ \sin \varphi \sin \Gamma + \sin \odot \} \\ \frac{dy}{dt} &= - \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dM}{dt} \{ \sin \varphi \cos \Gamma + \cos \odot \} \cos \varepsilon \\ \frac{dz}{dt} &= - \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dM}{dt} \{ \sin \varphi \cos \Gamma + \cos \odot \} \sin \varepsilon \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

Führen wir diese Werthe in die allgemeinen Aberrationsformeln (4) ein, so ergibt sich als Unterschied der wahren und scheinbaren Rectascension und Declination:

$$\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= - \frac{1}{\mu} \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dM}{dt} \{ \cos \odot \cos \varepsilon \cos \alpha + \sin \odot \sin \alpha \} \sec \delta \\ &\quad - \frac{1}{\mu} \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dM}{dt} \sin \varphi \{ \cos \alpha \cos \varepsilon \cos \Gamma + \sin \alpha \sin \Gamma \} \sec \delta \\ \delta' - \delta &= + \frac{1}{\mu} \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dM}{dt} \{ \cos \odot (\sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon) - \cos \alpha \sin \delta \sin \odot \} \\ &\quad + \frac{1}{\mu} \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dM}{dt} \sin \varphi \{ \cos \Gamma (\sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon) - \sin \Gamma \cos \alpha \sin \delta \} \end{aligned}$$

oder, mit Hinblick auf die angegebenen Zahlenwerthe numerisch:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= - 20'',47 \{ \cos \odot \cos \alpha \cos \varepsilon + \sin \odot \sin \alpha \} \sec \delta \\ &\quad - 0'',343 \{ \cos \Gamma \cos \alpha \cos \varepsilon + \sin \Gamma \sin \alpha \} \sec \delta \\ \delta' - \delta &= + 20'',47 \{ \cos \odot (\sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon) - \sin \odot \cos \alpha \sin \delta \} \\ &\quad + 0'',343 \{ \cos \Gamma (\sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon) - \sin \Gamma \cos \alpha \sin \delta \} \end{aligned} \right\} \dots \dots (12)$$

Zum Schlusse haben wir noch den Einfluss der täglichen Aberration auf die Coordinaten der Gestirne festzustellen. Da derselbe in Länge und Breite nicht gebraucht wird, so behandeln wir hier nur die tägliche Aberration in ihrer Wirkung auf die Rectascension und Declination. Dazu verlegen wir den Mittelpunkt des Coordinatensystems in das Erdcentrum, wählen wieder die xy -Ebene als Aequator, so dass die z -Axe mit der Rotationsaxe der Erde zusammenfällt und die x -Axe durch den Widderpunkt geht. Die Coordinaten irgend eines Beobachtungsortes der Erdoberfläche mit der Entfernung ϱ vom Mittelpunkte sind dann, wenn φ die geographische Breite, θ die Sternzeit, d. h. den Winkel zwischen dem Meridian des Beobachtungsortes und demjenigen des Frühlingspunktes bezeichnet:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi \cos \theta \\ y &= \varrho \cos \varphi \sin \theta \\ z &= \varrho \sin \varphi, \end{aligned}$$

also die drei Geschwindigkeitscomponenten des Beobachtungsortes rotatorisch:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= - \varrho \cos \varphi \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= + \varrho \cos \varphi \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke der rotatorischen Geschwindigkeitscomponenten in die allgemeinen Aberrationsformeln (4) folgt:

$$\alpha' - \alpha = \frac{1}{\mu} \frac{d\theta}{dt} \varrho \cos \varphi \cos(\theta - \alpha) \sec \delta$$

$$\delta' - \delta = \frac{1}{\mu} \frac{d\theta}{dt} \varrho \cos \varphi \sin(\theta - \alpha) \sin \delta$$

Als Constante der täglichen Aberration ergibt sich aber unter Zugrundelegung des schon angeführten Newcomb'schen Werthes für μ :

$$\mu = 299\,860 \text{ km,}$$

ferner des Bessel'schen Werthes für den Erdhalbmesser ϱ :

$$\varrho = 6377,4 \text{ km,}$$

sowie des Werthes für die Winkelgeschwindigkeit der Erde in einem Tage:

$$\frac{d\theta}{dt} = 15'' V,$$

— wo V das Verhältniss von einer Secunde in mittlerer Zeit zu einer Secunde in Sternzeit:

$$\log V = 0,00118$$

ist, — der folgende Werth:

$$\frac{\varrho}{\mu} \frac{d\theta}{dt} = C_t = 0'',320.$$

Unter Berücksichtigung dieses Werthes ergeben sich als Unterschiede des wahren und scheinbaren Ortes in Folge der täglichen Aberration in Rectascension und Declination die Werthe:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha &= + 0'',320 \cos \varphi \cos(\theta - \alpha) \sec \delta \\ \delta' - \delta &= + 0'',320 \cos \varphi \sin(\theta - \alpha) \sin \delta \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot (14)$$

Man ersieht hieraus, dass die tägliche Aberration von der Breite (φ) und Sternzeit (θ) des Beobachtungsortes abhängig ist.

Ebenso erkennt man leicht aus diesen Gleichungen, dass ein Stern analog wie bei der jährlichen Aberration im Laufe eines Jahres, so in Folge der täglichen Aberration im Laufe eines Sterntages um seinen mittleren Ort eine Ellipse beschreibt, deren grosse Halbaxe $0'',320 \cos \varphi$ und deren kleine Halbaxe $0'',320 \cos \varphi \sin \delta$ ist, die für einen Stern im Weltpol in einen Kreis für einen solchen, der im Aequator stände, aber in eine gerade Linie degenerirte.

Speciell im Meridian, wo $\theta = \alpha$, also $\sin(\theta - \alpha) = 0$ und $\cos(\theta - \alpha) = 1$ ist, findet offenbar keine tägliche Aberration in Declination statt, indessen ihr Maximum in Rectascension, nämlich:

$$\alpha' - \alpha = + 0'',320 \cos \varphi \sec \delta,$$

eine Grösse, die man bei Reduction von Meridianbeobachtungen in Abzug vom Collimationsfehler bringen kann in der Art, dass man gleich Collimationsfehler minus dieser Grösse als Correction an die Beobachtung anbringt.

Mit Hinblick auf die vorstehenden Entwicklungen lassen sich drei Methoden angeben, um den Ort eines Planeten oder Kometen vom Einflusse der Aberration zu befreien. Zur übersichtlicheren Darstellung derselben fassen wir das Bisherige noch einmal kurz zusammen.

Wir haben gesehen, dass die Aberration ihre Ursache darin hat, dass die Geschwindigkeit des Lichtes zwar sehr gross, aber nicht unendlich gross ist gegenüber derjenigen der Erde. Die zunächstliegende Folge hiervon war, wie wir sahen, die, dass

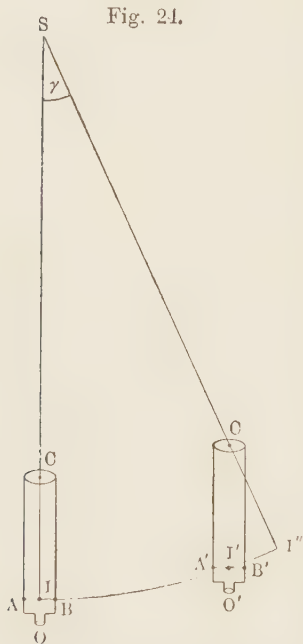
man einen von einem Objecte S ausgehenden Lichtstrahl erst nach Ablauf der Aberrations- oder Lichtzeit erblickt, d. h. nach Verlauf der Zeit, die das Licht braucht, um vom Objecte bis zum Auge des Beobachters zu gelangen. Da das Licht in einer Secunde circa 300000 km durchläuft, so braucht es nach den besten Bestimmungen 498,46 mittlerer Zeit, um die astronomische Längeneinheit, d. h. die grosse Halbaxe der Erdbahn zu durchlaufen.

Sei also ϱ die Distanz des Objectes in mittleren Erdbahnradien, so braucht das Licht: $[7,76112 - 10] \varrho$ mittlere Sonnentage, um bis zum Beobachter zu gelangen. Diese Grösse muss man also von der Beobachtungszeit abziehen, um die wirkliche Ausgangszeit der Strahlen zu erhalten. Von der Sonne erhält man demnach das Licht in circa acht Minuten, von den äusseren Planeten erst nach Stunden und von den Fixsternen nach Jahren. Da man aber die Entfernung dieser letzteren meist nur ungenügend kennt, muss man sich darauf beschränken, die Zeit, zu der sie beobachtet wurden, anzugeben. Diese Aberrationserscheinung, die also nur für unser Sonnensystem von Wichtigkeit ist, bezeichnen wir im Vorhergehenden als die Planetenaberration. Zu ihr kam, wie wir gesehen, noch eine Art von optischer Täuschung, die Fixsternaberration.

Nach den heute in der Physik herrschenden Anschauungen der Undulationstheorie wird die Bewegung eines Lichtstrahles im Weltraume von derjenigen seines Ausgangspunktes nicht beeinflusst. Welches also auch die Bewegung des beobachteten Objectes S sein mag, in jedem Augenblicke gehen von ihm Lichtstrahlen mit gleicher Geschwindigkeit nach allen Seiten aus. Sei S das lichteussende Object (Fig. 24)¹⁾, C das optische Centrum des Fernrohrobjectivs und AB die Focalebene (in der sich das Fadenkreuz befindet), so bringt der betrachtete Strahl SC im Punkte I der Focalebene AB ein Bild hervor, welches mit Hülfe des Oculars O beobachtet wird. Diese Betrachtung ist aber nur dann richtig, wenn sich das Fernrohr selbst in Ruhe befindet. Da dies indess nicht der Fall ist, weil das Fernrohr in Folge der translatorischen Bewegung der Erde in die Lage $O'C'$ gelangt, wenn die Lichtstrahlen die Erde erreichen, so trifft nicht der Strahl SC das Centrum des Objectives, sondern vielmehr der Strahl SC' . Derselbe durchläuft dann noch die gesammte Länge des Fernrohres, um zur Focalebene zu gelangen. Fassen wir den Schnittpunkt I'' der Linien SC' und II' ins Auge, so durchläuft demnach der Punkt I des Fadenkreuzes die Strecke II' , während das Licht den Weg SC' zurücklegt. Es ist somit $II' : SC'$ das Verhältniss der Geschwindigkeit der Erde zu derjenigen des Lichtes. Nun ist aber (indem wir nur die translatorische Bewegung der Erde ins Auge fassen) IO parallel $I'C'$. Es verhält sich daher $I'I''$ zu $C'I''$ wie die Geschwindigkeit der Erde zu derjenigen des Lichtes. Mit anderen Worten, der Punkt I des Fadenkreuzes kommt gleichzeitig mit dem Strahle SC' in I'' an.

Die erste Methode beruht darauf, dass der Beobachter das Object S an derjenigen Stelle des Himmels zu sehen glaubt, wo es sich zur Zeit, wo der Lichtstrahl von ihm ausgeht, wirklich befindet. Der scheinbare Ort zur Zeit der Beobachtung ist mithin gleich dem wahren Ort der reducirten Beobachtungs-

¹⁾ Die Linie $II'I''$ ist, da bei der ganzen Betrachtung von der Krümmung der Erdbahn abgesehen wird, als Gerade aufzufassen.



zeit (Beobachtungszeit minus Lichtzeit). Will man also die Beobachtung eines Objectes (dessen Entfernung näherungsweise bekannt sein muss) mit einer Ephemeride, die stets wahre Orte giebt, vergleichen, so ergiebt sich erstens die folgende wichtigste Methode zur Berücksichtigung der Aberration bei Körpern unseres Sonnensystemes.

Man berechnet die Lichtzeit, zieht dieselbe von der Beobachtungszeit ab und entnimmt für diese reducirte Zeit der Beobachtung die Stellung des Kometen (die Rectascension α und die Declination δ) der Ephemeride. Diese Grössen kann man dann direct mit den durch die Beobachtung gegebenen, scheinbaren, vergleichen.

Bei ersten Bahnbestimmungen ist die Distanz des beobachteten Objectes unbekannt. Neu entdeckte kleine Planeten befinden sich gewöhnlich in dem der Sonne entgegengesetzten Theile des Himmels (also in der Nähe der Opposition), weil hier die Sichtbarkeitsbedingungen am günstigsten sind. Da man ferner weiss, dass ihre Bahnen nur wenig geneigt sind und sich zwischen denen von Mars und Jupiter befinden, so kann man in der ersten Annäherung eine Aberrationszeit von circa 18 Minuten voraussetzen. Man könnte also diese Grösse von der Beobachtungszeit abziehen, und die Rechnung mit der so reducirten Beobachtungszeit durchführen. Dieses Verfahren hätte aber den Nachtheil, dass man bei jeder folgenden Annäherung (welche ja einen verbesserten Werth für die Lichtzeit liefert) eine andere reducirte Beobachtungszeit erhalten würde und für diese jedesmal die Sonnencoordinaten und die davon abhängigen Grössen von Neuem berechnen müsste.

Um dies zu vermeiden, kann man in Anwendung einer zweiten Methode die Beobachtungszeit beibehalten und kleine Correctionen an die beobachteten Coordinaten des Planetoiden anbringen. Man sucht also so gut, als dies mit Hülfe der vorhandenen Beobachtungen möglich ist, die Bewegung des Planeten in Rectascension und Declination in der Nähe der zu reducirenden Beobachtung zu bestimmen. Sind diese Grössen bekannt, so ist der wahre Ort zur Zeit der Beobachtung gleich dem scheinbaren Orte des Planeten 18 Minuten später.

Ogleich diese zweite Methode nicht auf äusserste Genauigkeit Anspruch machen kann, so liefert sie doch meist bei Anwendung auf kleine Planeten schon in erster Annäherung ganz gute Resultate.

Um noch eine dritte Methode zur Berücksichtigung der Aberration bei ersten Bahnbestimmungen zu finden, betrachten wir von Neuem Fig. 24. Der Beobachter, welcher den Lichtstrahl in I'' sieht, glaubt, dass derselbe die Richtung IC oder $I'C'$ habe. Es wird also jeder Lichtstrahl, der die Richtung SC' hat, um den Aberrationswinkel γ von seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt, eine Erscheinung, die wir als Fixsternaberration bezeichnen. Unter der scheinbaren Stellung eines Fixsternes versteht man also die scheinbare Richtung der von ihm ausgehenden Strahlen, in unserem Falle die Richtung IC resp. $I'C'$, während der wahre Ort die Richtung SC' wäre. Man hat also an den wahren Ort eines Fixsternes noch eine Correction, die „Aberration“, kurz gesagt, anzubringen, um den scheinbaren Ort zu erhalten.

Hieraus ergiebt sich die dritte Methode, um bei ersten Bahnbestimmungen die Aberration zu berücksichtigen. Der Beobachter giebt die scheinbare Stellung des Kometen oder Planeten zur Zeit der Beobachtung im Punkte I'' (d. h. die Richtung IC resp. $I'C'$): Würde sich in derselben wirklichen Richtung SC' ein Fixstern befinden, so würde ihn der Beobachter ebenfalls in der scheinbaren Richtung $I'C'$ sehen. Zieht man also von der scheinbaren Stellung des Kometen bezüglich Planeten (entsprechend der Richtung $I'C'$) die Fixsternaberration ab, so erhält man die Richtung

SC' , oder die wahre Stellung des Objectes S zur reducirten Beobachtungszeit (d. h. zur Ausgangszeit des Lichtes, wo sich das Fernrohr in IC befand), aber gesehen vom Orte I'' aus, in welchem sich die Erde zur Zeit der Beobachtung befand. Die Formeln für die Fixsternaberration, d. h. diejenigen Correctionen, die man an den wahren Ort eines Fixsternes anzubringen hat, um den scheinbaren zu erhalten, sind im Vorhergehenden gegeben.

Auch bei dieser Methode muss man zuerst einen Wert für die Aberrationszeit annehmen und ihn allmählig, den im Laufe der Rechnung gefundenen Entfernungen der Himmelskörper von der Erde entsprechend, verbessern; dagegen bleiben die von der Stellung der Sonne abhängigen Grössen ungeändert. Hingegen hat man den Vortheil, nicht gezwungen zu sein, die Bewegung des Objectes an die Beobachtung anzubringen, was bei schnell beweglichen Objecten (Kometen) zu wesentlichen Ungenauigkeiten führen kann.

Z u s a m m e n s t e l l u n g.

I. Formeln der jährlichen Aberration.

a) in Rectascension und Declination:

$$\begin{aligned}\alpha' - \alpha &= - 20'',47 \{ \cos \odot \cos \alpha \cos \varepsilon + \sin \odot \sin \alpha \} \sec \delta \\ &\quad - 0'',343 \{ \cos \Gamma \cos \alpha \cos \varepsilon + \sin \Gamma \sin \alpha \} \sec \delta \\ \delta' - \delta &= + 20'',47 \{ \sin \odot [\sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon] - \sin \odot \cos \alpha \sin \delta \} \\ &\quad + 0'',343 \{ \cos \Gamma [\sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon] - \sin \Gamma \cos \alpha \sin \delta \}.\end{aligned}$$

b) in Länge und Breite:

$$\begin{aligned}\lambda' - \lambda &= - 20'',47 \cos (\odot - \lambda) \sec \beta - 0'',343 \cos (\lambda - \Gamma) \sec \beta \\ \beta' - \beta &= - 20'',47 \sin (\odot - \lambda) \sin \beta + 0'',343 \sin (\lambda - \Gamma) \sin \beta.\end{aligned}$$

II. Formeln der täglichen Aberration.

a) in Rectascension und Declination:

$$\begin{aligned}\alpha' - \alpha &= + 0'',320 \cos \varphi \cos (\theta - \alpha) \sec \delta \\ \delta' - \delta &= + 0'',320 \cos \varphi \sin (\theta - \alpha) \sin \delta.\end{aligned}$$

III. Werth der Constanten der jährlichen Aberration.

a) nach Struve:

$$C_j = 20'',445.$$

b) nach Nyrén:

$$C_j = 20'',492 \pm 0'',006.$$

IV. Werth der Constanten der täglichen Aberration.

a) nach Nyrén:

$$C_t = 0'',320.$$

Durch die Pariser Fundamentalsternconferenz (1896) adoptirte Werthe:

Aberrationsconstante: $20'',47$.

Aberrationszeit: $498^s,5$.

Geschwindigkeit des Lichtes pro Secunde: $299\,860\text{ km (m. F. } \pm 30\text{ km)}$.

Mittlere Entfernung „Erde—Sonne“: $149\,465\,000\text{ km}$.

Sonnenparallaxe: $8'',80$.

Vierzehnte Vorlesung.

Die Theorie der Bewegung der Erdaxe und ihre Anwendung
in der Bahnrechnung.

Die Lage der astronomischen Fundamentebenen Aequator und Ekliptik im Raume ist gewissen Veränderungen unterworfen, die in erster Linie durch die anziehende Wirkung der Sonne und des Mondes auf das abgeplattete Erdsphäroid, sodann durch die störende Einwirkung der Planeten auf die Erdbahn bedingt sind. Den Inbegriff dieser säcularen und periodischen Störungen, welche der Aequator und die Ekliptik erleiden, fasst man unter dem Namen der „Präcession und Nutation“ zusammen. Um die wahren Coordinaten der Himmelskörper von diesen Bewegungen der Coordinatensysteme befreien zu können, müssen wir diese Bewegungen für sich untersuchen. Bei diesen Untersuchungen ist, wenn sie verständlich und einigermaassen vollständig sein sollen, ein Eingehen auf die Mechanik des Himmels unvermeidlich. Zunächst müssen wir auf gewisse Begriffe und Relationen der reinen Mechanik, wie diejenigen der „Hauptträgheitsmomente“, der „instantanen Drehaxe“ eines Körpers, der „invariablen Normalen“, ferner auf die Euler'schen Gleichungen zurückgreifen, weil dieselben den Ausgangspunkt und die Basis für die Theorie der Präcession und Nutation bilden, deren Endformeln wir später in der Bahnrechnung brauchen. Die Präcessionstheorie soll im Folgenden analytisch von Grund auf, in der numerischen Ausführung hingegen nur insoweit, als es für die Anwendung wirklich erforderlich ist, entwickelt werden.

I. Die allgemeinen mechanischen Grundlagen des Problems der
Erdaxenbewegung.

Die Bewegung eines beliebigen starren Körpers wird, wie aus den einfachen Anfangsgründen der Mechanik bekannt ist, allgemein durch folgende sechs Bedingungen charakterisirt:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} &= \Sigma X \\ \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2} &= \Sigma Y \\ \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2} &= \Sigma Z \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) &= \Sigma (x Y - y X) = C_1 \\ \Sigma m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) &= \Sigma (y Z - z Y) = C_2 \\ \Sigma m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) &= \Sigma (z X - x Z) = C_3 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot (2)$$

von denen die drei ersten die translatorische Bewegung des Schwerpunktes (in den man sich die ganze Masse des Körpers, wie in der ersten Vorlesung besprochen, concen-

trirt denken kann), die drei letzten hingegen die rotatorische Bewegung des Körpers um seinen Schwerpunkt charakterisieren.

Wenn sich dabei der Körper völlig frei bewegt, so findet seine Drehung um den Schwerpunkt so statt, als ob derselbe fest wäre. Wir denken uns also ein Coordinatensystem durch den Schwerpunkt gelegt, welches sich nicht mit dem Körper dreht, sondern stets im Raume parallele Richtungen behält. Man kann daher ein solches Coordinatensystem bei Rotationsuntersuchungen, wo man von der translatorischen Bewegung des Schwerpunktes absieht, als ein festes betrachten, wenn auch nicht als ein absolut festes, da sich der Schwerpunkt eben noch translatorisch bewegt, und ein fester Punkt, wie schon in Vorlesung 2 erwähnt, überhaupt nicht existirt. Ein solches, „festes Coordinatensystem“ liegt den sämtlichen folgenden Untersuchungen zu Grunde. Für die Himmelskörper ist dabei die getrennte Betrachtungsweise der translatorischen und rotatorischen Bewegung, wie schon in der ersten Vorlesung erwähnt, deshalb möglich, weil dieselben einerseits nahezu kugelförmige Gestalt haben, Kugeln sich aber nach der Potentialtheorie so anziehen, als ob ihre ganze Masse im Schwerpunkte vereinigt wäre, und weil andererseits ihre Durchmesser verschwindend klein sind im Vergleich zu ihren Entfernungen. Daher kann man sie in der Störungstheorie als materielle Punkte ansehen, umgekehrt aber in der Rotationstheorie ihre Drehung um den Schwerpunkt für sich betrachten.

Dass die Drehung eines frei beweglichen festen Körpers wirklich so vor sich geht, als ob sein Schwerpunkt fest wäre, wollen wir noch zeigen. Dazu denken wir uns den Körper auf ein beliebiges festes Coordinatensystem x, y, z bezogen und legen durch seinen Schwerpunkt S , der sich zu einer beliebigen Zeit irgendwo im Raume befindet, ein zweites, dem ersten paralleles System x', y', z' . Seien nun die Coordinaten von S bezüglich des ersten Systemes ξ, η, ζ und diejenigen irgend eines Punktes des Körpers bezüglich des zweiten Systemes x', y', z' , so ist zunächst:

$$\begin{aligned} x' &= x - \xi \\ y' &= y - \eta \\ z' &= z - \zeta. \end{aligned}$$

Denkt man sich jetzt den Schwerpunkt einen Augenblick fest, so würde das zweite System x', y', z' fest im Raume sein und die ursprünglichen Bewegungsgleichungen (2) gälten, wenn auch nur rein momentan, so lange S fest, auch für das zweite System, also:

$$\begin{aligned} \Sigma m \left(x' \frac{d^2 y'}{dt^2} - y' \frac{d^2 x'}{dt^2} \right) &= \Sigma (x' Y - y' X) \\ \Sigma m \left(y' \frac{d^2 z'}{dt^2} - z' \frac{d^2 y'}{dt^2} \right) &= \Sigma (y' Z - z' Y) \\ \Sigma m \left(z' \frac{d^2 x'}{dt^2} - x' \frac{d^2 z'}{dt^2} \right) &= \Sigma (z' X - x' Z) \end{aligned}$$

Da aber in Wirklichkeit bei bewegten Körpern der Schwerpunkt nicht fest ist, so wissen wir vorläufig noch nicht, ob die letzteren Gleichungen allgemein gültig sind. Offenbar ist aber ihre Gültigkeit dann bewiesen, wenn gezeigt wird, dass sie aus dem ursprünglichen System (I) folgen.

Durch Multiplication der zweiten und dritten Gleichung von System (1) bezüglich mit ξ und η und Subtraction folgt aber:

$$\Sigma m \left(\eta \frac{d^2 z}{dt^2} - \xi \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = \Sigma (\eta Z - \xi Y).$$

Und wenn wir diese Gleichung von der zweiten Gleichung im System (2) abziehen, ergibt sich:

$$\Sigma m \left[(y - \eta) \frac{d^2 z}{dt^2} - (z - \xi) \frac{d^2 y}{dt^2} \right] = \Sigma [(y - \eta) Z - (z - \xi) Y]$$

oder:

$$\Sigma m \left(y' \frac{d^2 z}{dt^2} - z' \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = \Sigma (y' Z - z' Y).$$

Da nun aber für das zweite System, weil S Ursprung:

$$\Sigma m x' = \Sigma m y' = \Sigma m z' = 0,$$

also auch:

$$\Sigma m y' \frac{d^2 \xi}{dt^2} = 0$$

$$\Sigma m z' \frac{d^2 \eta}{dt^2} = 0$$

und mithin:

$$\Sigma m \left(y' \frac{d^2 \xi}{dt^2} - z' \frac{d^2 \eta}{dt^2} \right) = 0$$

ist, so ergibt sich durch Subtraction dieser letzteren Gleichung von der zuvor erhaltenen:

$$\Sigma m \left[y' \frac{d^2 (z - \xi)}{dt^2} - z' \frac{d^2 (y - \eta)}{dt^2} \right] = \Sigma (y' Z - z' Y)$$

oder:

$$\Sigma m \left[y' \frac{d^2 z'}{dt^2} - z' \frac{d^2 y'}{dt^2} \right] = \Sigma (y' Z - z' Y)$$

und analog für die übrigen Gleichungen. Somit folgen aus den wirklichen Bewegungsgleichungen des Körpers thatsächlich diejenigen, welche gelten würden, wenn der Schwerpunkt S fest wäre und die Rotationsbewegung des Körpers gegen ein durch S gehendes System findet mithin thatsächlich so statt, als ob dies System fest im Raume wäre. Bei der Präcession liegt, wie gesagt, stets ein solches durch den Schwerpunkt gehendes Coordinatensystem zu Grunde, welches man als solches kurz als „das im Raume feste System“ zu bezeichnen pflegt, im Gegensatze zu einem, mit dem in Drehung begriffenen Körper fest verbundenen, welches man kurz als „das im Raume bewegliche System“ bezeichnet.

Denken wir uns nun den starren Körper nur einer Rotation um eine einzige feste Axe, etwa die x -Axe, ausgesetzt, und ziehen eine Senkrechte von einem beliebigen Punkte m des Körpers auf diese Axe, deren Länge r und deren Winkel mit der xy -Ebene eines Systemes x, y, z , auf welches wir den Körper beziehen, α sei, dann sind die rechtwinkligen Coordinaten von m :

$$y = r \cos \alpha$$

$$z = r \sin \alpha$$

und folglich:

$$\frac{dy}{dt} = - r \sin(\alpha) \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = + r \cos(\alpha) \frac{d\alpha}{dt},$$

wo man, analog wie bei der translatorischen Bewegung, in welcher der erste Differentialquotient von Raum und Zeit als Geschwindigkeit definirt erscheint, auch bei der rotatorischen Bewegung:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega$$

als die „Winkelgeschwindigkeit“ des Körpers um seine Drehaxe bezeichnet. Wir werden später bei der Theorie der Präcession sehen, dass ω für die Erde so gut wie constant ist.

Worauf es uns jetzt ankommt, ist die natürliche Ableitung einer grundlegenden Definition.

Zunächst ist ersichtlich, dass die Gleichungen (2), wählen wir z. B. die zweite:

$$\Sigma m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = \Sigma (yZ - zY),$$

nichts anderes als der Ausdruck des Flächensatzes für die rotatorische Bewegung sind, wenn keine äusseren Kräfte wirken, indem man offenbar auch schreiben kann:

$$\frac{d}{dt} \Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = \Sigma (yZ - zY)$$

ein Ausdruck, der, wenn keine äusseren Kräfte wirken, d. h. Y und Z und also auch das „Drehmoment“ $\Sigma (yZ - zY) = 0$ ist, in

$$\Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = \text{constans}$$

übergeht (cf. Vorlesung 2).

Bilden wir nun für unseren Fall der Drehung des Körpers um die feste x -Axe die Constante des Flächensatzes, so wird dieselbe:

$$y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = r^2 \cos \alpha^2 \cdot \omega + r^2 \sin \alpha^2 \cdot \omega = r^2 \cdot \omega$$

und folglich, weil r bei dem starren Körper constant bleibt:

$$y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} = r^2 \frac{d\omega}{dt}.$$

Da aber $\frac{d\omega}{dt}$ für alle Punkte des starren Körpers denselben Werth hat, während m und r variiren, so folgt als Bewegungsgleichung für den in Rotation um die feste x -Axe begriffenen Körper, indem $\frac{d\omega}{dt}$ vor das Summenzeichen gesetzt werden kann:

$$\frac{d\omega}{dt} \cdot \Sigma m r^2 = \Sigma (yZ - zY) = C_2.$$

Die Grösse $\Sigma m r^2$ ist es, welche man als das „Trägheitsmoment“ des Körpers bezüglich der x -Axe zu bezeichnen pflegt. Ersetzt man r durch die rechtwinkligen Coordinaten, so erhält man als Ausdrücke für die Trägheitsmomente bezüglich der x , y , z -Axe allgemein:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m (y^2 + z^2) &= a \\ \Sigma m (x^2 + z^2) &= b \\ \Sigma m (x^2 + y^2) &= c \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Beiläufig soll hier noch auf eine zweite Analogie der rotatorischen Bewegung mit der translatorischen hingewiesen werden. Die Gleichung:

$$m \frac{d\omega}{dt} = C_2$$

weist offenbar eine völlige Analogie mit der Gleichung auf, die man dadurch erhält, dass man den ersten Differentialquotienten von Geschwindigkeit und Zeit, oder, was auf dasselbe hinausläuft, den zweiten Differentialquotienten von Weg und Zeit bei der translatorischen Bewegung als Beschleunigung definiert:

$$m \frac{dc}{dt} = m \frac{d^2 s}{dt^2} = P.$$

Nur dass bei der rotatorischen Bewegung das Trägheitsmoment a an Stelle der Masse m , die Winkelgeschwindigkeit ω an Stelle der progressiven Geschwindigkeit c tritt, während die Kraft P durch das Drehmoment C_2 ersetzt wird.

In den späteren Grundgleichungen der Präcession treten aber nicht die Trägheitsmomente a, b, c selbst, sondern ihre Maximal- und Minimalwerthe A, B, C auf. Daher müssen wir unsere einleitenden Betrachtungen noch etwas fortsetzen, um zu diesen Begriffen zu gelangen, denen eine bestimmte geometrische Bedeutung zukommt.

Offenbar existiren ebenso gut wie bezüglich der x, y, z -Axe auch noch in Bezug auf die unendlich vielen übrigen Geraden, die durch den Körper gezogen werden können, Trägheitsmomente. Das Problem, alle diese unendlich vielen verschiedenen Trägheitsmomente separatim zu finden, lässt sich indessen auf zwei Aufgaben zurückführen. Es kann nämlich, wenn das Trägheitsmoment bezüglich einer bestimmten Axe bekannt ist, erstens das Trägheitsmoment zu einer anderen, der gegebenen Axe parallelen, und zweitens dasjenige zu einer solchen Axe, welche die erstere Axe schneidet, gesucht werden.

Den erstgenannten Fall können wir sofort erledigen. Denken wir uns dazu eine beliebige Axe \mathfrak{A}_1 durch den Körper gezogen (cf. Fig. 25) und die zu ihr parallele \mathfrak{A}_2 gleich durch den Schwerpunkt gehend und seien r_1 und r_2 bezüglich die senkrechten Entfernungen eines Massentheilchens m von diesen Axen, deren Abstand n sei, δ der Winkel zwischen n und r_2 , dann sind zunächst die Trägheitsmomente bezüglich beider Axen \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 :

$$a_1 = \Sigma m r_1^2$$

$$a_2 = \Sigma m r_2^2$$

und ferner ist:

$$r_1^2 = r_2^2 + n^2 - 2 n r_2 \cos \delta.$$

Multipliziert man diese Relation mit m , so erhält man mit Hinblick darauf, dass die entstehende Relation für jedes Massentheilchen gilt und dass:

$$\Sigma m = M$$

die Gesamtmasse des Körpers repräsentirt:

$$\Sigma m r_1^2 = \Sigma m r_2^2 + n^2 M - 2 n \Sigma m r_2 \cos \delta.$$

Wählen wir jetzt den Schwerpunkt S als Ursprung und sei die von S auf die Axe \mathfrak{A}_1 senkrechte Gerade die x -Axe, die durch S gehende Axe die z -Axe, so ist die Dreiecksseite n der x -Axe parallel und folglich δ der Winkel zwischen der x -Axe und r_2 . Mithin ist $r_2 \cos \delta$ die x -Coordinate von m , also:

$$a_1 = a_2 + n^2 M - 2 n \Sigma m x.$$

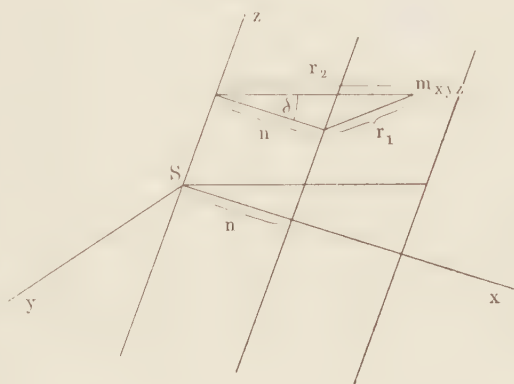
Da nun aber, wenn ξ, η, ζ die Coordinaten des Schwerpunktes S sind:

$$\Sigma m x = M \xi, \quad \Sigma m y = M \eta, \quad \Sigma m z = M \zeta$$

ist, in unserem Fall jedoch, wo S Ursprung, $\xi = \eta = \zeta = 0$ und folglich auch $\Sigma m x = 0$ ist, so ergibt sich:

$$a_1 = a_2 + n^2 M.$$

Fig. 25.



Die Axe \mathfrak{A}_2 geht durch den Schwerpunkt. Wir können uns nun eine Axe \mathfrak{A}_3 denken und uns fragen, welche Beziehung besteht zwischen der Axe \mathfrak{A}_1 und der Axe \mathfrak{A}_3 , deren Abstand vom Schwerpunkte n_1 sei; das Trägheitsmoment bezüglich derselben ist dann:

$$a_3 = a_2 + n_1^2 M,$$

also, da:

$$a_2 = a_1 - n^2 M$$

ist, so wird:

$$a_3 = a_1 + (n_1^2 - n^2) M.$$

Durch diese Relation ist, wenn das Trägheitsmoment bezüglich irgend einer Axe gegeben, dasjenige bezüglich einer parallelen Axe aus ersterem findbar.

Uns interessirt nun aber weit mehr der zweite Fall, dass sich die beiden Axen schneiden, weil er uns direct auf den Begriff der Hauptträgheitsaxen und Hauptträgheitsmomente führt, die wir später brauchen.

Wir denken uns einen ganz beliebigen Körper und durch einen beliebigen Punkt in ihm ein vorläufig auch noch beliebiges Coordinatensystem x, y, z gelegt, das wir erst später specialisiren werden. Durch diesen Körper legen wir beliebig viele Axen, die sich alle im Ursprunge O schneiden. Denken wir nun die Trägheitsmomente a_1, a_2, a_3, \dots bezüglich aller dieser unendlich vielen Axen berechnet und auf allen Axen vom Ursprunge aus Gerade aufgetragen, die zunächst in noch unbestimmter Vorstellung etwa gerade die Längen von a_1, a_2, a_3, \dots selbst haben mögen, so liegen die Endpunkte aller dieser Geraden jedenfalls auf einer bestimmten Fläche, die vielleicht im Stande sein könnte, uns über den Verlauf der Trägheitsmomente eine anschauliche Vorstellung zu geben. Jedenfalls können wir den Charakter dieser Fläche durch die Art der Auftragung der Trägheitsmomente selbst bestimmen.

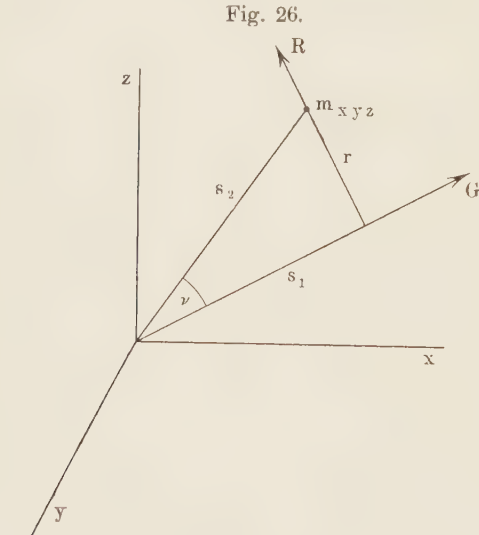


Fig. 26.

Durch diesen Körper legen wir beliebig viele Axen, die sich alle im Ursprunge O schneiden. Denken wir nun die Trägheitsmomente a_1, a_2, a_3, \dots bezüglich aller dieser unendlich vielen Axen berechnet und auf allen Axen vom Ursprunge aus Gerade aufgetragen, die zunächst in noch unbestimmter Vorstellung etwa gerade die Längen von a_1, a_2, a_3, \dots selbst haben mögen, so liegen die Endpunkte aller dieser Geraden jedenfalls auf einer bestimmten Fläche, die vielleicht im Stande sein könnte, uns über den Verlauf der Trägheitsmomente eine anschauliche Vorstellung zu geben. Jedenfalls können wir den Charakter dieser Fläche durch die Art der Auftragung der Trägheitsmomente selbst bestimmen.

Zunächst müssen wir den analytischen Ausdruck des Trägheitsmomentes T bezüglich einer beliebigen durch O gehenden Geraden G , deren Richtungscosinus mit den drei Coordinatenachsen kurz α, β, γ seien, allgemein aufstellen. Es ist:

$$T = \sum m r^2 = \sum m (s_2^2 - s_1^2).$$

Die Fig. 26 ergibt aber, wenn u, v, w die Richtungscosinus der Geraden s_2 mit den drei Axen sind:

$$r = s_2 \sin v,$$

ferner:

$$\cos v = \alpha u + \beta v + \gamma w,$$

also:

$$\sin v^2 = 1 - \cos v^2 = 1 - (\alpha u + \beta v + \gamma w)^2.$$

Mithin das Trägheitsmoment:

$$T = \sum m s_2^2 \sin v^2 = \sum m s_2^2 - \sum m s_2^2 \cos v^2.$$

Nun wird aber, indem $s_2 u, s_2 v, s_2 w$ bezüglich die x, y, z -Coordinate vom Punkte m sind, einerseits:

$$\left. \begin{aligned} s_2^2 \cos v^2 &= s_2^2 (\alpha u + \beta v + \gamma w)^2 \\ &= s_2^2 \alpha^2 u^2 + s_2^2 \beta^2 v^2 + s_2^2 \gamma^2 w^2 + 2 s_2^2 \alpha \beta uv + \dots \\ &= \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 + 2 \alpha \beta xy + 2 \alpha \gamma xz + 2 \beta \gamma yz \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Und andererseits ergibt sich:

$$s_2^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

oder, da:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

ist:

$$s_2^2 = (x^2 + y^2 + z^2) (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

$$\text{also: } s_2^2 = \alpha^2 (x^2 + y^2 + z^2) + \beta^2 (x^2 + y^2 + z^2) + \gamma^2 (x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\text{oder: } s_2^2 = \alpha^2 x^2 + \alpha^2 (y^2 + z^2) + \beta^2 y^2 + \beta^2 (x^2 + z^2) + \gamma^2 z^2 + \gamma^2 (x^2 + y^2).$$

Zieht man von dieser Gleichung (4) ab, so folgt:

$$s_2^2 \sin v^2 = \alpha^2 (y^2 + z^2) + \beta^2 (x^2 + z^2) + \gamma^2 (x^2 + y^2) - 2 \beta \gamma yz - 2 \alpha \gamma xz - 2 \alpha \beta xy.$$

Multiplizieren wir jetzt mit m , summieren über alle Massentheilchen und setzen noch zur Abkürzung, wie schon früher:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m (y^2 + z^2) &= a \\ \Sigma m (x^2 + z^2) &= b \\ \Sigma m (x^2 + y^2) &= c \end{aligned} \right\}$$

und ferner:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m yz &= d \\ \Sigma m xz &= e \\ \Sigma m xy &= f \end{aligned} \right\}$$

so wird der allgemeine Ausdruck für das Trägheitsmoment bezüglich der beliebigen durch O gehenden Geraden G :

$$T = a \alpha^2 + b \beta^2 + c \gamma^2 - 2 d \beta \gamma - 2 e \alpha \gamma - 2 f \alpha \beta,$$

oder, wenn wir an Stelle der abgekürzten Schreibweise die Cosinus wirklich ausschreiben, unter α, β, γ selbst also die Winkel verstehen:

$$T = a \cos \alpha^2 + b \cos \beta^2 + c \cos \gamma^2 - 2 d \cos \beta \cos \gamma - 2 e \cos \alpha \cos \gamma - 2 f \cos \alpha \cos \beta \quad (5)$$

Statt jetzt auf Grund dieses Ausdruckes uns sogleich durch Auftragung einer glücklich gewählten Function von T ein geometrisches Bild vom Verlaufe aller Trägheitsmomente zu verschaffen, wobei sich die drei in den Gleichungen der Präcession auftretenden Hauptträgheitsmomente ergeben werden, wollen wir für das Trägheitsmoment T noch einen zweiten ebenso allgemeingültigen Ausdruck, der später bei der Präcession gebraucht wird, ableiten auf Grund der Hesse'schen Normalform der Ebene, für welche das vom Koordinatenursprung gefällte Lot die Länge s_1 und die Richtung α, β, γ hat, in welcher Ebene die Gerade R liegt (cf. Fig. 26) und wollen dann in Parallele zeigen, wie beide Ausdrücke das gewünschte Resultat ergeben.

Gehen wir vom Ausdrücke

$$T = \Sigma m (s_2^2 - s_1^2)$$

aus und bedenken, dass für jeden Punkt x, y, z der Geraden R die Gleichung:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = s_1$$

gilt, wo s_1 bekannt, wenn α, β, γ und x, y, z gegeben sind, so schreibt sich das Trägheitsmoment auch:

$$T = \Sigma m [x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2]$$

oder, da mit Hinblick auf die eingeführten Abkürzungen $a, b \dots f$, wie leicht zu sehen:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m x^2 &= \frac{b + c - a}{2} \\ \Sigma m y^2 &= \frac{c + a - b}{2} \\ \Sigma m z^2 &= \frac{a + b - c}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

wird, auch:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{b + c - a}{2} \sin^2 \alpha + \frac{c + a - b}{2} \sin^2 \beta + \frac{a + b - c}{2} \sin^2 \gamma \\ &\quad - 2d \cos \beta \cos \gamma - 2e \cos \gamma \cos \alpha - 2f \cos \beta \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

Die Relationen (6) werden später bei Ableitung des Potentials der Sonnen- und Mondanziehung gebraucht.

Offenbar könnte man nun jede beliebige Function des gefundenen allgemeinen Ausdruckes für das Trägheitsmoment (5) oder (7) auf den unendlich vielen von O ausgehenden Axen auftragen, z. B. das Quadrat oder die dritte Potenz von T etc. Die zwischen sämtlichen Trägheitsmomenten bestehende Gesetzmässigkeit erkennen wir jedoch am besten, wenn wir längs aller von O ausgehenden Geraden nach Poinso^t die reciproke Quadratwurzel des Trägheitsmomentes:

$$\frac{1}{+ \sqrt{T}}$$

auftragen. Dann wird einerseits unsere Gleichung für T besonders einfach und darum andererseits auch das geometrische Abbild für den Verlauf der Trägheitsmomente

besonders anschaulich, d. h. die Fläche, welche von den durch Auftragung von $\frac{1}{+ \sqrt{T}}$ bestimmten Endpunkten aller unendlich vielen von O ausgehenden Axen gebildet ist, wird eine verhältnissmässig einfache.

Wenn die Gerade G ihre Lage im Raume beliebig ändert, so ändern sich auch ihre Richtungswinkel α, β, γ , allein die Grössen a, b, c, d, e, f bleiben constant, wenn wir die Trägheitsmomente bezüglich anderer und anderer Geraden berechnen. Tragen wir nun auf einer Geraden von O aus ganz allgemein das Stück $OP = g$ auf, wo also:

$$g = \frac{1}{\sqrt{T}}$$

ist, so sind die drei rechtwinkligen Coordinaten von P :

$$\begin{aligned} \xi &= g \cos \alpha \\ \eta &= g \cos \beta \\ \zeta &= g \cos \gamma \end{aligned}$$

und folglich wird, weil:

$$T = \frac{1}{g^2}$$

ist, die zwischen den Coordinaten des Punktes P bestehende Gleichung, indem jetzt:

$$T = a \cos^2 \alpha + b \cos^2 \beta + c \cos^2 \gamma - 2d \cos \beta \cos \gamma - 2e \cos \alpha \cos \gamma - 2f \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{g^2}$$

ist, ganz allgemein:

$$a \xi^2 + b \eta^2 + c \zeta^2 - 2d \eta \zeta - 2e \xi \zeta - 2f \xi \eta = 1.$$

Diese Gleichung der von uns gesuchten und durch unsere Annahme über T vorgeschriebenen Fläche ist aber eine Gleichung zweiten Grades.

Wenn nun die einzelnen Massentheilchen des Körpers nicht in einer Geraden liegen, so sind stets welche vorhanden, für die g nicht Null wird. Dann kann also auch

oder gekürzt wieder:

$$a\xi^2 + b\eta^2 + c\xi^2 - 2d\eta\xi - 2e\xi\xi - 2f\xi\eta = 1.$$

Das ist aber unsere frühere Fläche zweiten Grades, die, wenn wir unser ursprüngliches Coordinatensystem erstens durch den Schwerpunkt gehen lassen und zweitens so drehen, dass es ein Haupttaxensystem wird, die Gleichung des Centralträgheitsellipsoides:

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\xi^2 = 1$$

repräsentirt, welches somit, um es nochmals hervorzuheben, bloss eine geometrische Interpretation des Trägheitsmomentes T bezüglich einer beliebigen Geraden ist.

Speciell für die Erde, welche ein Rotationsellipsoid ist, werden die beiden Hauptträgheitsmomente bezüglich der Aequatoraxen, A und B , gleich. Für die Erde kommen also bloss die Hauptträgheitsmomente A und C in Betracht.

Ausser der Hauptträgheitsaxe ξ des Erdkörpers, welche nach dem Nordpol zeige, spielen nun in der Theorie der Bewegung der Erdaxe noch zwei andere Begriffe, die mit den folgenden mechanischen Untersuchungen aufs Innigste zusammenhängen, eine grundlegende Rolle: die Begriffe der „momentanen“ oder „instantanen“ Drehaxe, \mathcal{A} , der Erde und der „invariablen“ Normalen, N . Fasst man nämlich das Gesamtbild der Bewegung der Erdaxe im Erdinneren und im Raume ins Auge, wie es einerseits durch den Euler'schen Cyklus und andererseits durch die Präcessions- und Nutationsbewegung dargestellt wird, so zeigt sich, wie wir sehen werden, dass die instantane Drehaxe \mathcal{A} gegen die Hauptträgheitsaxe ξ und die invariable Normale N eine äusserst complicirte Bewegung beschreibt, für die ein anschauliches Bild zu gewinnen der Zweck der folgenden Untersuchungen ist.

Zum Begriff der momentanen Drehaxe (Instantanaxe) eines Körpers gelangt man am natürlichsten bei der folgenden Ableitung der Euler'schen Grundgleichungen für die Rotation. Man kann nämlich die gewöhnlichen Gleichungen der Rotation:

$$\Sigma m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \Sigma (xY - yX) = C_1$$

$$\Sigma m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = \Sigma (yZ - zY) = C_2$$

$$\Sigma m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = \Sigma (zX - xZ) = C_3$$

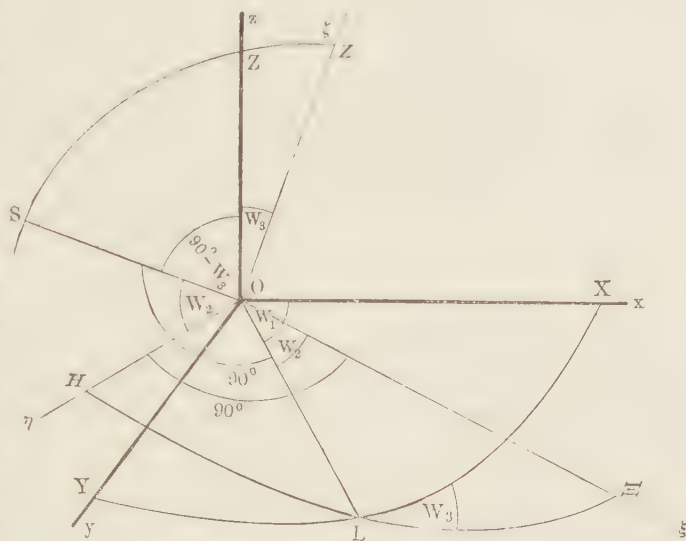
durch eine analytische Transformation überführen in eine andere, zuerst von Euler gegebene, dann von Lagrange verbesserte Form, in der die Hauptträgheitsmomente A, B, C auftreten, dann aber noch gewisse andere Grössen, nämlich die drei Rotationscomponenten p, q, r der Drehung um die Momentanaxe \mathcal{A} , um die der Körper jeweilig bloss einen unendlich kleinen Zeitmoment dt rotirt, indem diese Axe ihre Lage im Körper stetig ändert.

Wir wollen im Folgenden jedoch die Euler'schen Gleichungen, welche die Grundlage der Theorie der Bewegung der Erdaxe bilden, nicht durch diese analytische Transformation ableiten, die auch im Oppolzer'schen Werke wiedergegeben ist, sondern wollen sie aus den mechanischen Vorstellungen selbst entwickeln, ein Weg, der zugleich eine Vorstellung von den drei unendlich kleinen Componenten p, q, r der Drehung um die, in jedem Augenblicke ihre Lage im Erdkörper verschiebende Instantanaxe \mathcal{A} ergibt.

Wir denken uns einen beliebigen starren Körper, in dem nur ein einziger Punkt,

der Schwerpunkt, fest sei und legen durch diesen erstens ein im Raume festes Coordinatensystem x, y, z und zweitens ein im Raume bewegliches ξ, η, ζ , das mit dem Körper fest verbunden ist. Die Aufgabe besteht allgemein darin, die Drehung des Körpers am besten zu charakterisiren. Um die Winkel zwischen beiden Systemen durch Bogen darstellen zu können, construiren wir um den Ursprung O eine Kugel vom Radius 1 (Fig. 27), deren Durchschnittpunkte mit den festen Axen bezüglich X, Y, Z , mit den beweglichen Axen aber Ξ, H, Z seien. Die Linie vom Ursprunge nach dem einen der zwei Schnittpunkte der beiden grössten Kugelschnitte, die durch X, Y und Ξ, H gelegt werden können, sei OL , d. i. also auch die Schnittlinie der xy - und $\xi\eta$ -Ebene. Den

Fig. 27.



Winkel dieser Geraden OL mit der festen x -Achse bezeichnen wir mit W_1 , denjenigen von OL mit der beweglichen ξ -Achse dagegen mit W_2 . Der Winkel zwischen der xy - und $\xi\eta$ -Ebene, d. h. der Winkel zwischen der z - und ζ -Achse, sei W_3 . L ist also der aufsteigende Knoten der ΞH -Ebene bezüglich der XY -Ebene, W_3 die Neigung. Zugleich erhellt, dass $\angle SOL = 90^\circ$, ferner $\angle \eta O \xi = 90^\circ$, also $\angle SO \eta = \angle LO \xi = W_2$ ist.

Die drei Winkel W_1, W_2, W_3 , welche die Lage des beweglichen Systemes gegen das feste vollständig charakterisiren, können wir somit im Lagrange'schen Sinne als generalisirte Coordinaten betrachten, d. h. wir können setzen, wenn nach Lagrange p_i allgemein generalisirte Coordinaten und q_i generalisirte Geschwindigkeiten bezeichnen:

$$\begin{aligned} p_1 &= W_1; & q_1 &= \frac{dp_1}{dt} = \frac{dW_1}{dt}; & \delta p_1 &= \delta W_1 \\ p_2 &= W_2; & q_2 &= \frac{dp_2}{dt} = \frac{dW_2}{dt}; & \delta p_2 &= \delta W_2 \\ p_3 &= W_3; & q_3 &= \frac{dp_3}{dt} = \frac{dW_3}{dt}; & \delta p_3 &= \delta W_3, \end{aligned}$$

wo die „ δ “ im Sinne der Mechanik virtuelle Verschiebungen bezeichnen.

Die y -Achse ist in der Figur nach hinten liegend gedacht. Um nun zunächst die virtuelle Verschiebung unseres Körpers allgemein zu untersuchen, ertheilen wir:

1. W_1 den virtuellen Zuwachs δW_1 , wobei jedoch W_2 und W_3 constant bleiben sollen, so dass also $\delta W_2 = \delta W_3 = 0$ ist, und der Körper nur eine Drehung um die z -Achse um den Winkel δW_1 macht. Diese Drehung zerlegen wir in zwei Componenten, nämlich erstens in eine Drehung um die momentane ζ -Achse, deren Componente $\delta W_1 \cos W_3$ ist, und zweitens in eine Drehung um eine auf der ξ -Achse senkrechte mit $z\xi$ in einem grössten Kreise liegende Achse OS , welche offenbar $\delta W_1 \sin W_3$ ist. Setzen wir zur Abkürzung in der ganzen folgenden Ableitung:

$$\begin{array}{ll} \sin W_1 = \alpha & \cos W_1 = a \\ \sin W_2 = \beta & \cos W_2 = b \\ \sin W_3 = \gamma & \cos W_3 = c \end{array}$$

so sind also die beiden Componenten der Drehung um die z -Axe δW_1 , $c\delta W_1$ bezüglich $O\xi$ und $\gamma\delta W_1$ bezüglich OS .

Die Drehung $\gamma\delta W_1$ zerlegen wir nun abermals in zwei Componenten, in eine solche, um die η -Axe und in eine zweite um die ξ -Axe, deren Werthe $b\gamma\delta W_1$ und $-\beta\gamma\delta W_1$ sind, indem $\angle SO\eta = W_2$, wie aus der Figur ersichtlich ist. Mithin macht der Körper, wenn W_1 variabel, aber W_2 und W_3 constant sind, um die ξ, η, ξ -Axe bezüglich die Drehungen:

$$\begin{array}{l} -\beta\gamma\delta W_1 \\ +b\gamma\delta W_1 \\ +c\delta W_1, \end{array}$$

welche umgekehrt wieder zur Resultante δW_1 um die z -Axe componirt werden können.

Wenn II. W_2 den virtuellen Zuwachs δW_2 erhält, jedoch $\delta W_1 = \delta W_3 = 0$ ist, so wird die ξ -Axe in der ξ, η -Ebene etwas fortrücken, der Körper sich also bloss um die ξ -Axe um δW_2 drehen. Da aber die ξ -Axe mit dem Körper fest verbunden ist, so findet eine Drehung von der positiven η -Axe gegen die positive ξ -Axe statt; allein diese Drehung geht dem Sinne der Zählungsrichtung entgegengesetzt vor sich. Denn wenn die Drehung um die ξ -Axe stattfindet, so ist die von der positiven ξ -Axe zur positiven η -Axe erfolgende Drehung positiv. Der Drehungswinkel ist jetzt also negativ und gleich $-\delta W_2$. Da die Figur hopfenwendig, so sind positive Drehungen: $xy, yz, zx, \xi\eta, \eta\xi, \xi\xi, LS, S\xi, \xi L$. Die Drehungen erfolgen also entgegengesetzt dem astronomischen Gebrauch im Sinne des Uhrzeigers.

Wächst III. W_3 um δW_3 und bleiben dabei W_1 und W_2 constant, so dass $\delta W_1 = \delta W_2 = 0$ ist, so wird sich die ξ -Axe verschieben, und da sie fest mit dem Körper verbunden ist, so wird sich der ganze Körper jetzt um die Axe OL um den Winkel δW_3 drehen, wobei jedoch diese Drehung positiv ist. Diese letztere Drehung ist offenbar in zwei Componenten zerlegbar, in eine solche um die ξ -Axe: $b\delta W_3$ und in eine solche um die η -Axe: $\beta\delta W_3$.

Ueber jede mögliche virtuelle Verschiebung des beweglichen Systemes ξ, η, ξ (das wir, weil es fest mit dem Körper verbunden, nun statt seiner ins Auge fassen) orientirt uns also in übersichtlicher Weise folgende Tabelle:

Drehung um:	δW_1	δW_2	δW_3	$\delta W_1, \delta W_2, \delta W_3$
ξ -Axe	$-\beta\gamma\delta W_1$	—	$+b\delta W_3$	$-\beta\gamma\delta W_1 + b\delta W_3 = \delta\chi$
η - "	$+b\gamma\delta W_1$	—	$+\beta\delta W_3$	$+b\gamma\delta W_1 + \beta\delta W_3 = \delta\varphi$
ξ - "	$+c\delta W_1$	$-\delta W_2$	—	$+c\delta W_1 - \delta W_2 = \delta\psi$

Dieselbe zeigt, was später für den Begriff der Instantanaxe \mathcal{A} wichtig ist, in welcher Weise die gesammten um die ξ, η, ξ -Axe stattfindenden Drehungen $\delta\chi, \delta\varphi, \delta\psi$ charakterisirt sind.

Auch die „generalisirten“ Kräfte P_i (wie sie in den Lagrange'schen Bewegungsgleichungen I. und II. Gattung auftreten), in unserem Fall die Momente, lassen sich jetzt für unser Problem berechnen. Aus der Mechanik ist bekannt, dass, wenn sich ein beliebiger fester Körper um irgend eine Axe um den unendlich kleinen Winkel δw dreht, die geleistete Arbeit stets δw mal der Momentensumme ist. Folglich sind jetzt,

wenn D, E, F die Momenteßsummen bezüglich der ξ, η, ζ -Axe repräsentiren, die durch die Drehungen $\delta\chi, \delta\varphi, \delta\psi$ geleisteten Arbeiten bezüglich:

$$D\delta\chi, \quad E\delta\varphi, \quad F\delta\psi.$$

Wachsen also alle drei Winkel gleichzeitig, so ist die geleistete Gesamtarbeit:

$$D\delta\chi + E\delta\varphi + F\delta\psi = P_1\delta W_1 + P_2\delta W_2 + P_3\delta W_3,$$

mithin durch Substitution der Werthe von $\delta\chi, \delta\varphi, \delta\psi$:

$$P_1\delta W_1 + P_2\delta W_2 + P_3\delta W_3 = (-\beta\gamma D + b\gamma E + cF)\delta W_1 - F\delta W_2 + (bD + \beta E)\delta W_3.$$

Da aber diese Relation für jede beliebige virtuelle Verrückung besteht, so muss sie auch gelten, wenn $\delta W_2 = \delta W_3 = 0$, hingegen δW_1 nicht Null ist u. s. f. So folgen für die generalisirten Kräfte bei unserem Problem die Ausdrücke:

$$P_1 = -\beta\gamma D + b\gamma E + cF$$

$$P_2 = -F$$

$$P_3 = +bD + \beta E.$$

Um nun zum Begriff der Momentanaxe zu gelangen, müssen wir von den virtuellen Zuwüchsen „ δ “ zu den wirklichen unendlich kleinen Zuwüchsen „ d “ übergehen. Diese wirklichen Zuwüchse der drei Winkel in der Zeit dt sind dW_1, dW_2, dW_3 und mithin die drei Winkelgeschwindigkeiten: $\frac{dW_1}{dt}, \frac{dW_2}{dt}, \frac{dW_3}{dt}$. Da aber die abgeleiteten Relationen für ganz beliebige virtuelle Verschiebungen gelten, so müssen sie auch für wirkliche bestehen und daher sind die δ mit den d vertauschbar. Seien also $d\chi, d\varphi, d\psi$ die Winkel, um die sich der Körper wirklich um die momentane ξ, η, ζ -Axe dreht, dann sind die drei Winkelgeschwindigkeiten um diese drei mit dem Körper fest verbundenen, im Raume beweglichen Axen ξ, η, ζ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\chi}{dt} &= -\beta\gamma \frac{dW_1}{dt} + b \frac{dW_3}{dt} = p \\ \frac{d\varphi}{dt} &= +b\gamma \frac{dW_1}{dt} + \beta \frac{dW_3}{dt} = q \\ \frac{d\psi}{dt} &= +c \frac{dW_1}{dt} - \frac{dW_2}{dt} = r \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

Diese drei unendlich kleinen Drehungen $d\chi, d\varphi, d\psi$, welche der Körper im Allgemeinen während der Zeit dt gleichzeitig um die drei Axen ξ, η, ζ ausführt, sind nun aber nach dem Gesetz der Zusammensetzung von unendlich kleinen Drehungen so zusammensetzbar, wie gewöhnliche Kräfte. Die einzige aus ihnen resultierende Drehung erfolgt dann um eine Axe, welche gegen die Coordinatenaxen geneigt ist, und diese Axe, um welche bloss die augenblickliche rein momentane Drehung erfolgt, weil sie selbst sich mit der Zeit ändert, ihre Lage im Körper fortwährend verschiebt, ist die in der Theorie der Präcession auftretende instantane Drehaxe. Indem also die gesammte resultierende Drehung

$$d\sigma = \sqrt{d\chi^2 + dq^2 + d\psi^2}$$

ist, erhält man für die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit der Erde (die wir uns gleich an Stelle des allgemeinen Körpers denken) um ihre momentane Drehaxe den Werth:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}$$

oder bei Einführung der in der Astronomie gebräuchlichen Abkürzungen:

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \dots \dots \dots (10)$$

Sind α, β, γ bezüglich die Richtungswinkel der Instantanaxe mit dem beweglichen Axensystem, wobei eine Verwechselung mit den eben momentan eingeführten Abkürzungen α, β, γ ausgeschlossen sein dürfte, so ist:

$$\begin{aligned} p &= \omega \cos \alpha \\ q &= \omega \cos \beta \\ r &= \omega \cos \gamma, \end{aligned}$$

d. h. p, q, r sind berechenbar, wenn man die Winkelgeschwindigkeit ω der Erde um ihre momentane Drehaxe, sowie deren augenblickliche Lage kennt. Es ist also auch:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \\ \cos \beta &= \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}. \end{aligned}$$

Diese Betrachtungen sind für das Folgende fundamental.

Löst man das Problem der Drehung eines Körpers um eine feste Axe z. B. mittelst der Hamilton'schen Bewegungsgleichungen, indem man den Winkel w , um den sich der Körper bloss drehen kann, als die einzige existirende generalisirte Variable auffasst, so ergibt sich leicht als Ausdruck für die lebendige Kraft der Drehung:

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \Sigma m r^2.$$

Dieser Ausdruck gilt also auch bezüglich der momentanen Drehaxe der Erde.

Specialisiren wir jetzt das bisher beliebige bewegliche System ξ, η, ζ so, dass es ein Hauptträgheitsaxensystem wird, um den allgemeinen Ausdruck für das Trägheitsmoment:

$$\begin{aligned} T &= a \cos \alpha^2 + b \cos \beta^2 + c \cos \gamma^2 - 2d \cos \alpha \cos \beta \\ &\quad - 2e \cos \alpha \cos \gamma - 2f \cos \beta \cos \gamma \end{aligned}$$

in der vereinfachten Form:

$$T = A \cos \alpha^2 + B \cos \beta^2 + C \cos \gamma^2$$

zu erhalten, so wird der Ausdruck für die lebendige Kraft der Drehung um die instantane Drehaxe in unserem Probleme, wo $\omega \cos \alpha = p$ etc. ist, sofort:

$$L = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

oder auf Grund der Bedeutung der drei unendlich kleinen Drehcomponenten p, q, r :

$$\begin{aligned} L &= A \frac{\left(-\beta \gamma \frac{dW_1}{dt} + b \frac{dW_3}{dt} \right)^2}{2} + B \frac{\left(b \gamma \frac{dW_1}{dt} + \beta \frac{dW_3}{dt} \right)^2}{2} \\ &\quad + C \frac{\left(c \frac{dW_1}{dt} - \frac{dW_2}{dt} \right)^2}{2}. \end{aligned}$$

Jetzt können wir die bekannten Lagrange'schen Bewegungsgleichungen zweiter Gattung, in denen p_i die generalisirten Coordinaten, q_i die generalisirten Geschwindigkeiten, P_i die generalisirten Kräfte und L die lebendige Kraft bedeuten:

$$P_i = \sum_1^n \frac{d}{dt} \frac{\partial L(p, q)}{\partial q_i} - \frac{\partial L(p, q)}{\partial p_i}$$

auf unser Problem der Rotation eines Körpers, in dem nur ein Punkt fest ist, direct anwenden, um sofort die allgemeinen Grundgleichungen der Rotation in der in der Astronomie gebrauchten Euler'schen Form zu erhalten, welche Poisson und Laplace der Lösung des Problems der Erdaxenbewegung zu Grunde gelegt haben.

Indem jetzt W_1, W_2, W_3 und ebenso $\frac{dW_1}{dt}, \frac{dW_2}{dt}, \frac{dW_3}{dt}$ independente Variable, also L eine Function dieser sechs Grössen und b, β, c, γ , nur Functionen von W_1, W_2, W_3 , nicht aber solche von den Ableitungen dieser drei Grössen sind, wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \frac{dW_2}{dt}} &= -C \left(c \frac{dW_1}{dt} - \frac{dW_2}{dt} \right) = -Cr \\ \frac{\partial L}{\partial W_2} &= A \left(-\beta \gamma \frac{dW_1}{dt} + b \frac{dW_3}{dt} \right) \left(-\gamma \frac{dW_1}{dt} \frac{\partial \beta}{\partial W_2} + \frac{dW_3}{dt} \frac{\partial b}{\partial W_2} \right) \\ &\quad + B \left(b \gamma \frac{dW_1}{dt} + \beta \frac{dW_3}{dt} \right) \left(\gamma \frac{dW_1}{dt} \frac{\partial b}{\partial W_2} + \frac{dW_3}{dt} \frac{\partial \beta}{\partial W_2} \right), \end{aligned}$$

oder, da:

$$\begin{aligned} \beta &= \sin W_2 \\ b &= \cos W_2 \end{aligned}$$

bedeutet, also:

$$\frac{\partial \beta}{\partial W_2} = \cos W_2 = b, \quad \frac{\partial b}{\partial W_2} = -\sin W_2 = -\beta$$

ist, so wird:

$$\frac{\partial L}{\partial W_2} = (B - A) pq.$$

Durch Substitution dieses Werthes in die Lagrange'sche Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \frac{dW_2}{dt}} \right) - \frac{\partial L}{\partial W_2} = -D_3$$

unseres Problemes folgt:

$$- \frac{d}{dt} (Cr) - (B - A) pq = -D_3,$$

oder, da das Hauptträgheitsmoment C von der Zeit unabhängig ist:

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq = D_3.$$

In dieser Gleichung kommen die ursprünglichen Winkel W_1, W_2, W_3 , die bezüglich der drei Coordinatenaxen nicht symmetrisch sind, gar nicht mehr vor. Die drei momentanen Drehcomponenten p, q, r , ferner die drei Hauptträgheitsmomente A, B, C und schliesslich die drei Drehmomente D_1, D_2, D_3 verhalten sich aber bezüglich der Coordinatenaxen völlig gleich. Daher erhalten wir aus letzterer Gleichung mit Umgehung der etwas complicirten Rechnung die beiden anderen einfach durch cyklische Vertauschung. Die Euler'schen Grundgleichungen der Rotation werden somit:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr &= \Sigma (\eta Z - \xi H) = D_1 \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) rp &= \Sigma (\xi \Xi - \eta Z) = D_2 \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq &= \Sigma (\xi H - \eta \Xi) = D_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

wohei also D_1, D_2, D_3 die Drehmomente bezüglich der beweglichen Axen ξ, η, ζ und Ξ, H, Z die Kräfte sind, analog wie früher C_1, C_2, C_3 die Drehmomente bezüglich der festen Axen repräsentirten.

Mit Hülfe dieser Gleichungen können wir den Begriff der invariablen Normalen, der, wie schon erwähnt, beim Problem der Erdaxenbewegung gleichfalls auftritt, fast unmittelbar ableiten. Nehmen wir nämlich an, dass keine äussere Kräfte wirken, in welchem Falle, wie wir schon früher sahen, die allgemeinen Rotationsgleichungen in der ursprünglichen Form nichts Anderes als der Ausdruck des Flächensatzes waren, so werden die Euler'schen Gleichungen:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C) qr \\ B \frac{dq}{dt} &= (C - A) rp \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B) pq. \end{aligned}$$

Auf die Integration dieser Gleichungen mittelst elliptischer Functionen, eine Aufgabe, die in der Theorie der Mondaxe eine Rolle spielt, indem beim Monde als nahezu dreiaxigen Ellipsoid alle drei Hauptträgheitsmomente verschieden sind, gehen wir hier nicht ein, da diese Untersuchungen uns von unserer Aufgabe, dem Problem der Erdaxenbewegung, abführen würden. Wir wollen nur zeigen, dass der Ausdruck, den man durch Multiplication der drei letzten Gleichungen bezüglich mit Ap, Bq, Cr und Addition erhält:

$$A^2 p \frac{dp}{dt} + B^2 q \frac{dq}{dt} + C^2 r \frac{dr}{dt} = 0$$

oder:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2}{2} \right) = 0,$$

d. h.:

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = \text{const.}$$

nichts Anderes als das Princip der Erhaltung der Flächen für die Rotation unseres Körpers ausdrückt, welches hier etwas complicirter erscheint, da die Coordinatenachsen beweglich sind.

Der Begriff des invariablen Vectors ergibt sich hierbei direct.

Allgemein lauten ja die Flächensätze in Polarcoordinaten:

$$\Sigma m r_1^2 \frac{d\chi}{dt} = e$$

$$\Sigma m r_2^2 \frac{d\varphi}{dt} = f$$

$$\Sigma m r_3^2 \frac{d\psi}{dt} = g,$$

Ausdrücke, die nach dem Früheren (Vorlesung 2) die Projectionen der doppelten unendlich kleinen, in der Zeit dt vom Radius vector bestrichenen Dreiecksflächen dividirt

durch dt sind. Man sieht aber direct, dass im Falle der Rotation die ersten Factoren in obigen Ausdrücken nichts Anderes als die Hauptträgheitsmomente A, B, C , die zweiten nichts Anderes als die drei Drehcomponenten um die Instantanaxe, p, q, r sind. Mithin ist der Ausdruck, der sich aus obigen Gleichungen durch Quadriren und Addiren ergibt:

$$e^2 + f^2 + g^2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2$$

wirklich gleich *const.* und der Ausdruck des Flächensatzes.

Es wird also auch eine vom Ursprung O ausgehende Gerade, der wir die Länge:

$$+ \sqrt{e^2 + f^2 + g^2} = + \sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2} = N$$

geben und deren Richtungscosinus mit den mit dem Körper beweglichen Hauptaxen ξ, η, ζ bezüglich:

$$\left. \begin{aligned} \cos(N, \xi) &= \frac{Ap}{\sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2}} = \frac{Ap}{N} \\ \cos(N, \eta) &= \frac{Bq}{\sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2}} = \frac{Bq}{N} \\ \cos(N, \zeta) &= \frac{Cr}{\sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2}} = \frac{Cr}{N} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

seien, erstens eine vollständig constante Länge und zweitens eine völlig unveränderliche Richtung im Raume haben, und dasselbe wird für eine Ebene der Fall sein, die auf dem genannten Vector senkrecht steht. Diese Ebene nennt Laplace die unveränderliche Ebene und eine durch das Vorhergehende gekennzeichnete Gerade, die eine Richtung darstellt, nach welcher die Summe der Flächenmomente ein Maximum ist, ist es, die man als die invariable Normale bezeichnet. Dieselbe hat also die Länge:

$$N = \sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2} \dots \dots \dots (13)$$

Der Winkel, den die invariable Normale mit der momentanen Drehaxe bildet, den wir später auch brauchen, ist:

$$\cos n = \cos(N, \xi) \cos \alpha + \cos(N, \eta) \cos \beta + \cos(N, \zeta) \cos \gamma$$

oder, da:

$$\cos \alpha = \frac{p}{\omega}, \quad \cos \beta = \frac{q}{\omega}, \quad \cos \gamma = \frac{r}{\omega},$$

mit Benutzung der eben für $\cos(N, \xi)$ etc. gefundenen Werthe auch:

$$\cos n = \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{N \cdot \omega} \dots \dots \dots (14)$$

wobei also:

$$N^2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2$$

und

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2$$

ist.

Somit sind jetzt die Begriffe der Hauptträgheitsaxe ξ , der instantanen Drehaxe \mathcal{A} und der invariablen Normalen N , die sämmtlich in der Theorie der Präcession auftreten, definirt. Bei der Erde liegen diese drei Linien, wie hier beiläufig gezeigt werden soll, für alle Zeiten in demselben grössten Kreise der scheinbaren Himmelskugel. Durch die Schnittpunkte der Trägheitsaxe ξ der Erde, ihrer momentanen Drehaxe \mathcal{A} und der invariablen Normalen N auf der scheinbaren Himmelskugel erhält man das sphärische Dreieck $N\xi\mathcal{A}$ (Fig. 28), indem wir zur Illustration des folgenden Beweises die drei Axen absichtlich nicht als in einer Ebene liegend gedacht haben. Sei λ

der Winkel des grössten Kreises $N\xi$ mit dem grössten Kreise $\xi\xi$, μ derjenige von $A\xi$ mit demselben Kreise, so ist:

Im Dreieck $\xi N\xi$:

$$\cos(N, \xi) = \frac{Ap}{N} = \cos \sigma \cos(\xi, \xi) + \sin \sigma \sin(\xi, \xi) \cos \lambda = \sin \sigma \cos \lambda.$$

Im Dreieck $N\xi\eta$:

$$\cos(N, \eta) = \frac{Bq}{N} = \cos \sigma \cos(\xi, \eta) + \sin \sigma \sin(\xi, \eta) \cos(90^\circ - \lambda) = \sin \sigma \sin \lambda.$$

Schliesslich:

$$\cos(N, \xi) = \frac{Cr}{N} = \cos \sigma.$$

Ferner im Dreieck $\xi A\xi$:

$$\cos \alpha = \frac{p}{\omega} = \cos(\xi, \xi) \cos \gamma + \sin(\xi, \xi) \sin \gamma \cos \mu = \sin \gamma \cos \mu.$$

Im Dreieck $A\eta\xi$:

$$\cos \beta = \frac{q}{\omega} = \cos \gamma \cos(\eta, \xi) + \sin \gamma \sin(\eta, \xi) \cos(90^\circ - \mu) = \sin \gamma \sin \mu.$$

$$\cos \beta = \frac{q}{\omega} = \cos(\xi, A) \cos(\eta, \xi) + \sin(\xi, A) \sin(\eta, \xi) \cos(90^\circ - \mu) = \sin \gamma \sin \mu.$$

Schliesslich:

$$\cos \gamma = \frac{r}{\omega}.$$

Diese Formeln ergeben direct:

$$\sin \sigma \sin \gamma \cos(\lambda - \mu) = \frac{Ap^2 + Bq^2}{N\omega}$$

$$\sin \sigma \sin \gamma \sin(\lambda - \mu) = \frac{pq}{N\omega} (B - A).$$

Ferner wird:

$$\left. \begin{aligned} \sin \sigma &= \frac{\sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2}}{N} \\ \sin \gamma &= \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\omega} \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

Diese letztere Formel wird später gleichfalls gebraucht werden.

Durch diese Formeln ist die gegenseitige Lage von ξ , A , N bestimmt. Zugleich folgt durch Division:

$$\operatorname{tg}(\lambda - \mu) = \frac{pq(B - A)}{A p^2 + B q^2}.$$

Also für die Erde, wo $A = B$ ist,

$$\operatorname{tg}(\lambda - \mu) = 0,$$

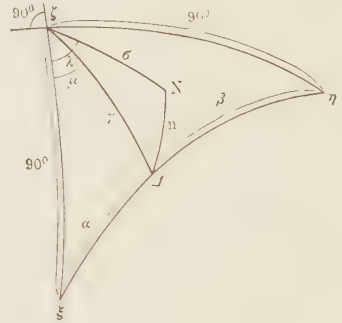
d. h.

$$\lambda = \mu.$$

[dass $\lambda - \mu$ nicht $= 180$ ist, kann man in der Figur voraussetzen]. Es liegen mithin die drei Linien ξ , A und N , wie zu Anfang behauptet, bei der Erde stets in derselben Ebene. —

Die drei Componenten der augenblicklichen Drehung um die momentane Drehaxe A kann man nun auch ausdrücken durch die neun Richtungscosinus a, b, c ; a', b', c' ; a'', b'', c'' , welche die Lage des beweglichen Haupttaxensystemes ξ, η, ζ gegen das im Raum feste System x, y, z bestimmen. Seien wie bisher x, y, z feste Coordinatenachsen, ξ, η, ζ die Lagen der drei Hauptträgheitsachsen des Körpers zur Zeit t, ξ', η', ζ'

Fig. 28.



diejenigen zur Zeit $t + dt$, ferner p, q, r die Componenten der augenblicklichen Drehgeschwindigkeit um ξ, η, ζ (Fig. 29), und gebe das folgende Schema die Richtungs-cosinus zwischen den festen und beweglichen Axen:

	x	y	z
ξ	a	a'	a''
η	b	b'	b''
ζ	c	c'	c''

Dann mögen, wenn sich der Körper um die ξ -Axe um den Winkel $p dt$ dreht, η und ζ bezüglich in die Lagen η'' und ζ'' kommen. So wird:

$$\angle(\eta'', \xi) = 90^\circ - p dt,$$

also:

$$\cos(\eta'', \xi) = p dt.$$

Ferner:

$$\angle(\zeta'', \eta) = 90^\circ + p dt,$$

also:

$$\cos(\zeta'', \eta) = -p dt.$$

Durch die Drehungen q und r aber ändern sich $\cos(\eta'', \xi)$ und $\cos(\zeta'', \eta)$ nur um unendlich Kleines höherer Ordnung. Daher ist auch:

$$\cos(\eta', \xi) = p dt$$

$$\cos(\zeta', \eta) = -p dt.$$

Es hat aber die ξ -Axe die Richtungs-cosinus c, c', c'' , die η' -Axe aber:

$$b + db, \quad b' + db', \quad b'' + db''.$$

Daher ist:

$$\cos(\eta', \xi) = c(b + db) + c'(b' + db') + c''(b'' + db'').$$

Da aber ξ senkrecht auf η , so ist:

$$cb + c'b' + c''b'' = 0,$$

also:

$$\cos(\eta', \xi) = c db + c' db' + c'' db''.$$

Und da:

$$\cos(\eta', \xi) = p dt,$$

so:

$$p = c \frac{db}{dt} + c' \frac{db'}{dt} + c'' \frac{db''}{dt}.$$

Hierfür kann man aber auch, da:

$$\frac{d}{dt}(cb + c'b' + c''b'') = 0$$

ist, setzen:

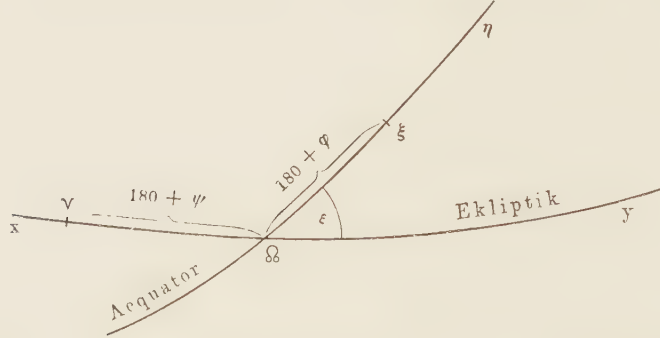
$$p = -b \frac{dc}{dt} - b' \frac{dc'}{dt} - b'' \frac{dc''}{dt}.$$

Es ergeben sich somit folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} p &= c \frac{db}{dt} + c' \frac{db'}{dt} + c'' \frac{db''}{dt} = -b \frac{dc}{dt} - b' \frac{dc'}{dt} - b'' \frac{dc''}{dt} \\ q &= a \frac{dc}{dt} + a' \frac{dc'}{dt} + a'' \frac{dc''}{dt} = -c \frac{da}{dt} - c' \frac{da'}{dt} - c'' \frac{da''}{dt} \\ r &= b \frac{da}{dt} + b' \frac{da'}{dt} + b'' \frac{da''}{dt} = -a \frac{db}{dt} - a' \frac{db'}{dt} - a'' \frac{db''}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

In der Theorie der Präcession braucht man aber diese Gleichungen in einer anderen Form, die gleichfalls schon Euler gegeben hat dadurch, dass er an Stelle der genannten neun Richtungscosinus $a, b \dots c''$ drei unabhängige Winkel einführte. Denkt man sich nämlich, wie wir es bereits bei Ableitung der Euler'schen Gleichungen thaten, um den Ursprung eine Einheitskugel construirt, so schneiden auf dieser das im Raume feste System x, y, z und das im Raume bewegliche System ξ, η, ζ zwei Kugeloctanten

Fig. 30.



aus, aus denen man — wenn ε den Winkel zwischen der im Raume festen xy -Ebene, also einer festen Ekliptik für eine bestimmte Anfangsepoche und der beweglichen $\xi\eta$ -Ebene, d. h. dem Aequator, $180 + \psi$ den Abstand des Knotens vom Widderpunkte, bedeutet (cf. Fig. 30) — folgende Relationen auf Grund der drei Fundamentalformeln der sphärischen Trigonometrie gewinnt:

$$\left. \begin{aligned} a &= + \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \varepsilon \\ b &= - \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \varepsilon \\ c &= - \sin \psi \sin \varepsilon \\ a' &= + \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \varepsilon \\ b' &= - \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \varepsilon \\ c' &= + \cos \psi \sin \varepsilon \\ a'' &= - \sin \varphi \sin \varepsilon \\ b'' &= - \cos \varphi \sin \varepsilon \\ c'' &= + \cos \varepsilon \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

Bei Euler selbst treten diese Relationen in einer etwas anderen Form auf, weil er an Stelle der Grössen $\varphi + 180$ und $\psi + 180$, die dem astronomischen Zusammenhange entsprechen, φ und ψ selbst gewählt hat. Durch Differentiation letzterer Gleichungen bezüglich aller Winkel erhält man nach einer kleinen Rechnung:

$$\left. \begin{aligned} da &= + b d\varphi - a' d\psi - c \sin \varphi d\varepsilon \\ db &= - a d\varphi - b' d\psi - c \cos \varphi d\varepsilon \\ dc &= - c' d\psi + c \cotg \varepsilon d\varepsilon \\ da' &= + b' d\varphi + a d\psi - c' \sin \varphi d\varepsilon \\ db' &= - a' d\varphi + b d\psi - c' \cos \varphi d\varepsilon \\ dc' &= + c d\psi + c' \cotg \varepsilon d\varepsilon \\ da'' &= + b'' d\varphi - c'' \sin \varphi d\varepsilon \\ db'' &= - a'' d\varphi - c'' \cos \varphi d\varepsilon \\ dc'' &= - c'' \tg \varepsilon d\varepsilon \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

Wenn man nun in diesen drei Systemen bezüglich die zweite Gleichung mit c, c', c'' , hierauf die erste Gleichung mit $-c, -c', -c''$ und schliesslich die erste noch mit

b, b', b'' multiplicirt, die dritte des dritten Systemes aber mit p, q, r , dann erhält man auf Grund bekannter Relationen der analytischen Geometrie nach einigen Rechnungen, die wir hier übergehen, unschwer die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} p \, d t &= - \sin \varphi \sin \varepsilon \, d \psi - \cos \varphi \, d \varepsilon \\ q \, d t &= - \cos \varphi \sin \varepsilon \, d \psi + \sin \varphi \, d \varepsilon \\ r \, d t &= + \, d \varphi + \cos \varepsilon \, d \psi, \end{aligned}$$

aus denen man einmal durch Multiplication der ersten und zweiten mit $-\sin \varphi$ und $-\cos \varphi$, sodann mit $-\cos \varphi$ und $\sin \varphi$, das folgende, bei der Lösung des Problems der Erdaxenbewegung ausser den Euler'schen Gleichungen gleichfalls gebrauchte System erhält:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varepsilon \frac{d \psi}{d t} &= - \, p \sin \varphi - \, q \cos \varphi \\ \frac{d \varepsilon}{d t} &= - \, p \cos \varphi + \, q \sin \varphi \\ \frac{d \varphi}{d t} &= r + (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \cotg \varepsilon \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (19)$$

Die Euler'schen Gleichungen sind nun aber, wie wir an dieser Stelle nur beiläufig bemerken wollen, keineswegs die allgemeinsten Rotationsgleichungen, die denkbar sind. Dies sind vielmehr die sogenannten Liouville'schen Rotationsgleichungen, die indess schon von Poisson abgeleitet, von Liouville aber aus seinem Nachlasse (cf. Journal Liouville, III. Bd., 2. Serie) veröffentlicht worden sind. Man erhält diese Gleichungen, indem man, was auch den modernen geologischen und astronomischen Anschauungen über die Natur unseres Erdkörpers entspricht, diesen nicht als völlig starr, sondern als elastisch betrachtet. Diese allgemeinsten Formen der Rotationsgleichungen, die überhaupt denkbar sind, die also für einen nicht starren Körper gelten, in dem das früher fest mit diesem verbundene, im Raume bewegliche System ξ, η, ζ jetzt selbst veränderlich ist, da sich die einzelnen Punkte des Körpers nicht allein mehr gegen das im Raume feste System x, y, z , sondern nunmehr auch gegen das System ξ, η, ζ verschieben, sind die folgenden (den sich hierfür interessirenden Leser verweisen wir auf Liouville's Journal):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d t} (P + \alpha) - Q r + R q + q \gamma - r \beta &= D_1 \\ \frac{d}{d t} (Q + \beta) - R p + P r + r \alpha - p \gamma &= D_2 \\ \frac{d}{d t} (R + \gamma) - P q + Q p + p \beta - q \alpha &= D_3 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (20)$$

Wie complicirt diese Gleichungen sind, erkennt man sogleich, wenn man sich die Bedeutung der in ihnen auftretenden verschiedenen Grössen vergegenwärtigt. Es bedeutet nämlich in ihnen zunächst allgemein:

$$\begin{aligned} A &= \Sigma m (\eta^2 + \zeta^2) \\ B &= \Sigma m (\xi^2 + \zeta^2) \\ C &= \Sigma m (\xi^2 + \eta^2). \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} F &= \Sigma m \, \eta \, \xi & P &= A p - q \, H - r \, G \\ G &= \Sigma m \, \xi \, \xi & \text{und: } Q &= B q - r \, F - p \, H \\ H &= \Sigma m \, \xi \, \eta & R &= C r - p \, G - q \, F. \end{aligned}$$

Die p, q, r sind die Euler'schen Componenten der Drehung um die instantane Axe:

$$\begin{aligned} p &= c \frac{db}{dt} + c' \frac{db'}{dt} + c'' \frac{db''}{dt} \\ q &= a \frac{dc}{dt} + a' \frac{dc'}{dt} + a'' \frac{dc''}{dt} \\ r &= b \frac{da}{dt} + b' \frac{da'}{dt} + b'' \frac{da''}{dt}. \end{aligned}$$

Die α, β, γ sind die Ausdrücke für die Flächensätze:

$$\begin{aligned} \alpha &= \Sigma m \left(\eta \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{d\eta}{dt} \right) \\ \beta &= \Sigma m \left(\xi \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{d\xi}{dt} \right) \\ \gamma &= \Sigma m \left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} \right). \end{aligned}$$

Und schliesslich sind D_1, D_2, D_3 die Drehmomente bezüglich der beweglichen Axen ξ, η, ξ :

$$\begin{aligned} D_1 &= \Sigma (\eta Z - \xi H) \\ D_2 &= \Sigma (\xi \mathcal{Z} - \xi Z) \\ D_3 &= \Sigma (\xi H - \eta \mathcal{Z}). \end{aligned}$$

Streng genommen kann der nicht mehr starre Körper, in dem sich die einzelnen Theile gegenseitig verschieben können, freilich nicht mehr auf ein mit ihm fest verbundenes Hauptaxensystem im Sinne des früheren bezogen werden. Jedenfalls aber hat er in jedem einzelnen Moment gewisse Hauptträgheitsaxen, die allgemein also Functionen der Zeit sind, ebenso wie sich die A, B, C mit der Zeit ändern werden, wenn sich die Gestalt und Dichtigkeitsverhältnisse des Körpers ändern. Nehmen wir aber, um die Beziehung des beweglichen ξ, η, ξ -Systems zum Körper, wenigstens für jeden einzelnen Moment zu bestimmen, an, dass ξ, η, ξ die momentanen Hauptträgheitsaxen des elastischen Körpers seien und entsprechend die A, B, C die momentanen Hauptträgheitsmomente des veränderlichen Körpers, dann ist offenbar, entsprechend den früher bei Discussion des Centralträgheitsellipsoides für die Hauptträgheitsaxen gefundenen Definitionen:

$$\begin{aligned} F &= \Sigma m \eta \xi = 0 \\ G &= \Sigma m \xi \xi = 0 \\ H &= \Sigma m \xi \eta = 0, \end{aligned}$$

wodurch sich aber die P, Q, R auf:

$$P = Ap, \quad Q = Bq, \quad R = Cr$$

reduciren. Die Liouville'schen Gleichungen gehen bei dieser, durch die bisherigen Betrachtungen nahe gelegten Specialisirung, dass ξ, η, ξ ein momentanes Hauptaxensystem sein soll, über in die folgenden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(Ap + \alpha)}{dt} - Bqr + Cqr + q\gamma - r\beta &= D_1 \\ \frac{d(Bq + \beta)}{dt} - Crp + Arp + r\alpha - p\gamma &= D_2 \\ \frac{d(Cr + \gamma)}{dt} - Apq + Bpq + p\beta - q\alpha &= D_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

die, wie ersichtlich, wenn die Erde absolut starr und folglich $\alpha = \beta = \gamma = 0$ wäre,

sofort in die Euler'schen übergehen. Diesen Gleichungen hat Darwin dadurch eine für die geometrische Discussion geeignetere Form, welche den Ausgangspunkt der neuen theoretischen Untersuchungen über die Schwankungen der Polhöhe gebildet hat, gegeben, dass er sechs neue Grössen, $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \mu, \nu, \varrho$ in sie einführt, die Functionen der Zeit sind, indem er setzt:

$$\begin{aligned} Ap + \alpha &= A \omega_1 \\ Bq + \beta &= B \omega_2 \\ Cr + \gamma &= C \omega_3, \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} p &= \omega_1 - \frac{\alpha}{A} \\ q &= \omega_2 - \frac{\beta}{B} \\ r &= \omega_3 - \frac{\gamma}{C}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für:

$$\begin{aligned} \alpha &= -A\mu \\ \beta &= -B\nu \\ \gamma &= -C\varrho; \end{aligned}$$

mithin werden die Euler'schen Drehcomponenten ausgedrückt durch die Darwin'schen Grössen:

$$\begin{aligned} p &= \mu + \omega_1 \\ q &= \nu + \omega_2 \\ r &= \varrho + \omega_3. \end{aligned}$$

Durch Einführung dieser Grössen in die letztere Form der Liouville'schen Gleichungen folgen die allgemeinen Darwin'schen Rotationsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(A\omega_1)}{dt} - B\omega_2(\varrho + \omega_3) + C\omega_3(\nu + \omega_2) &= D_1 \\ \frac{d(B\omega_2)}{dt} - C\omega_3(\mu + \omega_1) + A\omega_1(\varrho + \omega_3) &= D_2 \\ \frac{d(C\omega_3)}{dt} - A\omega_1(\nu + \omega_2) + B\omega_2(\mu + \omega_1) &= D_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22)$$

Der Begriff einer momentanen Drehaxe im früheren Sinne existirt jetzt streng genommen also eigentlich nicht mehr, da sich die einzelnen Theilchen im elastischen rotirenden Körper im Allgemeinen mit verschiedener Geschwindigkeit und Richtung bewegen werden. Für einen starren Körper, wo $\alpha = \beta = \gamma = 0$ und folglich auf Grund der Relationen:

$$\begin{aligned} \alpha &= -A\mu \\ \beta &= -B\nu \\ \gamma &= -C\varrho, \end{aligned}$$

auch μ, ν, ϱ gleich Null wären, würden $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ wirklich entsprechend den Relationen:

$$\begin{aligned} p &= \mu + \omega_1 \\ q &= \nu + \omega_2 \\ r &= \varrho + \omega_3 \end{aligned}$$

die Drehcomponenten um eine „instantane Axe“ im Sinne des Früheren darstellen. Da sich aber bei der Erde alle Theilchen doch um eine gewisse Mittellage einer Axe mit nahezu constanter Geschwindigkeit bewegen, so hat man doch auch beim elastischen

Erdkörper noch das Recht, von einer Axe, die durch den Schwerpunkt geht und die ihrer Richtung nach durch $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ definirt ist, als momentaner Drehaxe zu sprechen.

Diese letzteren Formen der Rotationsgleichungen haben wir einerseits mitgetheilt, weil sie eine Verallgemeinerung des Problems der Rotation eines beliebigen Körpers, in dem nur ein Punkt fest gedacht ist, sind, andererseits aber auch, weil sie den Ausgangspunkt und die Basis für jene Untersuchungen bilden, welche die überraschenden modernen Beobachtungsergebnisse, aus denen Chandler auf eine 430tägige Periode an Stelle der 304tägigen Euler'schen schloss, theoretisch bestätigt haben. Liegt auch ein weiteres Eingehen auf diese von Darwin, Sir William Thomson und Newcomb gemachten berühmten Untersuchungen, die sicherlich zu den bedeutendsten Errungenschaften der theoretischen Astronomie in neuerer Zeit gehören, ausserhalb der hier gesetzten Grenzen, so sollte doch, um ihrer Wichtigkeit willen, wenigstens hier auf dieselben hingewiesen werden.

II. Die Theorie der Bewegung der Erdaxe.

Ziehen wir das Resume der bisherigen Betrachtungen, so ist das Rotationsproblem für den starren Erdkörper in seiner Allgemeinheit charakterisirt durch folgende sechs Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B) q r &= D_1 \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) r p &= D_2 \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A) p q &= D_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (I)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} &= -p \sin \varphi - q \cos \varphi \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -p \cos \varphi + q \sin \varphi \\ \frac{d\varphi}{dt} &= r + (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \cotg \varepsilon \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (II)$$

Die Integration des nicht linearen Systems (I), bei welcher die Drehmomente D_1, D_2, D_3 (und somit die Coordinaten und Kräfte, aus denen sich D_1, D_2, D_3 zusammensetzen) als Functionen der Zeit gegeben und ebenso die Hauptträgheitsmomente A, B, C bekannt sein müssen, würde dann die drei gesuchten Componenten p, q, r der augenblicklichen Drehung des Körpers um die ξ, η, ζ -Axe ergeben und folglich seine Winkelgeschwindigkeit um seine momentane Rotationsaxe A selbst, gemäss der früher abgeleiteten Formel:

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Auf Grund des so erhaltenen Werthes von ω ergäben dann aber die Formeln:

$$\begin{aligned} p &= \omega \cos \alpha \\ q &= \omega \cos \beta \\ r &= \omega \cos \gamma \end{aligned}$$

unmittelbar die Winkel α, β, γ als Functionen der Zeit, welche ihrerseits die Lage der momentanen Drehaxe gegen das fest mit dem Körper verbundene System ξ, η, ζ und folglich gegen ihn selbst bestimmen. So dass mit anderen Worten die Integration der Euler'schen Gleichungen (I) die Axenbewegung im Innern des Körpers ergibt.

Wäre nun die Bewegung der momentanen Drehaxe im Innern des Körpers in dieser Weise allgemein bestimmt, so hätte man die für p, q, r gefundenen Functionen der Zeit in das System (II) einzusetzen, dessen Integration dann die drei Euler'schen Winkel $\psi, \varepsilon, \varphi$ allgemein als Functionen der Zeit ergäbe, die ihrerseits die Lage des im Raume beweglichen (weil mit dem Körper fest verbunden gedachten) Hauptträgheitsaxensystemes ξ, η, ζ gegen das im Raume feste System x, y, z bestimmen. Und da auf Grund der Integration von System (I) die Lagenänderung der Momentanaxe gegen das ξ, η, ζ -System bekannt, so würde die Integration von System (II), welche die Lagenänderung des ξ, η, ζ -Systemes gegen das x, y, z -System bestimmt, zugleich auch die Lagenänderung der Instantanaxe selbst gegen das im Raume feste System x, y, z , mit anderen Worten die Axenbewegung des Körpers im Raume ergeben.

Während nun aber diese Integrationen mathematisch allgemein und streng überhaupt nicht durchführbar sind, ermöglicht sie die Astronomie zur Ermittlung der Axenbewegung der Erde, auf welche sämtliche in Abtheilung I. entwickelten Gleichungen und Begriffe buchstäblich Anwendung finden, genügend streng dadurch, dass sie von gewissen Umständen Gebrauch macht, welche in der Natur für die Erde herrschen und eine Weiterbehandlung von System (I) und (II) überhaupt erst ermöglichen.

Betrachtet man nämlich die Bewegung der momentanen Drehaxe der Erde im Raume (Präcession und Nutation), die durch die äusseren Kräfte der Sonnen- und Mondanziehung hervorgerufen wird, so zeigt sich das merkwürdige Resultat, welches im Folgenden wirklich abgeleitet werden soll, dass diese äusseren, von Sonne und Mond auf den Erdkörper ausgeübten Anziehungskräfte die Lage der momentanen Drehaxe der Erde im Innern der Erde so gut wie gar nicht verändern, so dass der Euler'sche Cyclus (die Kreiskegelbewegung der momentanen Drehaxe um die Hauptträgheitsaxe ξ im Erdkörper) trotz der äusseren Kräfte bestehen bleibt; vorausgesetzt jedoch, dass man gewisse kleine Glieder, deren numerischer Betrag indessen zwei Hundertstel Bogensecunden nicht übersteigt und in denen gerade die winzig kleine Drehung der momentanen Drehaxe um die Hauptträgheitsaxe, also thatsächlich eine Schwankung der Erdaxe im Erdinnern enthalten ist, vernachlässigt. Macht man also diese kleine, völlig zulässige Vernachlässigung von $0''.019$, so kann man bei Betrachtung der Bewegungen der Erdaxe im Raume von ihren Schwankungen im Erdkörper selbst völlig absehen und die erstere Bewegung unabhängig für sich allein untersuchen.

Betrachtet man aber umgekehrt die Bewegung der instantanen Drehaxe der Erde im Innern des Erdkörpers, wie sie durch den Euler'schen Cyclus definirt ist, so zeigt sich — und im Folgenden wird dies nachgewiesen werden —, dass die Neigung der Instantanaxe der Erde gegen eine im Raume feste Linie, die im Vorhergehenden definirte invariable Normale N , beinahe constant bleibt, indem nämlich die Schwankungen der momentanen Drehaxe der Erde gegen die invariable Normale ein Fünftausendstel Bogensecunden nicht übersteigen. Macht man also diese kleine Vernachlässigung von $0''.0002$, so kann man bei Betrachtung der Schwankungen der momentanen Drehaxe der Erde im Erdinnern von ihren Bewegungen im Raume völlig absehen und die erstgenannte Bewegung wieder unabhängig für sich allein untersuchen.

Bei der Erde gestalten sich also beide Probleme der Axenbewegung im Erd-

innern und im Raum, völlig unabhängig von einander. Man kann nach dem Gesagten zur Ermittlung der Bewegung der momentanen Drehaxe im Erdinnern (des Euler'schen Cyclus) von den anziehenden äusseren Kräften der Sonne und des Mondes \mathfrak{E} , H , Z gänzlich absehen, d. h. aber nichts anderes, als man kann die rechten Seiten der Euler'schen Gleichungen, die Drehmomente, die aus \mathfrak{E} , H , Z zusammengesetzt sind, Null setzen und unter dieser Annahme die Integration von (I) durchführen. Wie schon erwähnt, ist aber eine strenge Integration der Euler'schen Gleichungen bei Ausschluss äusserer Kräfte gerade möglich, und zwar hat man sie mit drei verschiedenen Trägheitsmomenten für den Mond (der nahezu ein dreiaxiges Ellipsoid bildet), einfacher mit bloss zwei verschiedenen Trägheitsmomenten aber für die Erde, die ein Rotationsellipsoid ist, durchzuführen. Das Resultat ist eben bei der Erde für die Erdaxenbewegung im Erdinnern der Euler'sche Cyclus, für die Erdaxenschwankung im Raume der Maximalwerth von $0'',0002$, von dem man gänzlich absehen kann.

Hierauf aber hat man die Erdaxenbewegung im Raume zu betrachten, die jedoch durch Einwirkung äusserer Kräfte bedingt ist, bei deren Discussion man also die rechten Seiten der Euler'schen Gleichungen nicht mehr Null setzen darf. Um dann um die strenge Integration der beiden Systeme (I) und (II), die nicht ausführbar ist, herumzukommen, halfen sich Poisson und Laplace, wie im Folgenden gezeigt werden wird, in einer genialen Weise und gelangten zu Differentialgleichungen in ε und ψ , welche die Axenbewegung im Raume allgemein bestimmen. Dabei ist das Gesamtergebn dieser Untersuchung, die also von den Euler'schen Gleichungen (I) ohne Vernachlässigung von deren rechten Seiten ausgeht, auch wieder sowohl eine Axenbewegung im Raum, wie eine solche im Erdinnern, nur dass die letztere eben im Maximum $0'',019$ nicht übersteigt, also vernachlässigt werden kann, so dass der Euler'sche Cyclus trotz der Sonnen- und Mondanziehung im Wesentlichen unalterirt bestehen bleibt und aus diesem Grunde eben die Bewegung der Erdaxe im Erdinnern unter Ausschluss äusserer Kräfte überhaupt behandelt werden durfte.

Dies ist in grossen Zügen der allgemeine Gang, den man zur Lösung des Problems der Erdaxenbewegung in toto, sowohl derjenigen im Erdinnern, wie derjenigen im Raume, einzuschlagen hat.

A. Die Bewegung der Erdaxe im Erdinnern.

(Der Euler'sche Cyclus.)

Zunächst erledigen wir den Euler'schen Cyclus, da unsere eigentliche Aufgabe darin besteht, die für die Bahnrechnung gebrauchten Präcessionsformeln zu gewinnen, doch um einer vollständigen Charakteristik der Erdaxenbewegung willen in aller Kürze.

Bei Vernachlässigung der anziehenden Kräfte der Sonne und des Mondes werden die Differentialgleichungen (I), welche die Bewegung der momentanen Drehaxe im Innern der Erde bestimmen, da diese ein geschichtetes Rotationsellipsoid ist und deshalb nur zwei verschiedene Hauptträgheitsmomente besitzt:

$$\frac{dp}{dt} + \frac{C-A}{A} r q = 0$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{A-C}{A} r p = 0$$

$$c \cdot \frac{dr}{dt} = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + r_0^2}} \cos \psi \\ \cos \beta &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + r_0^2}} \sin \psi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

womit die geometrische Bedeutung des Argumentes sich durch Vergleich der beiden für $\cos \alpha$ und $\cos \beta$ gefundenen Ausdrücke sofort ergibt, nämlich:

$$\lambda t + \text{const.} = \psi;$$

d. h. aber, die durch die momentane Drehaxe \mathcal{A} und die Hauptträgheitsaxe ξ der Erde gehende Ebene dreht sich gleichförmig mit der Zeit herum. Der Schnittpunkt der Instantanaxe mit der scheinbaren Himmelskugel beschreibt also an dieser einen kleinen Kreis vom Radius $\gamma = \frac{1''}{15}$ um den Schnittpunkt der Hauptträgheitsaxe ξ mit der Himmelskugel und zwar mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit, die bestimmt ist durch:

$$\lambda = \frac{C - A}{A} \omega,$$

indem bei der Erde a so klein gegen r ist, dass genügend genau $\omega = \sqrt{a^2 + r_0^2} = r_0$ gesetzt werden kann in der Formel (23) für λ .

Die Periode eines Umlaufs der Drehaxe im Erdkörper ist offenbar:

$$T = \frac{360^\circ}{\lambda}.$$

Da nun aber die Abplattung

$$\frac{C - A}{C} = 0,003272,$$

also:

$$\frac{C - A}{A} = 0,003283$$

und $\omega = 360^\circ$ in einem Sterntage ist, so wird auf Grund des Werthes von λ :

$$\lambda = 360 \cdot (366,2422) \cdot 0,003283 = 432^\circ,8$$

die Periode:

$$\frac{365,2422}{432,8} \cdot 360 = 303,8 \text{ Sonnentage} = 10 \text{ Monate circa.}$$

Diese zehnmonatliche Periode der Drehung der Erdaxe im Erdinnern, welche man den Euler'schen Cyclus nennt, muss sich offenbar äussern in den Schwankungen der geographischen Breite, deren Periode also zehn Monate beträgt und im Maximum um den Betrag γ schwankt. Denn wenn φ die durch Beobachtung gefundene sogenannte instantane, φ' aber die mittlere geographische Breite bedeutet, so ergibt sich aus dem sphärischen Dreieck: Zenith, instantaner Pol, mittlerer Pol ohne weiteres die Beziehung:

$$\cos (90^\circ - \varphi) = \sin \varphi = \sin \varphi' \cos \gamma + \cos \varphi' \sin \gamma \cos \psi,$$

oder da φ nahe gleich φ' :

$$\sin \varphi = \sin (\varphi' + \gamma \cos \psi)$$

und folglich:

$$\varphi = \varphi' + \gamma \cos (\psi_0 + \lambda t),$$

wodurch die Polhöhenchwankungen charakterisirt sind.

Die Zeit t ist dabei in tropischen Sonnenjahren ausgedrückt.

Dass dabei, wenn man von äusseren Kräften absieht, wie wir es nach dem Zuvorgesagten vorläufig thun, die Neigung der momentanen Drehaxe der Erde gegen eine im Raume feste Linie, wie schon erwähnt, so gut wie völlig constant bleibt, ersieht man unmittelbar, indem man an den früher gegebenen Winkelwerth der Instantanaxe mit der Normalen N der unveränderlichen Ebene, Formel (14), anknüpft. Dieser Werth:

$$\cos n = \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{\omega \sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2}}$$

wird, wenn zwei Hauptträgheitsmomente gleich sind und man statt des Cosinus den Sinus einführt, nach einer leichten Rechnung strenge:

$$\sin n = \frac{r \sqrt{p^2 + q^2}}{\omega \sqrt{A^2 (p^2 + q^2) + C^2 r^2}} (C - A) \quad (27)$$

Da nun, wie gesagt, bei der Erde $\gamma = \frac{a}{r}$ sehr klein (circa $\frac{1''}{15}$), also a sehr klein gegen r und folglich, mit Hinblick auf $\omega = \sqrt{a^2 + r_0^2}$, sehr nahe $r = \omega$, mithin also p und q nahezu gleich Null sind, so wird noch genügend genau:

$$\sqrt{A^2 (p^2 + q^2) + C^2 r^2} = \sqrt{C^2 r^2}$$

und folglich:

$$\sin n = \frac{C - A}{C} \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{r^2}};$$

oder bei Einführung des früher in der ersten Abtheilung durch Gleichung (15) für $\sin \gamma$ gefundenen Werthes, der sich jetzt auch wie folgt schreibt:

$$\sin n = \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{r^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{r^2}}$$

wird:

$$\sin n = \frac{C - A}{C} \gamma,$$

indem man, da γ sehr klein ist, den Sinus mit dem Bogen vertauscht. Numerisch folgt:

$$n = 0'',0002.$$

Das ist aber eine nicht in Betracht kommende Grösse, und wir können somit bei Betrachtung der Bewegung der momentanen Drehaxe im Erdinnern von ihrer Bewegung im Raume, d. h. ihrer Schwankung 0,0002 gegen die im Raume feste Normale der invariablen Ebene thatsächlich gänzlich absehen.

Vor einer Reihe von Jahren ergaben nun aber, wie schon angedeutet, von Chandler auf Grund moderner Beobachtungsreihen über die Schwankungen der Polhöhe angestellte Rechnungen, dass der Euler'sche Cyclus gar nicht 303,8 mittlere Sonnentage beträgt, sondern in Wirklichkeit, auf Grund zuverlässigster neuerer Beobachtungen, thatsächlich eine Periode von etwa 430 Tagen hat. Diese, angesichts der im Vorbergehenden gewonnenen, scheinbar einwurfsfreien theoretischen Resultate, gewiss im höchsten Grade überraschende Erscheinung, wurde dann durch die schon erwähnten Untersuchungen Newcomb's und Sir William Thomson's theoretisch wirklich bestätigt. Dieselben ergeben, dass, wenn man die Erde nicht als starren Körper betrachtet, sondern ihr circa die Elasticität des Stahles beimisst, auf Grund von zwei weiteren Hypothesen, auf die wir hier nicht näher eingehen können, die aber, trotz einiger berechtigter Einwände, im Grossen und Ganzen plausibel sind, thatsächlich eine 430tägige Periode der Erdaxenschwankung im Erdinnern. Doch sind diese Untersuchungen, welche als Ausgangspunkt die viel complicirteren, zu Anfang erwähnten Darwin'schen Gleichungen,

an Stelle der einfacheren Euler'schen haben, keineswegs so einfach wie die eben zuvor durchgeführten. Vielmehr bilden sie eines der schwierigsten Capitel des rotatorischen Theiles der Mechanik des Himmels. Und da es uns in diesem Bande für die Zwecke der Bahnrechnung vorzüglich auf Gewinnung der Präcessionsformeln ankommt, der Euler'sche Cyclus vielmehr nur der Vollständigkeit der Charakteristik der Erdaxenbewegung halber erwähnt werden musste, so sehen wir hier von den genannten Untersuchungen ab und gehen zur Entwicklung der Theorie der Präcession und Nutation über.

B. Die Bewegung der Erdaxe im Raume.

(Präcession und Nutation.)

Die Grundlagen der folgenden analytischen Entwicklungen haben bereits Poisson und Laplace in ihren Werken im Allgemeinen vollständig gegeben. Zu untersuchen ist wieder die Bewegung der momentanen Drehaxe der Erde, sowohl im Erdinnern wie im Raume, aber jetzt bei Einwirkung der Sonnen- und Mondanziehung. Das Resultat wird, wie schon erwähnt, dass trotz der äusseren Kräfte der Euler'sche Cyclus so gut wie bestehen bleibt, dass man daher jetzt von der Bewegung der momentanen Drehaxe der Erde im Erdinnern ganz absehen kann und bloss ihre Bewegung im Raum zu betrachten hat; dieselbe besteht, wenn man an Stelle der Erdaxe den zu ihr senkrechten Aequator und die 23 Grad gegen diesen geneigte Ekliptik ins Auge fasst (welch' letztere sich in Folge der Planetenanziehung ebenfalls verschiebt, was aber mit der Bewegung der Rotationsaxe der Erde wohlgerneht nichts zu thun hat), in ziemlich complicirten säcularen und periodischen Schwankungen des Aequators gegen die Ekliptik, deren erstere sich in dem ungeheuren Zeitraume von 24500 Jahren abspielen, während die Periode der letzteren, die hauptsächlich von der Mondanziehung herrühren, diejenige eines totalen Umlaufes der Mondknoten, nämlich 19 Jahre circa beträgt. Dabei hat also, wie gesagt, die Bewegung der Ekliptik mit der Bewegung der Erdaxe, die der Lagenverschiebung des Aequators entspricht, nichts zu thun. Man bezeichnet aber nicht die Erdaxenbewegung im Raum (oder Aequatorbewegung) allein, sondern die gemeinsame Bewegung von Aequator und Ekliptik allgemein mit „Präcession und Nutation“.

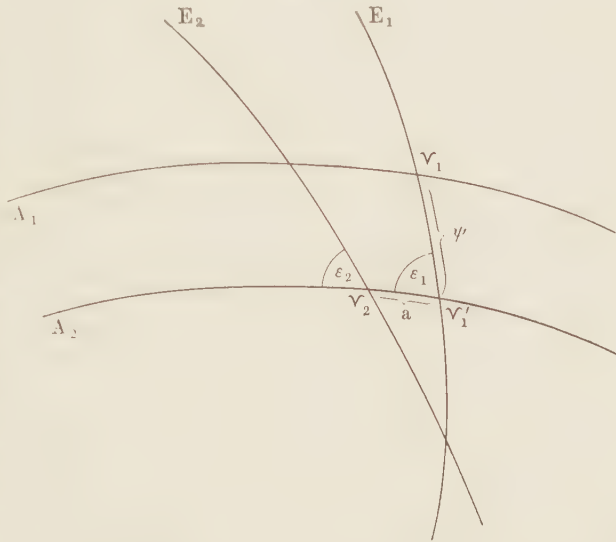
Bevor wir die analytische Entwicklung durchführen, deren Discussion das geometrische Abbild der Bewegung der Erdaxe im Raum ergibt, wollen wir letzteres indess gleich allgemein im Voraus charakterisiren, damit dem Leser eine concrete Vorstellung schon während des Verlaufes der folgenden analytischen Entwicklungen gegenwärtig sei.

Während die Bewegung der Erdaxe im Raum an sich eine einfache ist, führt die mathematische Behandlung des Problems, wie schon angedeutet, zu einer getrennten Betrachtung von säcular und periodisch erfolgenden Schwankungen derselben, die in Wirklichkeit stetig in einander gehen. Dieselben sind also bedingt durch die säcularen und periodischen Aenderungen, welche der Aequator in Folge der störenden Einwirkung der Sonne und des Mondes in seiner Lage im Raum erleidet. Diese fassen wir zunächst ins Auge und sehen dann zu, wie sich dieselben auf die Rotationsaxe übertragen.

Die hauptsächlichste Lagenveränderung erfährt der Aequator in Folge der starken Sonnen- und Mondanziehung auf das abgeplattete Erdsphäroid. Dieselbe besteht, wenn wir zunächst die säcularen, d. h. der Zeit proportionalen, innerhalb grosser

Zeitperioden verlaufenden Bewegungserscheinungen für sich allein ins Auge fassen, die man allgemein als Präcessionserscheinungen bezeichnet, in einem langsamen Zurückgehen des Aequators auf der Ekliptik, derart, dass der Aequator, wie die Fig. 31 zeigt, wenn er zur Zeit t_1 die Lage A_1 gehabt hat, zur Zeit t_2 sich in der Lage A_2 befindet, wobei also der Schnittpunkt des Aequators und der Ekliptik, Υ_1 , um das Stück ψ , im Jahre etwa $50''$, auf der Ekliptik zurückgegangen ist. Diese Bewegung ist durch Sonne und Mond allein bedingt und wird deshalb auch kurz die „Lunisolarpräcession“ genannt. Vorausgesetzt wird dabei, dass die Längen von Sonne und Mond in derselben Richtung zunehmen, in der gezählt wird. Weil somit die Längen, indem der Frühlingspunkt zurückgeht, grösser werden, so bezeichnet man die Bewegung als Präcession (d. i. wörtlich übersetzt eigentlich: Vorwärtsgehen).

Fig. 31.



Ausserdem erleidet aber auch die Ekliptik durch die störende Einwirkung der Planeten eine säcular erfolgende Lagenverschiebung im Raum, welche geometrisch darin besteht, dass die Ekliptik, welche zur Zeit t_1 die Lage E_1 gehabt hat, zur Zeit t_2 in die Lage E_2 in säcularer Weise übergegangen ist, wobei sich offenbar der Widderpunkt, der durch die säculare Aenderung des Aequators allein von Υ_1 nach Υ'_1 gelangt, noch um das Stück $\Upsilon'_1 \Upsilon_2 = a$, die sogenannte „Präcession durch die Planeten“, nach vorn verschoben hat. In toto wird also der Frühlingspunkt durch Anziehung von Sonne und Mond einer- und Planeten andererseits, die jede für sich eine besondere Wirkung auf Aequator und auf Ekliptik hervorrufen, den Weg $\Upsilon_1 \Upsilon_2$ beschreiben, vorausgesetzt, dass man vorläufig die säcularen Bewegungen allein ins Auge fasst.

Gleichzeitig sind die Coordinatenebenen aber auch noch periodischen, d. h. um einen mittleren Zustand oscillirenden, mathematisch durch Sinus- und Cosinusfunctionen (welche t nicht als Factor, sondern nur im Argumente enthalten) dargestellten Bewegungen unterworfen. Diesen periodischen Bewegungen denkt man aber den Aequator allein unterworfen. In Wirklichkeit schwankt zwar natürlich auch die Ekliptik (die, wie wir sahen, auch eine säculare Bewegung machte) ebenfalls periodisch hin und her um sehr kleine Beträge. Da man aber, wenn man dieselbe mit in Betracht ziehen wollte, keine ebene Erdbahn erhielte, auf die man, wie es später nöthig wird, alles beziehen kann, so abstrahirt man von den periodischen Schwankungen der Ekliptik vollständig und berücksichtigt dieselben dadurch, dass man sie als Breitenstörungen der Erde auffasst. Dieselben sind also von den folgenden Untersuchungen ausgeschlossen, wir werden aber zu Anfang von Theil III dieses Capitels auf diesen Punkt zurückkommen. In diesem Sinne definirt man in unserem Probleme die Ekliptik als eine mittlere Ebene, die sogenannte „mittlere Ekliptik“, welche mitten durch alle kleinen Schwankungen hindurchgeht. Und zwar legt man später der numerischen Rechnung, als ein- für allemal bestimmte Ekliptik, nach Leverrier die mittlere Ekliptik zu Anfang des tropischen Jahres 1850, d. h. die „mittlere Ekliptik

1850,0“, zu Grunde; oder man wählt nach Laplace die mittlere Ekliptik Januar 1750,0.

Der Winkel, den dabei der Aequator mit der fest gedachten Ekliptik E_1 für 1750 + t macht, ist fast constant und beträgt nach Bessel:

$$\varepsilon_1 = 23^\circ 28' 18'',0 + 0'',000\,009\,842\,3\,t^2.$$

Die mittlere Schiefe der Ekliptik, d. i. der Winkel des Aequators mit der wirklichen, in Folge der Säcularstörungen durch die Planeten beweglichen Ekliptik E_2 , hingegen ändert sich stärker und beträgt nach Bessel:

$$\varepsilon_2 = 23^\circ 28' 18'',0 - 0'',48368\,t - 0'',000\,002\,722\,95\,t^2.$$

Fassen wir, der besseren geometrischen Vorstellung halber, zunächst wieder diese periodischen Bewegungen des Aequators, die als „Nutation“ bezeichnet werden, für sich allein ins Auge, so bestehen dieselben also in einem periodischen Hin- und Herpendeln des Aequators auf der Ekliptik. Dabei hat man zwei verschiedene solcher periodischen Bewegungen zu unterscheiden, nämlich eine „Lunisolarnutation in Länge“, $\Delta\lambda$ und eine „Lunisolarnutation in Schiefe“, $\Delta\varepsilon$. Die erstere besagt geometrisch, dass der Widderpunkt, während die Ekliptik fest bleibt, um einen gewissen mittleren Widderpunkt (den jeweilig durch die Präcession bestimmten) auf der Ekliptik hin- und heroscillirt. Die Nutation in Schiefe hingegen besagt, dass der Aequator ausserdem noch um seine, durch die Präcession jeweilig gegebene mittlere Lage eine periodisch hin- und herschwankende Lagenänderung in Schiefe beschreibt, indem er seine Neigung gegen die Ekliptik periodisch ändert.

Allgemein wird nun bei der analytischen Behandlung des Problems die Präcessionsbewegung von Aequator und Ekliptik im Ganzen, da sie säcularer Natur ist, durch eine Potenzreihe der Zeit dargestellt:

$$P = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots,$$

während die Nutationsbewegung, entsprechend ihrer periodischen Natur, offenbar durch eine Fourier'sche Reihe repräsentirt wird:

$$N = \Sigma b_i \cos(i \odot + i \mathbb{C}).$$

Im Ganzen ist also die Bewegung des Schnittpunktes von Aequator und Ekliptik, wie sie durch die Säcularstörungen und periodischen Störungen zusammen bedingt ist, ganz allgemein dargestellt durch eine Reihe der Form:

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + \Sigma b_i \cos(i \odot + i \mathbb{C}),$$

die jedoch nur bei Berücksichtigung aller Glieder die Bewegung strenge darstellt. Die im Vorhergehenden gegebene geometrische Versinnlichung der Bewegung wird also überhaupt nur dadurch ermöglicht, wie ausdrücklich hervorzuheben ist, dass man von der säcularen und periodischen Reihe je nur ein Glied, das alle anderen überwiegt, allein berücksichtigt hat.

Es überwiegt nämlich einerseits bei der die Präcession darstellenden Reihe das der Zeit direct proportionale Glied $a_1 t$, dessen Coëfficient a_1 die sogenannte Präcessionsconstante ist (genau genommen nur für die Epoche $t = 0$), derartig die folgenden Glieder, dass man in früheren Jahrhunderten, wo nur dies eine Glied bekannt war, die Präcession direct der Zeit proportional annahm, bis man dann später bei der mathematischen Behandlung des Problems die Präcession strenger durch die ganze Potenzreihe definirte. Ebenso überwiegt, wie wir später sehen werden, in der Fourier'schen Reihe, welche die Nutationserscheinungen repräsentirt, ein Glied, die sogenannte Nutationsconstante, alle folgenden Glieder. Wollte man dagegen alle Glieder der

Reihe für die Präcession und Nutation in Betracht ziehen, so würde eine geometrische Vorstellung nicht mehr zu ermöglichen sein.

Fasst man nun an Stelle von Ekliptik und Aequator die auf dem letzterem senkrechte Erdaxe selbst ins Auge, deren totale Bewegung also auch durch eine Reihe der Form:

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + \Sigma b \cos(i \odot + i \mathbb{C})$$

definiert sein wird, so erkennt man leicht, dass, wenn man die Präcession für sich gesondert in Betracht zieht und zwar allein das überwiegende Glied a_1 , dass dann der Pol des Aequators um den Pol der Ekliptik einen Kreis mit constanter Geschwindigkeit beschreibt. Bei dieser Vorstellung eines festen Kreises sehen wir also von der sehr kleinen störenden Einwirkung der Planeten auf die Erdbahn, d. h. von der Präcession durch die Planeten, ab. Zugleich schwankt aber, wenn man die Nutation für sich ins Auge fasst, der Pol des Aequators noch in zwei auf einander senkrechten Richtungen periodisch um seine, durch die Präcession gegebene, jeweilige mittlere Lage (Fig. 32) derart,

Fig. 32.

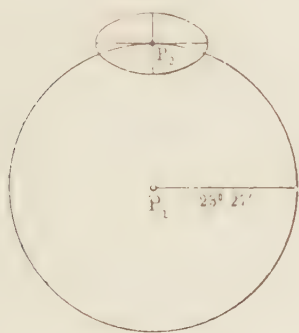
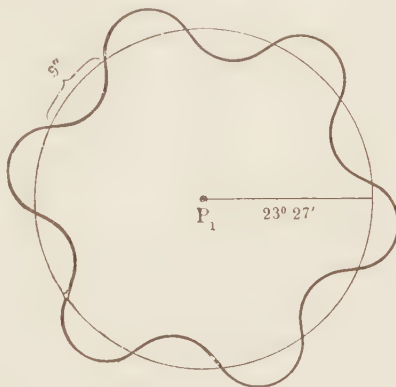


Fig. 33.



dass in circa 19 Jahren von ihm eine kleine Ellipse beschrieben wird, die sogenannte Nutationsellipse, die also in Folge dessen jeder Stern scheinbar im Laufe von etwa 19 Jahren am Himmel beschreibt. Die Periode eines Umlaufes des Weltpoles um den Pol der Ekliptik, oder, wenn man, wie zuvor, die Coordinatenebenen selbst ins Auge fassen will, die Periode eines totalen Umlaufes der Erdknoten auf der Ekliptik hingegen ist grösser und beträgt, wie schon erwähnt, circa 24500 Jahre.

Fasst man, der Wirklichkeit entsprechend, diese beiden, den Verlauf in der Natur sehr genähert wiedergebenden Bewegungsformen gemeinsam ins Auge, so resultirt durch Combination der cyclischen und elliptischen Bewegung eine geschlossene Schlangenlinie, welche der Weltpol in circa 24500 Jahren um den Pol der Ekliptik an der scheinbaren Himmelskugel beschreibt (Fig. 33), wobei die in Fig. 33 gerade gewählte Anzahl von Ausbiegungen natürlich willkürlich ist.

Schliesslich kann man noch nach Poinsot das Gesamtbild der Bewegung der Erdaxe im Raume auch dahin deuten, dass die momentane Drehaxe der Erde die Mantelfläche eines kleineren Kegels beschreibt, der selbst auf einem grösseren Kegel, dessen Mantelfläche durch die Hauptträgheitsaxe ξ der Erde beschrieben wird, in seinem Innern in schmiegender Bewegung rollt, wobei die Oeffnung des grossen Kegels circa $2 \times 23^\circ$, diejenige des kleinen hingegen verschwindend schmal ist. Voraussetzung dieser ganzen Betrachtung, die Bewegung durch das Abrollen eines beweglichen Kegels auf der Innenseite eines festen darzustellen, ist jedoch, wie ausdrücklich hervorzuheben, dass man sich auf das der Zeit direct proportionale Glied der Präcession $a_1 t$ beschränkt,

jedoch mit Ausschluss der Nutation. Wollte man die Nutationsglieder hier mit in Betracht ziehen, so würde jede genaue geometrische Vorstellung aufhören.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen über das Wesen der Präcession und Nutation gehen wir zu ihrer analytischen Darstellung über, welche die in der Bahnrechnung gebrauchten Rechenformeln ergibt. Voraussetzung ist dabei ein starrer Erdkörper. Für diesen ist das Problem bis jetzt nur gelöst. Freilich deuten, wie erwähnt wurde, die Untersuchungen Darwin's und Thomson's auf eine geringe Elasticität der Erde hin, indem ja unter dieser Voraussetzung der auf Grund der modernen Beobachtungsreihen über die Schwankungen der Polhöhe zu 430 Tagen sich ergebende Euler'sche Cyclus theoretisch bestätigt wird. Es ist daher nicht ausgeschlossen, dass die folgenden von Poisson und Laplace gegebenen Resultate über die Schwankungen der Erdaxe im Raume, die allgemein verwendet werden, noch einer geringen Modification fähig sind. Im Grossen und Ganzen genügen sie indess jedenfalls.

Den Ausgangspunkt der Präcessionstheorie bilden die Euler'schen Gleichungen:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B)rq &= \Sigma (\eta Z - \xi H) = D_1 \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr &= \Sigma (\xi \Xi - \eta Z) = D_2 \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)qp &= \Sigma (\xi H - \eta \Xi) = D_3. \end{aligned}$$

Eine Weiterbehandlung dieser Gleichungen wurde von Poisson durch Einführung des „Potentiales“ der äusseren Kräfte Ξ, H, Z in die rechten Seiten ermöglicht.

Der Begriff des Potentiales folgt unmittelbar aus dem Princip der lebendigen Kraft. Dasselbe besagt, wie wir in der zweiten Vorlesung gesehen haben, dass der Zuwachs der lebendigen Kraft eines Punktes in der unendlich kleinen Zeit dt , $d\left(\frac{m c^2}{2}\right)$ gleich ist der in der Zeit dt geleisteten Elementararbeit $Xdx + Ydy + Zdz$. Allgemein, dass die Summe aller Zuwächse, welche die lebendige Kraft während des ganzen Weges erfährt, gleich ist der Gesamtarbeit, die während der ganzen Bewegung geleistet wird:

$$\int d\left(\frac{m c^2}{2}\right) = \frac{m c_1^2}{2} - \frac{m c_0^2}{2} = \int (Xdx + Ydy + Zdz) = \int Pdp,$$

wobei über den ganzen endlichen Weg zu integrieren ist und X, Y, Z Functionen der Coordinaten sind.

Es ist nun jedenfalls möglich, dass eine vierte Function der Coordinaten, $F(x, y, z)$, von der Beschaffenheit existirt, dass die Grösse $Xdx + Ydy + Zdz$ gerade das vollständige Differential dieser Function F ist. Dasselbe ist:

$$dF(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz.$$

Tritt dieser mögliche Fall wirklich ein, so ist, indem wir dann die Function F mit V bezeichnen wollen:

$$dV = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Es sind dann also die Kraftcomponenten in Richtung der drei Coordinatenachsen die partiellen Ableitungen der Function V nach den drei Coordinaten:

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$Y = \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$Z = \frac{\partial V}{\partial z},$$

so dass:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

ist. Man nennt aus diesem Grunde V die „Kräftefunction“. Allgemein ist, wie leicht zu beweisen, wenn k eine beliebige Richtung im Raum und K die in dieser Richtung wirkende Kraft ist:

$$K = \frac{\partial V}{\partial k}.$$

Wenn nun ein beliebiger fixer materieller Punkt μ mit den Coordinaten ξ, η, ξ auf einen anderen beweglichen materiellen Punkt m mit den Coordinaten x, y, z und der Entfernung r vom ersteren Punkte mit einer Kraft wirkt, deren Intensität bloss von r abhängt, jedoch in beliebiger Weise, $f(r)$, dann sind, wie wir in der zweiten Vorlesung sahen, die Componenten dieser Kraft nach den drei Axen:

$$X = f(r) \frac{x - \xi}{r}$$

$$Y = f(r) \frac{y - \eta}{r}$$

$$Z = f(r) \frac{z - \xi}{r}.$$

Dass eine Kraftfunction existirt, ersieht man sofort, wenn man den Ausdruck der Arbeit bildet:

$$Xdx + Ydy + Zdz = f(r) \frac{(x - \xi)dx + (y - \eta)dy + (z - \xi)dz}{r}.$$

Da nämlich:

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \xi)^2,$$

also:

$$\frac{(x - \xi)dx + (y - \eta)dy + (z - \xi)dz}{r} = dr,$$

so ist die Arbeit $f(r)dr$ ein vollständiges Differential. Denn es ist, wenn:

$$\int f(r)dr = \varphi(r),$$

$$d\varphi(r) = f(r)dr$$

und mithin:

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\varphi(r);$$

es existirt also eine Kräftefunction:

$$V = \varphi(r),$$

deren Zuwachs gleich ist der geleisteten Arbeit und deren partielle Ableitungen nach den Coordinaten mithin die Kräfte sind:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(r)}{\partial x} = \varphi'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = f(r) \frac{x - \xi}{r} = X,$$

wobei, da y und z constant und bloss x variabel:

$$rdr = (x - \xi)dx,$$

liche Hauptaxensystem ξ, η, ζ mit ξ, η, ζ , diejenigen eines äusseren Massenpunktes m , des Mondes, mit ξ_1, η_1, ζ_1 , so wird zunächst:

$$H = \frac{k^2 m \mu}{r^3} (\eta_1 - \eta), \quad Z = \frac{k^2 m \mu}{r^3} (\xi_1 - \xi).$$

Die erste dieser Gleichungen mit $-\zeta$, die zweite mit η multiplicirt und addirt, folgt:

$$\eta Z - \zeta H = \frac{k^2 m \mu}{r^3} (\xi_1 \eta - \eta_1 \xi).$$

Bei Einführung des Potentials¹⁾ $V = k^2 m \sum \frac{\mu}{r}$ aber ergibt sich aus:

$$\frac{\partial V}{\partial \eta_1} = -k^2 m \sum \frac{\mu}{r^3} (\eta_1 - \eta), \quad \frac{\partial V}{\partial \xi_1} = -k^2 m \sum \frac{\mu}{r^3} (\xi_1 - \xi)$$

nach Multiplication der ersten dieser Gleichungen mit ξ_1 , der zweiten mit $-\eta_1$ und Addition:

$$\xi_1 \frac{\partial V}{\partial \eta_1} - \eta_1 \frac{\partial V}{\partial \xi_1} = +k^2 m \sum \frac{\mu}{r^3} (\xi_1 \eta - \eta_1 \xi) = D_1,$$

also in toto:

$$D_1 = \xi_1 \frac{\partial V}{\partial \eta_1} - \eta_1 \frac{\partial V}{\partial \xi_1}, \quad D_2 = \xi_1 \frac{\partial V}{\partial \zeta_1} - \zeta_1 \frac{\partial V}{\partial \xi_1}, \quad D_3 = \eta_1 \frac{\partial V}{\partial \zeta_1} - \zeta_1 \frac{\partial V}{\partial \eta_1} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (31)$$

Es nehmen somit die Euler'schen Gleichungen auch die folgende Form an:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B) r q &= \xi_1 \frac{\partial V}{\partial \eta_1} - \eta_1 \frac{\partial V}{\partial \xi_1} \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) p r &= \xi_1 \frac{\partial V}{\partial \zeta_1} - \zeta_1 \frac{\partial V}{\partial \xi_1} \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A) q p &= \eta_1 \frac{\partial V}{\partial \zeta_1} - \zeta_1 \frac{\partial V}{\partial \eta_1} \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (32)$$

In diesen Gleichungen hat Poisson an Stelle der rechtwinkligen Coordinaten ξ_1, η_1, ζ_1 die Polarcordinaten $\varphi, \psi, \varepsilon$ eingeführt, welche, wie im ersten Theile dieses Capitels gezeigt worden, die Lage des beweglichen Hauptaxensystemes ξ, η, ζ gegen das im Raume feste System x, y, z und mithin die Bewegung der Rotationsaxe im Raume bestimmen, wenn ihre Lage gegen das ξ, η, ζ -System bekannt ist. Da das Potential V lediglich von der wechselseitigen Entfernung r der Erde und des Mondes abhängt, so wird es bloss eine Function der Mondcoordinaten ξ_1, η_1, ζ_1 sein. Es wird daher, indem die Coordinaten x_n, y_n, z_n von $\varphi, \psi, \varepsilon$ völlig unabhängig, ihre Ableitungen nach $\varphi, \psi, \varepsilon$ also gleich Null sind:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= \frac{\partial V}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial V}{\partial \psi} &= \frac{\partial V}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \psi} + \frac{\partial V}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial \psi} + \frac{\partial V}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \psi} \\ \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial V}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial V}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial V}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \varepsilon} \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (33)$$

Für die neun partiellen Differentialquotienten der Mondcoordinaten ξ_1, η_1, ζ_1 nach den drei Euler'schen Winkeln $\varphi, \psi, \varepsilon$ ergeben sich jetzt durch eine kleine Rechnung auf Grund der Formeln:

¹⁾ Bezüglich des Potentials vergleiche man übrigens das auf S. XXI, Anm. 1 der Vorbemerkungen zur 3. Ausgabe des vorliegenden Werkes citirte Buch:

„Das mechanische Potential nach Vorlesungen von L. Boltzmann bearbeitet und die Theorie der Figur der Erde.“ Erster Theil. Mit 137 Textfiguren. Leipzig, Verlag von Johann Ambrosius Barth, 1908.

$$\begin{aligned}\xi_1 &= a\xi + a'\eta + a''\xi & \xi &= a\xi_1 + b\eta_1 + c\xi_1 \\ \eta_1 &= b\xi + b'\eta + b''\xi & \eta &= a'\xi_1 + b'\eta_1 + c'\xi_1 \\ \xi_1 &= c\xi + c'\eta + c''\xi & \xi &= a''\xi_1 + b''\eta_1 + c''\xi_1,\end{aligned}$$

unter Berücksichtigung der Gleichungen (17) in der ersten Abtheilung, folgende Werthe:

$$\frac{d\xi_1}{d\varphi} = b\xi + b'\eta + b''\xi = \eta_1$$

$$\frac{d\xi_1}{d\psi} = a\eta - a'\xi = (ab' - ba')\eta_1 + (ac' - ca')\xi_1 = c''\eta_1 - b''\xi_1$$

$$\frac{d\xi_1}{d\varepsilon} = -\sin\varphi(c\xi + c'\eta + c''\xi) = -\sin\varphi\xi_1$$

$$\frac{d\eta_1}{d\varphi} = -(a\xi + a'\eta + a''\xi) = -\xi_1$$

$$\frac{d\eta_1}{d\psi} = b\eta - b'\xi = (ba' - ab')\xi_1 + (bc' - cb')\xi_1 = a''\xi_1 - c''\xi_1$$

$$\frac{d\eta_1}{d\varepsilon} = -\cos\varphi(c\xi + c'\eta + c''\xi) = -\cos\varphi\xi_1$$

$$\frac{d\xi_1}{d\varphi} = 0$$

$$\frac{d\xi_1}{d\psi} = c\eta - c'\xi = (ca' - ac')\xi_1 + (cb' - bc')\eta_1 = b''\xi_1 - a''\eta_1$$

$$\frac{d\xi_1}{d\varepsilon} = \sin\varphi(a\xi + a'\eta + a''\xi) + \cos\varphi(b\xi + b'\eta + b''\xi) = \sin\varphi\xi_1 + \cos\varphi\eta_1.$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in die rechten Seiten der Gleichungen (33) erhalten die partiellen Differentialquotienten des Potentials folgende Form:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \eta_1 \frac{\partial V}{\partial \xi_1} - \xi_1 \frac{\partial V}{\partial \eta_1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = a'' \left\{ \xi_1 \frac{\partial V}{\partial \eta_1} - \eta_1 \frac{\partial V}{\partial \xi_1} \right\} + b'' \left\{ \xi_1 \frac{\partial V}{\partial \xi_1} - \xi_1 \frac{\partial V}{\partial \xi_1} \right\} + c'' \left\{ \eta_1 \frac{\partial V}{\partial \xi_1} - \xi_1 \frac{\partial V}{\partial \eta_1} \right\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varepsilon} = \sin\varphi \left\{ \xi_1 \frac{\partial V}{\partial \xi_1} - \xi_1 \frac{\partial V}{\partial \xi_1} \right\} - \cos\varphi \left\{ \xi_1 \frac{\partial V}{\partial \eta_1} - \eta_1 \frac{\partial V}{\partial \xi_1} \right\}.$$

Führt man in diese Gleichungen die Werthe der Drehmomente D_1, D_2, D_3 ein wie sie durch die Gleichungen (31) gegeben sind, unter Berücksichtigung der Werthe von a'', b'', c'' , wie sie durch die Gleichungen (17) im ersten Theile gegeben sind, so erhält man:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = D_3$$

$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = -\sin\varphi \sin\varepsilon D_1 - \cos\varphi \sin\varepsilon D_2 + \cos\varepsilon D_3$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varepsilon} = \sin\varphi D_2 - \cos\varphi D_1.$$

Aus diesen drei Gleichungen folgen aber die drei Drehmomente, dargestellt durch die partiellen Differentialquotienten des Potentials nach den drei Polarcoordinaten $\varphi, \psi, \varepsilon$, wie wir sie suchten:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\sin \varphi}{\sin \varepsilon} \left\{ \cos \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial V}{\partial \psi} \right\} - \cos \varphi \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \\ D_2 &= \frac{\cos \varphi}{\sin \varepsilon} \left\{ \cos \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial V}{\partial \psi} \right\} + \sin \varphi \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \\ D_3 &= \frac{dV}{d\varphi}. \end{aligned}$$

Die strengen Grundgleichungen der Rotation eines Körpers bei Einwirkung äusserer Kräfte nach dem Newton'schen Gesetze, wie sie der Lösung des Präcessionsproblems von Poisson und Laplace zu Grunde gelegt werden, schreiben sich somit auch wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= \frac{\sin \varphi}{\sin \varepsilon} \left\{ \cos \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial V}{\partial \psi} \right\} - \cos \varphi \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr &= \frac{\cos \varphi}{\sin \varepsilon} \left\{ \cos \varepsilon \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial V}{\partial \psi} \right\} + \sin \varphi \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= \frac{dV}{d\varphi} \end{aligned} \right\} \quad \cdot \quad \cdot \quad (34)$$

Um diese Gleichungen integrieren zu können, müsste zunächst das Potential V des Mondes auf die Erde als Function der Zeit entwickelt sein. Von dieser Entwicklung, die wir später geben werden, nehmen wir für den Augenblick an, sie sei geleistet. Gelänge es dann, die Differentialgleichungen (34) zu integrieren, so erhielte man p, q, r als Functionen der Zeit und mithin zunächst die Richtungscosinus der momentanen Drehaxe der Erde mit den drei Hauptträgheitsaxen:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \\ \cos \beta &= \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \end{aligned}$$

somit die Bewegung der Rotationsaxe im Innern des Erdkörpers bei Einwirkung äusserer Kräfte. Wie wir sehen werden, geht diese aber auch jetzt, wo wir die Einwirkung der Sonnen- und Mondanziehung in Betracht ziehen, fast genau so vor sich, wie ohne Rücksicht auf dieselbe, d. h. der Euler'sche Cyclus, den wir zuvor unter Vernachlässigung der äusseren Kräfte erhalten, bleibt auch jetzt, trotz der Sonnen- und Mondanziehung gewahrt.

Wäre diese Integration, die p, q, r als $f(t)$ liefert, aber ausgeführt, so hätte man immer noch p, q, r in das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} \sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} &= -p \sin \varphi - q \cos \varphi \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -p \cos \varphi + q \sin \varphi \\ \frac{d\varphi}{dt} &= r + (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \cotg \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (35)$$

einzusetzen und dieses zu integrieren, um $\varphi, \psi, \varepsilon$ als $f(t)$ und somit die Bewegung der instantanen Drehaxe der Erde im Raume zu erhalten. Da aber in den rechten Seiten der Fundamentalgleichungen (34) bereits $\varphi, \psi, \varepsilon$ enthalten sind, so

müsste man diese noch schwerer zu leistende Integration der Gleichungen (35) bereits ausgeführt haben, um $\varphi, \psi, \varepsilon$ in (34) als $f(t)$ einsetzen und die Integration von (34) vornehmen zu können. Diese Operationen sind indess für die Gleichungssysteme (34) und (35) allgemein überhaupt nicht ausführbar.

Für die Erde als Rotationsellipsoid sind bloss zwei Trägheitsmomente verschieden, indem $A = B$ ist. In Folge dessen kann man die ξ -Axe ganz beliebig wählen, und mithin kann das Potential des Mondes V auf den symmetrischen Erdkörper φ nicht enthalten, d. h. es muss:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

sein. In Folge dessen wird die dritte Gleichung des Systems (34) einfach:

$$C \frac{dr}{dt} = 0,$$

das Integral derselben also direct:

$$r = \text{constans.}$$

Die Winkelgeschwindigkeit der Erde um die Hauptträgheitsaxe ξ , welche mit der Winkelgeschwindigkeit um die momentane Drehaxe \mathcal{A} fast völlig zusammenfällt, ist somit constant.

Die Grundgleichungen der Rotation werden daher für die Erde noch völlig streng:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \lambda q &= - \frac{\sin \varphi}{A \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} - \frac{\cos \varphi}{A} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \\ \frac{dq}{dt} - \lambda p &= - \frac{\cos \varphi}{A \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} + \frac{\sin \varphi}{A} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (35a)$$

indem:

$$C \frac{A}{A} \omega = \lambda$$

ist.

Wenn nun V als Function der Zeit entwickelt und ebenfalls $\varphi, \psi, \varepsilon$ als $f(t)$ bekannt, mithin die rechten Seiten dieser Gleichungen als Functionen der Zeit gegeben wären, so wäre die Integration derselben durchführbar mittelst der Variation der Constanten. Setzte man nämlich die rechten Seiten zur Abkürzung bezüglich gleich n und m , so wären die Integrale der Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \lambda q &= n \\ \frac{dq}{dt} - \lambda p &= m \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (36)$$

falls die rechten Seiten n und m gleich Null wären, was mit der Bedingung identisch ist, dass keine äusseren Kräfte wirken:

$$\left. \begin{aligned} p &= f \cos \lambda t - g \sin \lambda t \\ q &= f \sin \lambda t + g \cos \lambda t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (37)$$

wobei f und g zwei willkürliche Constanten. Unter dieser Annahme findet also der Euler'sche Cyclus strenge statt.

Es repräsentiren nun aber die Integralformen (37) noch die Integrale der strengen Gleichungen (36), in denen m und n nicht Null sind, falls man nur f und g nicht als Constanten, sondern als Functionen der Zeit betrachtet. Um die Form dieser Functionen der Zeit zu bestimmen, hat man zunächst durch Differentiation:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -\lambda q + \frac{df}{dt} \cos \lambda t - \frac{dg}{dt} \sin \lambda t \\ \frac{dq}{dt} &= +\lambda p + \frac{df}{dt} \sin \lambda t + \frac{dg}{dt} \cos \lambda t.\end{aligned}$$

Sollen aber diese Gleichungen mit den zu integrierenden (36) identisch sein, so muss sein:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} \cos \lambda t - \frac{dg}{dt} \sin \lambda t &= +n \\ \frac{df}{dt} \sin \lambda t + \frac{dg}{dt} \cos \lambda t &= +m.\end{aligned}$$

Durch Multiplication dieser Ausdrücke mit $\cos \lambda t$ und $\sin \lambda t$, respective mit $-\sin \lambda t$ und $\cos \lambda t$, und Addition ergeben sich für f und g die folgenden Differentialgleichungen, aus denen f und g als Functionen der Zeit folgen, wenn n und m als $f(t)$ gegeben sind:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= +n \cos \lambda t + m \sin \lambda t \\ \frac{dg}{dt} &= -n \sin \lambda t + m \cos \lambda t.\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen (35a) ist mithin gegeben durch die Relationen:

$$\begin{aligned}p &= f \cos \lambda t - g \sin \lambda t \\ q &= f \sin \lambda t + g \cos \lambda t,\end{aligned}$$

in denen f und g durch folgende Ausdrücke bestimmt sind:

$$\begin{aligned}f &= f_0 + \int (n \cos \lambda t + m \sin \lambda t) dt \\ g &= g_0 + \int (-n \sin \lambda t + m \cos \lambda t) dt,\end{aligned}$$

zu deren Ausführung jedoch:

$$\begin{aligned}n &= -\frac{\sin \varphi}{A \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} - \frac{\cos \varphi}{A} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \\ m &= -\frac{\cos \varphi}{A \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} + \frac{\sin \varphi}{A} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon},\end{aligned}$$

also nicht nur V als $f(t)$, sondern auch φ , ψ und ε allgemein als Functionen der Zeit gegeben sein müssten, was aber voraussetzt, dass das System:

$$\left. \begin{aligned}\sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} &= -p \sin \varphi - q \cos \varphi \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -p \cos \varphi + q \sin \varphi \\ \frac{d\varphi}{dt} &= r + (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \cotg \varepsilon\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (35)$$

bereits integrirt ist. Man steht hier also vor der Schwierigkeit, p und q durch Integration von System (35a) finden zu sollen, während man, um diese Integration leisten zu können, bereits das System (35) integrirt haben, d. h. φ , ψ , ε als $f(t)$ gewonnen haben müsste, wozu p und q aber ihrerseits wieder schon als $f(t)$ bekannt sein müssten.

Eine Lösung ermöglicht Poisson trotzdem dadurch, dass er zunächst die ersten beiden Differentialgleichungen von System (35) nochmals differentirt, wodurch sich die Ableitungen von p und q und somit p und q selbst ganz eliminiren. So erhält er integrable Differentialgleichungen für ψ und ε , welche die säcularen und periodischen Be-

wegungen des Aequators auf der Ekliptik bestimmen. Nach Ausführung dieser Integration aber wird dann auch eine solche der Gleichungen (35a) für die Bewegung der Erdaxe im Erdinnern bei Einfluss der Sonnen- und Mondanziehung möglich, deren Ergebniss, wie schon angedeutet, darin bestehen wird, dass die äusseren von Sonne und Mond herrührenden Anziehungskräfte den Euler'schen Cyklus so gut wie gar nicht alteriren, so dass derselbe also trotz der Sonnen- und Mondanziehung fast genau so vor sich geht, wie wenn diese gar nicht vorhanden wäre.

Wir behandeln zunächst den erstgenannten Theil des Problems. Die Differentiation der beiden ersten Gleichungen von System (35) ergibt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} \right) &= - \frac{dp}{dt} \sin \varphi - \frac{dq}{dt} \cos \varphi + \frac{d\varphi}{dt} (-p \cos \varphi + q \sin \varphi) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right) &= - \frac{dp}{dt} \cos \varphi + \frac{dq}{dt} \sin \varphi + \frac{d\varphi}{dt} (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Multiplieirt man jetzt die erste, respective zweite Gleichung von System (35a) einmal mit $-\sin \varphi$ und $-\cos \varphi$, dann mit $-\cos \varphi$ und $+\sin \varphi$, und addirt beide Male, so folgt:

$$\begin{aligned} - \frac{dp}{dt} \sin \varphi - \frac{dq}{dt} \cos \varphi &= -\lambda p \cos \varphi + \lambda q \sin \varphi + \frac{1}{A \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} \\ - \frac{dp}{dt} \cos \varphi + \frac{dq}{dt} \sin \varphi &= \lambda p \sin \varphi + \lambda q \cos \varphi + \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon}, \end{aligned}$$

also eingesetzt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} \right) &= + (-p \cos \varphi + q \sin \varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt} + \lambda \right) + \frac{1}{A \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right) &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \left(\frac{d\varphi}{dt} + \lambda \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \end{aligned}$$

oder mit Hinblick auf System (35):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} \right) &= \frac{d\varepsilon}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} + \lambda \right) + \frac{1}{A \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} \\ \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} &= - \sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} + \lambda \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon}. \end{aligned}$$

Es ergibt nun aber die Combination der dritten Gleichung von System (35) mit der ersten:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega - \cos \varepsilon \frac{d\psi}{dt},$$

ferner ist:

$$\lambda = \frac{C-A}{A} \omega = \frac{C}{A} \omega - \omega,$$

also:

$$\frac{d\varphi}{dt} + \lambda = \frac{C}{A} \omega - \cos \varepsilon \frac{d\psi}{dt}.$$

Daher werden die letzten Gleichungen auch:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} \right) &= \frac{C}{A} \omega \frac{d\varepsilon}{dt} - \cos \varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} \frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{A \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} \\ \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} &= - \frac{C}{A} \omega \sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} + \sin \varepsilon \cos \varepsilon \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Aus diesen Gleichungen, die streng nicht integrirbar sind, leitet man nach Poisson durch Multiplication der ersten mit $\frac{A}{C\omega}$ und der zweiten mit $\frac{A}{C\omega \sin \varepsilon}$ direct solche in $\frac{d\psi}{dt}$ und $\frac{d\varepsilon}{dt}$ ab:

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{A}{C\omega} \frac{d}{dt} \left(\sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} \right) + \frac{A \cos \varepsilon}{C\omega} \frac{d\varepsilon}{dt} \frac{d\psi}{dt} - \frac{1}{C\omega \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} \\ \frac{d\psi}{dt} &= - \frac{A}{C\omega \sin \varepsilon} \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \frac{A \cos \varepsilon}{C\omega} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \frac{1}{C\omega \sin \varepsilon} \frac{dV}{d\varepsilon}.\end{aligned}$$

In diesen Gleichungen können nun aber die zweiten Glieder der rechten Seiten:

$$\frac{A \cos \varepsilon}{C\omega} \frac{d\varepsilon}{dt} \frac{d\psi}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{A \cos \varepsilon}{C\omega} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2,$$

da sie nur verschwindend kleine Beträge ergeben, weggelassen werden. Dass diese Glieder äusserst klein sind, ergibt sich schon daraus, dass sie von der zweiten Ordnung in Bezug auf die kleinen Grössen $\frac{d\psi}{dt}$ und $\frac{d\varepsilon}{dt}$ sind. Um ihren Einfluss abzuschätzen, bringen wir sie auf die linke Seite der Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon}{dt} (1 - \nu) &= \frac{A}{C\omega} \frac{d}{dt} \left(\sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} \right) - \frac{1}{C\omega \sin \varepsilon} \frac{dV}{d\psi} \\ \frac{d\psi}{dt} (1 - \nu_1) &= - \frac{A}{C\omega \sin \varepsilon} \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \frac{1}{C\omega \sin \varepsilon} \frac{dV}{d\varepsilon},\end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{aligned}|\nu| &= \frac{A}{C\omega} \cos \varepsilon \frac{d\psi}{dt} < \frac{1}{\omega} \frac{d\psi}{dt} \\ |\nu_1| &= \frac{A}{C\omega} \cos \varepsilon \frac{d\psi}{dt} = \nu.\end{aligned}$$

Nun ist aber $\frac{d\psi}{dt}$ in einem Tage rund $\frac{50''}{365}$ und $\omega = 2\pi$, also:

$$|\nu| < \frac{50}{6.365.200.000} < \frac{1}{8 \text{ Millionen}},$$

d. h. die genannten Glieder kommen thatsächlich nicht in Betracht.

Hierdurch fallen aber enorme mathematische Schwierigkeiten weg und man erhält als Differentialgleichungen für die Präcession noch vollständig genügend genau:

$$\left. \begin{aligned}\frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{A}{C\omega} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} \right) - \frac{1}{C\omega \sin \varepsilon} \cdot \frac{\partial V}{\partial \psi} \\ \frac{d\psi}{dt} &= - \frac{A}{C\omega \sin \varepsilon} \cdot \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + \frac{1}{C\omega \sin \varepsilon} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varepsilon}\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (40)$$

Integrirt man jetzt zwischen zwei beliebigen Grenzepochen t_0 und t , wobei für t_0 numerisch gewöhnlich die Anfangsepoche 1850 angenommen wird, so werden die Integrale unserer Gleichungen, indem ε_0 und ψ_0 die Anfangswerthe der Coordinaten für die Epoche 1850 sind:

$$\left. \begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_0 - \int_{t_0}^t \frac{1}{C\omega \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} dt + \frac{A}{C\omega} \left(\sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} \right)_{t_0}^{t_1} \\ \psi &= \psi_0 + \int_{t_0}^t \frac{1}{C\omega \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} dt - \frac{A}{C\omega} \left(\frac{1}{\sin \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} \right)_{t_0}^{t_1}\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (41)$$

Sehr wesentlich ist es nun hervorzuheben, dass in diesen Gleichungen ψ und ε indess noch gar nicht die Bewegung der momentanen Drehaxe \mathcal{A} der Erde gegen das im Raume feste System x, y, z , sondern nur die Lage der Hauptträgheitsaxe ξ gegen x, y, z bestimmen, da ε und ψ ja die Lage des beweglichen Hauptaxensystemes ξ, η, ζ gegen das im Raume feste System x, y, z bestimmen.

Indem wir die momentane Drehaxe \mathcal{A} , die mit der Trägheitsaxe ξ bis etwa auf zwei Zehntel Secunden zusammenfällt, einführen, erlangen wir den Vortheil, dass dann noch obendrein die zweiten Glieder in den Differentialgleichungen (40) fortfallen, wodurch man die von Poisson stammende Form der Präcessions- und Nutationsgleichungen erhält, welche die Bewegung der instantanen Drehaxe der Erde im Raume vollständig genügend genau bestimmen.

Seien ψ' und ε' für die Rotationsaxe der Erde gültig, so wie es bisher ψ und ε für die Trägheitsaxe ξ waren, und denken wir uns, wie früher bei Ableitung der Euler'schen Gleichungen, das feste System x, y, z durch einen Kugeloctanten repräsentirt, wobei xy die Ebene der Ekliptik, und nehmen weiter an, dass das bewegliche Hauptaxensystem ξ, η, ζ der Erde durch einen zweiten Kugeloctanten gekennzeichnet ist, der sich gegen den ersteren fortwährend verschiebt, wobei der Schnittpunkt ξ sehr nahe bei dem Schnittpunkte \mathcal{A} der betreffenden Axen mit der Himmelskugel liegt, so hat man:

$$\cos(\mathcal{A}, x) = \cos(\mathcal{A}, \xi) \cos(\xi, x) + \cos(\mathcal{A}, \eta) \cos(\eta, x) + \cos(\mathcal{A}, \zeta) \cos(\zeta, x),$$

da aber nach der ersten Abtheilung:

$$\begin{aligned} \cos(\mathcal{A}, \xi) &= \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \\ \cos(\mathcal{A}, \eta) &= \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \\ \cos(\mathcal{A}, \zeta) &= \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \end{aligned}$$

ferner:

$$\begin{aligned} \cos(\xi, x) &= a \\ \cos(\eta, x) &= b \\ \cos(\zeta, x) &= c \\ &\vdots \\ \cos(\xi, z) &= c'', \end{aligned}$$

so werden die Richtungscosinus der instantanen Drehaxe mit dem im Raum festen System:

$$\begin{aligned} S \cos(\mathcal{A}, x) &= a p + b q + c r \\ S \cos(\mathcal{A}, y) &= a' p + b' q + c' r \\ S \cos(\mathcal{A}, z) &= a'' p + b'' q + c'' r, \end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = S$ gesetzt ist. In diese Ausdrücke führen wir nun an Stelle der neun Richtungscosinus a, a', \dots, c'' wieder die drei Euler'schen Winkel $\varphi, \psi, \varepsilon$ ein. Setzt man dazu zur Abkürzung:

$$\left. \begin{aligned} p \cos \varphi - q \sin \varphi &= M \\ p \sin \varphi + q \cos \varphi &= N \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (42)$$

so werden die beiden ersten Gleichungen von System (35):

$$\begin{aligned} \sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} &= -N \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -M. \end{aligned}$$

Auf Grund der Gleichungen (17) in Abtheilung I dieses Capitels, in welche die $a, b, c \dots$ durch $\varphi, \psi, \varepsilon$ ausdrücken, erhält man jetzt bei Einführung von M und N nach einer kleinen Rechnung:

$$\left. \begin{aligned} ap + bq &= M \cos \psi - N \sin \psi \cos \varepsilon \\ a'p + b'q &= M \sin \psi + N \cos \psi \cos \varepsilon \\ a''p + b''q &= -N \sin \varepsilon. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (43)$$

Die Richtungscosinus der Instantanaxe \mathcal{A} der Erde mit den im Raume festen Axen x, y, z aber werden auf Grund der Gleichungen (17):

$$\begin{aligned} \cos(\mathcal{A}, x) &= -\sin \psi' \sin \varepsilon' \\ \cos(\mathcal{A}, y) &= \cos \psi' \sin \varepsilon' \\ \cos(\mathcal{A}, z) &= \cos \varepsilon'. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich auf Grund der vorstehenden Systeme:

$$\left. \begin{aligned} S \sin \psi' \sin \varepsilon' &= -M \cos \psi + N \sin \psi \cos \varepsilon + \omega \sin \psi \sin \varepsilon \\ S \cos \psi' \sin \varepsilon' &= +M \sin \psi + N \cos \psi \cos \varepsilon + \omega \cos \psi \sin \varepsilon \\ S \cos \varepsilon' &= -N \sin \varepsilon + \omega \cos \varepsilon. \end{aligned} \right\} \dots \dots (44)$$

Um jetzt die momentane Drehaxe der Erde, \mathcal{A} , an Stelle ihrer Hauptträgheitsaxe, ξ , in die vorausgehenden Untersuchungen wirklich einzuführen, ist es bloss nöthig, mit Hülfe der letzterhaltenen Relationen ψ' und ε' an Stelle von ψ und ε einzuführen. Wir wollen jedoch gleich $\psi' - \psi$ und $\varepsilon' - \varepsilon$ in die analytische Entwicklung einführen, weil dies sehr kleine Winkel sind, deren Sinus mit dem Bogen vertauschbar und deren Cosinus gleich 1 gesetzt werden kann, was vortheilhaft ist. Durch Multiplication der beiden ersten Gleichungen des letzterhaltenen Systemes bezüglich mit $\cos \psi$ und $-\sin \psi$, sodann mit $\sin \psi$ und $\cos \psi$ und Addition folgt:

$$\left. \begin{aligned} S \sin(\psi' - \psi) \sin \varepsilon' &= -M \\ S \cos(\psi' - \psi) \sin \varepsilon' &= +N \cos \varepsilon + \omega \sin \varepsilon \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (45)$$

woraus:

$$tg(\psi' - \psi) = \psi' - \psi = -\frac{M}{N \cos \varepsilon + \omega \sin \varepsilon}.$$

Indem aber mit Hinblick auf die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} &= -N \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= M \end{aligned}$$

N sehr klein ist gegen ω , da $\frac{d\psi}{dt}$ circa 50'' pro Jahr, die Winkelgeschwindigkeit der Erde ω im Jahre aber $(365 \times 360 \times 3600)''$ beträgt, so wird kurz, indem N und also auch $N \cos \varepsilon$ gegen ω zu vernachlässigen ist:

$$\psi' - \psi = -\frac{M}{\omega \sin \varepsilon} \left\} \dots \dots \dots (46)$$

Auf Grund dieser Gleichung und der beiden anderen:

$$\begin{aligned} S \sin \varepsilon' &= +N \cos \varepsilon + \omega \sin \varepsilon \\ S \cos \varepsilon' &= -N \sin \varepsilon + \omega \cos \varepsilon, \end{aligned}$$

die man leicht aus (45) erhält, folgt durch passende Multiplication mit $\sin \varepsilon$ und $\cos \varepsilon$ ebenfalls:

$$\begin{aligned} S \sin(\varepsilon' - \varepsilon) &= N \\ S \cos(\varepsilon' - \varepsilon) &= \omega, \end{aligned}$$

also:

$$tg(\varepsilon' - \varepsilon) = \varepsilon' - \varepsilon = \frac{N}{\omega} \dots \dots \dots (47)$$

Kennt man somit ψ und ε , d. h. die Lage der Hauptträgheitsaxe, so kann man auf Grund dieser Kenntniss auch ψ' und ε' , d. h. Lage der instantanen Rotationsaxe der Erde bestimmen mittelst der Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \psi' - \psi &= \frac{\frac{d\varepsilon}{dt}}{\omega \sin \varepsilon} \\ \varepsilon' - \varepsilon &= - \frac{\sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt}}{\omega} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (48)$$

die allgemein gültig sind für die beliebige Zeit t . Setzen wir sie für die Anfangszeit t_0 an und bilden die Differenzen, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \psi' - \psi_0 &= \psi - \psi_0 + \left(\frac{\frac{d\varepsilon}{dt}}{\omega \sin \varepsilon} \right)_{t_0}^t \\ \varepsilon' - \varepsilon_0 &= \varepsilon - \varepsilon_0 - \left(\frac{\sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt}}{\omega} \right)_{t_0}^t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (49)$$

Für die Bewegung der Trägheitsaxe ξ der Erde hatten wir nun aber die Gleichungen gefunden:

$$\left. \begin{aligned} \psi - \psi_0 &= + \int_{t_0}^t \frac{1}{C \omega \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} dt - \frac{A}{C \omega} \left(\frac{1}{\sin \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} \right)_{t_0}^t \\ \varepsilon - \varepsilon_0 &= - \int_{t_0}^t \frac{1}{C \omega \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} dt + \frac{A}{C \omega} \left(\sin \varepsilon \frac{d\psi}{dt} \right)_{t_0}^t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (50)$$

Mit Hinblick auf die beiden letzten Systeme (49) und (50) erhalten wir somit für die Bewegung der instantanen Drehaxe im Raume folgende Bewegungsgleichungen in ψ' und ε' , die wir aber der Einfachheit halber nunmehr gleich als solche in ψ und ε unter Weglassung der Accente schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \int_{t_0}^t \frac{1}{C \omega \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} dt - \left(\frac{1}{\omega \sin \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} \right)_{t_0}^t \left(\frac{A - C}{C} \right) \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 - \int_{t_0}^t \frac{1}{C \omega \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} dt + \left(\frac{\sin \varepsilon}{\omega} \frac{d\psi}{dt} \right)_{t_0}^t \left(\frac{A - C}{C} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (51)$$

Da aber der Maximalwerth der Grössen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \frac{d\varepsilon}{dt} &= - \frac{p \cos \varphi - q \sin \varphi}{\omega} \\ \frac{\sin \varepsilon}{\omega} \frac{d\psi}{dt} &= - \frac{p \sin \varphi + q \cos \varphi}{\omega}, \end{aligned}$$

der folgende ist:

$$\frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = \sin \gamma,$$

dieser aber angesichts unserer früheren Untersuchungen nichts Anderes ist als die Amplitude des Euler'schen Cyklus, die 0'',079 beträgt, und da die Abplattung der Erde sich zu:

$$\frac{C - A}{C} = 0,00327$$

ergiebt, so ist die Grössendimension der zweiten Glieder in unseren letzten Gleichungen im Maximum bezüglich gleich 0'',0005 und 0'',0002. Diese Glieder können also vollständig weggelassen werden. Die Fundamentalgleichungen für die Bewegung der momentanen Drehaxe der Erde im Raume (die allen Anforderungen genügen) werden somit in definitiver Gestalt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= + \frac{1}{C\omega \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= - \frac{1}{C\omega \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (52)$$

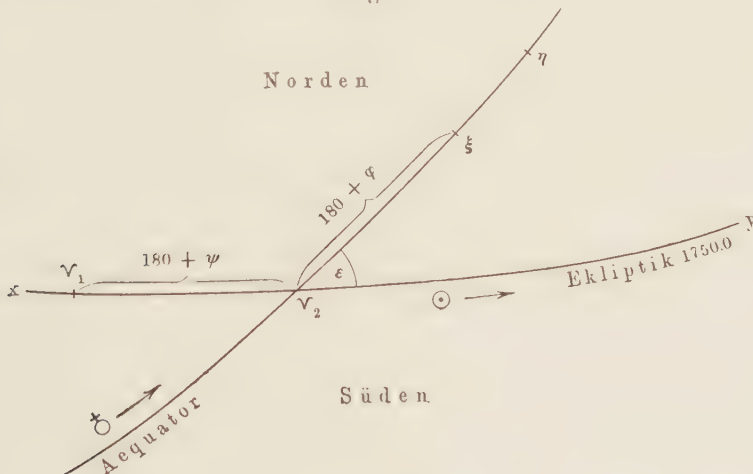
Ihre Integrale:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \int \frac{1}{C\omega \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} dt \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 - \int \frac{1}{C\omega \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} dt \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (53)$$

aber sind vollständig auswerthbar, da die Differentialquotienten des Potenciales $\frac{\partial V}{\partial \psi}$ und $\frac{\partial V}{\partial \varepsilon}$, wie wir zum Schlusse noch zu zeigen haben, als Functionen der Zeit darstellbar sind.

Ehe wir diese Entwicklung, die unsere Untersuchungen über die Bewegung der Rotationsaxe der Erde im Raum abschliesst, geben, ziehen wir ein kurzes Resume. Es

Fig. 34.

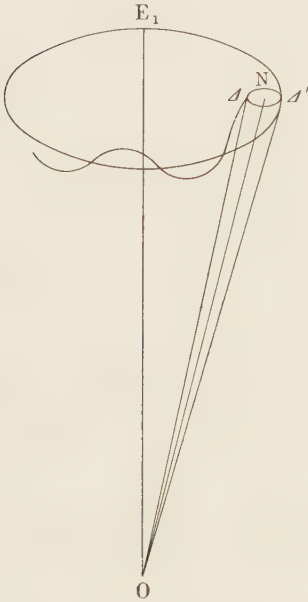


bestand unsere Aufgabe darin, die Bewegung der augenblicklichen Drehaxe der Erde in Bezug auf ein festes Coordinatensystem zu entwickeln. Als Grundebene desselben wählten wir die augenblickliche Erdbahnebene (Ekliptik) von 1850,0. Zunächst erhielten wir durch Einführung eines beweglichen Hauptaxensystems ξ, η, ζ nur Formeln,

welche die Bewegung der Hauptträgheitsaxe ξ des Erdkörpers definirten. Durch Einführung der Richtung der momentanen Drehaxe wurden diese Formeln einfacher, indem wegen des Factors $\frac{C-A}{C}$, wie wir sahen, gewisse Glieder so klein wurden, dass sie vernachlässigt werden konnten. Nennen wir dann Aequator diejenige Ebene, die auf der instantanen Drehaxe der Erde senkrecht steht, ψ den Knoten und ε die Neigung des Aequators gegen die feste Ebene der Ekliptik von 1850,0, so gelten die Poisson'schen Gleichungen (53) so gut wie vollkommen streng.

In ihnen repräsentirt V das Potential der Sonnen- und Mondanziehung. Die Anziehung der Planeten kann vernachlässigt werden und dies geschieht bei dieser

Fig. 35.



Entwicklung thatsächlich. Man kann nun V auf Grund der Mondtheorie, und da Näherungswerthe von ψ und ε bekannt sind, entwickeln und damit ψ und ε selbst. Die sorgfältigsten und umfassendsten numerischen Entwicklungen, die in dieser Beziehung bisher durchgeführt worden sind, sind die von Oppolzer gegebenen. Der Umfang und die Genauigkeitsgrenze dieser Entwicklungen geht indess über die durch die Praxis gesteckten Anforderungen und Grenzen weit hinaus. Wir wollen nur die ersten Glieder entwickeln, was für die principielle Seite des Problems ausreicht und verhältnissmässig einfach geschehen kann, und die numerischen Entwicklungen nur insoweit geben, als sie in der Praxis der Bahnrechnung wirklich gebraucht werden.

Von vornherein muss man aber in den Entwicklungen die grössten Mondglieder, so die schnelle Bewegung der Mondknoten berücksichtigen. Thut man dies, so zeigt sich, dass in der ersten Näherung in ε keine säcularen (mit t multiplicirten) Glieder auftreten, sondern nur in ψ . Wie bereits zu Anfang erwähnt, nennt man diese säcularen Glieder Präcession, die

periodischen aber Nutation, und da dieselben nur von der Anziehung der Sonne und des Mondes herrühren, so setzt man eben, um dies zu bezeichnen, „Luni-Solar“ davor. Es giebt also in erster Näherung keine Luni-Solar-Präcession in Schiefe, sondern nur eine solche in Länge, dagegen eine Luni-Solar-Nutation in Länge und eine ebensolche in Schiefe. Bei der zweiten Näherung [cf. Formeln (69)] tritt jedoch auch eine Präcession in Schiefe, freilich von verschwindend kleinem Betrag, auf.

Hinsichtlich der geometrischen Darstellung beschreibt, wie schon erwähnt, die instantane Drehaxe A einen Kegel um den Pol der festen Ekliptik E_1 (Präcession). Auf dem Mantel $O A'$ dieses Kegels rollt ohne Reibung ein kleinerer Kegel $O A N$ (cf. Fig. 35). Dadurch beschreibt A , welches auf der Mantelfläche dieses kleinen Kegels liegt, am Himmel eine Schlangenlinie. Dieser kleine Kegel ist in erster Annäherung, wenn man nur das erste Glied der Nutation mitnimmt, ein elliptischer.

Nimmt man hingegen die weiteren Glieder mit, so ändert dieser kleine Kegel seine Gestalt und der Vorgang ist nicht mehr so einfach geometrisch darzustellen. Das ist die Theorie der Rotation der Erdaxe.

Die sphärische Astronomie aber hat mit dem wahren Aequinoctium zu rechnen. Die Erdbahn wird nun durch die Anziehung der Planeten säcular und periodisch in ihrer Lage verändert. Diese Veränderung giebt die Sonnentheorie (z. B. Leverrier)

und aus ihr muss also die Lage der Erdbahn entnommen werden, wobei man aber nur die säcularen Veränderungen berücksichtigt, worauf wir zu Anfang von Abtheilung III dieses Capitels zurückkommen. Hierdurch wird erst der Begriff „Präcession durch die Planeten“ eingeführt, der mit der Theorie der Rotation der momentanen Drehaxe der Erde an sich nichts zu thun hat.

Um unsere theoretischen Untersuchungen zum Abschluss zu bringen, haben wir passende Reihenentwickelungen für die Differentialquotienten $\frac{d\psi}{dt}$ und $\frac{d\varepsilon}{dt}$, wie sie durch die Poisson'schen Gleichungen (53) definirt sind, aufzustellen und dazu muss das Potential der Sonnen- und Mondanziehung:

$$V = k^2 m \sum \frac{\mu_i}{r}$$

auf die Erde, und seine beiden in den Poisson'schen Gleichungen auftretenden Derivirten, nach der Zeit entwickelt werden. Sei r'' die Entfernung des äusseren Punktes m mit den Coordinaten ξ_1, η_1, ξ_1 , r' diejenige des beliebigen Punktes μ des Erdkörpers vom Ursprung, mit den Coordinaten ξ, η, ξ , schliesslich r die gegenseitige Entfernung beider Punkte, so ist ja:

$$r^2 = r''^2 + r'^2 - 2(\xi \xi_1 + \eta \eta_1 + \xi \xi_1)$$

oder:

$$r^2 = r''^2 \left[1 - \frac{2}{r''^2} (\xi \xi_1 + \eta \eta_1 + \xi \xi_1) + \frac{r'^2}{r''^2} \right],$$

mithin:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r''} \left[1 - \frac{2}{r''^2} (\xi \xi_1 + \eta \eta_1 + \xi \xi_1) + \frac{r'^2}{r''^2} \right]^{-1/2}.$$

Indem nun $\frac{r'}{r''}$ für den Mond etwa $\frac{1}{60}$, für die Sonne hingegen gar nur $\frac{1}{20000}$ circa ist, so reicht es selbst für die schärfsten Rechnungen vollständig aus, wenn wir bei der Entwickelung von $\frac{r'}{r''}$ — indem sich in bekannter Weise für V eine Entwickelung nach Kugelfunctionen ergibt — bloss bis zu Gliedern zweiter Ordnung incl. gehen. Es wird somit:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r''} \left[1 + \frac{1}{r''^2} (\xi \xi_1 + \eta \eta_1 + \xi \xi_1) - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r''^2} + \frac{3}{2} \frac{1}{r''^4} (\xi^2 \xi_1^2 + \eta^2 \eta_1^2 + \xi^2 \xi_1^2 + 2 \xi \xi_1 \eta \eta_1 + \dots) \right].$$

Da aber die Entfernung „Erdcentrum — Mondcentrum“ ganz unabhängig davon ist, welchen aller unendlich vielen Punkte des Erdkörpers man ins Auge fasst, so wird das Potential:

$$V = \frac{k^2 m}{r''} \sum \mu \left[1 + \frac{1}{r''^2} (\xi \xi_1 + \eta \eta_1 + \xi \xi_1) - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r''^2} + \frac{3}{2} \frac{1}{r''^4} (\xi^2 \xi_1^2 + \eta^2 \eta_1^2 + \xi^2 \xi_1^2 + 2 \xi \xi_1 \eta \eta_1 + \dots) \right]. \quad (54)$$

Weil ξ, η, ξ Hauptträgheitsaxen, also entsprechend den in Abtheilung I. dieses Capitels abgeleiteten allgemeinen Relationen A, B, C Hauptträgheitsmomente sind, und folglich nach dem Früheren:

$$\left. \begin{aligned} \sum m (\eta^2 + \xi^2) &= A \\ \sum m (\xi^2 + \xi^2) &= B \\ \sum m (\xi^2 + \eta^2) &= C \end{aligned} \right\}$$

$$\Sigma m \xi^2 = \frac{C + B - A}{2}$$

$$\Sigma m \eta^2 = \frac{A + C - B}{2}$$

$$\Sigma m \xi^2 = \frac{B + A - C}{2}$$

ist; und da ferner ξ, η, ξ durch den Schwerpunkt gehende Axen, also:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m \xi \eta &= 0 \\ \Sigma m \eta \xi &= 0 \\ \Sigma m \xi \xi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \Sigma m \xi &= 0 \\ \Sigma m \eta &= 0 \\ \Sigma m \xi &= 0 \end{aligned} \right\}$$

ist, und mithin:

$$\Sigma m r'^2 = \frac{A + B + C}{2}$$

wird, so resultirt bei Einführung der Hauptträgheitsmomente für das Potential folgender allgemeine Ausdruck:

$$V = \frac{k^2 m}{r''} \Sigma \mu + \frac{k^2 m}{r''^3} \left[-\frac{1}{4} (A + B + C) + \frac{3}{2 r''^2} \left\{ \xi_1^2 \frac{C + B - A}{2} + \eta_1^2 \frac{A + C - B}{2} + \xi_1^2 \frac{B + A - C}{2} \right\} \right] \dots \dots (55)$$

Für die Erde, für die als Rotationsellipsoid zwei Hauptträgheitsmomente gleich sind ($A = B$), wird das Potential indess einfacher:

$$V = \frac{k^2 m}{r''} \Sigma \mu + \frac{k^2 m}{r''^3} \left[\frac{3}{4} \frac{1}{r''^2} \{ (\xi_1^2 + \eta_1^2) C + \xi_1^2 (2A - C) \} - \frac{1}{4} (2A + C) \right] (56)$$

oder:

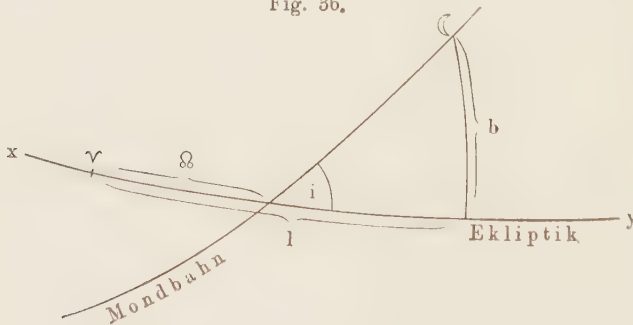
$$V = \frac{k^2 m \Sigma \mu}{r''} - \frac{k^2 m}{r''^3} \cdot \frac{2A + C}{4} + \frac{3}{4} \frac{k^2 m}{r''^5} [r'^2 C + 2 \xi_1^2 (A - C)]$$

Die ersten beiden Glieder hängen nicht vom Coordinatensystem ab. Da nun nur $\frac{\partial V}{\partial \psi}$ und $\frac{\partial V}{\partial \varepsilon}$ gesucht werden, und die Entfernung Mittelpunkt „Mond—Erde“ von den Winkeln ψ und ε ganz unabhängig ist, d. h. da ψ und ε die Grösse r'' gar nicht enthalten, so können wir vom ersten Gliede in:

$$V = f(r'') + \frac{3}{2} \frac{k^2 m}{r''^5} (A - C) \xi_1^2$$

bei Aufstellung der Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial \psi}$ und $\frac{\partial V}{\partial \varepsilon}$ in den rechten Seiten der Poisson's-

Fig. 36.



sehen Gleichungen ganz absehen und für das folgende also einfach:

$$V = \frac{3}{2} \frac{k^2 m}{r''^5} (A - C) \xi_1^2$$

setzen.

Indem nun bei Einführung der geocentrischen Länge l und Breite b des Mondes, welche auf dieselbe Fundamentelebene wie ψ und ε , also auf die

feste Ekliptik Jan. 1850,0 zu beziehen sind (Fig. 36):

$$\xi = r'' \cos b \cos l, \quad \eta = r'' \cos b \sin l, \quad \xi = r'' \sin l$$

ist, so folgt, da nach den allgemeinen Formeln (17) von Abtheilung I:

$$\xi_1 = c \xi + c' \eta + c'' \xi = -\sin \psi \sin \varepsilon \xi + \cos \psi \sin \varepsilon \eta + \cos \varepsilon \xi$$

ist, für ξ_1 der Werth:

$$\xi_1 = r'' [\cos b \sin \varepsilon \sin(l - \psi) + \sin b \cos \varepsilon].$$

Das Potential wird somit:

$$V = \frac{3}{2} \frac{k^2 m}{r''^3} (A - C) [\cos b \sin \varepsilon \sin(l - \psi) + \sin b \cos \varepsilon]^2 \quad . \quad . \quad (57)$$

oder wenn man zur Abkürzung:

$$\frac{3 k^2 m}{r''^3 \omega} \frac{C - A}{C} = Q$$

setzt, wo Q constant ist, wenn man den mittleren Radius vector der Mondbahn r'' als constant betrachtet, so lautet der Ausdruck für das Potential in endgültiger Form:

$$V = - \frac{1}{2} C \omega Q [\cos b \sin \varepsilon \sin(l - \psi) + \sin b \cos \varepsilon]^2 \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Daher ergeben sich durch Differentiation für die rechten Seiten der Poisson'schen Gleichungen folgende Werthe:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{C \omega \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} &= Q [\cos b \sin \varepsilon \sin(l - \psi) + \sin b \cos \varepsilon] \cos b \cos(l - \psi) \\ \frac{1}{C \omega \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} &= - Q [\cos b \sin \varepsilon \sin(l - \psi) + \sin b \cos \varepsilon] [\cos b \cotg \varepsilon \sin(l - \psi) - \sin b] \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Diese Ausdrücke hat man nun einmal für die Sonne unter Einführung von Länge, Breite und Radius vector der Sonne:

$$l_{\odot} \quad b_{\odot} \quad r_{\odot},$$

sodann durch Einführung derselben Grössen für den Mond:

$$l_{\text{M}} \quad b_{\text{M}} \quad r_{\text{M}}$$

zu bilden, indem man für Länge, Breite und Radius vector die Werthe aus den Leverrier'schen Sonnentafeln und den Hansen'schen Mondtafeln als $f(t)$ entnimmt und in letztere Gleichungen einsetzt. Ebenso ist Q mit Hülfe dieser Tafeln leicht als Function der Zeit zu entwickeln. Betrachtet man dabei die Breite, die für die Sonne direct gleich Null ist, höchstens einige Secunden beträgt, und für den Mond, wenn auch nicht direct Null, so doch gering ist, als so klein, dass man setzen kann:

$$\begin{aligned} \sin b &= tg b = b \\ \cos b &= 1 \\ \sin b^2 &= 0, \end{aligned}$$

was schon eine sehr starke Annäherung ergiebt, so wird:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C \omega \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} &= Q \left[\frac{1}{2} \sin \varepsilon \sin 2(l - \psi) + \sin b \cos \varepsilon \cos(l - \psi) \right] \\ \frac{1}{C \omega \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} &= - Q \left[\cos \varepsilon \sin(l - \psi)^2 + \sin b \frac{\cos \varepsilon^2 - \sin \varepsilon^2}{\sin \varepsilon} \sin(l - \psi) \right]. \end{aligned}$$

Da aber nach Fig. 36:

$$tg b = tg i \sin(l - \delta)$$

ist, oder weil:

$$tg b = \sin b$$

auch:

$$\sin b = tg i \sin(l - \delta)$$

ist, so werden die rechten Seiten der Poisson'schen Gleichungen auch:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{C \omega \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} &= \frac{1}{2} Q \left[\sin \varepsilon \sin 2(l - \psi) + \operatorname{tg} i \cos \varepsilon \sin(2l - \oslash - \psi) \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{tg} i \cos \varepsilon \sin(\oslash - \psi) \right] \\ \frac{1}{C \omega \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} &= -\frac{1}{2} Q \left[\cos \varepsilon - \cos \varepsilon \cos(2l - \psi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos \varepsilon^2 - \sin \varepsilon^2}{\sin \varepsilon} \operatorname{tg} i \cos(\oslash - \psi) - \frac{\cos \varepsilon^2 - \sin \varepsilon^2}{\sin \varepsilon} \operatorname{tg} i \cos(2l - \oslash - \psi) \right] \end{aligned} \right\} \quad \cdot \cdot \quad (60)$$

Betrachtet man nun Q als constant, was jedoch nur in erster Näherung richtig ist, wenn man die Mondbahn nicht als elliptisch, sondern als Kreisbahn ansieht, so treten in ψ bloss säculare Glieder auf und man erhält:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{1}{2} Q_0 \cos \varepsilon_0,$$

indem näherungsweise auch $\varepsilon = \varepsilon_0$, da sich auch die Schiefe der Ekliptik wenig ändert; integrirt folgt also:

$$\psi = \psi_0 + C_1 t.$$

In ε hingegen treten bei diesen Vernachlässigungen nur periodische Glieder auf, gar kein constanter Theil, es ist:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= 0 \\ \varepsilon &= \varepsilon_0, \end{aligned}$$

d. h. die Schiefe der Ekliptik bleibt bezüglich säcularer Glieder constant bis auf Glieder höherer Ordnung. Führt man hingegen die Rechnung mit allen Näherungen durch, so hat man Q als mit der Zeit veränderlich zu betrachten und dann treten in ψ sowohl säculare wie periodische Glieder auf; man erhält die ganze zu Anfang erwähnte Reihe, die sich aus einer Potenzreihe der Zeit plus einer Fourier'schen Reihe zusammensetzt:

$$\psi = \psi_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + \Sigma a \cos(i \odot + i \mathbb{C}),$$

wobei der erste Theil die Lunisolarpräcession in Länge, der zweite die Lunisolar-nutation in Länge repräsentirt und sich in der Rechnung, wie wir sehen werden, ψ additiv zusammensetzt aus ψ_\odot und $\psi_{\mathbb{C}}$; c_1 , die schon erwähnte Präcessions-constante, stellt das Hauptglied dar. Ebenso setzt sich ε zusammen aus ε_\odot und $\varepsilon_{\mathbb{C}}$ und man bezeichnet wieder das grösste in ε auftretende Glied als die Constante der Nutation. Es existirt also in erster Näherung nur eine Lunisolar-nutation in Schiefe, aber keine Lunisolarpräcession in Schiefe [cf. Formeln (68) und (69)].

Wir berechnen zunächst die von der Sonnenwirkung herrührenden Glieder für ein constantes Q , d. h. bei Vernachlässigung der Excentricität, setzen also $r = a$, d. h.

$$\frac{1}{2} Q^{(0)} = \frac{3}{2} \frac{k^2 m}{a^3 \omega} \frac{C - A}{C}.$$

Da die Bewegung in der Kreisbahn gleichförmig, so ist die Sonnenlänge l_\odot dargestellt durch eine lineare Function der Zeit:

$$l_\odot = l_\odot^{(0)} + n_\odot t,$$

wo n_\odot die mittlere tägliche Bewegung der Sonne und $l_\odot^{(0)}$ der Anfangswerth von l_\odot zur Zeit t_0 ist. Die Neigung i für die Sonne, d. h. die Neigung ihrer augenblicklichen Ekliptik gegen die vom Jahre 1850, ist so klein, dass man ganz von ihr absehen kann. Somit ergibt sich für die Sonnenwirkung:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)_\odot &= -\frac{1}{2} Q_\odot^{(0)} [\cos \varepsilon - \cos \varepsilon \cos(2l_\odot^{(0)} + 2n_\odot t - 2\psi)] \\ \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)_\odot &= -\frac{1}{2} Q_\odot^{(0)} \sin \varepsilon \sin(2l_\odot^{(0)} + 2n_\odot t - 2\psi) \end{aligned}$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{\odot} &= -\frac{1}{2} Q_{\odot}^{(0)} [\cos \varepsilon - \cos \varepsilon \cos (2l_{\odot}^{(0)} + 2n_{\odot}t)] \\ \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{\odot} &= -\frac{1}{2} Q_{\odot}^{(0)} [\sin \varepsilon \sin (2l_{\odot}^{(0)} + 2n_{\odot}t)] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (61)$$

Als Präcession und Nutation in Länge, wie sie durch die Sonne allein hervor-
gebracht wird, folgt also durch Integration:

$$(\psi)_{\odot} = \text{const.} - \frac{1}{2} Q_{\odot}^{(0)} \cos \varepsilon \times t + \frac{Q_{\odot}^{(0)}}{4n_{\odot}} \cos \varepsilon \sin 2l_{\odot} \dots \dots \dots (62)$$

Die Nutation in Schiefe wird:

$$(\Delta \varepsilon)_{\odot} = \frac{Q_{\odot}^{(0)} \sin \varepsilon}{4n_{\odot}} \cos 2l_{\odot}.$$

Für den Mond ist:

$$l_{\mathcal{A}} = l_{\mathcal{A}}^{(0)} + n_{\mathcal{A}} t$$

und:

$$\delta_{\odot} = \delta_{\odot 0} - \alpha t,$$

wo $\alpha = 19^{\circ}342t$ (t in Jahren). In Folge dessen wird der Mondantheil an der Präcession
und Nutation, indem die Mondknoten in circa 18 Jahren von 0 bis 360° wechseln:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{\mathcal{A}} &= -\frac{1}{2} Q_{\mathcal{A}}^{(0)} \left[\cos \varepsilon - \cos \varepsilon \cos 2l_{\mathcal{A}} + \operatorname{tg} i \frac{\cos \varepsilon^2 - \sin \varepsilon^2}{\sin \varepsilon} \cos \delta_{\odot} \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{tg} i \frac{\cos \varepsilon^2 - \sin \varepsilon^2}{\sin \varepsilon} \cos (2l_{\mathcal{A}} - \delta_{\odot}) \right] \\ \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{\mathcal{A}} &= -\frac{1}{2} Q_{\mathcal{A}}^{(0)} \sin \varepsilon \sin 2l_{\mathcal{A}} - \frac{1}{2} Q_{\mathcal{A}}^{(0)} \operatorname{tg} i \cos \varepsilon \sin (2l_{\mathcal{A}} - \delta_{\odot}) \\ &\quad + \frac{1}{2} Q_{\mathcal{A}}^{(0)} \operatorname{tg} i \cos \varepsilon \sin \delta_{\odot} \end{aligned} \right\} \dots \dots (63)$$

wobei:

$$i = 5^{\circ} 8', 8$$

ist.

Da, wenn δ_{\odot} an Stelle von t Variable und $\delta_{\odot} = \delta_{\odot 0} - \alpha t$, also $d\delta_{\odot} = -\alpha dt$, somit:

$$\int \cos \delta_{\odot} dt = -\frac{1}{\alpha} \int \cos \delta_{\odot} d\delta_{\odot} = -\frac{\sin \delta_{\odot}}{\alpha} \text{ und } \int_0^i \cos \delta_{\odot} dt = -\frac{1}{\alpha} (\sin \delta_{\odot} - \sin \delta_{\odot 0}),$$

so folgt durch Integration, bei der man sogar die starke Mondknotenbewegung ver-
nachlässigen kann:

$$\left. \begin{aligned} (\psi)_{\mathcal{A}} &= \text{const.} - \frac{1}{2} Q_{\mathcal{A}}^{(0)} \cos \varepsilon \times t + \frac{Q_{\mathcal{A}}^{(0)}}{4n_{\mathcal{A}}} \cos \varepsilon \sin 2l_{\mathcal{A}} \\ &\quad + \frac{Q_{\mathcal{A}}^{(0)}}{2 \times 19^{\circ}342} \operatorname{tg} i \frac{\cos \varepsilon^2 - \sin \varepsilon^2}{\sin \varepsilon} \sin \delta_{\odot} + \frac{Q_{\mathcal{A}}^{(0)}}{4n_{\mathcal{A}}} \operatorname{tg} i \frac{\cos \varepsilon^2 - \sin \varepsilon^2}{\sin \varepsilon} \sin (2l_{\mathcal{A}} - \delta_{\odot}) \\ (\Delta \varepsilon)_{\mathcal{A}} &= \frac{Q_{\mathcal{A}}^{(0)}}{4n_{\mathcal{A}}} \sin \varepsilon \cos 2l_{\mathcal{A}} + \frac{Q_{\mathcal{A}}^{(0)}}{4n_{\mathcal{A}}} \operatorname{tg} i \cos \varepsilon \cos (2l_{\mathcal{A}} - \delta_{\odot}) \\ &\quad + \frac{Q_{\mathcal{A}}^{(0)}}{2 \times 19^{\circ}342} \operatorname{tg} i \cos \varepsilon \cos \delta_{\odot} \end{aligned} \right\} \dots \dots (64)$$

wobei in den Nennern α gegen n vernachlässigt ist:

$$2n_{\mathcal{A}} + \alpha = 2n_{\mathcal{A}}.$$

Das Glied:

$$\frac{Q_{\mathcal{A}}^{(0)}}{2 \times 19^{\circ}342} \operatorname{tg} i \cos \varepsilon \cos \delta_{\odot} = \left\{ \begin{array}{l} 9'', 2231 \text{ (nach Peters)} \\ 9'', 2365 \text{ (nach Nyrén)} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (65)$$

ist die „Constante der Nutation“, auf deren geometrische Bedeutung wir bei Einführung der separaten Werthe der Nutation in Länge und in Schiefe in Abtheilung III dieses Capitels nochmals zurückkommen werden.

Da nun bei Einführung der einzelnen Zahlenwerthe und bei Annahme des Werthes für die Abplattung:

$$\frac{C - A}{C} = 0,00326$$

$Q_{\odot}^{(0)}$ sich für den Mond zu:

$$\lg Q_{\odot}^{(0)} = 1,8779$$

ergiebt und da in einem Tage:

$$n_{\odot} = 13^{\circ},177$$

ist, so findet man durch eine leichte Rechnung aus letzteren Gleichungen numerisch:

$$\left. \begin{aligned} (\psi)_{\odot} &= -34'',63t + 0'',20 \sin 2l_{\odot} + 17'',29 \sin \odot + 0'',03 \sin (2l_{\odot} - \odot) \\ (\mathcal{A}\varepsilon)_{\odot} &= 9'',24 \cos \odot + 0'',08 \cos 2l_{\odot} + 0'',01 \cos (2l_{\odot} - \odot) \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Um noch ψ_{\odot} und $(\mathcal{A}\varepsilon)_{\odot}$ numerisch zu erhalten, hat man zunächst das unbekannte Q_{\odot} zu bestimmen. Dazu bestimmt man zunächst die gesammte Präcession:

$$\psi(t) = (\psi)_{\odot} + (\psi)_{\odot}$$

empirisch durch Beobachtung der Fixsterne und Bestimmung von deren Längen. Hierauf kann man das säculare Glied der Präcession, die Präcessionsconstante, bestimmen. So ergiebt sich aus Sternörtern allgemein:

$$\psi = -50'',37t.$$

Da aber für den Mond ψ bestimmt wurde zu:

$$(\psi)_{\odot} = -34'',63t,$$

so bleibt in ψ für die Sonne:

$$(\psi)_{\odot} = -15'',74t.$$

Auf Grund hiervon findet sich:

$$\lg Q_{\odot}^{(0)} = 1,5355$$

und die Gesamtpräcession und Nutation für die Sonne in Länge und Schiefe wird mithin numerisch:

$$\left. \begin{aligned} (\psi)_{\odot} &= -15'',74t + 1'',25 \sin 2l_{\odot} \\ (\mathcal{A}\varepsilon)_{\odot} &= + 0'',54 \cos 2l_{\odot}. \end{aligned} \right\}$$

Als Zahlenwerthe für die Gesamtpräcession und Nutation in Länge und Schiefe, die schon eine praktisch gute Näherung darstellen, erhält man somit für das Jahr 1850,0 (indem man Glieder $< 0'',05$ fortlässt):

$$\left. \begin{aligned} \psi &= (\psi)_{\odot} + (\psi)_{\odot} = -50'',37t + 17'',29 \sin \odot + 0'',20 \sin 2l_{\odot} + 1'',25 \sin 2l_{\odot} + \dots \\ \mathcal{A}\varepsilon &= (\mathcal{A}\varepsilon)_{\odot} + (\mathcal{A}\varepsilon)_{\odot} = 9'',24 \cos \odot + 0'',08 \cos 2l_{\odot} + 0'',54 \cos 2l_{\odot} \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Setzt man nicht, wie es im Vorhergehenden zur Vereinfachung geschehen ist,

$$\operatorname{tg} b = \sin b = b$$

$$\cos b = 1$$

und vernachlässigt $\operatorname{tg} i^2$ nicht, so erhält man nach Peters als numerische Werthe, in denen auch auf die Lagenverschiebung der Ekliptik im Raume in Folge der Säcularstörungen, d. h. auf die Präcession durch die Planeten Rücksicht genommen ist, von der im Vorhergehenden abgesehen wurde, die folgenden, in der Praxis genügend genau zu Grunde zu legenden Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= -50'',37 t + 17'',24 \sin \oslash + 0'',20 \sin 2 l_{\odot} \\ &\quad + 1'',24 \sin 2 l_{\odot} - 0'',21 \sin 2 l_{\oslash} \\ \varepsilon &= 9'',24 \cos \oslash + 0'',09 \cos 2 l_{\odot} + 0'',55 \cos 2 l_{\odot} \\ &\quad - 0'',09 \cos 2 \oslash, \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot (68)$$

wobei t in Julianischen Jahren gerechnet ist, und ein Jul. Jahr bekanntlich 365,25 mittlere Sonnentage beträgt.

Das Resultat der zweiten Näherung ist nach Oppolzer, wenn man alle Glieder, die kleiner als $0'',01$ sind, weglässt, für die Epoche 1850,0:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= 50'',3703 t - 0'',00010888 t^2 \\ &\quad - 17'',274 \sin \oslash + 0'',209 \sin 2 \oslash + 0'',068 \sin \zeta + 0'',011 \sin (\zeta + 2 \omega + 2 \oslash) \\ &\quad + 0'',015 \sin (\zeta - 2 \odot + 2 \omega - 2 \omega') \\ &\quad - 0'',204 \sin (2 \zeta + 2 \omega + 2 \oslash) - 0'',026 \sin (3 \zeta + 2 \omega + 2 \oslash) \\ &\quad - 0'',034 \sin (2 \zeta + 2 \omega + \oslash) + 0'',012 \sin (2 \odot + 2 \omega' + \oslash) \\ &\quad + 0'',127 \sin \odot - 1'',263 \sin (2 \odot + 2 \omega' + 2 \oslash) - 0'',049 \sin (3 \odot + 2 \omega' + 2 \oslash) \\ &\quad + 0'',021 \sin (\odot + 2 \omega' + 2 \oslash) \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 + 0'',00000713 t^2 \\ &\quad + 9'',236 \cos \oslash - 0'',090 \cos 2 \oslash + 0'',089 \cos (2 \zeta + 2 \omega + 2 \oslash) \\ &\quad + 0'',011 \cos (3 \zeta + 2 \omega + 2 \oslash) + 0'',018 \cos (2 \zeta + 2 \omega + \oslash) \\ &\quad + 0'',548 \cos (2 \odot + 2 \omega' + 2 \oslash) + 0'',021 \cos (3 \odot + 2 \omega' + 2 \oslash) \end{aligned} \right\} (69)$$

In diesen Formeln bedeutet:

- ζ : die mittlere Anomalie des Mondes,
- \odot : die mittlere Anomalie der Sonne,
- \oslash : die Länge des aufsteigenden Mondknotens,
- ω : den Abstand des Mondperigäums vom aufsteigenden Mondknoten,
- ω' : den Abstand des Sonnenperigäums vom aufsteigenden Mondknoten,
- t : die seit 1850,0 verflossene Zeit in Einheiten des julianischen Jahrhunderts.

Die Theorie der Präcession und Nutation ist durch das Vorhergehende im Principe erschöpft. Es erübrigt zum Schluss nur noch, die auf S. 162 dieser Abtheilung aufgeworfene Frage nach der Bewegung der Erdaxe im Erdinnern unter Einwirkung der Sonnen- und Mondanziehung zu erledigen, indem die Berechtigung der vorstehenden Betrachtungsweise, welche von der Erdaxenbewegung im Inneren gänzlich absieht, dieselbe vielmehr allein im Raume verfolgt, erst dadurch evident wird, dass man sieht, dass die äusseren Kräfte der Sonne und des Mondes in der That keine wesentliche Aenderung des Euler'schen Cyklus zur Folge haben. Die Voraussetzung, dass sie den Euler'schen Cyklus nicht alteriren, ist dabei, dass man gewisse kleine Glieder von einigen hundertstel Secunden vernachlässigt, in denen gerade die winzig kleine Drehung der momentanen Drehaxe um die Trägheitsaxe der Erde, also thatsächlich eine Schwankung der Erdaxe im Erdinneren enthalten ist. Es sind dies, worauf ausdrücklich hingewiesen sei, jedoch nicht, wie Herr Folie sagt, Nutationsglieder; denn mit Präcession und Nutation zusammen bezeichnet man ja die Schwankungen der Erdaxe im Raum; während hier solche im Erdinneren in Frage stehen, die Herr Folie fälschlich der Axe im Raum zuschreibt. [Vergl. Astr. Vierteljahrsschr., 31. Jahrg. (1896), S. 293, sowie 35. Jahrg. (1900), S. 332.]

Indem wir der Kürze halber hier nur eine näherungsweise Abschätzung vornehmen wollen, deren Endergebniss indess numerisch nicht beträchtlich vom Resultat der strengen Rechnung abweicht, lassen wir wieder Glieder vom Range der Excentricität der Mondbahn weg, betrachten letztere also als Kreisbahn. Analytisch besagt das, dass wir:

$$l = n't + l_0$$

setzen, wo n' , die mittlere Mondbewegung, circa gleich $\frac{1}{27}$ der Rotationsgeschwindigkeit der Erde und l_0 die Mondlänge zu einer bestimmten Zeit ist; ferner wollen wir die Mondbreite b , die 5° beträgt, Null setzen. Die rechten Seiten der Poisson'schen Gleichungen werden dann:

$$\frac{1}{C \omega \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} = \frac{1}{2} Q \sin \varepsilon \sin 2(l_0 + n't - \psi)$$

$$\frac{1}{C \omega \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} = -\frac{1}{2} Q \cos \varepsilon [1 - \cos 2(l_0 + n't - \psi)].$$

Sehen wir auch noch von der kleinen Grösse ψ ab, so hat man noch einfacher:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{C \omega \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} &= \frac{1}{2} Q \sin \varepsilon \sin (2l_0 + 2n't) \\ \frac{1}{C \omega \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} &= -\frac{1}{2} Q \cos \varepsilon [1 - \cos (2l_0 + 2n't)] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (70)$$

Als Integrale der Euler'schen Gleichungen bei Einwirkung der Sonnen- und Mondanziehung, wie sie die Lage der instantanen Drehaxe \mathcal{A} der Erde gegen das mit der Erde fest verbundene Hauptaxensystem ξ, η, ζ , also die Lagenänderung der Rotationsaxe im Erdkörper bestimmten, fanden wir nun (s. S. 161) die Formen:

$$p = f \cos \lambda t - g \sin \lambda t$$

$$q = f \sin \lambda t + g \cos \lambda t,$$

wobei sich f und g durch Integration der Gleichungen:

$$\frac{df}{dt} = + n \cos \lambda t + m \sin \lambda t$$

$$\frac{dg}{dt} = - n \sin \lambda t + m \cos \lambda t$$

ergaben, in denen n und m die folgende Bedeutung hatten:

$$n = -\frac{\sin \varphi}{A \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} - \frac{\cos \varphi}{A} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon}$$

$$m = -\frac{\cos \varphi}{A \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} + \frac{\sin \varphi}{A} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon}.$$

Multipliziert man jetzt bezüglich einerseits die erste Gleichung mit $+\cos \lambda t$, die zweite mit $+\sin \lambda t$ und andererseits mit $-\sin \lambda t$ und $+\cos \lambda t$ und addirt beide Male, so ergibt sich:

$$\frac{df}{dt} = -\frac{\sin(\varphi + \lambda t)}{A \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} - \frac{\cos(\varphi + \lambda t)}{A} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon}$$

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{\cos(\varphi + \lambda t)}{A \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} + \frac{\sin(\varphi + \lambda t)}{A} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon}.$$

In das Argument der trigonometrischen Functionen dieser Ausdrücke lässt sich jetzt aber leicht die Rotationsgeschwindigkeit ω der Erde um ihre momentane Drehaxe einführen mit Hülfe der früher abgeleiteten Gleichung:

$$\frac{d\varphi}{dt} + \lambda = \frac{C}{A} \omega - \cos \varepsilon \frac{d\psi}{dt}.$$

Die strenge Integration derselben, die schwierig sein würde, da ε mit der Zeit veränderlich ist, gestaltet sich für unseren Zweck indess einfach, wenn man bedenkt, dass das zweite Glied der rechten Seite ω gegenüber offenbar ganz vernachlässigt werden kann, da ψ in einem Jahre circa $50''$ beträgt, in einem Tage also verschwindend klein ist, während die Rotationsgeschwindigkeit der Erde in einem Tage $360^\circ = 2\pi$ ausmacht. Integriert folgt also sofort:

$$\lambda t + \varphi = \frac{C}{A} \omega t + \gamma,$$

oder einfach:

$$\lambda t + \varphi = \omega t + \gamma,$$

indem:

$$\frac{C}{A} = \frac{299}{300} = 1$$

gesetzt werden kann. Somit erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= - \frac{\sin(\omega t + \gamma)}{A \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} - \frac{\cos(\omega t + \gamma)}{A} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \\ \frac{dg}{dt} &= - \frac{\cos(\omega t + \gamma)}{A \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} + \frac{\sin(\omega t + \gamma)}{A} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon}. \end{aligned}$$

In diesen Ausdrücken könnte man jetzt die Differentialquotienten des Potentials auf Grund der Gleichungen (70) unmittelbar einsetzen und streng integrieren. Da wir es hier aber bloss auf eine Ueberschlagsrechnung absehen, so können wir im Argument der trigonometrischen Functionen, welche in den rechten Seiten von (70) auftreten, $2n't$ vernachlässigen, indem die Periode des Sinus und Cosinus von $2l_0 + 2n't$ etwa einen halben Monat beträgt und da $n' = 27$,

$$2n' = \frac{1}{14} \text{ circa}$$

ist. Ebenso unterscheidet sich $\omega + n'$ vom Mittelwerth ω bloss um $\frac{1}{27}$ circa seines Werthes, da:

$$n' = \frac{\omega}{27} = \frac{360}{27}$$

ist; auch die Schiefe der Ekliptik ändert sich im Jahrhundert nur wenig. Man wird also schon eine gute Näherung erhalten, wenn man von den Gleichungen folgender Form ausgeht:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A \sin \varepsilon} \frac{\partial V}{\partial \psi} &= \frac{1}{2} \frac{C \omega}{A} Q \sin \varepsilon \sin 2l_0 \\ \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} &= - \frac{C \omega}{A} Q \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin l_0^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (71)$$

Auf Grund dieser Gleichungen ergeben unsere Differentialgleichungen für f und g unmittelbar das folgende Integrationsresultat:

$$\left. \begin{aligned} f &= f_0 + \frac{1}{2} \frac{C}{A} Q \sin \varepsilon \sin 2l_0 \cos(\omega t + \gamma) + \frac{C}{A} Q \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin l_0^2 \sin(\omega t + \gamma) \\ g &= g_0 - \frac{1}{2} \frac{C}{A} Q \sin \varepsilon \sin 2l_0 \sin(\omega t + \gamma) + \frac{C}{A} Q \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin l_0^2 \cos(\omega t + \gamma) \end{aligned} \right\} (72)$$

In diesen Relationen entsprechen die Grössen f_0 und g_0 dem strengen Euler'schen Cyklus, die zweiten Glieder vom Argument $(\omega t + \gamma)$ aber, welche die täglichen Schwankungen des Erdkörpers gegen seine Rotationsaxe, d. h. eine Axenschwankung im Erdinneren darstellen, geben die Abweichung vom Euler'schen Cyklus in Folge der Sonnen- und Mondanziehung. Diese Schwankungen der astronomisch bestimmten geographischen Breite, welche natürlich durch die Beobachtungen nie constatirt werden können und die eben Herr Folie als Nutation bezeichnet, d. h. fälschlich der Axe im Raum zugeschrieben hat, sind aber so unbedeutend, d. h. die zweiten Glieder unserer Ausdrücke für f und g sind so verschwindend klein, dass man von ihnen ganz absehen kann. Mithin wird der Euler'sche Cyklus durch die Sonnen- und Mondanziehung thatsächlich nicht in einer in Betracht kommenden Weise geändert und aus

diesem Grunde konnte eben die Präcessionstheorie, wie es im Vorhergehenden geschehen ist, unabhängig vom Euler'schen Cyklus entwickelt werden, eine Trennung, die, wie gesagt, erst die Lösung der Probleme der Axenschwankung im Innern und im Raume für die Erde ermöglicht.

Dass die genannten Glieder in letzteren Gleichungen für f und g als genügend klein vernachlässigt werden dürfen und deshalb das Problem, wie angegeben, behandelt werden konnte, erhält in folgender Weise. Setzt man zur Abkürzung:

$$\omega t + \gamma = x$$

$$\frac{C}{A} Q \sin \varepsilon \sin l_0 = m = m_0 \sin l_0,$$

so wird:

$$\left. \begin{aligned} f &= f_0 + m (\cos l_0 \cos x + \cos \varepsilon \sin l_0 \sin x) \\ g &= g_0 - m (\cos l_0 \sin x - \cos \varepsilon \sin l_0 \cos x) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (73)$$

Es genügt ersichtlich die Behandlung des ersten Ausdruckes. Da der Maximalwerth vom absoluten Werthe eines Ausdruckes der Form:

$$| a \sin x + b \cos x |_{\max} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ist, so ist in f der Maximalwerth der zweiten Glieder gleich:

$$m \sqrt{\cos l_0^2 - \cos \varepsilon^2 \sin l_0^2} = m_0 Y.$$

Es wächst nun aber Y fortwährend, wenn man l_0 von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wachsen lässt, denn der Ausdruck:

$$\frac{d(Y^2)}{dl_0} = 2 \sin l_0 \cos l_0 \{1 - 2 \sin l_0^2 \sin \varepsilon^2\}$$

ist positiv zwischen $l_0 = 0$ und $l_0 = \frac{\pi}{2}$, weil $2 \sin \varepsilon^2$ immer < 1 ist (indem ε circa $23^{\circ},5$). Daher ist:

$$(m_0 Y)_{\max} = m_0 \cos \varepsilon = \frac{C}{A} Q \sin \varepsilon \cos \varepsilon,$$

was mit Hinblick auf die numerischen Werthe einige Hundertstel Secunden bedeutet. Es ist nämlich numerisch genügend genau, wo Sonne = \odot , Erde = \oplus , Mond = \odot , Masse = M , mittlere Entfernung = r bezeichnet:

$$Q = \frac{3 k^2 m}{r^3 \omega} \frac{C-A}{C}, \quad \frac{C-A}{C} = \frac{1}{300} \text{ circa, } \omega = 2\pi, \quad M_{\odot} = 320000 M_{\oplus}, \quad M_{\odot} = \frac{1}{80} M_{\oplus}.$$

Nach Hansen's „Darlegung“, S.177, ist ferner für den Mond:

$$\log \frac{r_{\odot}}{r_{\oplus}} = 7,4034757 \quad \text{also:} \quad \frac{r_{\odot}}{r_{\oplus}} = [2,5965243] = 394,9338;$$

oder, da r_{\oplus} die Längeneinheit, in runder Zahl: $r_{\odot} = \frac{1}{400}$.

Daher ergibt sich auf Grund dieser Werthe als Maximalbetrag für die Sonne bezüglich $0'',04$, für den Mond $0'',08$, in Summa also als Maximalabweichung $0'',12$. Die Abweichung der Erdaxenschwankung im Erdinnern vom Euler'schen Cyklus in Folge der anziehenden Wirkung der Sonne und des Mondes auf das abgeplattete Erdsphäroid wird also, da der Winkel der instantanen Drehaxe mit der Hauptträgheitsaxe ξ nach Gleichung (15) in Abtheilung I dieses Capitels:

$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\omega}$$

ist, in maximum:

$$\sin \gamma = \gamma = \frac{0'',12 \sqrt{2}}{2\pi} = 0'',019 \sqrt{2} = 0'',026$$

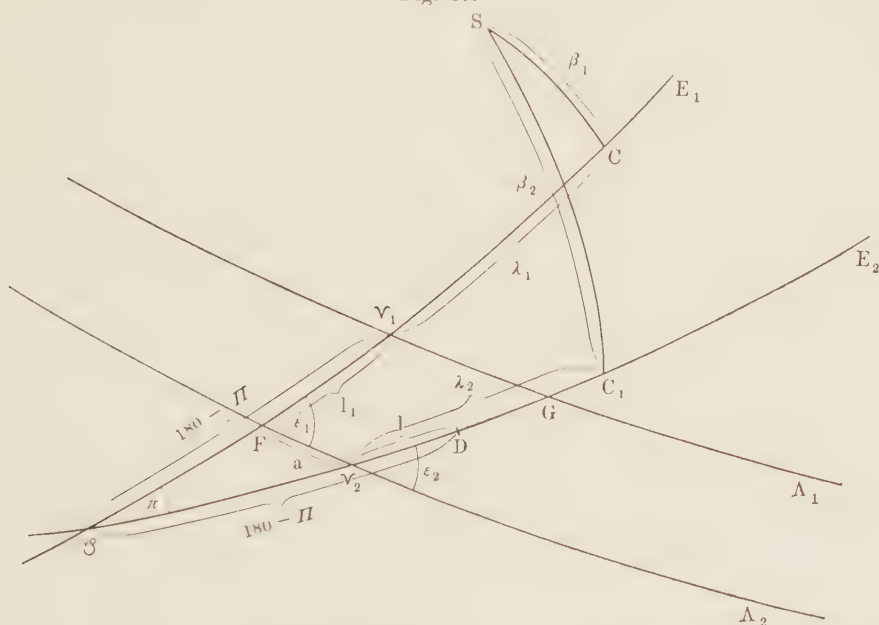
betragen, oder bei genauer Rechnung, wenn man die im Vorhergehenden der Einfachheit und Kürze halber gemachten Vernachlässigungen nicht zulässt: $0'',019$. Das ist aber in der That eine nicht in Betracht kommende Grösse.

III. Der Einfluss der Bewegung der Aequinoctien auf die Coordinaten und die Bahnlage der Himmelskörper.

A. Die Präcession.

Die im Vorhergehenden theoretisch abgeleitete Bewegung der Erdaxe oder des Erdäquators in Folge der Anziehung von Sonne und Mond auf das Erdellipsoid hat zur Folge, dass die Längen und Breiten, resp. die Rectascensionen und Declinationen der Sterne im Laufe der Zeit gewisse Veränderungen erleiden. Wir wollen im Folgenden zunächst nur den säcularen Theil dieser Erscheinung betrachten. Sei also (Fig. 37) $E_1 \odot$

Fig. 37.



die Ekliptik einer bestimmten Ausgangsepoche, z. B. für das Jahr 1750,0 oder 1850,0. Sei ferner A_1 die Lage des mittleren Aequators zu dieser Zeit und A_2 seine Lage t Jahre später. Dann würde für die erstere Epoche die Länge des Sternes S gleich $\gamma_1 C$ sein, während sie für die letztere FC wäre, da der Frühlingspunkt von γ_1 nach F zurückgewichen wäre.

Hierzu kommt aber, wie im Vorhergehenden gleichfalls schon erwähnt, noch eine zweite Lagenänderung: die scheinbare Sonnenbahn (d. i. die wirkliche Erdbahn) wird durch die Anziehung der Planeten auf die Erde im Laufe der Zeit derart verschoben, dass die Sonne am Himmel eine mit zahlreichen kleinen Unregelmässigkeiten

behaftete Bahn beschreibt. In Folge dessen würde eine wahre Ekliptik (d. h. ein grösster Kreis, welcher durch zwei unendlich nahe Lagen der Sonne hindurchginge oder die Sonnenbahn osculirt) schon im Laufe eines Jahres eine ganze Reihe sehr schnell wechselnder Lagen annehmen. Da andererseits die Beobachtungen stets äquatoreale Coordinaten geben und die Ekliptik nur für theoretische Fragen in Betracht kommt, so hat man es vorgezogen, eine „mittlere Ekliptik“ einzuführen, welche für ihre Epoche die Sonnenbahn insoweit vollständig darstellt, als sie durch die von den Planetenstörungen herrührenden Säcularglieder bedingt ist. Die kleinen Unregelmässigkeiten der Sonnenbewegung, welche von den periodischen Störungen der Erde durch die Planeten hervorgerufen werden, lässt man dann ganz einfach in die Breite der Sonne gegen die betreffende zu Grunde gelegte Ekliptik eingehen. (Dabei werden in den Astronomischen Jahrbüchern die Breiten der Sonne für jeden Tag des Jahres, im Berliner Jahrbuche für mittleren Berliner Mittag, bezogen auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges gegeben.) Diese kleinen Grössen verdanken also einer doppelten Ursache ihre Entstehung: erstens dem Umstande, dass die mittlere Ekliptik für den betreffenden Tag des Jahres nicht mit der mittleren Ekliptik zu Jahresanfang zusammenfällt; zweitens den periodischen Störungen der Erde durch die Planeten.

Diese mittlere Lage der Sonnenbahn, die also im Laufe der Zeit sich verschiebt, würde mithin, wenn sie sich zur Ausgangsepoche in $\varnothing E_1$ befand, nach der Zeit t in die Lage $\varnothing E_2$ gelangt sein. In Folge dessen liegt der Frühlingspunkt zur Zeit t in \mathbf{V}_2 und die Länge des Sternes ist in Wirklichkeit $\mathbf{V}_2 C_1$. Die Gesammtheit beider Erscheinungen fasst man, wie gesagt, allgemein unter dem Namen Präcession zusammen. Das Stück l_1 , um welches in Folge der Anziehung von Sonne und Mond der Aequator auf der festen Ekliptik $\varnothing E_1$ zurückgewichen, ist die Lunisolarpräcession, für die wir eine numerische Entwicklung bereits erhalten haben. Für das kleine Stück a , welches die beiden Ekliptiken auf dem beweglichen Aequator ausschneiden, die „Präcession durch die Planeten“, werden wir den numerischen Werth noch ableiten. Die Winkel ε_1 und ε_2 sind die Neigungen bezüglich der festen und der beweglichen Ekliptik gegen den beweglichen Aequator.

Man denkt sich nun ferner einen Punkt D construirt, indem man das Stück $\varnothing \mathbf{V}_1$ von \varnothing aus auf $\varnothing E_2$ abträgt, so dass also $\varnothing D = \varnothing \mathbf{V}_1$ wird. Das so erhaltene Stück l ist die sogenannte „allgemeine Präcession“, die wichtigste dieser Grössen. Das Stück $\mathbf{V}_1 \varnothing$ setzt man gewöhnlich gleich $180^\circ - II$. Da die Zählungsrichtung der Längen $\mathbf{V}_1 E_1$ resp. $\mathbf{V}_2 E_2$ ist, so ergibt sich, dass \varnothing der niedersteigende Knoten der beweglichen Ekliptik auf der festen ist. Demnach ist II die „Länge des aufsteigenden Knotens der beweglichen Ekliptik auf der festen“, gezählt auf der festen Ekliptik von \mathbf{V}_1 aus gegen E_1 ; π endlich ist die gegenseitige Neigung der festen und der beweglichen Ekliptik.

Die von Laplace in der *Mécanique céleste* für die Aenderungen des Aequators und der Ekliptik gegebenen allgemeinen Ausdrücke hat Bessel nach Potenzen der Zeit entwickelt und so die folgenden numerischen Werthe abgeleitet. Es bedeutet dabei:

l die allgemeine Präcession,

l_1 die Lunisolarpräcession,

ε_1 die Schiefe der festen Ekliptik gegen den jeweiligen Aequator,

ε_2 die Schiefe der beweglichen „mittleren Ekliptik“ gegen den jeweiligen Aequator, d. i. die sogenannte „mittlere Schiefe der Ekliptik“.

I. Nach Bessel ist die jährliche Lunisolarpræcession für die Zeit 1750 + t :

$$\frac{dl_1}{dt} = 50'',37572 - 0'',000243589t.$$

Als Aenderung in der Zeit 1750 bis 1750 + t selbst erhält er:

$$l_1 = 50'',37572t - 0'',0001217945t^2,$$

d. i. also das Bogenstück der festen Ekliptik zwischen den beiden Aequatorlagen von 1750 und 1750 + t .

Für die jährliche allgemeine Præcession giebt Bessel den Werth:

$$\frac{dl}{dt} = 50'',21129 + 0'',0002442966t$$

und für die Aenderung selbst in der Zeit von 1750 bis 1750 + t :

$$l = 50'',21129t + 0'',0001221483t^2.$$

Das ist also das Bogenstück der beweglichen Ekliptik zwischen den beiden Aequatorlagen für 1750 und 1750 + t ; und dabei versteht man, um es nochmals hervorzuheben, unter dieser Ekliptik nicht die wahre, sondern, wie eingehend auseinandergesetzt, die mittlere Ekliptik.

Ferner giebt Bessel den Winkel zwischen dem Aequator und der festen Ekliptik zu:

$$\varepsilon_1 = 23^\circ 28' 18'',0 + 0'',0000098423t^2,$$

hingegen den Winkel zwischen dem Aequator und der mittleren Ekliptik, d. h. die mittlere Schiefe der Ekliptik, zu:

$$\varepsilon_2 = 23^\circ 28' 18'',0 - 0'',48368t - 0'',00000272295t^2,$$

so dass also:

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = + 0'',00001968466t$$

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = - 0'',48368 - 0'',0000054459t.$$

Neben diesen Bessel'schen Werthen für 1750,0:

$$\left. \begin{aligned} l &= 50'',21129t + 0'',0001221483t^2 \\ l_1 &= 50'',37572t - 0'',0001217945t^2 \\ \varepsilon_1 &= 23^\circ 28' 18'',0 + 0'',0000098423t^2 \\ \varepsilon_2 &= 23^\circ 28' 18'',0 - 0'',48368t - 0'',00000272295t^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots (74)$$

hat man noch die folgenden, unter etwas anderen Voraussetzungen abgeleiteten:

II. Nach Peters für 1750,0:

$$\left. \begin{aligned} l &= 50'',21484t + 0'',0001134t^2 \\ l_1 &= 50'',37572t - 0'',0001084t^2 \\ \varepsilon_1 &= 23^\circ 28' 17'',9 + 0'',00000735t^2 \\ \varepsilon_2 &= 23^\circ 28' 17'',9 - 0'',4738t - 0'',00000140t^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots (75)$$

III. Nach Oppolzer für 1850,0:

$$\left. \begin{aligned} l &= 50'',23465t + 0'',00011290t^2 \\ l_1 &= 50'',36924t - 0'',00010888t^2 \\ \varepsilon_1 &= 23^\circ 27' 31'',83 + 0'',00000713t^2 \\ \varepsilon_2 &= 23^\circ 27' 31'',83 - 0'',47593t - 0'',00000143t^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots (76)$$

Dabei wird t in tropischen Jahren gezählt; der Anfang eines tropischen Jahres ist bekanntlich, wenn die mittlere Länge der Sonne vermehrt um den constanten Theil

der Aberration ($-20'',47$), bezogen auf das augenblicklich stattfindende mittlere Aequinoctium, den Werth 280° hat. Auf diesen Jahresanfang (der vom Normalmeridian der Jahrbücher unabhängig ist) beziehen sich also die „mittleren Aequinoctien zu Jahresanfang“, d. h. z. B. der mittlere Aequator und die mittlere Ekliptik 1890,0.

Aehnlich, wie man nach der räumlichen Lage der Fundamentebenen zwischen geocentrischen und heliocentrischen Orten unterscheidet, unterscheidet man nach der zeitlichen Lage der Fundamentebenen, zwischen mittlerem, wahren und scheinbarem Ort. Der mittlere Ort bezieht sich auf die momentane, bezüglich der Säcularstörungen (Präcession) corrigirte Lage der Fundamentebenen; der wahre Ort bezieht sich auf die bezüglich der säcularen und periodischen Störungen (Präcession und Nutation) corrigirte Lage der Fundamentebenen; der scheinbare Ort ist der, welcher durch die Aberration bedingt ist.

Welche der obigen Werthe der Rechnung zu Grunde zu legen sind, bleibt dem Gutdünken des Rechners überlassen. Die Meinungen über ihre Güte sind verschieden, man überzeugt sich aber, dass die gegenseitigen Abweichungen im Laufe langer Zeiträume recht merkbar werden. Herr Dr. Anding hat gelegentlich vorgeschlagen, an der Präcessionsconstante eine Correction anzubringen und diese letztere zusammen mit den Bahnelementen zu bestimmen. Vielleicht könnten auf diesem Wege kleine Unregelmässigkeiten von lange beobachteten periodischen Kometen erklärt werden.

Um noch für die Präcession durch die Planeten, a , einen numerischen Werth zu erhalten, hat man nach Figur 37:

$$\frac{\sin a}{\sin \pi} = \frac{(\sin 180 - \Pi - l)}{\sin \varepsilon_1}.$$

Daraus folgt, dass a ein Winkel von der Grössenordnung von π ist. Man kann daher setzen:

$$a \sin \varepsilon_1 = \pi \sin(180 - \Pi - l) = \pi \sin(\Pi + l).$$

Auf Grund der von Oppolzer aus Leverrier's Sonnentafeln unter Zugrundelegung der Leverrier'schen Planetenmassen abgeleiteten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \pi \sin \Pi &= + 0'',05841 t + 0'',00001964 t^2 \\ \operatorname{tg} \pi \cos \Pi &= - 0'',47593 t + 0'',00000568 t^2 \end{aligned}$$

— wobei wir die mit den dritten Potenzen der Zeit fortschreitenden Terme ihrer Kleinheit wegen weglassen, ebenso wie die von den neueren Werthen der Planetenmassen herrührenden Verbesserungen dieser Formeln vernachlässigt werden können — findet man:

$$\begin{aligned} a \sin \varepsilon_1 &= (+ 0'',05841 t + 0'',00001964 t^2) \cos l \\ &+ (- 0'',47594 t + 0'',00000568 t^2) \sin l. \end{aligned}$$

In dieser Formel kann man aber, in Anbetracht der Kleinheit von a :

$$\cos l = 1 \quad \text{und} \quad \sin l = l$$

setzen. Ferner ist es hier völlig gleichgültig, nach welcher Autorität man den Werth von l nimmt. Wählt man l nach Oppolzer (t in tropischen Jahren von 1850,0 ab gerechnet) und ersetzt ε_1 durch seinen ersten Term: $23^\circ 27' 31'',83$, so ergibt sich:

$$a = + 0'',14673 t - 0'',00024186 t^2$$

in fast völliger Uebereinstimmung mit Oppolzer. Auf Grund der Bessel'schen Werthe findet Brünnow für 1750,0:

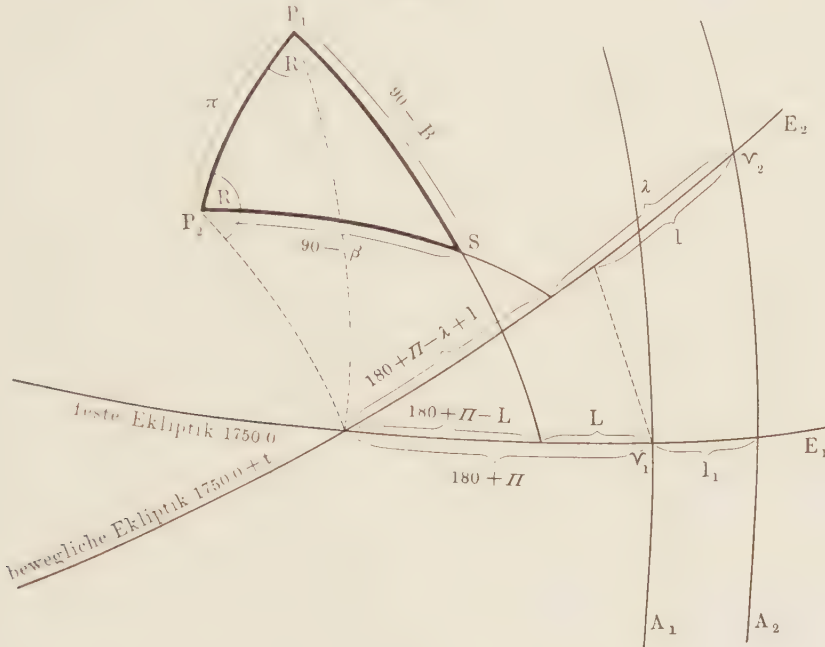
$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} a &= 0'',17926 t - 0,0002660393 t^2 \\ \frac{da}{dt} &= 0'',17926 - 0'',0005320786 t \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (77)$$

Für die Grössen π und Π schliesslich ergeben sich aus Fig. 37 unter Zugrundelegung der Bessel'schen Werthe nach einer kleinen Rechnung die Ausdrücke für 1750,0:

$$\left. \begin{aligned} \Pi &= 171^{\circ} 36' 10'' - 5'',21 t \\ \pi &= 0'',48892 t - 0,0000030715 t^2 \\ \frac{d\pi}{dt} &= 0'',48892 - 0'',0000061430 t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (78)$$

Mit Hülfe dieser Werthe lassen sich jetzt die Aenderungen der Sternörter in Folge der Präcession unmittelbar bestimmen. Zunächst berechnen wir den Einfluss

Fig. 38.



der Präcession auf die Länge und Breite eines Gestirnes. Dazu denken wir uns auf das sphärische Dreieck zwischen dem Sterne und den beiden Polen der festen und der beweglichen Ekliptik (Fig. 38) die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \end{aligned}$$

angewendet, in denen a, b, c die drei Seiten und A, B, C die drei sphärischen Winkel bezeichnen. Seien dann λ und β die Länge und Breite eines Sternes bezüglich der wahren Ekliptik 1750 + t , L und B aber bezüglich der festen Ekliptik von 1750, so ergibt die Anwendung obiger Formeln auf das genannte Dreieck auf Grund bestehender Figur, die Alles besagt, sofort:

$$\begin{aligned} \cos \beta \cos (\lambda - \Pi - l) &= \cos B \cos (L - \Pi) \\ \cos \beta \sin (\lambda - \Pi - l) &= \cos B \sin (L - \Pi) \cos \pi + \sin B \sin \pi \\ \sin \beta &= - \cos B \sin (L - \Pi) \sin \pi + \sin B \cos \pi. \end{aligned}$$

Das sind die strengen Formeln, aus denen λ und β folgen, ausgedrückt durch L, B und die Aenderungen des Coordinatensystemes Π, π, l . Dieselben sind aber nur nöthig, wenn

man die Reductionen für sehr grosse Zeiträume auszuführen hat. Sonst erhält man kürzer, mit Hinblick auf die bekannten Differentialformeln der sphärischen Trigonometrie:

$$\begin{aligned} da &= \cos C db + \cos B dc + \sin b \sin C dA \\ \cotg a da + \cotg B dB &= \cotg b db + \cotg A dA \\ \sin a dB &= \sin C db - \cos a \sin B dc - \sin b \cos C dA \\ dA &= -\cos c dB - \cos b dC - \sin b \sin C da \end{aligned}$$

aus demselben Fundamentaldreieck $P_1 P_2 S$, indem man bei der Differentiation B und L als constant betrachtet, so dass ihre Differentiale Null sind:

$$\begin{aligned} \frac{d(\lambda - \Pi - l)}{dt} &= -\frac{d\Pi}{dt} + \pi \operatorname{tg} \beta \sin(\lambda - \Pi - l) \frac{d\Pi}{dt} + \operatorname{tg} \beta \cos(\lambda - \Pi - l) \frac{d\pi}{dt} \\ \frac{d\beta}{dt} &= +\pi \cos(\lambda - \Pi - l) \frac{d\Pi}{dt} - \sin(\lambda - \Pi - l) \frac{d\pi}{dt}. \end{aligned}$$

Setzt man jetzt im Coëfficienten von $\frac{d\Pi}{dt}$ bezüglich:

$$\pi = t \frac{d\pi}{dt}$$

und bedenkt, dass $\frac{d\pi}{dt}$ und folglich auch $t \frac{d\pi}{dt}$ kleine Winkel sind, so dass man für $t \frac{d\pi}{dt}$ bezüglich $\sin\left(t \frac{d\pi}{dt}\right)$ und für $\frac{d\pi}{dt}$ bezüglich $\cos\left(t \frac{d\pi}{dt}\right) \frac{d\pi}{dt}$ setzen kann, so ergeben sich für die jährlichen Aenderungen der Längen und Breiten der Sterne durch die Präcession folgende allgemeine Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{dl}{dt} + \operatorname{tg} \beta \cos\left(\lambda - \Pi - l - \frac{d\Pi}{dt} t\right) \frac{d\pi}{dt} \\ \frac{d\beta}{dt} &= -\sin\left(\lambda - \Pi - l - \frac{d\Pi}{dt} t\right) \frac{d\pi}{dt}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (79)$$

wobei unter Zugrundelegung der Bessel'schen Werthe numerisch:

$$\begin{aligned} \frac{d\pi}{dt} &= 0'',48892 - 0'',0000061430t \\ \Pi &= 171^\circ 36' 10'' - 5'',21t \\ \Pi + t \frac{d\Pi}{dt} &= 171^\circ 36' 10'' - 10'',42t \\ \Pi + t \frac{d\Pi}{dt} + l &= 171^\circ 36' 10'' + 39'',79t = M, \end{aligned}$$

zu setzen ist.

Wichtiger als die Veränderungen in Länge und Breite sind diejenigen in Rectascension und Declination, welche bei Entnahme von Vergleichssterne aus Katalogen berechnet werden müssen. Wir bezeichnen wieder mit L und B die Länge und Breite eines Sterne, bezogen auf die feste Ekliptik E_1 und den festen Aequator A_1 für 1750; mit α und δ aber die Rectascension und Declination bezüglich des beweglichen Aequators A_2 und des wahren Aequinoctiums für die Zeit $1750 + t$ (Fig. 39). Es sind dann auf Grund beistehender Figur, die Alles besagt, die Coordinaten des Sterne S , wenn man sich ihn auf einer Kugel vom Radius 1 denkt, in Bezug auf die Ekliptik von 1750 und den Schnittpunkt des beweglichen Aequators für $1750 + t$ mit der festen Ekliptik von 1750:

$$\begin{aligned} & \cos B \cos (L + l_1) \\ & \cos B \sin (L + l_1) \\ & \sin B. \end{aligned}$$

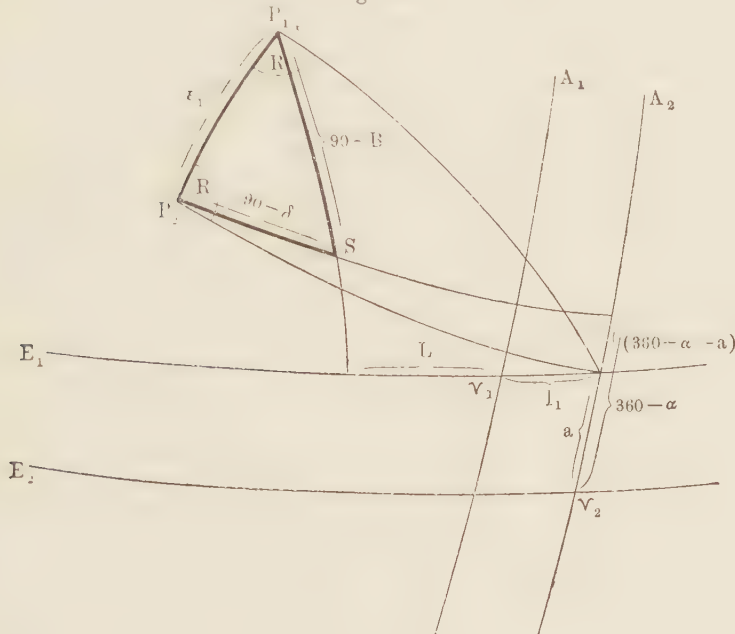
Dagegen sind die Sterncoordinaten bezüglich des wahren Aequators und eben genannten Schnittpunktes:

$$\begin{aligned} & \cos \delta \cos (\alpha + a) \\ & \cos \delta \sin (\alpha + a) \\ & \sin \delta. \end{aligned}$$

Die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie ergeben daher unmittelbar:

$$\begin{aligned} \cos \delta \cos (\alpha + a) &= \cos B \cos (L + l_1) \\ \cos \delta \sin (\alpha + a) &= \cos B \sin (L + l_1) \cos \varepsilon_1 - \sin B \sin \varepsilon_1 \\ \sin \delta &= \cos B \sin (L + l_1) \sin \varepsilon_1 + \sin B \cos \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Fig. 39.



Wendet man wieder die Differentialformeln an, indem man L und B als constant betrachtet, so erhält man einfacher:

$$\begin{aligned} d(\alpha + a) &= [\cos \varepsilon_1 + \sin \varepsilon_1 \operatorname{tg} \delta \sin (\alpha + a)] dl_1 - \cos (\alpha + a) \operatorname{tg} \delta d\varepsilon_1 \\ d\delta &= \cos (\alpha + a) \sin \varepsilon_1 dl_1 + \sin (\alpha + a) d\varepsilon_1. \end{aligned}$$

Die jährlichen Aenderungen der Rectascension und Declination in Folge der Präcession sind also gegeben durch:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -\frac{da}{dt} + (\cos \varepsilon_1 + \sin \varepsilon_1 \operatorname{tg} \delta \sin \alpha) \frac{dl_1}{dt} + \left(a \sin \varepsilon_1 \frac{dl_1}{dt} - \frac{d\varepsilon_1}{dt} \right) \operatorname{tg} \delta \cos \alpha \\ \frac{d\delta}{dt} &= \cos \alpha \sin \varepsilon_1 \frac{dl_1}{dt} - \left(a \sin \varepsilon_1 \frac{dl_1}{dt} - \frac{d\varepsilon_1}{dt} \right) \sin \alpha, \end{aligned}$$

oder, da auf Grund der numerischen Werthe, wie sie im Vorhergehenden nach Bessel angegeben wurden:

$$a \sin \varepsilon_1 \frac{dl_1}{dt} - \frac{d\varepsilon_1}{dt} = -0,00000224711$$

eine zu vernachlässigende Grösse ist:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{da}{dt} + (\cos \varepsilon_1 + \sin \varepsilon_1 \operatorname{tg} \delta \sin \alpha) \frac{dl_1}{dt}$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \cos \alpha \sin \varepsilon_1 \frac{dl_1}{dt}.$$

Setzt man jetzt zur Abkürzung noch:

$$\cos \varepsilon_1 \frac{dl_1}{dt} - \frac{da}{dt} = m$$

$$\sin \varepsilon_1 \frac{dl_1}{dt} = n,$$

so erhält man als definitive Formeln zur Berechnung der jährlichen Präcession für die Zeit $1750 + t$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= m + n \operatorname{tg} \delta \sin \alpha \\ \frac{d\delta}{dt} &= n \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (80)$$

wobei unter Zugrundelegung der Bessel'schen Werthe numerisch:

$$\begin{aligned} m &= 46'',02824 + 0'',0003086450(t - 1750) \\ n &= 20'',06442 - 0'',0000970204(t - 1750) \end{aligned} \quad (81)$$

ist. Sind also α und δ für $1750 + t$ gegeben, so findet man α' und δ' für $1750 + t'$ durch Integration letzterer Differentialquotienten zwischen den Grenzen $1750 + t$ und $1750 + t'$. Indem α_0 und δ_0 die Integrationsconstanten, ergibt sich nach dem Taylor'schen Satze:

$$\alpha' = \alpha_0 + \frac{d\alpha}{dt} (t' - t) + \frac{1}{1.2} \frac{d^2\alpha}{dt^2} (t' - t)^2 + \frac{1}{1.2.3} \frac{d^3\alpha}{dt^3} (t' - t)^3 + \dots$$

$$\delta' = \delta_0 + \frac{d\delta}{dt} (t' - t) + \frac{1}{1.2} \frac{d^2\delta}{dt^2} (t' - t)^2 + \frac{1}{1.2.3} \frac{d^3\delta}{dt^3} (t' - t)^3 + \dots$$

Die zweiten Differentialquotienten in diesen Ausdrücken werden:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{dm}{dt} + \frac{dn}{dt} \operatorname{tg} \delta \sin \alpha + n \sin \alpha \frac{1}{\cos \delta^2} \frac{n \cos \alpha}{206265} + \frac{n \operatorname{tg} \delta \cos \alpha}{206265} (m + n \operatorname{tg} \delta \sin \alpha)$$

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{dn}{dt} \cos \alpha - \frac{n \sin \alpha}{206265} (m + n \operatorname{tg} \delta \sin \alpha)$$

oder:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{n^2}{206265} \sin 2\alpha [1/2 + \operatorname{tg} \delta^2] + \frac{mn \operatorname{tg} \delta}{206265} \cos \alpha + \frac{dm}{dt} + \frac{dn}{dt} \operatorname{tg} \delta \sin \alpha$$

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = -\frac{n^2}{206265} \sin \alpha^2 \operatorname{tg} \delta - \frac{mn}{206265} \sin \alpha + \frac{dn}{dt} \cos \alpha.$$

Diese Grössen, die sehr klein sind, geben die Sternkataloge, weil die vielen Nullen die Uebersichtlichkeit beeinträchtigen, mit 100 multiplicirt, und man nennt sie das „zweite Glied der Präcession“, oder auch die „Säcularvariation“ oder „variatio saecularis“, im Gegensatze zum ersten Gliede, das die „jährliche Präcession“ oder „variatio annua“ darstellt. Es ist also:

$$\alpha' = \alpha_0 + \text{variatio annua } (t' - t) + \frac{(t' - t)^2}{200} \text{variatio saecularis}$$

oder:

$$\alpha' - \alpha_0 = \left\{ \text{variatio annua} + \frac{t' - t}{200} \text{variatio saecularis} \right\} (t' - t)$$

analog:

$$\delta' - \delta_0 = \left\{ \text{variatio annua} + \frac{t' - t}{200} \text{variatio saecularis} \right\} (t' - t) \quad (82)$$

Zum Schluss wollen wir noch den Einfluss der Präcession auf die Bahnlage eines Himmelskörpers im Anschlusse an Watson betrachten, d. h. wir wollen die Formeln ableiten, mittelst deren man die Elemente von der Ekliptik zu einer bestimmten Epoche t umrechnen kann auf eine andere Epoche t_1 . Bezeichnen dazu π_1 , δ_1 und i_1 die Elemente, welche die Lage der Bahn im Raume bestimmen, wenn sie sich auf den Aequator als Fundamentalebene bezieht, und sei ω_0 die Winkeldistanz zwischen dem aufsteigenden Knoten der Bahn auf der Ekliptik und ihrem aufsteigenden Knoten auf dem Aequator, die positiv gezählt werde vom Aequator in der Richtung der Bewegung, dann ist:

$$\pi_1 = \pi - \delta + \delta_1 + \omega_0.$$

Wendet man jetzt die Gauss'schen Analogien auf das sphärische Dreieck an, welches vom Schnitte der drei Ebenen der Bahn, der Ekliptik und des Aequators mit der Himmelskugel gebildet wird (Fig. 40), so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{1}{2} i_1 \sin \frac{1}{2} (\delta_1 + \omega_0) &= \sin \frac{1}{2} \delta \cos \frac{1}{2} (i - \varepsilon) \\ \cos \frac{1}{2} i_1 \cos \frac{1}{2} (\delta_1 + \omega_0) &= \cos \frac{1}{2} \delta \cos \frac{1}{2} (i + \varepsilon) \\ \sin \frac{1}{2} i_1 \sin \frac{1}{2} (\delta_1 - \omega_0) &= \sin \frac{1}{2} \delta \sin \frac{1}{2} (i - \varepsilon) \\ \sin \frac{1}{2} i_1 \cos \frac{1}{2} (\delta_1 - \omega_0) &= \cos \frac{1}{2} \delta \sin \frac{1}{2} (i + \varepsilon) \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (83)$$

Um nun das Problem, die Elemente bezüglich der Ekliptik vom Datum t auf die Ekliptik eines anderen Datums t_1 zu reduciren, zu lösen, sei Π wieder die Länge des absteigenden Knotens der Ekliptik zur Zeit t und t_1 , π der Winkel, den die Ebenen der beiden Ekliptiken mit einander bilden; dann hat man offenbar in den letzteren Gleichungen an Stelle von δ bezüglich $\delta - \Pi$ zu setzen, und, damit δ_1 vom Frühlingspunkte aus gezählt werde, $\delta_1 - \Pi$ an Stelle von δ_1 zu schreiben. Schliesslich ist ε durch π zu ersetzen und $\Delta\omega$, welches die Veränderung von ω im Zeitintervall $t_1 - t$ in Folge der Lagenänderung der Ekliptik repräsentirt, an Stelle von ω_0 zu setzen. So erhält man

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{1}{2} i_1 \sin \frac{1}{2} (\delta_1 - \Pi + \Delta\omega) &= \sin \frac{1}{2} (\delta - \Pi) \cos \frac{1}{2} (i - \pi) \\ \cos \frac{1}{2} i_1 \cos \frac{1}{2} (\delta_1 - \Pi + \Delta\omega) &= \cos \frac{1}{2} (\delta - \Pi) \cos \frac{1}{2} (i + \pi) \\ \sin \frac{1}{2} i_1 \sin \frac{1}{2} (\delta_1 - \Pi - \Delta\omega) &= \sin \frac{1}{2} (\delta - \Pi) \sin \frac{1}{2} (i - \pi) \\ \sin \frac{1}{2} i_1 \cos \frac{1}{2} (\delta_1 - \Pi - \Delta\omega) &= \cos \frac{1}{2} (\delta - \Pi) \sin \frac{1}{2} (i + \pi) \end{aligned} \right\} \cdot \quad (84)$$

Diese Gleichungen ermöglichen es, falls Π und π bekannt sind, δ_1 , i_1 und $\Delta\omega$, welche die Lage der Bahn bezüglich der Ekliptik, die der Zeit t_1 entspricht, angeben, genau zu bestimmen. Die Längen werden sich dabei jedoch noch auf das mittlere Aequinoctium beziehen, von dem wir annehmen, dass es zum Datum t gehört. Damit sich dieselben auf das mittlere Aequinoctium der Epoche t_1 beziehen, muss noch der Betrag der Präcession in Länge während der Zeit $t_1 - t$ addirt werden. Wenn indess, wie zumeist, die Veränderungen der Elemente nicht bemerkenswerth gross sind, so ist es nicht nöthig, die strengen Formeln anzuwenden, vielmehr kann man für diesen Fall andere ableiten, die genügend genau und viel bequemer in der Anwendung sind. Zunächst folgt aus dem sphärischen Dreieck, welches durch den Schnitt der Bahnebene und der Ebene der beiden Ekliptiken mit der Himmelskugel gebildet wird:

$$\sin \pi \cos (\delta - \Pi) = - \cos i_1 \sin i + \sin i_1 \cos i \cos \Delta\omega,$$

woraus sich leicht ergibt:

$$\sin (i_1 - i) = \sin \pi \cos (\delta - \Pi) + 2 \sin i_1 \cos i \sin \frac{1}{2} \Delta\omega^2.$$

Ferner ist:

$$\sin \Delta\omega \sin i_1 = \sin \pi \sin (\delta - \Pi),$$

also:

$$\sin \Delta\omega = \sin \pi \frac{\sin (\delta - \Pi)}{\sin i_1}.$$

Weiter folgt aus demselben Dreieck:

$$\sin \Delta \omega \cos i_1 = -\cos(\varnothing - \Pi) \sin(\varnothing_1 - \Pi) + \sin(\varnothing - \Pi) \cos(\varnothing_1 - \Pi) \cos \pi,$$

woraus sich:

$$\sin(\varnothing_1 - \varnothing) = -\sin \Delta \omega \cos i_1 - 2 \sin(\varnothing - \Pi) \cos(\varnothing_1 - \Pi) \sin \frac{1}{2} \pi^2,$$

oder:

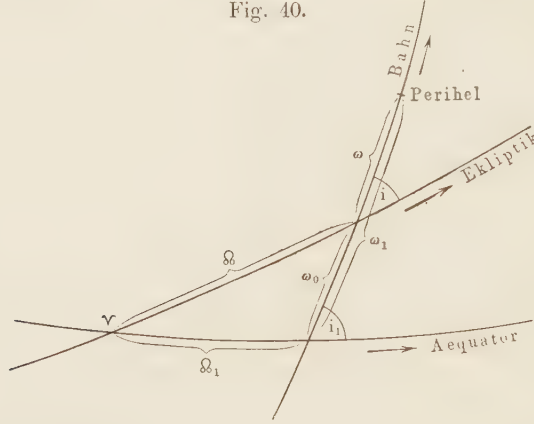
$$\sin(\varnothing_1 - \varnothing) = -\sin \pi \sin(\varnothing - \Pi) \cotg i_1 - 2 \sin(\varnothing - \Pi) \cos(\varnothing_1 - \Pi) \sin \frac{1}{2} \pi^2$$

ergiebt. Schliesslich ist:

$$\pi_1 - \pi = \varnothing_1 - \varnothing + \Delta \omega.$$

Da nun π sehr klein ist, ergeben diese Gleichungen, wenn wir noch die Präcession in Länge addiren, damit die Längen auf das mittlere Aequinoctium des Datums t_1 reducirt werden:

Fig. 40.



$$\left. \begin{aligned} \Delta \omega &= \pi \frac{\sin(\varnothing - \Pi)}{\sin i} \\ i_1 &= i + \pi \cos(\varnothing - \Pi) + \frac{1}{4} \frac{\Delta \omega^2}{w} \sin 2i \\ \varnothing_1 &= \varnothing + (t_1 - t) \frac{dl}{dt} - \pi \sin(\varnothing - \Pi) \cotg i_1 - \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{w} \sin 2(\varnothing - \Pi) \\ \pi_1 &= \pi + (t_1 - t) \frac{dl}{dt} + \pi \sin(\varnothing - \Pi) \tg \frac{1}{2} i_1 - \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{w} \sin 2(\varnothing - \Pi) \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

in denen die allgemeine Präcession $\frac{dl}{dt}$ bekannt und $w = 206264''{,}8$ ist. Da es sich hier um kleine Grössen handelt, kann i an Stelle von i_1 gesetzt werden.

Ist die Bewegung retrograd, so ist in den Gleichungen für $\Delta \omega$, i_1 und \varnothing_1 $180 - i$ an Stelle von i , und $180 - i_1$ an Stelle von i_1 zu schreiben; π_1 dagegen wird in diesem Falle:

$$\pi_1 = \pi + (t_1 - t) \frac{dl}{dt} - \pi \sin(\varnothing - \Pi) \tg \frac{1}{2} i_1 - \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{w} \sin 2(\varnothing - \Pi).$$

In den meisten Fällen sind die letzten Glieder der Ausdrücke für i_1 , \varnothing_1 und π_1 von der zweiten Ordnung und können daher vernachlässigt werden. Führen wir diese Vernachlässigung, die also für die meisten Fälle der Praxis ausreichende Resultate liefert, ein, so erhalten wir auf Grund letzterer Gleichungen, wenn wir die Oppolzer'schen Werthe, die sich auf das Aequinoctium 1850,0 beziehen, einführen, die folgenden Rechenformeln, denen wir gleich noch die, in analoger Weise für den Aequator sich ergebenden Ausdrücke der Vollständigkeit halber zur Seite stellen¹⁾:

¹⁾ cf. Oppolzer, Bahnrechnung I, S. 82, 1. Auflage.

Eklptik:

$$\left. \begin{aligned} \varpi_1 &= \varpi_0 + l + \cotg i \pi \sin(\varpi_0 - II) \\ \pi_1 &= \pi_0 + l - \tg \frac{1}{2} i \pi \sin(\varpi_0 - II) \\ i_1 &= i_0 - \pi \cos(\varpi_0 - II), \\ II &= 173^\circ 0' 12'' + 32'',847 \left(\frac{t_1 + t_0}{2} - 1850 \right) \\ \pi &= \left\{ 0'',47950 - 0'',00000624 \left(\frac{t_1 + t_0}{2} - 1850 \right) \right\} (t_1 - t_0) \\ l &= \left\{ 50'',23465 + 0'',00022576 \left(\frac{t_1 + t_0}{2} - 1850 \right) \right\} (t_1 - t_0) \end{aligned} \right\} \cdot \quad (86)$$

wobei

Aequator:

$$\left. \begin{aligned} \varpi'_1 &= \varpi'_0 + m - \cotg i' n \cos(\varpi'_0 + p) \\ \pi'_1 &= \pi'_0 + m + \tg \frac{1}{2} i' n \cos(\varpi'_0 + p) \\ i'_1 &= i'_0 - n \sin(\varpi'_0 + p), \\ p &= 23'',029 (t_1 - t_0) \\ n &= \left\{ 20'',05137 - 0'',00008664 \left(\frac{t_1 + t_0}{2} - 1850 \right) \right\} (t_1 - t_0) \\ m &= \left\{ 46'',05938 + 0'',00028384 \left(\frac{t_1 + t_0}{2} - 1850 \right) \right\} (t_1 - t_0) \end{aligned} \right\} \cdot \quad (87)$$

wobei

Diese Formeln reichen selbst bei den kleinsten bis jetzt bekannten Neigungen für entfernte Epochen aus. Wir erläutern sie noch durch ein kurzes Beispiel, das wir Oppolzer's Werk entnehmen. Es sollen die Elemente des Planeten (64) Agelina vom mittleren Aequinoctium 1860,0 auf das von 1870,0 übertragen werden. Die Elemente für 1860 sind:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 123^\circ 33' 10'',57 \\ \varpi_0 &= 311^\circ 4' 48'',73 \\ i &= 1^\circ 19' 51'',83. \end{aligned}$$

Gehen wir nach dem ersten Rechenschema zuerst vor, so wird:

$$\begin{aligned} II &= 173^\circ 4' 15'' \\ \pi &= 4'',794 \log \pi = 0,68070 \\ l &= 8' 22'',380 \end{aligned}$$

$\varpi_0 - II = 138^\circ 0' 34''$	$\tg \frac{1}{2} i_0 = 8,06505$
$\cos(\varpi_0 - II) = 9,87114_n$	$\Delta \pi_{11} = - 0'',037$
$\sin(\varpi_0 - II) = 9,82543$	$\Delta \pi_0 = 8' 22'',343$
$\pi \cos(\varpi_0 - II) = 0,55184_n$	$\Delta i_1 = + 3'',563$
$\cotg i_0 = 1,63383$	$\frac{1}{2} \cotg i_0 = 1,333$
$\pi \sin(\varpi_0 - II) = 0,50613$	$\{\pi \sin(\varpi_0 - II)\}^2 = 1,012$
$\Delta \varpi_{11} = + 2' 18'',026$	$\sin 1'' = 4,686$
$\cotg i_0^2 = 3,268$	$\log \Delta i_{11} = 7,031$
$\cotg i_0^2 + \frac{1}{2} = 3,268$	$\Delta i_{11} = + 0'',001$
$\pi \sin(\varpi_0 - II) \pi \cos(\varpi_0 - II) = 1,058_n$	$\Delta i = 3'',564$
$\sin 1'' = 4,686$	
$\log \Delta \varpi_{11} = 9,012_n$	
$\Delta \varpi_{11} = - 0'',102$	
$\Delta \varpi = + 10' 40'',304$	

Nach dem zweiten Rechenschema findet man, wenn genäherte Werthe von $d\Omega$ und $d\dot{i}$ bekannt sind:

$$\begin{array}{llll}
 i = 1^{\circ} 19' 53'',6 & \pi = 4'',794 & & \\
 \Omega = 311^{\circ} 10' 9'' & l = 8' 22'',380 & & \\
 \Pi = 173^{\circ} 8' 25'' & \log \pi = 0,68070 & & \\
 \Omega - \Pi = 138^{\circ} 1' 44'' & \cotg i = 1,63368 & \Delta\Omega = + 10' 40'',308 & \\
 \sin(\Omega - \Pi) = 9,82527 & \pi \sin(\Omega - \Pi) = 0,50597 & \Delta\pi = + 8' 22'',343 & \\
 \cos(\Omega - \Pi) = 9,87127_n & tg \frac{1}{2} i = 8,06522 & & \\
 \pi \cos(\Omega - \Pi) = 0,55197_n & \Delta\Omega_{II} = + 2' 17'',928 & & \\
 \Delta i = + 3'',564 & \Delta\pi_{II} = - 0'',037 & &
 \end{array}$$

Man berechnet jetzt nur Elementensysteme für den Anfang eines Jahres und bringt, um die wahren Oerter zu erhalten, die Correctionen f , g , $\sin(G + \alpha)$ ohne Aberrationsglieder an (cf. C. Gemeinsame Berücksichtigung der Präcession, Nutation und Aberration).

B. Die Nutation.

Die von der Sonnen- und Mondanziehung herrührenden periodischen Glieder, welche in unseren früheren theoretischen Entwicklungen die Bewegungen des Aequators charakterisirten, traten dort in ψ und in $\Delta\epsilon$ auf. Nimmt man aus ψ die periodischen Glieder, welche die Luni-Solar-Nutation in Länge repräsentiren, gesondert heraus, und bezeichnet sie mit $\Delta\lambda$, die Luni-Solar-Nutation in Schiefe aber mit $\Delta\epsilon$, so ergeben sich nach Peters für $\Delta\lambda$ und $\Delta\epsilon$ in Bezug auf das Aequinoctium 1800 folgende Werthe:

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta\lambda &= - 17'',2405 \sin \Omega + 0'',2073 \sin 2\Omega - 0'',2041 \sin 2\mathbb{C} + 0'',0677 \sin (\mathbb{C} - I') \\
 &\quad - 1'',2692 \sin 2\odot + 0'',1279 \sin (\odot - \Gamma) \\
 &\quad - 0'',0213 \sin (\odot + \Gamma) \\
 \Delta\epsilon &= + 9'',2231 \cos \Omega - 0'',0897 \cos 2\Omega + 0'',0886 \cos 2\mathbb{C} \\
 &\quad + 0'',5509 \cos 2\odot + 0'',0093 \cos (\odot + \Gamma)
 \end{aligned} \right\} (88)$$

Und für das Jahr 1900:

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta\lambda &= - 17'',2577 \sin \Omega + 0'',2073 \sin 2\Omega - 0'',2041 \sin 2\mathbb{C} + 0'',0677 \sin (\mathbb{C} - \Gamma') \\
 &\quad - 1'',2693 \sin 2\odot + 0'',1275 \sin (\odot - \Gamma) \\
 &\quad - 0'',0213 \sin (\odot + \Gamma) \\
 \Delta\epsilon &= + 9'',2240 \cos \Omega - 0'',0896 \cos 2\Omega + 0'',0885 \cos 2\mathbb{C} \\
 &\quad + 0'',5506 \cos 2\odot + 0'',0092 \cos (\odot + \Gamma)
 \end{aligned} \right\} (89)$$

In diesen Ausdrücken bedeutet, entsprechend der früheren allgemeinen Theorie, Ω die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn auf der Ekliptik, \odot die wahre Länge der Sonne in der Ekliptik, d. h. ihr Abstand vom Widderpunkte, \mathbb{C} die wahre Entfernung des Mondes vom Frühlingspunkte, bezogen auf die Ekliptik, Γ die Länge des Perihels der Sonne und Γ' das Perigäum der Mondbahn. Die Werthe dieser sämtlichen Grössen können aber aus den Sonnen- und Mondtafeln abgeleitet werden und somit kann man $\Delta\lambda$ und $\Delta\epsilon$ selbst wirklich berechnen. Aus den Ausdrücken für $\Delta\lambda$ und $\Delta\epsilon$ ersieht man, dass die Nutation im Hauptbetrug von der Lage der Mondknoten auf der Ekliptik abhängt, und da diese in circa 19 Jahren einmal von 0 bis 360° wechseln, so beträgt die Periode der Nutation eben diese Anzahl von Jahren.

Nach Oppolzer hingegen wird, indem die Säcularglieder in den Ausdrücken von S. 175 wegfallen, und die periodischen Glieder beim Uebergang auf die wahre Ekliptik ungeändert bleiben für das Jahr 1850:

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= -17'',274 \sin \Omega + 0'',209 \sin 2 \Omega + 0'',015 \sin (\zeta - 2 \odot + 2 \omega - 2 \omega') \\ &\quad + 0'',068 \sin \zeta + 0'',011 \sin (\zeta + 2 \omega + 2 \Omega) \\ &\quad - 0'',204 \sin (2 \zeta + 2 \omega + 2 \Omega) - 0'',026 \sin (3 \zeta + 2 \omega + 2 \Omega) \\ &\quad - 0'',034 \sin (2 \zeta + 2 \omega + \Omega) + 0'',012 \sin (2 \odot + 2 \omega' + \Omega) \\ &\quad + 0'',127 \sin \odot - 1'',263 \sin (2 \odot + 2 \omega' + 2 \Omega) \\ &\quad - 0'',049 \sin (3 \odot + 2 \omega' + 2 \Omega) + 0'',021 \sin (\odot + 2 \omega' + 2 \Omega) \\ \Delta\varepsilon &= 9'',236 \cos \Omega - 0'',090 \cos 2 \Omega + 0'',089 \cos (2 \zeta + 2 \omega + 2 \Omega) \\ &\quad + 0'',011 \cos (3 \zeta + 2 \omega + 2 \Omega) + 0'',018 \cos (2 \zeta + 2 \omega + \Omega) \\ &\quad + 0'',548 \cos (2 \odot + 2 \omega' + 2 \Omega) + 0'',021 \cos (3 \odot + 2 \omega' + 2 \Omega)\end{aligned}$$

wobei die Buchstaben die auf S. 175 angegebene Bedeutung haben.

Um nun den Einfluss der Nutation auf die Rectascension und Declination eines Gestirnes zu ermitteln, hat man wieder nach Taylor:

$$\begin{aligned}\alpha' - \alpha &= \Delta\alpha = \frac{d\alpha}{d\lambda} \Delta\lambda + \frac{d\alpha}{d\varepsilon} \Delta\varepsilon + \frac{1}{2} \frac{d^2\alpha}{d\lambda^2} \Delta\lambda^2 + \frac{d^2\alpha}{d\lambda d\varepsilon} \Delta\lambda \Delta\varepsilon + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{d^2\alpha}{d\varepsilon^2} \Delta\varepsilon^2 + \dots \\ \delta' - \delta &= \Delta\delta = \frac{d\delta}{d\lambda} \Delta\lambda + \frac{d\delta}{d\varepsilon} \Delta\varepsilon + \frac{1}{2} \frac{d^2\delta}{d\lambda^2} \Delta\lambda^2 + \frac{d^2\delta}{d\lambda d\varepsilon} \Delta\lambda \Delta\varepsilon + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{d^2\delta}{d\varepsilon^2} \Delta\varepsilon^2 + \dots\end{aligned}$$

In diesen Gleichungen kommen aber rechts je nur die beiden ersten Glieder in Betracht, da die folgenden numerisch verschwindende Werthe ergeben. Um die ersten Differentialquotienten, deren Kenntniß also allein nöthig ist, zu bestimmen, erhält man zunächst auf Grund der Gleichungen:

$$\begin{aligned}\cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \delta \sin \alpha &= \cos \beta \sin \lambda \cos \varepsilon - \sin \beta \sin \varepsilon \\ \sin \delta &= \cos \beta \sin \lambda \sin \varepsilon + \sin \beta \cos \varepsilon\end{aligned}$$

durch Differentiation, indem $d\beta = 0$ ist, da die Nutation auf die Breite keinen Einfluss hat:

$$\begin{aligned}\cos \delta \sin \alpha d\alpha + \cos \alpha \sin \delta d\delta &= \cos \beta \sin \lambda d\lambda \\ \cos \delta \cos \alpha d\alpha - \sin \alpha \sin \delta d\delta &= \cos \beta \cos \lambda \cos \varepsilon d\lambda - (\cos \beta \sin \lambda \sin \varepsilon + \sin \beta \cos \varepsilon) d\varepsilon \\ \cos \delta d\delta &= \cos \beta \cos \lambda \sin \varepsilon d\lambda + (\cos \beta \sin \lambda \cos \varepsilon - \sin \beta \sin \varepsilon) d\varepsilon.\end{aligned}$$

Da aber aus der zweiten und dritten Gleichung des ursprünglichen Systemes:

$$\cos \beta \sin \lambda = \cos \delta \sin \alpha \cos \varepsilon + \sin \delta \sin \varepsilon$$

folgt, so wird:

$$\begin{aligned}\cos \delta \sin \alpha d\alpha + \cos \alpha \sin \delta d\delta &= (\cos \delta \sin \alpha \cos \varepsilon + \sin \delta \sin \varepsilon) d\lambda \\ \cos \delta \cos \alpha d\alpha - \sin \alpha \sin \delta d\delta &= \cos \delta \cos \alpha \cos \varepsilon d\lambda - \sin \delta d\varepsilon \\ d\delta &= \cos \alpha \sin \varepsilon d\lambda + \sin \alpha d\varepsilon.\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die gesuchten Werthe der betreffenden Differentialquotienten unmittelbar:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{d\lambda} &= \cos \varepsilon + \sin \varepsilon \sin \alpha \operatorname{tg} \delta & \frac{d\delta}{d\lambda} &= \cos \alpha \sin \varepsilon \\ \frac{d\alpha}{d\varepsilon} &= -\cos \alpha \operatorname{tg} \delta & \frac{d\delta}{d\varepsilon} &= \sin \alpha.\end{aligned}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die anfängliche Taylor'sche Entwicklung, indem man von den Gliedern zweiter Ordnung absieht, setzt für die mittlere Schiefe der Ekliptik 1800,0 bezüglich $\varepsilon = 23^\circ 27' 54'',2$, sowie für $\Delta\lambda$ und $\Delta\varepsilon$ die mitgetheilten Peter'schen Werthe, so erhält man für das Aequinoctium 1800 vollständig strenge in Gliedern erster Ordnung:

$$\left. \begin{aligned}d\alpha &= \alpha' - \alpha = -15'',8148 \sin \Omega - [6'',8650 \sin \Omega \sin \alpha + 9'',2231 \cos \Omega \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\ &\quad + 0'',1902 \sin 2 \Omega + [0'',0825 \sin 2 \Omega \sin \alpha + 0'',0897 \cos 2 \Omega \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\ &\quad - 1'',1642 \sin 2 \odot - [0'',5054 \sin 2 \odot \sin \alpha + 0'',5509 \cos 2 \odot \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\ &\quad - 0'',1872 \sin 2 \mathbb{C} - [0'',0813 \sin 2 \mathbb{C} \sin \alpha + 0'',0886 \cos 2 \mathbb{C} \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\ &\quad - 0'',0195 \sin (\odot + \Gamma) \\ &\quad - [0'',0085 \sin (\odot + \Gamma) \sin \alpha + 0'',0093 \cos (\odot + \Gamma) \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\ &\quad + [0'',0621 + 0'',0270 \sin \alpha \operatorname{tg} \delta] \sin (\mathbb{C} - \Gamma') \\ &\quad + [0'',1173 + 0'',0509 \sin \alpha \operatorname{tg} \delta] \sin (\odot - \Gamma) \\ d\delta &= \delta' - \delta = -6'',8650 \sin \Omega \cos \alpha + 9'',2231 \cos \Omega \sin \alpha \\ &\quad + 0'',0825 \sin 2 \Omega \cos \alpha - 0'',0897 \cos 2 \Omega \sin \alpha \\ &\quad - 0'',5054 \sin 2 \odot \cos \alpha + 0'',5509 \cos 2 \odot \sin \alpha \\ &\quad - 0'',0813 \sin 2 \mathbb{C} \cos \alpha + 0'',0886 \cos 2 \mathbb{C} \sin \alpha \\ &\quad - 0'',0085 \sin (\odot + \Gamma) \cos \alpha + 0'',0093 \cos (\odot + \Gamma) \sin \alpha \\ &\quad + 0'',0270 \cos \alpha \sin (\mathbb{C} - \Gamma') \\ &\quad + 0'',0509 \cos \alpha \sin (\odot - \Gamma)\end{aligned} \right\} (90)$$

Dabei bezeichnen die Glieder mit den Argumenten Ω und \mathbb{C} die Lunarnutation, diejenigen mit den Argumenten \odot die Solarnutation, ganz analog, wie wir zwischen einer Lunarpräcession und Solarpräcession unterschieden, je nach den vom Monde und den von der Sonnenwirkung herrührenden Gliedern.

Die Grössen $d\alpha$ und $d\delta$ sind mit der Zeit veränderlich, da sich die Schiefe der Ekliptik mit der Zeit ändert und die Coëfficienten von $d\lambda$ und $d\varepsilon$ selbst säcularen Veränderungen unterworfen sind. Diese Aenderungen sind indess so klein, dass sie nur in den grössten Gliedern hervortreten. Für 1900 sind diese grössten Glieder nach Oppolzer:

$$\begin{aligned}d\alpha &= -15'',8321 \sin \Omega - [6'',8683 \sin \Omega \sin \alpha + 9'',2240 \cos \Omega \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\ d\delta &= -6'',8683 \sin \Omega \cos \alpha + 9'',2240 \cos \Omega \sin \alpha.\end{aligned}$$

Die in der allgemeinen Theorie erwähnte geometrische Bedeutung der Nutation folgt, indem man bloss die Hauptglieder der Ausdrücke für $\Delta\lambda$ und $\Delta\varepsilon$ ins Auge fasst.

Aus der früher gegebenen Figur erhellt, dass der wahre Pol des Aequators vom mittleren um $\Delta\varepsilon$ abweicht, und zwar in einer durch den Winkel $\Delta\lambda$ bestimmten Richtung. Es sind also die rechtwinkligen Coordinaten des wahren Ortes vom Pole des Aequators in Bezug auf ein durch den mittleren Ort dieses Poles gelegtes rechtwinkliges Axenkreuz bezüglich:

$$\begin{aligned}x &= \Delta\varepsilon \\ y &= \sin \varepsilon \Delta\lambda.\end{aligned}$$

Durch Elimination von Ω ergibt sich die Gleichung einer Ellipse, der sogenannten „Nutationsellipse“:

$$\frac{x^2}{(9'',236)^2} + \frac{y^2}{(17'',274 \sin \epsilon)^2} = 1,$$

welche der wahre Pol des Aequators in Folge der Nutation um den mittleren beschreibt.

C. Gemeinsame Berücksichtigung der Präcession, Nutation und Aberration.

Ehe wir die allgemeinen Formeln geben, welche die Präcession, Nutation und Aberration in sich vereinigen, die auch das Berliner Jahrbuch den Tafeln für die Bessel'schen Constanten vorausschickt, wollen wir allgemein den Process charakterisiren, den der Beobachter, bezüglich Rechner vorzunehmen hat, welchen klar zu halten von der grössten Wichtigkeit für die folgenden Ausführungen ist.

Es sieht ja der Beobachter alle Objecte da, wo sie wirklich zu stehen scheinen, also an ihren scheinbaren Orten, die von allen Fehlerquellen entstellt werden, und vergleicht nun die Stellung des Kometen oder Planeten, den er beobachtet, mit derjenigen eines Sternes, was auf doppelte Weise, entweder mittelst Meridiankreis oder mittelst Refractor geschehen kann.

Der Meridiankreisbeobachter entnimmt die scheinbare Stellung des oder der zum Vergleiche dienenden Fundamentalsterne dem Jahrbuche, fügt, von einigen kleinen Correctionen abgesehen, die mit dem Instrumente gemessenen scheinbaren Coordinatendifferenzen „Komet minus Fundamentalstern“ in Rectascension und Declination zu der scheinbaren Stellung des als Vergleichsstern dienenden Fundamentalsternes hinzu und erhält so die scheinbare Stellung des beobachteten Kometen. Er giebt die Beobachtungszeit (in diesem Falle die Durchgangszeit des Kometen durch den Meridian) an, und corrigirt die Declination wegen Refraction. Die tägliche Aberration wird dabei immer vernachlässigt.

Der Refractorbeobachter misst die scheinbare Differenz: Komet minus Katalogstern in Rectascension und Declination. Der Katalog giebt die mittlere Stellung des Sternes z. B. für das Jahr 1856,0, während die Beobachtung etwa im Jahre 1898 gemacht werde. Zunächst bestimmt daher der Beobachter durch Anbringung der Präcession die mittlere Stellung des Vergleichssterne zu Anfang des Beobachtungsjahres 1898,0. Er berechnet hierauf mittelst gewisser Grössen, a, b, c, d und A, B, C, D (der noch zu besprechenden Bessel'schen Constanten), oder mittelst anderer Grössen, f, g, h, G, H , die in den folgenden allgemeinen Formeln dieses Capitels auftreten werden und die Präcession, die Nutation, sowie die Fixsternaberration enthalten, den scheinbaren Ort des Vergleichssterne. Addirt er darauf zu der so erhaltenen scheinbaren Stellung des Vergleichssterne die gemessenen Coordinatendifferenzen (die er schon wegen Refraction corrigirt hat), so erhält er den scheinbaren Ort des Kometen zur Beobachtungszeit. Der so erhaltene scheinbare Ort enthält noch die Parallaxe, welche aber der Beobachter nicht berechnen kann, da er die Entfernung, \mathcal{A} , des beobachteten Kometen oder Planeten von der Erde nicht kennt. Daher giebt er nur in beiden Coordinatenrichtungen (Rectascension und Declination) „Parallaxe multiplicirt mit \mathcal{A} “, d. i. also die Grösse, die man durch \mathcal{A} dividiren muss, um die Parallaxe z. B. in Rectascension zu erhalten, also diejenige Grösse, die zur scheinbaren Rectascension hinzugefügt werden muss, um den eigentlichen scheinbaren Ort (befreit von Parallaxe) zu erhalten.

Der Bahnrechner thut gut, diese Rechnungen (mit Ausnahme der Berechnung der Refraction, die man eben als richtig voraussetzt) zu verificiren. Hierauf berechnet er die Parallaxe, wobei natürlich ein Näherungswerth für die Entfernung \mathcal{A} gegeben sein

muss, indem er entweder die vom Beobachter gegebenen Parallaxenfactoren durch Δ dividirt, oder diese selbst neu berechnet. Ferner geht der Bahnrechner, da der Beobachter meist die Beobachtungszeit in mittlerer Ortszeit giebt, durch Anbringung der Längendifferenz auf den Normalmeridian, z. B. den von Berlin, über und erhält also die der Beobachtungszeit entsprechende mittlere Berliner Ortszeit. Hierauf verwandelt er die seit dem mittleren Berliner Mittag verflossene Zeit in Bruchtheile des Tages und sagt nun: die Beobachtung fand statt z. B.: 1898 Juli 8,4635 . . . Von dieser Zeit zieht er dann noch die Aberrations- oder Lichtzeit ab (indem Δ ja als bekannt angenommen wurde) und erhält so schliesslich die reducirte Beobachtungszeit. Der scheinbare Ort des Kometen zur Beobachtungszeit ist nun gleich dem wahren Orte des Kometen zur reducirten Beobachtungszeit. Jetzt sind zwei Fälle möglich.

Erstens kann es sein, dass der Bahnrechner die Beobachtung mit einer Ephemeride vergleichen will, die als solche stets wahre Orte giebt, denn man berechnet sie wie folgt. Das Elementensystem und also auch die Gauss'schen Constanten beziehen sich immer auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges. Daher berechnet man zunächst mit Hülfe der rechtwinkligen Aequatorealcoordinaten der Sonne (die sich auf dasselbe Aequinoctium beziehen), α und δ bezogen auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges. Hieran bringt man dann die Präcession (vom Jahresanfang, etwa 1890, bis zum betreffenden Tage), sowie die Nutation, unter Weglassung der Aberration an, mittelst der folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}\alpha_{app} - \alpha_m &= f + g \sin (G + \alpha) \tan \delta \\ \delta_{app} - \delta_m &= g \cos (G + \alpha),\end{aligned}$$

in denen α_m und δ_m das mittlere α und δ z. B. für 1890,0 bedeuten, die sogleich abgeleitet werden sollen. Die so corrigirten α und δ bilden die Ephemeride und die von dieser gegebenen Orte beziehen sich also auf das augenblicklich stattfindende wahre Aequinoctium, d. h. auf die wahre Lage von Aequator bezüglich Ekliptik und enthalten keinerlei Aberrationsglieder. Und da der scheinbare Ort zur Zeit der Beobachtung gleich ist dem wahren zur reducirten Beobachtungszeit und die Ephemeride wahre Orte giebt, so entnimmt man, um die Beobachtung mit der Ephemeride zu vergleichen, einfach derselben interpolatorisch α und δ für die reducirte Beobachtungszeit. Zieht man diese Grössen von dem scheinbaren α und δ für die Beobachtungszeit ab, so erhält man unmittelbar die Correctionen der betreffenden Ephemeride in α und δ .

Zweitens kann es sein, dass die Beobachtung zur Bestimmung von Bahnelementen (die sich auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges beziehen) verwendet werden soll. Was man hat, ist der wahre Ort für die reducirte Beobachtungszeit, befreit von Aberration. Diesen aber, der sich auf das momentane wahre Aequinoctium bezieht, kann man nicht brauchen, da sich die Elemente auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges beziehen sollen. Vielmehr braucht man den mittleren Ort (d. h. den Ort, der sich auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges bezieht). Man berechnet daher wieder die Präcession und Nutation unter Weglassung der Aberrationsglieder von der Beobachtungszeit bis zum Jahresanfang mittelst obiger Formeln, zieht diese Correctionen vom wahren Orte ab, da man ja vom wahren Ort auf den mittleren übergehen will (während das Berliner Jahrbuch diese Correctionen im umgekehrten Sinne giebt), und legt dann den so erhaltenen, auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges bezogenen Ort, zusammen mit der reducirten Beobachtungszeit, der Bahnbestimmung zu Grunde. —

Um jetzt zum Schluss die Correctionen für Präcession, Nutation und Aberration in Rectascension und Declination allgemein für Sterne in Gesamt-

formeln zu berücksichtigen, hat man, wenn α' und δ' die scheinbare Rectascension und Declination zur Zeit τ , welch' letztere wieder vom Anfange des Beobachtungsjahres an gezählt und in Bruchtheilen desselben ausgedrückt wird, α und δ dagegen die mittleren Aequatorealcoordinaten für den Jahresanfang, μ und μ' die Eigenbewegung des Sternes in Rectascension und Declination in einem Jahre bedeutet, die der Zeit proportional ist, unmittelbar durch Vereinigung der in der bisherigen Darstellung entwickelten Formeln:

$$\begin{aligned}
 \alpha' - \alpha = & + \tau [m + n \operatorname{tg} \delta \sin \alpha] + \tau \mu \\
 & - [15'',8148 + 6'',8650 \operatorname{tg} \delta \sin \alpha] \sin \delta \\
 & - 9'',2231 \operatorname{tg} \delta \cos \alpha \cos \delta \\
 & + [0'',1902 + 0'',0822 \operatorname{tg} \delta \sin \alpha] \sin 2 \delta \\
 & - 0'',0896 \operatorname{tg} \delta \cos \alpha \cos 2 \delta \\
 & - [1'',1642 + 0'',5054 \operatorname{tg} \delta \sin \alpha] \sin 2 \odot \\
 & - 0'',5509 \operatorname{tg} \delta \cos \alpha \cos 2 \odot \\
 & - [0'',1173 + 0'',0509 \operatorname{tg} \delta \sin \alpha] \sin (\odot - \Gamma) \\
 & - [0'',0195 + 0'',0085 \operatorname{tg} \delta \sin \alpha] \sin (\odot + \Gamma) \\
 & - 0'',0093 \operatorname{tg} \delta \cos \alpha \cos (\odot + \Gamma) \\
 & - 20'',492 \cos \varepsilon \sec \delta \cos \alpha \cos \odot \\
 & - 20'',492 \sec \delta \sin \alpha \sin \odot \\
 \\
 \delta' - \delta = & \tau n \cos \alpha + \tau \mu' \\
 & - 6'',8650 \cos \alpha \sin \delta + 9'',2231 \sin \alpha \cos \delta \\
 & + 0'',0822 \cos \alpha \sin 2 \delta - 0'',0896 \sin \alpha \cos 2 \delta \\
 & - 0'',5054 \cos \alpha \sin 2 \odot + 0'',5509 \sin \alpha \cos 2 \odot \\
 & + 0'',0509 \cos \alpha \sin (\odot - \Gamma) \\
 & - 0'',0085 \cos \alpha \sin (\odot + \Gamma) + 0'',0093 \sin \alpha \cos (\odot + \Gamma) \\
 & + 20'',492 [\sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon] \cos \odot \\
 & - 20'',492 \cos \alpha \sin \delta \sin \odot
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \cdot \cdot (91)$$

In diesen Ausdrücken repräsentirt das erste Glied die Correction in Präcession, das zweite in Eigenbewegung, die beiden letzten in Aberration, die übrigen aber in Lunarnutation und Solarnutation. Man sieht unmittelbar, dass die einen Glieder nur von der Zeit und von den Coordinaten der Sonne und des Mondes \odot , \odot , δ , Γ , Γ' abhängen. Diese Glieder, die also unabhängig von den Coordinaten α und δ des Sternes sind, können mithin für sich und dann für jeden einzelnen Stern berechnet werden; während andere Glieder in $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ nur von den Coordinaten des beobachteten Sternes abhängen, aber auf Jahre hinaus für ihn Constante sind. Die ersten dieser Grössen, die im Berliner Jahrbuche mit A , B , C , D bezeichnet sind, weisen, wie man sich überzeugt, für jedes neue Jahr starke Veränderungen auf, während die andere Gliedergruppe, die mit a , b , c , d in Rectascension und mit a' , b' , c' , d' in Declination bezeichnet wird, für jeden Stern bezüglich fast die gleichen Werthe in jedem neuen Jahre zeigt.

Diese neun, in den astronomischen Jahrbüchern enthaltenen Grössen, durch die man der Mühe überhoben wird, die Reduction vom scheinbaren Orte auf den mittleren und umgekehrt selbst numerisch im Einzelnen auszuführen, heissen die Bessel'schen Constanten, weil sie durch Bessel in seinen Tabulae Regiomontanae berechnet worden sind. Dieselben haben folgende Form ¹⁾:

¹⁾ Die durch die Pariser Fundamentalsternconferenz adoptirten numerischen Werthe siehe S. 210.

$$\left. \begin{aligned}
 a &= m + n \operatorname{tg} \delta \sin \alpha \\
 b &= \operatorname{tg} \delta \cos \alpha \\
 c &= \sec \delta \cos \alpha \\
 d &= \sec \delta \sin \alpha
 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned}
 a' &= n \cos \alpha \\
 b' &= - \sin \alpha \\
 c' &= \operatorname{tg} \varepsilon \cos \delta - \sin \delta \sin \alpha \\
 d' &= \sin \delta \cos \alpha
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 A &= \tau - u_0 \sin \delta + u_1 \sin 2 \delta - u_2 \sin 2 \odot + u_3 \sin (\odot - \Gamma) \\
 &\quad - u_4 \sin (\odot + \Gamma) \\
 B &= - 9'',2231 \cos \delta + 0'',0896 \cos 2 \delta - 0'',5509 \cos 2 \odot \\
 &\quad - 0,0093 \cos (\odot + \Gamma) \\
 C &= - 20'',492 \cos \varepsilon \cos \odot \\
 D &= - 20'',492 \sin \odot \\
 E &= - v \sin \delta + v_1 \sin 2 \delta - v_2 \sin 2 \odot + v_3 \sin (\odot - \Gamma) \\
 &\quad - v_4 \sin (\odot + \Gamma)
 \end{aligned} \right\} \cdot (92)$$

indem zur Abkürzung die Zahlenwerthe in den Formeln für $\alpha' = \alpha$ und $\delta' = \delta$:

$$\begin{aligned}
 6'',8650 &= n u_0 & 15'',8148 &= m u_0 = v_0 \\
 0'',0822 &= n u_1 & 0'',1902 &= m u_1 = v_1 \\
 0'',5054 &= n u_2 & 1'',1642 &= m u_2 = v_2 \\
 0'',0509 &= n u_3 & 0'',1173 &= m u_3 = v_3 \\
 0'',0085 &= n u_4 & 0'',1195 &= m u_4 = v_4
 \end{aligned}$$

gesetzt sind, wodurch sich diese Formeln selbst unmittelbar wie folgt schreiben:

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha' - \alpha &= [\tau - u_0 \sin \delta + u_1 \sin 2 \delta - u_2 \sin 2 \odot + u_3 \sin (\odot - \Gamma) \\
 &\quad - u_4 \sin (\odot + \Gamma)] [m + n \operatorname{tg} \delta \sin \alpha] \\
 &= [9'',2231 \cos \delta - 0'',0896 \cos 2 \delta + 0'',5509 \cos 2 \odot \\
 &\quad + 0'',0093 \cos (\odot + \Gamma)] \operatorname{tg} \delta \cos \alpha \\
 &= 20'',492 \cos \varepsilon \cos \odot \cos \alpha \sec \delta \\
 &= 20'',492 \sin \odot \sin \alpha \sec \delta \\
 &+ \tau \mu \\
 &= v_0 \sin \delta + v_1 \sin 2 \delta - v_2 \sin 2 \odot + v_3 \sin (\odot - \Gamma) \\
 &\quad - v_4 \sin (\odot + \Gamma)
 \end{aligned} \right\} \cdot (93)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \delta' - \delta &= [\tau - u_0 \sin \delta + u_1 \sin 2 \delta - u_2 \sin 2 \odot \\
 &\quad + u_3 \sin (\odot - \Gamma) - u_4 \sin (\odot + \Gamma)] n \cos \alpha \\
 &+ [9'',2231 \cos \delta - 0'',0896 \cos 2 \delta + 0'',5509 \cos 2 \odot \\
 &\quad + 0'',0093 \cos (\odot + \Gamma)] \sin \alpha \\
 &= 20'',492 \cos \varepsilon \cos \odot [\operatorname{tg} \varepsilon \cos \delta - \sin \delta \sin \alpha] \\
 &= 20'',492 \sin \odot \sin \delta \cos \alpha \\
 &+ \tau \mu'
 \end{aligned} \right\}$$

Die Berücksichtigung der Correction in Präcession, Nutation und Aberration geschieht daher in höchst einfacher Weise durch folgende definitive Rechenformeln:

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha' - \alpha &= Aa + Bb + Cc + Dd + \tau \mu + E \\
 \delta' - \delta &= Aa' + Bb' + Cc' + Dd' + \tau \mu'
 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot (94)$$

in denen a, b, c, d und a', b', c', d' bloss vom Sternorte und der Schiefe der Ekliptik, A, B, C, D, E dagegen von Sonne und Mond abhängen, also reine Functionen der Zeit sind und eben daher in die im Jahrbuche gegebenen Tafeln, welche die Zeit als Argument enthalten, gebracht werden können. Sämmtliche Grössen in obiger Formel entlehnt man also nur einfach dem Jahrbuche, wodurch man der ganzen, sonst sehr beträchtlichen Arbeit mit einem Male überhoben ist. Die Glieder $Aa + Bb$ und $Aa' + Bb'$ rühren

dabei, um es noch einmal hervorzuheben, bloss von der Präcession und Nutation, die Glieder $Cc + Dd$ und $Cc' + Dd'$ von der Aberration, die Glieder $\tau\mu$ und $\tau\mu'$ von der Eigenbewegung her; E liegt unter $1/10''$ und wird meist vernachlässigt.

An Stelle dieser schon höchst einfachen Rechenformeln, die besonders geeignet sind, wenn man eine Ephemeride eines Sternes für längere Zeit zu berechnen und sehr viele Beobachtungen desselben Sternes zu reduciren hat, kann man sich, wenn man die Reduction nur für einen einzelnen Tag sucht, mit Vortheil anderer bedienen, die man wie folgt erhält.

Bei der Reduction eines Ortes eines Sternes vom mittleren Aequinoctium für ein gegebenes Datum t auf das wahre Aequinoctium des Datums t' kann zunächst die Berechnung der Correctionen für Präcession und Nutation gleichzeitig erfolgen. Setzt man nämlich in den Gleichungen, welche die Summe dieser Correctionen repräsentiren:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= m\tau + \Delta\lambda \cos \varepsilon + (n\tau + \Delta\lambda \sin \varepsilon) \sin \alpha \, tg \, \delta - \Delta\varepsilon \cos \alpha \, tg \, \delta \\ \Delta\delta &= (n\tau + \Delta\lambda \sin \varepsilon) \cos \alpha + \Delta\varepsilon \sin \alpha,\end{aligned}$$

bezüglich:

$$\begin{aligned}m\tau + \Delta\lambda \cos \varepsilon &= f \\ n\tau + \Delta\lambda \sin \varepsilon &= g \sin G \\ -\Delta\varepsilon &= g \cos G,\end{aligned}$$

so ist der Einfluss in Präcession und Nutation unmittelbar gegeben durch die Relationen:

$$\left. \begin{aligned}\Delta\alpha_i &= f + g \sin (G + \alpha) \, tg \, \delta \\ \Delta\delta_i &= g \cos (G + \alpha)\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (95)$$

wobei man die Grössen f, g, G wieder unmittelbar dem Jahrbuche entlehnt, welches ihre Werthe in Intervallen von einem Tage giebt. Dabei wird der Anfang des Jahres stets von dem Momente ab gerechnet, wo die mittlere Länge der Sonne $-20'',47$ (dem constanten Theil der Aberration) gleich 280° ist.

Ebenso lassen sich die Formeln für die Aberration leicht wie folgt umschreiben:

$$\left. \begin{aligned}\Delta\alpha_{ii} &= h \sin (H + \alpha) \sec \delta \\ \Delta\delta_{ii} &= h \cos (H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (96)$$

wobei i, h und H gleichfalls wieder den astronomischen Ephemeriden des Jahrbuches direct entnommen werden. Als definitive Rechenformeln, welche die Correctionen wegen Präcession, Nutation und Aberration in sich vereinigen, hat man an Stelle der eben erwähnten daher auch die folgenden:

$$\left. \begin{aligned}\alpha' - \alpha &= f + g \sin (G + \alpha) \, tg \, \delta + h \sin (H + \alpha) \sec \delta + \tau\mu \\ \delta' - \delta &= g \cos (G + \alpha) + h \cos (H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta + \tau\mu'\end{aligned} \right\} \dots \dots (97)$$

wobei μ und μ' die Eigenbewegungen des Fixsternes bezeichnen.

Die Formeln (97) kann man, um auf die allgemeinen Bemerkungen von S. 193 und 194 zurückzukommen, natürlich auch zur Berechnung des Totaleffectes der Präcession und Nutation bei Kometen und kleinen Planeten verwenden. Erwähnt sei noch, dass das Berliner astronomische Jahrbuch auch für die Reduction vom nächsten Jahrzehntanfang die Grössen f, g, G in viertägigen Intervallen giebt. —

Für polnahe Sterne genügen indess die Formeln (97) nicht, da die Vernachlässigung der höheren Glieder nicht mehr statthaft ist. Fabricius hat für diesen Fall in den Astronomischen Nachrichten Bd. 87, S. 113 und 129 einfache Formeln zur strengen Reduction angegeben. Seien $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ die nach (97) berechneten Reductionen auf den scheinbaren Ort, so findet man die definitiven Reductionen aus den Formeln:

$$tg (\alpha' - \alpha) = \frac{\Delta\alpha}{1 - tg \, \delta \, \Delta\delta}; \quad \delta' - \delta = \Delta\delta - cotg \, \delta \, tg \, \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha) \Delta\alpha \dots (97a)$$

Zum Schluss dieser Vorlesung geben wir für die Berechnung der Präcession und zur Erläuterung der Fundamentalformeln der ersten Abtheilung das folgende numerische Beispiel nach Watson, welches für den allgemeinen bei Berechnung des geocentrischen Ortes einzuschlagenden Gang der Rechnung vorbildlich ist. Es sollen die geocentrische Rectascension und Declination des Planeten Eurynome 79 für mittlere Mitternacht Washington 1865, 24. Februar bestimmt werden, wenn die Elemente der Bahn die folgenden sind:

$$\begin{aligned} \text{Epoche} &= 1864, 10. \text{ Januar, Greenwich m. Zt.} \\ \left. \begin{aligned} M &= 1^{\circ} 29' 40'', 21 \\ \pi &= 44^{\circ} 20' 33'', 09 \\ \oslash &= 206^{\circ} 42' 40'', 13 \\ i &= 4^{\circ} 36' 50'', 51 \\ \varphi &= 11^{\circ} 15' 51'', 02 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Ekliptik und mittleres} \\ \text{Aequinoctium 1864,0} \end{array} \\ \log a &= 0,388\,131\,9 \\ \log \mu &= 2,967\,808\,8 \\ \mu &= 928'', 557\,45 \end{aligned}$$

Wenn eine Reihe von Oertern berechnet werden soll, so müssen zunächst die in den Ausdrücken für die Coordinaten enthaltenen Gauss'schen Constanten berechnet werden, und wiewohl im vorliegenden Falle nur eine einzige Position zu berechnen ist, so wollen wir doch, weil dieser Process typisch ist, in der That so verfahren.

Da die Elemente π , \oslash und i sich auf die Ekliptik und das mittlere Aequinoctium von 1864,0 beziehen, so müssen wir sie zuerst auf die Ekliptik und das mittlere Aequinoctium von 1865,0 umrechnen. Bei dieser Reduction haben wir $t = 1864,0$ und $t' = 1865,0$ zu setzen und erhalten so nach den für die Präcession entwickelten Formeln:

$$\frac{dl}{dt} = 50'', 239, \quad \Pi = 352^{\circ} 51' 41'', \quad \pi = 0', 4882.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta \omega &= \pi \frac{\sin(\oslash - \Pi)}{\sin i} \\ i_1 &= i + \pi \cos(\oslash - \Pi) + \frac{1}{4} \frac{\Delta \omega^2}{w} \sin 2i \\ \oslash_1 &= \oslash + (t_1 - t) \frac{dl}{dt} - \pi \sin(\oslash - \Pi) \cotg i_1 - \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{w} \sin 2(\oslash - \Pi) \\ \pi_1 &= \pi + (t_1 - t) \frac{dl}{dt} + \pi \sin(\oslash - \Pi) \tg \frac{1}{2} i_1 - \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{w} \sin 2(\oslash - \Pi) \end{aligned}$$

ergiebt sich:

$$i_1 - i = \Delta i = -0'', 40, \quad \Delta \oslash = +53'', 61, \quad \Delta \pi = +50'', 23$$

und mithin sind die Elemente, welche die Lage der Bahn bezüglich der Ekliptik 1865,0 bestimmen:

$$\pi = 44^{\circ} 21' 23'', 32, \quad \oslash = 206^{\circ} 43' 33'', 74, \quad i = 4^{\circ} 36' 50'', 11.$$

Die mittlere Schiefe der Ekliptik für denselben Zeitpunkt giebt der Nautical Almanac zu:

$$\varepsilon = 23^{\circ} 27' 24'', 03.$$

Die Gauss'schen Constanten für den Aequator ergeben sich jetzt nach dem Früheren aus den Formeln:

$$\begin{aligned} \cotg A &= -\tg \oslash \cos i; & \tg E_0 &= \frac{\tg i}{\cos \oslash} \\ \cotg B &= \frac{\cos i}{\tg \oslash \cos E_0} \cdot \frac{\cos(E_0 + \varepsilon)}{\cos \varepsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cotg C &= \frac{\cos i}{\tg \delta \cos E_0} \cdot \frac{\sin(E_0 + \varepsilon)}{\sin \varepsilon} \\ \sin a &= \frac{\cos \delta}{\sin A}; \quad \sin b = \frac{\sin \delta \cos \varepsilon}{\sin B} \\ \sin c &= \frac{\sin \delta \sin \varepsilon}{\sin C}. \end{aligned}$$

Dabei ist also der Winkel E_0 definirt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin i &= e_0 \sin E_0 \\ \pm \cos i \cos \delta &= e_0 \cos E_0 \end{aligned}$$

und stets kleiner als 180° ; der Quadrant, in welchem er zu nehmen, ist direct durch das Vorzeichen von

$$\tg E_0 = \pm \frac{\tg i}{\cos \delta}$$

bestimmt. Die Werthe von $\sin a$, $\sin b$ und $\sin c$ sind stets positiv und daher müssen die Winkel A , B und C mit Rücksicht auf den Quadranten, in welchem jeder liegt, so genommen werden, dass $\sin A$ und $\cos \delta$, $\sin B$ und $\sin \delta$ und $\sin C$ und $\sin \delta$ das gleiche Vorzeichen haben. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} A &= 296^\circ 39' 5'',07 & \log \sin a &= 9,9997156 \\ B &= 205^\circ 55' 27'',14 & \log \sin b &= 9,9748254 \\ C &= 212^\circ 32' 17'',74 & \log \sin c &= 9,5222192, \end{aligned}$$

wobei die Controlformel für die richtige Berechnung der Constanten:

$$\begin{aligned} \tg i &= \frac{\sin b \sin c \sin(C - B)}{\sin a \cos A} \\ \log \tg i &= 8,9068875 \end{aligned}$$

ergiebt, ein Werth, der mit dem aus i direct abgeleiteten Werthe 8,9068876 übereinstimmt.

Zunächst müssen nun r und u bestimmt werden. Das Datum 1865, Februar 24,5 mittlere Zeit Washington, durch Anbringung des Längenunterschiedes $5^h 8^m 11^s,2$ auf den Meridian von Greenwich bezogen, wird 1865, Februar 24,714018 m. Zt. Greenwich. Die vom Zeitpunkte, für den die mittlere Anomalie gegeben ist, bis zu dem Datum, für welches der geocentrische Ort gesucht ist, verstrichene Zeit, ist also 420,714018 Tage. Multiplicirt man die mittlere tägliche Bewegung $928'',55745$ mit dieser Anzahl von Tagen und addirt das Resultat zu dem gegebenen Werthe von M , so folgt die mittlere Anomalie für den gesuchten Ort:

$$M = 1^\circ 29' 40'',21 + 108^\circ 30' 57'',14 = 110^\circ 0' 37'',35.$$

Die excentrische Anomalie E wird jetzt aus der Gleichung:

$$M = E - e \sin E$$

gefunden, wobei der Werth von e in Bogensekunden auszudrücken ist. Für Eurynome hat man:

$$\log \sin \varphi = \log e = 9,2907754.$$

Der Werth von e wird also in Bogensekunden:

$$\log e = 4,6052005.$$

Nun ergiebt aber die analytische Auflösung der Kepler'schen Gleichung nach Lagrange's Umkehrungsformel die Gleichung:

$$E = M + e \sin M + \frac{1}{2} e^2 \sin 2M + \dots$$

Dieselbe ergiebt als Näherungswerth von E :

$$E_0 = 119^{\circ} 49' 24'',$$

indem der Werth von e^2 , ausgedrückt in Secunden:

$$\log e^2 = 3,895976$$

ist. Hiermit wird:

$$M_0 = E_0 - e \sin E_0 = 110^{\circ} 6' 50''.$$

Danach erhält man:

$$\Delta E_0 = \frac{M - M_0}{1 - e \cos E_0} = - \frac{372'',7}{1,097} = - 339'',7,$$

was in zweiter Näherung für den Werth von E :

$$E_0 = 119^{\circ} 43' 44'',3$$

ergiebt. Hieraus folgt:

$$M_0 = 110^{\circ} 0' 36'',98$$

und damit:

$$\Delta E_0 = + \frac{0'',37}{1,097} = + 0'',34.$$

Man erhält somit in dritter Annäherung für den Werth von E :

$$E = 119^{\circ} 43' 44'',64,$$

wonach keine weitere Correction erforderlich ist, da dieser Werth die Gleichung zwischen M und E erfüllt.

Um r und v zu finden, hat man nach dem Früheren (cf. vierte Vorlesung) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sqrt{r} \sin \frac{1}{2} v &= \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2} E \\ \sqrt{r} \cos \frac{1}{2} v &= \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2} E. \end{aligned}$$

Die Werthe der ersten Factoren der rechten Seite dieser Gleichungen sind:

$$\begin{aligned} \log \sqrt{a(1+e)} &= 0,2328104 \\ \log \sqrt{a(1-e)} &= 0,1468741. \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned} v &= 129^{\circ} 3' 50'',52 \\ \log r &= 0,4282854 \end{aligned}$$

Indem:

$$\pi - \Omega = 197^{\circ} 37' 49'',58$$

wird:

$$u = v + \pi - \Omega = 326^{\circ} 41' 40'',10.$$

Die heliocentrischen Coordinaten in Bezug auf den Aequator als Fundamentalebene nehmen jetzt auf Grund der Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= r \sin a \sin(A+u) \\ y &= r \sin b \sin(B+u) \\ z &= r \sin c \sin(C+u) \end{aligned}$$

für Eurynome folgende Werthe an:

$$\begin{aligned} x &= - 2,6611270 \\ y &= + 0,3250277 \\ z &= + 0,0119486. \end{aligned}$$

Der Nautical Almanac oder das Berliner Jahrbuch giebt aber als Aequatoreal-Coordinaten der Sonne für 1865, Februar 24,5 m. Zt. Washington, bezogen auf das mittlere Aequinoctium und den mittleren Aequator des Jahresanfanges:

$$X = + 0,9094557$$

$$Y = - 0,3599298$$

$$Z = - 0,1561751.$$

Schliesslich sind die geocentrische Rectascension, Declination und Entfernung durch folgende Relationen bestimmt:

$$\lg \alpha = \frac{y + Y}{x + X}$$

$$\lg \delta = \frac{z + Z}{y + Y} \sin \alpha = \frac{z + Z}{x + X} \cos \alpha$$

$$\Delta = \frac{z + Z}{\sin \delta}.$$

Die erste Form der Gleichung für $\lg \delta$ wird dabei angewandt, wenn $\sin \alpha > \cos \alpha$ ist. Der Werth von Δ muss stets positiv sein; δ ist kleiner als $\pm 90^\circ$; das Minuszeichen bezeichnet südliche Declinationen. So folgt:

$$\alpha = 181^\circ 8' 29'',29$$

$$\delta = - 4^\circ 42' 21'',56$$

$$\log \Delta = 0,2450054.$$

Um jetzt noch α und δ auf das wahre Aequinoctium und den wahren Aequator Februar 24,5 zu reduciren, entnehmen wir dem Nautical Almanac oder dem Berliner Jahrbuche:

$$f = + 16'',80$$

$$\log g = 1,0168$$

$$G = 45^\circ 16'$$

und substituiren diese Werthe in die früheren Gleichungen:

$$\Delta \alpha = f + g \sin (G + \alpha) \lg \delta$$

$$\Delta \delta = g \cos (G + \alpha),$$

wodurch sich:

$$\Delta \alpha = + 17'',42$$

$$\Delta \delta = - 7'',17$$

ergiebt. Mithin ist der geocentrische Ort, bezogen auf das wahre Aequinoctium und Aequator des Datums:

$$\alpha = 181^\circ 8' 46'',71$$

$$\delta = - 4^\circ 42' 28'',73$$

$$\log \Delta = 0,2450054.$$

Ist nur ein einzelner Ort gesucht, so gelangt man etwas rascher zum Ziele, wenn man r aus:

$$r = a (1 - e \cos E)$$

berechnet und $v - E$ aus:

$$\sin \frac{1}{2} (v - E) = \sqrt{\frac{a}{r}} \sin \frac{1}{2} \varphi \sin E.$$

So erhält man in Uebereinstimmung mit den eben gefundenen Werthen für den fraglichen Ort der Eurynome:

$$\log r = 0,4282852$$

$$v - E = 9^\circ 20' 5'',92$$

$$v = 129^\circ 3' 50'',56.$$

Die Probe auf die Rechnung kann mittelst der Formel:

$$\sin \frac{1}{2} (v + E) = \sqrt{\frac{a}{r}} \cos \frac{1}{2} \varphi \sin E$$

gemacht werden. Im Falle der eben gefundenen Werthe hat man:

$$\frac{1}{2}(v + E) = 124^{\circ} 23' 47'',60,$$

also:

$$\log \sin \frac{1}{2}(v + E) = 9,9165316,$$

während die rechte Seite der Gleichung auch:

$$\log \sin \frac{1}{2}(v + E) = 9,9165316$$

wird.

Bei der Berechnung eines einzelnen Ortes ist es ebenfalls wieder ein nur wenig kürzeres Verfahren, erst die heliocentrische Länge und Breite auf Grund der Gleichungen:

$$\begin{aligned} tg(l - \Omega) &= \pm tg u \cos i \\ tg b &= \pm tg i \sin(l - \Omega) \end{aligned}$$

zu berechnen, dann die geocentrische Länge und Breite mittelst der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta \cos \beta \cos(\lambda - \odot) &= r \cos b \cos(l - \odot) + R \\ \Delta \cos \beta \sin(\lambda - \odot) &= r \cos b \sin(l - \odot) \\ \Delta \sin \beta &= r \sin b \end{aligned}$$

zu bestimmen und hierauf die geocentrische Länge und Breite auf Grund der Relationen:

$$tg \alpha = \frac{\cos(N + \epsilon)}{\cos N} tg \lambda$$

$$tg \delta = tg(N + \epsilon) \sin \alpha,$$

wobei:

$$tg N = \frac{tg \beta}{\sin \lambda}$$

ist, in Rectascension und Declination zu verwandeln.

Die Berechnung des geocentrischen Ortes in Bezug auf die Ekliptik gleicht in jeder Hinsicht derjenigen, bei welcher der Aequator als Fundamentalebene angenommen wird und bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung.

Die Berechnung des geocentrischen oder heliocentrischen Ortes im Falle einer parabolischen oder hyperbolischen Bahn weicht von dem im vorhergehenden Beispiele angegebenen Verfahren nur in der Art der Berechnung von r und v ab.

Um zunächst den Fall der parabolischen Bewegung numerisch zu illustriren, sei $t - T = 75,364$ Tage, $\log q = 9,9650486$ und r und v seien zu bestimmen. Zuerst berechnen wir m aus:

$$m = \frac{C_0}{q^{3/2}},$$

wobei nach dem Früheren (s. fünfte Vorlesung):

$$C_0 = 9,9601277$$

ist. Danach folgt:

$$\log m = 0,0125548.$$

Hierauf findet man M aus:

$$M = m(t - T),$$

was:

$$\log M = 1,8897187$$

ergibt. Mittelst dieses Werthes ergibt sich nach Tafel VI:

$$v = 79^{\circ} 55' 57'',26.$$

Schliesslich ergibt sich r aus:

$$r = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2} v}$$

zu:

$$\log r = 0,1961120.$$

Für den Fall der hyperbolischen Bewegung, wo $p = a(e^2 - 1)$ und $a = p \cot \psi^2$, sei gegeben: $t - T = 65,41236$ Tage, $\psi = 37^\circ 35' 0'', 0$, $\log e = 0,1010188$ und $\log a = 0,6020600$. Um r und v zu finden, berechnen wir zunächst N aus:

$$N = \frac{\lambda k}{a^{3/2}} (t - T),$$

wobei:

$$\log \lambda = 9,6377843,$$

und erhalten:

$$\log N = 8,7859356$$

$$N = 0,06108514.$$

Der Werth von F ergibt sich jetzt aus der Gleichung:

$$N = e \lambda \operatorname{tg} F - \log \operatorname{tg} (45^\circ + \frac{1}{2} F).$$

Indem wir $F = 30^\circ$ annehmen, gewinnen wir einen genäherten Werth von F aus:

$$\operatorname{tg} F_1 = \frac{N + \log \operatorname{tg} 60^\circ}{e \lambda}.$$

wodurch sich:

$$F = 28^\circ 40' 23''$$

und folglich:

$$N_1 = 0,072678$$

ergiebt.

Die auf den letzteren Werth von F anzuwendende Correction berechnet man aus der Gleichung:

$$\Delta F_1 = \frac{(N - N_1) \cos F_1^2}{\lambda (e - \cos F_1)} s,$$

wobei $s = 206264'', 8$ ist und erhält so:

$$\Delta F_1 = 4,6097 (N - N_1) s = - 3^\circ 3' 43'', 0.$$

Hierdurch erhält man in zweiter Annäherung für F :

$$F_1 = 25^\circ 36' 40'', 0.$$

Der entsprechende Werth von N ist:

$$N_1 = 0,0617653$$

und folglich:

$$\Delta F_1 = 5,199 (N - N_1) s = - 12' 9'', 4.$$

Die dritte Näherung ergibt mithin:

$$F_1 = 25^\circ 24' 30'', 6.$$

Schliesslich folgt durch Fortsetzung der Operation:

$$F = 25^\circ 24' 27'', 74,$$

ein Werth, der keiner weiteren Correction bedarf.

Um r zu finden, hat man:

$$r = a \left(\frac{e}{\cos F} - 1 \right),$$

wodurch sich:

$$\log r = 0,2008544$$

ergiebt. Hierauf folgt v aus:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \cot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \psi \operatorname{tg} \frac{1}{2} F$$

zu:

$$v = 67^\circ 3' 0'', 0.$$

Sollen hingegen mehrere Oerter gefunden werden, so empfiehlt es sich, v und r mittelst folgender Gleichungen zu berechnen:

$$\sqrt{r} \sin \frac{1}{2} v = \frac{\sqrt{a(e+1)}}{\sqrt{\cos F}} \sin \frac{1}{2} F$$

$$\sqrt{r} \cos \frac{1}{2} v = \frac{\sqrt{a(e-1)}}{\sqrt{\cos F}} \cos \frac{1}{2} F.$$

Für die gegebenen Werthe von a und e hat man:

$$\sqrt{a(e+1)} = 0,4782649$$

$$\sqrt{a(e-1)} = 0,0100829$$

und erhält hieraus:

$$v = 67^{\circ} 2' 59'',92$$

$$\log r = 0,2008545.$$

Zusammenstellung.

I. Präcession.

A. Allgemeine Werthe ¹⁾:

Bedeutet:

l die jährliche allgemeine Präcession,

l_1 die jährliche lunisolare Präcession,

a die jährliche Präcession durch die Planeten,

ε_1 die Schiefe der festen Ekliptik gegen den jeweiligen Aequator,

ε_2 die Schiefe der mittleren (in Folge der Säcularstörungen beweglichen)

Ekliptik gegen den jeweiligen Aequator, dann ist:

1. Nach Bessel für 1750,0:

$$l = 50'',21129 t + 0'',0001221483 t^2$$

$$l_1 = 50'',37572 t - 0'',0001217945 t^2$$

$$a = 0'',17926 t - 0'',0002660393 t^2$$

$$\varepsilon_1 = 23^{\circ} 28' 18'',0 + 0'',0000098423 t^2$$

$$\varepsilon_2 = 23^{\circ} 28' 18'',0 - 0'',48368 t - 0'',00000272295 t^2.$$

2. Nach Peters für 1750,0:

$$l = 50'',21484 t + 0'',0001134 t^2$$

$$l_1 = 50'',37572 t - 0'',0001084 t^2$$

$$a = 0'',17229 t - 0'',0002660393 t^2$$

$$\varepsilon_1 = 23^{\circ} 28' 17'',9 + 0'',00000735 t^2$$

$$\varepsilon_2 = 23^{\circ} 28' 17'',9 - 0,4738 t - 0'',00000140 t^2.$$

3. Nach Nyérén für 1800,0:

$$l = 50'',1882 t + 0'',00011333 t^2$$

$$l_1 = 50'',3269 t - 0'',00010824 t^2.$$

4. Nach Oppolzer für 1850,0:

$$l = 50'',23465 t + 0'',00011288 t^2$$

$$l_1 = 50'',36924 t - 0'',00010881 t^2$$

$$a = 0'',14673 t - 0'',00024186 t^2$$

$$\varepsilon_1 = 23^{\circ} 27' 31'',24 + 0'',00000719 t^2$$

$$\varepsilon_2 = 23^{\circ} 27' 31'',24 - 0'',47593 t - 0'',00000149 t^2.$$

¹⁾ In den Formeln 1. bis 4. bedeutet t den seit dem angegebenen Anfangsjahre, z. B. 1750,0 bis zur Beobachtungszeit verfloffenen Zeitraum, daher ε_1 die Schiefe der Ekliptik 1750,0 gegen den Aequator zur Zeit t , z. B. 1897,0. In den Formeln 5. hingegen, wo t und t_0 auftreten, bedeutet ε_1 die Schiefe der Ekliptik zur Zeit t_0 gegen den Aequator zur Zeit t ; diese Formeln sind also allgemeiner.

5. Nach Harkness für 1850,0 (Mittel aus verschiedenen Autoritäten):

$$l = [50'',23622 + 0'',00022044(t_0 - 1850)](t - t_0) + 0'',00011022(t - t_0)^2$$

$$l_1 = [50'',35715 + 0'',00004943(t_0 - 1850)](t - t_0) - 0'',00010669(t - t_0)^2$$

$$a = [0'',13183 - 0'',00018655(t_0 - 1850)](t - t_0) - 0'',00023652(t - t_0)^2$$

$$\varepsilon_1 = 23^\circ 27' 31'',47 - 0'',46654(t_0 - 1850) - 0'',00000073(t_0 - 1850)^2 \\ + 0'',00000641(t - t_0)^2$$

$$\varepsilon_2 = 23^\circ 27' 31'',47 - 0'',46654(t_0 - 1850) - 0'',00000073(t_0 - 1850)^2 \\ - [0'',46654 + 0'',00000146(t_0 - 1850)](t - t_0) - 0'',00000073(t - t_0)^2.$$

6. Der Werth der Constanten der Lunisolarpräcession, d. h. der Präcessionsconstanten P ist für das Aequinoctium 1800,0 nach:

Autorität	Laplace	Bessel	Struve und Peters	Hansen	Leverrier	Nyrén	Harkness
Bestimmungs- jahr	1802	1826	1841	1852	1856	1870	1889
P	$+50'',29034$	$+50'',37826$	$+50'',3798$	$+50'',35593$	$+50'',36888$	$+50'',3269$	$+50'',35468$

B. Einfluss der Präcession auf die Coordinaten der Himmelskörper.

a) Auf Länge und Breite¹⁾:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{dl}{dt} + \operatorname{tg} \beta \cos \left(\lambda - \Pi - l - \frac{d\Pi}{dt} t \right) \frac{d\pi}{dt}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = - \sin \left(\lambda - \Pi - l - \frac{d\Pi}{dt} t \right) \frac{d\pi}{dt}.$$

Dabei ist:

1. Nach Bessel für 1750,0:

$$\pi = 0'',48892 t - 0'',0000030715 t^2$$

$$\Pi = 171^\circ 36' 10'' - 5'',21 t.$$

2. Nach Peters für 1750,0:

$$\pi = 0'',4776 t - 0'',000003445 t^2$$

$$\Pi = 172^\circ 45' 32'' - 8'',504 t.$$

3. Nach Oppolzer für 1850,0:

$$\pi = 0'',47950 t - 0'',00000325 t^2$$

$$\Pi = 173^\circ 0' 12'' - 8'',683 t$$

4. Nach Harkness für 1850,0:

$$\pi = 0'',46949 t - 0'',00000345 t^2$$

$$\Pi = 173^\circ 34' 55'' - 8'',791 t.$$

¹⁾ In diesen Formeln beziehen sich l , π und Π auf die feste Ekliptik, z. B. von 1750 und diejenige zu der Zeit, wo man die Veränderung betrachtet (d. h. zur Zeit, welche der Länge λ entspricht). Praktisch würde man wie folgt verfahren: man will die Coordinaten λ_0 und β_0 zur Zeit t_0 umformen in diejenigen zur Zeit t_1 , in λ_1 und β_1 ; hierzu setzt man mit Hülfe eines genäherten Werthes von λ_1 und β_1 einfach in obigen Formeln $\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_0}{2}$, $\beta = \frac{\beta_1 + \beta_0}{2}$, $t = \frac{t_1 + t_0}{2} - 1750$

oder 1850; so erhielte man $\frac{d\lambda}{dt}$ und $\frac{d\beta}{dt}$ für die Epoche $\frac{t_1 + t_0}{2}$. Eine analoge Bemerkung gilt bezüglich der Formeln b) für $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\beta}{dt}$. In den Formeln C. hingegen beziehen sich l , π und Π auf den Schnitt der Ekliptik zur Epoche t_0 mit derjenigen zur Epoche t_1 . Π in Formel C. ist gleich dem Ausdruck $\Pi + l + \frac{d\Pi}{dt} t$.

b) Auf Rectascension und Declination:

$$\frac{d\alpha}{dt} = m + n \operatorname{tg} \delta \sin \alpha, \quad \frac{d\delta}{dt} = n \cos \alpha.$$

Dabei ist ¹⁾:

1. Nach Bessel für 1750,0:

$$\begin{aligned} m &= 46'',02824 + 0'',0003086450 \, t \\ n &= 20'',06442 - 0'',0000970204 \, t. \end{aligned}$$

2. Nach Peters für 1800,0:

$$\begin{aligned} m &= 46'',0623 + 0'',0002849 \, t \\ n &= 20'',0607 - 0'',0000863 \, t. \end{aligned}$$

3. Nach Nyrén für 1800,0:

$$\begin{aligned} m &= 46'',0138 + 0'',00028453 \, t \\ n &= 20'',0397 - 0'',00008620 \, t. \end{aligned}$$

4. Nach Oppolzer für 1850,0:

$$\begin{aligned} m &= 46'',05931 + 0'',00028391 \, t \\ n &= 20'',05150 - 0'',00008669 \, t. \end{aligned}$$

5. Nach Harkness für 1850,0:

$$\begin{aligned} m &= 46'',06315 + 0'',00027723 \, t \\ n &= 20'',04661 - 0'',00008494 \, t. \end{aligned}$$

C. Einfluss der Präcession auf die Bahnlage der Himmelskörper ²⁾.

a) Ekliptik.

$$\begin{aligned} \varpi_1 &= \varpi_0 + l + \cotg i \pi \sin(\varpi - \Pi) \\ \pi_1 &= \pi_0 + l - \operatorname{tg}^{1/2} i \pi \sin(\varpi - \Pi) \\ i_1 &= i_0 - \pi \cos(\varpi - \Pi), \end{aligned}$$

wobei z. B. nach Oppolzer ³⁾:

$$\begin{aligned} \Pi &= 173^\circ 0' 12'' + 32'',869 \left(\frac{t_1 + t_0}{2} - 1850 \right) \\ \pi &= \left\{ 0'',47950 - 0'',00000650 \left(\frac{t_1 + t_0}{2} - 1850 \right) \right\} (t_1 - t_0) \\ l &= \left\{ 50'',23465 + 0'',00022580 \left(\frac{t_1 + t_0}{2} - 1850 \right) \right\} (t_1 - t_0) \end{aligned}$$

zu setzen, welche Werthe man nach Gutdünken aber auch nach einer der anderen angeführten Autoritäten annehmen kann.

b) Aequator.

$$\begin{aligned} \varpi'_1 &= \varpi'_0 + m - \cotg i' n \cos(\varpi' + p) \\ \pi'_1 &= \pi'_0 + m + \operatorname{tg}^{1/2} i' n \cos(\varpi' + p) \\ i'_1 &= i'_0 - n \sin(\varpi' + p), \end{aligned}$$

¹⁾ Im Berliner astronomischen Jahrbuch werden alljährlich in den „Hülftafeln“ die Grössen m und n gegeben, und zwar für das laufende Jahr t die Grösse $m(t - t_0)$ in Zeitsecunden, sowie $\operatorname{tg}[n(t - t_0)]$ in Zeitsecunden und Bogensecunden, wobei t_0 die Epoche der wichtigsten Kataloge ist und die Newcomb'sche Präcessionsconstante zu Grunde liegt. Ausserdem werden dort Hülfsgrössen und Formeln zur Uebertragung mittlerer Polsternörter von der Epoche t_0 der wichtigsten Sterncataloge auf das Aequinoctium des Anfangs des laufenden Jahres gegeben.

²⁾ Siehe Anmerkung S. 204.

³⁾ Siehe Lehrbuch zur Bahnbestimmung, 2. Auflage, S. 209.

wobei wieder nach Oppolzer:

$$p = 23'',029 (t_1 - t_0)$$

$$n = \left\{ 20'',05150 - 0'',00008669 \left(\frac{t_1 + t_0}{2} - 1850 \right) \right\} (t_1 - t_0)$$

$$m = \left\{ 46'',05931 + 0'',00028391 \left(\frac{t_1 + t_0}{2} - 1850 \right) \right\} (t_1 - t_0).$$

II. Nutation.

A. Allgemeine Werthe.

Bezeichnet $\Delta\lambda$ die Nutation in Länge und $\Delta\varepsilon$ die Nutation in Schiefe, so ist bis auf Glieder erster Ordnung:

1. Nach Peters¹⁾:

a) für die Epoche 1800,0:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda = & - 17'',2405 \sin 2 \oslash + 0'',2073 \sin 2 \oslash - 0'',2041 \sin 2 \mathbb{C} \\ & + 0'',0677 \sin (\mathbb{C} - \Gamma) - 1'',2692 \sin 2 \odot \\ & + 0'',1279 \sin (\odot - \Gamma) - 0'',0213 \sin (\odot + \Gamma); \\ \Delta\varepsilon = & + 9'',2231 \cos \oslash - 0'',0897 \cos 2 \oslash + 0'',0886 \cos 2 \mathbb{C} \\ & + 0'',5509 \cos 2 \odot + 0'',0093 \cos (\odot + \Gamma); \end{aligned}$$

b) für die Epoche 1900,0:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda = & - 17'',2577 \sin \oslash + 0'',2073 \sin 2 \oslash - 0'',2041 \sin 2 \mathbb{C} \\ & + 0'',0677 \sin (\mathbb{C} - \Gamma) - 1'',2693 \sin 2 \odot \\ & + 0'',1275 \sin (\odot - \Gamma) - 0'',0213 \sin (\odot + \Gamma); \\ \Delta\varepsilon = & + 9'',2240 \cos \oslash - 0'',0896 \cos 2 \oslash + 0'',0885 \cos 2 \mathbb{C} \\ & + 0'',5506 \cos 2 \odot + 0'',0092 \cos (\odot + \Gamma). \end{aligned}$$

2. Nach Nyrén²⁾:

a) für die Epoche 1800,0:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda = & - 17'',2649 \sin \oslash + 0'',2065 \sin 2 \oslash - 0'',2046 \sin 2 \mathbb{C} \\ & + 0'',0678 \sin (\mathbb{C} - \Gamma) - 1'',2588 \sin 2 \odot \\ & + 0'',1266 \sin (\odot - \Gamma) - 0'',0211 \sin (\odot + \Gamma); \\ \Delta\varepsilon = & + 9'',2360 \cos \oslash - 0'',0893 \cos 2 \oslash + 0'',0888 \cos 2 \mathbb{C} \\ & + 0'',5463 \cos 2 \odot + 0'',0092 \cos (\odot + \Gamma); \end{aligned}$$

b) für die Epoche 1900,0:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda = & - 17'',2824 \sin \oslash + 0'',2066 \sin 2 \oslash - 0'',2047 \sin 2 \mathbb{C} \\ & + 0'',0678 \sin (\mathbb{C} - \Gamma) - 1'',2590 \sin 2 \odot \\ & + 0'',1263 \sin (\odot - \Gamma) - 0'',0211 \sin (\odot + \Gamma); \\ \Delta\varepsilon = & + 9'',2370 \cos \oslash - 0'',0893 \cos 2 \oslash + 0'',0888 \cos 2 \mathbb{C} \\ & + 0'',5460 \cos 2 \odot + 0'',0092 \cos (\odot + \Gamma). \end{aligned}$$

3. Nach Oppolzer für die Epoche 1850,0 (in zweiter Näherung, wenn man bis zu Gliedern vom Range $0'',01$ incl. geht):

¹⁾ cf. Peters Abhandlung: „Numerus constans Nutationis . . .“ Ex scriptis Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Petropoli 1842.

²⁾ Die Nyrén'schen Werthe sind als die vollkommenen zu betrachten. cf. Nyrén's Abhandlung: „Bestimmung der Nutation der Erdaxe“. Mém. de l'Acad. imp. des sciences de St. Petersburg, Tom. XIX, 2, 1871.

$$\begin{aligned}
 \Delta \lambda = & -17'',274 \sin \Omega + 0'',209 \sin 2 \Omega + 0'',068 \sin 2 \mathbb{C} \\
 & + 0'',011 \sin (\mathbb{C} + 2 \omega + 2 \Omega) + 0'',015 \sin (\mathbb{C} - 2 \odot + 2 \omega - 2 \omega') \\
 & - 0'',204 \sin (2 \mathbb{C} + 2 \omega + 2 \Omega) - 0'',026 \sin (3 \mathbb{C} + 2 \omega + 2 \Omega) \\
 & - 0'',034 \sin (2 \mathbb{C} + 2 \omega + \Omega) + 0'',012 \sin (2 \odot + 2 \omega' + \Omega) \\
 & + 0'',127 \sin \odot - 1'',263 \sin (2 \odot + 2 \omega' + 2 \Omega) \\
 & - 0'',049 \sin (3 \odot + 2 \omega' + 2 \Omega) + 0'',021 \sin (\odot + 2 \omega' + 2 \Omega); \\
 \Delta \varepsilon = & + 9'',236 \cos \Omega - 0'',090 \cos 2 \Omega + 0'',089 \cos (2 \mathbb{C} + 2 \omega + 2 \Omega) \\
 & + 0'',011 \cos (3 \mathbb{C} + 2 \omega + 2 \Omega) + 0'',018 \cos (2 \mathbb{C} + 2 \omega + \Omega) \\
 & + 0'',548 \cos (2 \odot + 2 \omega' + 2 \Omega) + 0'',021 \cos (3 \odot + 2 \omega' + 2 \Omega).
 \end{aligned}$$

Fügt man zu diesen letzteren Werthen die gleichzeitig statthabenden Präcessionswerthe hinzu, nämlich zu $\Delta \lambda$ bezüglich $50'',3703 t - 0'',00010888 t^2$ und zu $\Delta \varepsilon$ bezüglich $\varepsilon_0 + 0'',00000713 t$, so erhält man die Ausdrücke für die Gesamtpräcession und -nutation in Länge, ψ , und in Schiefe, ε .

4. Der Werth der Nutationsconstanten N ist nach:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Peters} \dots\dots\dots & 9'',216 \pm 0'',020 \\
 \text{Nyrén} \dots\dots\dots & 9'',244 \pm 0'',012 \\
 \text{Harkness (Mittel)} \dots\dots\dots & 9'',233 \pm 0'',011.
 \end{array}$$

B. Einfluss der Nutation auf die Coordinaten der Himmelskörper und zwar auf Rectascension und Declination.

$$\begin{aligned}
 \alpha' - \alpha &= (\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \sin \alpha \operatorname{tg} \delta) \cdot \Delta \lambda - \cos \alpha \operatorname{tg} \delta \cdot \Delta \varepsilon \\
 \delta' - \delta &= \cos \alpha \sin \varepsilon \cdot \Delta \lambda + \sin \alpha \Delta \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Bei Einführung der numerischen Werthe von $\Delta \lambda$ und $\Delta \varepsilon$ wird bis auf Glieder erster Ordnung:

1. Nach Peters:

a) für die Epoche 1800,0:

$$\begin{aligned}
 d\alpha = \alpha' - \alpha = & -15'',8148 \sin \Omega - [6'',8650 \sin \Omega \sin \alpha \\
 & + 9'',2231 \cos \Omega \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\
 & + 0'',1902 \sin 2 \Omega + [0'',0825 \sin 2 \Omega \sin \alpha \\
 & \quad + 0'',0897 \cos 2 \Omega \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\
 & - 1'',1642 \sin 2 \odot - [0'',5054 \sin 2 \odot \sin \alpha \\
 & \quad + 0'',5509 \cos 2 \odot \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\
 & - 0'',1872 \sin 2 \mathbb{C} - [0'',0813 \sin 2 \mathbb{C} \sin \alpha \\
 & \quad + 0'',0886 \cos 2 \mathbb{C} \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\
 & \quad + 0'',0195 (\odot + \Gamma) \\
 & - [0'',0085 \sin (\odot + \Gamma) \sin \alpha + 0'',0093 \cos (\odot + \Gamma) \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\
 & + [0'',0621 + 0'',0270 \sin \alpha \operatorname{tg} \delta] \sin (\mathbb{C} - \Gamma') \\
 & + [0'',1173 + 0'',0509 \sin \alpha \operatorname{tg} \delta] \sin (\odot - \Gamma); \\
 d\delta = \delta' - \delta = & - 6'',8650 \sin \Omega \cos \alpha + 9'',2231 \cos \Omega \sin \alpha \\
 & + 0'',0825 \sin 2 \Omega \cos \alpha - 0'',0897 \cos 2 \Omega \sin \alpha \\
 & - 0'',5054 \sin 2 \odot \cos \alpha + 0'',5509 \cos 2 \odot \sin \alpha \\
 & - 0'',0813 \sin 2 \mathbb{C} \cos \alpha + 0'',0886 \cos 2 \mathbb{C} \sin \alpha \\
 & - 0'',0085 \sin (\odot + \Gamma) \cos \alpha + 0'',0093 \cos (\odot + \Gamma) \sin \alpha \\
 & + 0'',0270 \cos \alpha \sin (\mathbb{C} - \Gamma') \\
 & + 0'',0509 \cos \alpha \sin (\odot - \Gamma);
 \end{aligned}$$

b) für die Epoche 1900,0:

$$\begin{aligned}
 \alpha' - \alpha = & -15'',8321 \sin \delta - [6'',8683 \sin \delta \sin \alpha + 9'',2240 \cos \delta \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\
 & + 0'',1903 \sin 2 \delta + [0'',0822 \sin 2 \delta \sin \alpha + 0'',0895 \cos 2 \delta \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\
 & - 1'',1644 \sin 2 \odot - [0'',5052 \sin 2 \odot \sin \alpha + 0'',5506 \cos 2 \odot \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\
 & - 0'',1872 \sin 2 \zeta - [0'',0812 \sin 2 \zeta \sin \alpha + 0'',0885 \cos 2 \zeta \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\
 & - 0'',0195 \sin (\odot + \Gamma) \\
 & - [0'',0085 \sin (\odot + \Gamma) \sin \alpha + 0'',0092 \cos (\odot + \Gamma) \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\
 & + [0'',0621 + 0'',0270 \sin \alpha \operatorname{tg} \delta] \sin (\zeta - \Gamma') \\
 & + [0'',1170 + 0'',0507 \sin \alpha \operatorname{tg} \delta] \sin (\odot - \Gamma) \\
 \delta' - \delta = & - 6'',8683 \sin \delta \cos \alpha + 9'',2240 \cos \delta \sin \alpha \\
 & + 0'',0822 \sin 2 \delta \cos \alpha - 0'',0895 \cos 2 \delta \sin \alpha \\
 & - 0'',5052 \sin 2 \odot \cos \alpha + 0'',5506 \cos 2 \odot \sin \alpha \\
 & - 0'',0812 \sin 2 \zeta \cos \alpha + 0'',0885 \cos 2 \zeta \sin \alpha \\
 & - 0'',0085 \sin (\odot + \Gamma) \cos \alpha + 0'',0092 \cos (\odot + \Gamma) \sin \alpha \\
 & + 0'',0270 \sin (\zeta - \Gamma') \cos \alpha \\
 & + 0'',0507 \sin (\odot - \Gamma) \cos \alpha.
 \end{aligned}$$

2. Nach Nyérén:

a) für die Epoche 1800,0:

$$\begin{aligned}
 \alpha' - \alpha = & -15'',8371 \sin \delta - [6'',8747 \sin \delta \sin \alpha + 9'',2360 \cos \delta \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\
 & + 0'',1894 \sin 2 \delta + [0'',0822 \sin 2 \delta \sin \alpha + 0'',0893 \cos 2 \delta \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\
 & - 1'',1548 \sin 2 \odot - [0'',5012 \sin 2 \odot \sin \alpha + 0'',5463 \cos 2 \odot \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\
 & - 0'',1877 \sin 2 \zeta - [0'',0815 \sin 2 \zeta \sin \alpha + 0'',0888 \cos 2 \zeta \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\
 & - 0'',0194 \sin (\odot + \Gamma) \\
 & - [0'',0084 \sin (\odot + \Gamma) \sin \alpha + 0'',0092 \cos (\odot + \Gamma) \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\
 & + [0'',0622 + 0'',0270 \sin \alpha \operatorname{tg} \delta] \sin (\zeta - \Gamma') \\
 & + [0'',1161 + 0'',0504 \sin \alpha \operatorname{tg} \delta] \sin (\odot - \Gamma); \\
 \delta' - \delta = & - 6'',8747 \sin \delta \cos \alpha + 9'',2360 \cos \delta \sin \alpha \\
 & + 0'',0822 \sin 2 \delta \cos \alpha - 0'',0893 \cos 2 \delta \sin \alpha \\
 & - 0'',5012 \sin 2 \odot \cos \alpha + 0'',5463 \cos 2 \odot \sin \alpha \\
 & - 0'',0815 \sin 2 \zeta \cos \alpha + 0'',0888 \cos 2 \zeta \sin \alpha \\
 & - 0'',0084 \sin (\odot + \Gamma) \cos \alpha + 0'',0092 \cos (\odot + \Gamma) \sin \alpha \\
 & + 0'',0270 \sin (\zeta - \Gamma') \cos \alpha \\
 & + 0'',0504 \sin (\odot - \Gamma) \cos \alpha;
 \end{aligned}$$

b) für die Epoche 1900,0:

$$\begin{aligned}
 \alpha' - \alpha = & -15'',8548 \sin \delta - [6'',8781 \sin \delta \sin \alpha + 9'',2370 \cos \delta \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\
 & + 0'',1895 \sin 2 \delta + [0'',0822 \sin 2 \delta \sin \alpha + 0'',0893 \cos 2 \delta \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\
 & - 1'',1550 \sin 2 \odot - [0'',5011 \sin 2 \odot \sin \alpha + 0'',5460 \cos 2 \odot \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\
 & - 0'',1878 \sin 2 \zeta - [0'',0815 \sin 2 \zeta \sin \alpha + 0'',0888 \cos 2 \zeta \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\
 & - 0'',0194 \sin (\odot + \Gamma) \\
 & - [0'',0084 \sin (\odot + \Gamma) \sin \alpha + 0'',0092 \cos (\odot + \Gamma) \cos \alpha] \operatorname{tg} \delta \\
 & + [0'',0622 + 0'',0270 \sin \alpha \operatorname{tg} \delta] \sin (\zeta - \Gamma') \\
 & + [0'',1158 + 0'',0503 \sin \alpha \operatorname{tg} \delta] \sin (\odot - \Gamma); \\
 \delta' - \delta = & - 6'',8781 \sin \delta \cos \alpha + 9'',2370 \cos \delta \sin \alpha \\
 & + 0'',0822 \sin 2 \delta \cos \alpha - 0'',0893 \cos 2 \delta \sin \alpha \\
 & - 0'',5011 \sin 2 \odot \cos \alpha + 0'',5460 \cos 2 \odot \sin \alpha \\
 & - 0'',0815 \sin 2 \zeta \cos \alpha + 0'',0888 \cos 2 \zeta \sin \alpha \\
 & - 0'',0084 \sin (\odot + \Gamma) \cos \alpha + 0'',0092 \cos (\odot + \Gamma) \sin \alpha \\
 & + 0'',0270 \sin (\zeta - \Gamma') \cos \alpha \\
 & + 0'',0503 \sin (\odot - \Gamma) \cos \alpha.
 \end{aligned}$$

III. Gesamtformeln für Präcession, Nutation und Aberration.

$$\alpha' = \alpha + a A + b B + c C + d D + \tau \mu + \frac{1}{15} E^1)$$

$$\delta' = \delta + a' A + b' B + c' C + d' D + \tau \mu'$$

wobei also α' und δ' die scheinbare Rectascension und Declination, α und δ hingegen die mittlere zu Jahresanfang bezeichnen; oder:

$$\alpha' - \alpha = f + g \sin (G + \alpha) \operatorname{tg} \delta + h \sin (H + \alpha) \sec \delta + \tau \mu$$

$$\delta' - \delta = g \cos (G + \alpha) + h \cos (H + \alpha) \sin \delta + i \cos \delta + \tau \mu',$$

wobei die Constanten $a, b, c, d; a', b', c', d'; A, B, C, D; f, g, h; G, H$ (deren Bedeutung im Vorhergehenden ausführlich dargethan) einfach dem Berliner Jahrbuche, oder einem anderen astronomischen Jahrbuche zu entnehmen sind.

Durch die Pariser Fundamentalsternconferenz (1896) adoptirte Werthe.

1. Präcessionsconstante für die Epoche 1850,0 $50'',2453 + 0'',0002225 t$
2. Nutationsconstante $9'',210$
3. Mittlere Schiefe der Ekliptik für die Epoche 1901,0 $23^\circ 27' 7'',79$
mit der jährlichen Veränderung im Betrage von $0'',468$
4. Nutation in Länge ΔL und in Schiefe $\Delta \omega$ ²⁾:

$$\begin{aligned} \Delta L = & - 17'',236 \sin \Omega + 0'',209 \sin 2 \Omega - 1'',257 \sin 2 L + 0'',110 \sin (L + 75^\circ,3) \\ & - 0'',049 \sin (3 L + 78^\circ,7). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \omega = & + 9'',210 \cos \Omega - 0'',090 \cos 2 \Omega + 0'',546 \cos 2 L - 0'',009 \cos (L - 78^\circ,7) \\ & + 0'',021 \cos (3 L + 78^\circ,7). \end{aligned}$$

Kurzperiodische Glieder der Nutation in Länge und Schiefe:

$$\begin{aligned} d L = & - 0'',204 \sin 2 \zeta + 0'',067 \sin g_1 - 0'',034 \sin (2 \zeta - \Omega) \\ & + 0'',012 \sin (2 \zeta - g_1) - 0'',026 \sin (2 \zeta + g_1) + 0'',006 \sin 2 (\zeta - L) \\ & + 0'',015 \sin [2 (\zeta - L) - g_1]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d \omega = & + 0'',088 \cos 2 \zeta + 0'',018 \cos (2 \zeta - \Omega) - 0'',005 \cos (2 \zeta - g_1) \\ & + 0'',011 \cos (2 \zeta + g_1). \end{aligned}$$

5. Bessel'sche Constanten:

$$A = - 20'',47 \cos \omega \cos \odot \qquad B = - 20'',47 \sin \odot$$

$$\begin{aligned} C = t = & - 0'',34218 \sin \Omega + 0'',00415 \sin 2 \Omega \\ & - 0'',02496 \sin 2 L - 0'',00097 \sin (3 L + 78^\circ,7) \\ & + 0'',00218 \sin (L + 75^\circ,3) + 0'',00024 \sin (2 L - \Omega) \\ & - 0'',00405 \sin 2 \zeta + 0'',00024 \sin (2 \zeta - g_1) \\ & - 0'',00052 \sin (2 \zeta + g_1) + 0'',00133 \sin g_1 \\ & + 0'',00012 \sin 2 (\zeta - L) + 0'',00030 \sin [2 (\zeta - L) - g_1] \\ & - 0'',00068 \sin (2 \zeta - \Omega). \\ D = & - 9'',210 \cos \Omega + 0'',090 \cos 2 \Omega - 0'',546 \cos 2 L \\ & - 0'',021 \cos (3 L + 78^\circ,7) + 0'',009 \cos (L - 78^\circ,7) + 0'',007 \cos (2 L - \Omega) \\ & - 0'',088 \cos 2 \zeta + 0'',005 \cos (2 \zeta - g_1) - 0'',011 \cos (2 \zeta + g_1) \\ & - 0'',018 \cos (2 \zeta - \Omega). \end{aligned}$$

$$E = - 0'',043 \sin \Omega + 0'',001 \sin 2 \Omega - 0'',003 \sin 2 L$$

$$a = \frac{1}{15} \cos \alpha \sec \delta \qquad a' = \operatorname{tg} \omega \cos \delta - \sin \alpha \sin \delta$$

$$b = \frac{1}{15} \sin \alpha \sec \delta \qquad b' = \cos \alpha \sin \delta$$

$$c = 3'',07235 + 1'',33645 \sin \alpha \operatorname{tg} \delta \qquad c' = 20'',0467 \cos \alpha$$

$$d = \frac{1}{15} \cos \alpha \operatorname{tg} \delta \qquad d' = - \sin \alpha.$$

¹⁾ Siehe unter Pariser Fundamentalsternconferenz 5.

²⁾ In 4. und 5. bedeutet: \odot die wahre Länge der Sonne, L die mittlere Länge der Sonne, ζ die mittlere Länge des Mondes, Ω die Länge des aufsteigenden Mondknotens, g_1 die mittlere Anomalie des Mondes, ω die Schiefe der Ekliptik zur Zeit t .

Fünfzehnte Vorlesung.

Vollständiges Beispiel zum Vergleich einer Beobachtung mit einem Elementensysteme.

Um eine Beobachtung mit einem Elementensysteme zu vergleichen, kann man für die reducirte Beobachtungszeit (Beobachtungszeit minus Aberrationszeit) aus einem astronomischen Jahrbuche die Sonnenkoordinaten interpoliren, die heliocentrischen Coordinaten des Objectes berechnen u. s. w., wie im Vorhergehenden auseinandergesetzt worden ist. Sobald man aber eine gewisse Zahl von Beobachtungen mit einem Elementensysteme zu vergleichen hat, empfiehlt es sich immer, sofort eine Ephemeride zu berechnen. Die so entstehende Vermehrung der Arbeit wird durch Erhöhung der Sicherheit und Erleichterung des Vergleiches von Beobachtungen mit dem Elementensysteme reichlich wieder eingebracht. Der erste Schritt zur Berechnung einer Ephemeride ist die Ermittlung der Gauss'schen Constanten. Für den Kometen 1890 III, bezogen auf die mittlere Ekliptik 1890,0 (für den Anfang des tropischen Jahres)¹⁾, lag das folgende parabolische Elementensystem vor:

$$\begin{aligned} i &= 63^{\circ} 18' 23'',80 \\ \Omega &= 14^{\circ} 20' 31'',60 \\ \omega &= 85^{\circ} 42' 50'',90 \\ \lg q &= 9,8834086 \\ T &= \text{Juli } 8,60136 \end{aligned}$$

(Periheldurchgangszeit bezogen auf den Normalmeridian von Berlin).

Die mittlere Schiefe der Ekliptik war für 1890,0 nach dem Berliner Jahrbuche:

$$\varepsilon = 23^{\circ} 27' 12'',79.$$

Wir stellen zunächst die zur Anwendung kommenden, im Vorhergehenden abgeleiteten Formeln zusammen:

$$\begin{aligned} a \sin A &= \cos \Omega \\ a \cos A &= - \sin \Omega \cos i \\ n \sin N &= \sin i \\ n \cos N &= \cos \Omega \cos i \\ b \sin B &= \sin \Omega \cos \varepsilon \\ b \cos B &= n \cos(N + \varepsilon) \\ c \sin C &= \sin \Omega \sin \varepsilon \\ c \cos C &= n \sin(N + \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\text{Controle: } \lg i = \frac{b c \sin(C - B)}{a \cos A},$$

woraus von Neuem i . Ferner:

¹⁾ Das tropische Jahr beginnt in dem Augenblicke, in welchem die mittlere Länge der Sonne minus $20'',47$ (dem constanten Theile der Aberration) gleich 280° ist, bezogen auf das in demselben Augenblicke stattfindende mittlere Aequinoctium. Mit Hülfe der in den Jahrbüchern gegebenen Bessel'schen Hilfsgrößen geht man also vom wahren Aequinoctium der Beobachtungszeit auf das mittlere zu Anfang des tropischen Jahres über.

$$A' = A + \omega$$

$$B' = B + \omega$$

$$C' = C + \omega$$

$$x' = r a \sin (A' + v)$$

$$y' = r b \sin (B' + v)$$

$$z' = r c \sin (C' + v).$$

Die Rechnung gestaltet sich jetzt wie folgt:

$\cos \varepsilon$	9,962 550 7	$\sin \oslash \cos \varepsilon$	9,356 496 3
$\sin \oslash$	9,393 945 6	$\sin B$	9,992 124 6
$\sin \varepsilon$	9,599 889 1	$\cos B$	8,640 203 1
$\cos i$	9,652 455 1	$n \cos (N + \varepsilon)$	8,640 203 1
$\cos \oslash$	9,986 249 3	B	79° 7' 17'',62
$\sin ^1) A$	9,997 154 2	$lg b$	9,364 371 7
\cos	—	$C - B$	— 73° 27' 1'',95
$— \sin \oslash \cos i$	9,046 400 7 _n	$\sin (C - B)$	9,981 625 7 _n
A	96° 33' 7'',27	$b c$	9,363 377 2
$lg a$	9,989 095 1	$\sin \oslash \sin \varepsilon$	8,993 834 7
$\cos A$	9,057 305 6 _n	$\sin C$	9,997 869 2
$\sin i$	9,951 057 2	$\cos C$	8,996 874 7
$\sin N$	9,953 762 8	$n \sin (N + \varepsilon)$	9,996 874 7
\cos	—	C	5° 40' 15'',67
$\cos \oslash \cos i$	9,638 704 4	$lg c$	9,999 005 5
N	64° 1' 40'',00	$b c \sin (C - B)$	9,345 002 9 _n
ε	23° 27' 12'',79	$a \cos A$	9,046 400 7 _n
$N + \varepsilon$	87° 28' 52'',79	$tg i$	0,298 602 2
$\cos (N + \varepsilon)$	8,642 908 7	i	63° 18' 23'',82
$''$	9,997 294 4	A'	182° 15' 58'',17
$\sin (N + \varepsilon)$	9,999 580 3	B'	164° 50' 8'',52
		C'	91° 23' 6'',57

Man erhält somit für die heliocentrischen Coordinaten des Kometen 1890 III, bezogen auf den mittleren Aequator 1890,0:

¹⁾ Wenn aus zwei Gleichungen von der Form:

$$a \sin A = \cos \oslash$$

$$a \cos A = - \sin \oslash \cos i$$

a und A zu bestimmen sind, so bildet man zunächst durch Subtraction $lg tg A$ und bestimmt hieraus A . Man ermittelt hierauf a , indem man $lg \sin A$ resp. $lg \cos A$ von dem grösseren der beiden Werthe $lg (a \sin A)$ oder $lg (a \cos A)$ abzieht, damit die unvermeidliche Unsicherheit von A die Bestimmung von a so wenig wie möglich beeinflusst. Diese Operation schreiben wir symbolisch:

$$a \sin A$$

$$\sin A$$

$$\cos A$$

$$a \cos A$$

$$x = r [9,989\,095\,1] \sin (182^{\circ} 15' 58'',17 + v)$$

$$y = r [9,364\,371\,7] \sin (164^{\circ} 50' 8'',52 + v)$$

$$z = r [9,999\,005\,5] \sin (91^{\circ} 23' 6'',57 + v)$$

Mit Hülfe von Additions- und Subtractionslogarithmen findet man:

$$a^2 + b^2 + c^2 = [0,301\,030\,0] = 2,000\,000\,0.$$

Die Controlgleichung:

$$a^2 \cos 2A + b^2 \cos 2B + c^2 \cos 2C = 0$$

ergiebt, wenn man den positiven und den negativen Theil gleichsetzt:

$$[9,989\,445\,4] = [9,989\,445\,6]$$

also eine genügende Uebereinstimmung.

Hierdurch ist die Rechnung in hinreichender Weise controlirt. Man könnte auch noch die Controlgleichung:

$$a^2 \sin 2A + b^2 \sin 2B + c^2 \sin 2C = 0$$

heranziehen.

Andererseits kann man als Controle zunächst das gegebene Elementensystem auf den Aequator umformen. Man gewinnt so die für viele Zwecke nützlichen äquatorealen Elemente und kann aus ihnen in einfacher Weise die Gauss'schen Constanten herleiten. Durch alle diese Controlen wird zwar die Richtigkeit der Gauss'schen Constanten geprüft, aber nicht das zu Grunde liegende Elementensystem.

Um dieses letztere zu prüfen, bleibt weiter nichts übrig, als es mit Beobachtungen zu vergleichen. Hierzu wählt man am besten Beobachtungen, welche nicht als Grundlage zur Berechnung der Bahn gedient haben, denn das Elementensystem enthält natürlich die Fehler der zu seiner Bestimmung dienenden Beobachtungen. Ein Elementensystem, welches zu einer definitiven Bahnbestimmung verwendet werden soll, muss die Oerter des Objectes auf 5'', allerhöchstens 10'' genau darstellen. Ist das nicht der Fall, so ist zu befürchten, dass die an den Bahnelementen anzubringenden Verbesserungen nicht mehr als unendlich klein von der ersten Ordnung betrachtet werden können, die später für die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate unentbehrliche Voraussetzung.

Handelt es sich nur darum, eine Aufsuchungsephemeride zu berechnen (d. h. eine Ephemeride, welche die Orte nur auf circa 1' geben soll, um dem Beobachter die Auffindung des Objectes zu erleichtern), so kann man sich eventuell mit weniger guten Darstellungen begnügen. Aber auch hierbei sollten die Beobachtungen immer bis auf allerhöchstens 20'' dargestellt werden. Ist die Abweichung der berechneten Elemente von den wirklichen zu gross, so kann die Darstellung der Oerter im Laufe der Zeit von der Wirklichkeit derartig abweichen, dass der Beobachter das Object schliesslich nicht mehr auffinden kann.

Wir gehen nun dazu über, mit Hülfe der Gauss'schen Constanten eine Ephemeride zu berechnen. Wir wollen die scheinbare Stellung des Kometen von zwei zu zwei Tagen für Berliner Mitternacht erhalten, von Juli 14,5 beginnend, und ordnen die Rechnung wie folgt an:

1890 t $t - T$	Juli 14,5 5 ^d ,89864	Juli 16,5 7 ^d ,89864	Juli 18,5 9 ^d ,89864
M $v^1)$ $\frac{1}{2} v$ $[\cos \frac{1}{2} v^2]$ $[r]$	[8,049 459 + 12° 12' 20'',20 + 6° 6' 10'',10 9,995 063 6 9,888 345 0	10,778 718 + 16° 14' 52'',07 + 8° 7' 26'',04 9,991 239 6 9,892 169 0	13,507 977 + 20° 12' 36'',95 + 10° 6' 18'',48 9,986 420 4 9,896 988 2
$A' + v$ $B' + v$ $C' + v$	194° 28' 18'',37 177° 2' 28'',72 103° 35' 26'',77	198° 30' 50'',24 181° 5' 0'',59 107° 37' 58'',64	202° 28' 35'',12 185° 2' 45'',47 111° 35' 43'',52
$[\sin (A' + v)]$ $[r \ a]$ $[x]$	9,397 771 4 _n 9,877 440 1 9,275 211 5 _n	9,501 792 5 _n 9,881 264 1 9,383 056 6 _n	9,582 408 0 _n 9,886 083 3 9,468 491 3 _n
x X	— 0,188 456 7 — 0,386 957 9	— 0,241 577 6 — 0,417 999 8	— 0,294 097 5 — 0,448 567 8
$[\sin (B' + v)]$ $[r \ b]$ $[y]$	8,712 783 6 9,252 716 7 7,965 500 3	8,276 679 3 _n 9,256 540 7 7,533 220 0 _n	8,944 259 9 _n 9,261 359 9 8,205 619 8 _n
y Y	+ 0,009 236 3 + 0,862 252 8	— 0,003 413 7 + 0,849 849 5	— 0,016 055 4 + 0,836 482 6
$[\sin (C' + v)]$ $[r \ c]$ $[z]$	9,987 665 7 9,887 350 5 9,875 016 2	9,979 100 5 9,891 174 5 9,870 275 0	9,968 392 3 9,895 993 7 9,864 386 0
z Z	+ 0,749 922 2 + 0,374 086 9	+ 0,741 779 8 + 0,368 707 0	+ 0,731 789 2 + 0,362 908 7
$\xi = x + X$ $\eta = y + Y$ $\zeta = z + Z$	— 0,575 414 6 + 0,871 489 1 + 1,124 009 1	— 0,659 577 4 + 0,846 435 8 + 1,110 486 8	— 0,742 665 3 + 0,820 427 2 + 1,094 697 9
$[\iota] = [\varrho \sin \alpha \cos \delta]$ $\begin{bmatrix} \sin \\ \cos \end{bmatrix} \alpha$ $[\xi] = [\varrho \cos \alpha \cos \delta]$	9,940 261 9 9,921 430 1 9,759 980 9 _n	9,927 594 0 9,896 962 8 9,819 265 8 _n	9,914 040 0 9,870 033 6 9,870 793 1 _n
$[\zeta] = [\varrho \sin \delta]$ $\begin{bmatrix} \sin \\ \cos \end{bmatrix} \delta$ $[\varrho \cos \delta]$	0,050 769 8 9,864 867 4 0,018 831 8	0,045 513 4 9,856 798 6 0,030 631 2	0,039 294 3 9,851 828 2 0,044 006 4
G Mittleres α in Bogenmaass $\Delta \alpha = f + g \sin (G + \alpha) \operatorname{tg} \delta$	347° 27' 123° 26' 7'',55 + 14'',27	347° 17' 127° 55' 37'',86 + 14'',39	347° 6' 132° 9' 7'',04 + 14'',48
Wahres α in Bogenmaass = Σ Wahres α in Zeit	123° 26' 21'',82 8 ^h 13 ^m 45 ^s ,455	127° 55' 52'',25 8 ^h 31 ^m 43 ^s ,483	132° 9' 21'',52 8 ^h 48 ^m 37 ^s ,435
Mittleres δ $\Delta \delta = g \cos (G + \alpha)$	+ 47° 6' 17'',54 — 1'',57	+ 45° 58' 53'',40 — 1'',94	+ 44° 41' 21'',04 — 2'',29
Wahres $\delta = \Sigma$	+ 47° 6' 15'',97	+ 45° 58' 51'',46	+ 44° 41' 18'',75

¹⁾ Mittelst Tafel VI

1890	Juli 14,5	Juli 16,5	Juli 18,5
$[\varrho]$	0,185 902 4	0,188 714 8	0,192 178 2
Aberrationszeit in Tagen	0 ^d ,008 854 9	0 ^d ,008 912 4	0 ^d ,008 983 8
$G + \alpha$	110° 53'	115° 13'	119° 15'
$[\cos (G + \alpha)]$	9,5520 _n	9,6295 _n	9,6890 _n
$[g]$	0,6437	0,6572	0,6701
$[\sin (G + \alpha)]$	9,9705	9,9565	9,9408
$[tg \delta]$	0,0319	0,0149	9,9953
$[g \sin (G + \alpha) tg \delta]$	0,6461	0,6286	0,6062
$g \sin (G + \alpha) tg \delta$	+ 4'',43	+ 4'',25	+ 4'',04
f	+ 9'',84	+ 10'',14	+ 10'',44
$[g \cos (G + \alpha)]$	0,1957 _n	0,2867 _n	0,3591 _n

Bei der Berechnung von M ist es zu empfehlen, nur den ersten und letzten Werth logarithmisch zu berechnen, die zwischenliegenden aber nach einander durch Addition einer constanten Grösse abzuleiten. Wenn man auf diese Weise den letzten Werth wiederfindet, so sind alle zwischenliegenden controlirt. Wir bezeichnen die Logarithmen einer Grösse durch eckige Klammern. Die Sonnencoordinaten X , Y , Z , sowie die Grössen f , g und G entnimmt man ohne Interpolation dem Berliner Jahrbuche, wo dieselben für mittlere Berliner Mitternacht jedes Tages gegeben sind. Die schliesslich gefundenen wahren Coordinaten enthalten daher Präcession und Nutation, nicht aber die Aberration.

Durch Fortsetzung obiger Ephemeride wurden folgende Werthe für α und δ gefunden:

Datum	Wahres α	Wahres δ	Aberrationszeit	$lg \varrho$
Juli 14,5 . . .	8 ^h 13 ^m 45 ^s ,455	+ 47° 6' 15'',97	0 ^d ,008 854 9	0,18590
16,5 . . .	8 31 43 ,483	45 58 51 ,46	0 ,008 912 4	0,18871
18,5 . . .	8 48 37 ,435	44 41 18 ,75	0 ,008 983 8	0,19218
20,5 . . .	9 4 24 ,593	43 15 20 ,84	0 ,009 068 4	0,19625
22,5 . . .	9 19 5 ,019	41 42 39 ,02	0 ,009 165 6	0,20088
24,5 . . .	9 32 40 ,796	40 4 48 ,18	0 ,009 274 7	0,20602
26,5 . . .	9 45 15 ,385	38 23 14 ,41	0 ,009 394 9	0,21161
28,5 . . .	9 56 53 ,056	36 39 13 ,38	0 ,009 525 4	0,21760
30,5 . . .	10 7 38 ,459	34 53 49 ,89	0 ,009 665 4	0,22394
August 1,5 . . .	10 17 36 ,325	33 7 58 ,54	0 ,009 814 2	0,23057
3,5 . . .	10 26 51 ,247	31 22 24 ,15	0 ,009 970 8	0,23745
5,5 . . .	10 35 27 ,539	29 37 42 ,88	0 ,010 134 6	0,24453

Die Differenzreihen dieser Grössen verlaufen zu regelmässig, als dass Rechenfehler in der Ephemeride zu vermuthen wären. Die Aberrationszeit wäre auf fünf Decimalen genau genügend. Der Komet bewegt sich nun in Rectascension täglich um circa 7^m, in Declination um 1° weiter, d. h. in 0,00001 Tagen um 0^s,0042 in Rectascension und 0'',04, d. s. zu vernachlässigende Grössen. Um ganz sicher zu gehen, wollen wir indessen noch die sechste Stelle in den Aberrationszeiten bestehen lassen. In α und δ machen sich noch siebente Differenzreihen fühlbar. Um diesem Uebelstande abzuhelpen, interpoliren wir zweimal in die Mitte und erhalten so, nachdem wir schliesslich alle Grössen auf eine geeignete Stellenzahl abgekürzt haben:

E p o c h e	Wahres α	1. Differenz	2. Differenz	3. Differenz	Wahres δ
1890 Juli 18,5	8h 48 ^m 37 ^s ,44	+ 4 ^m 3 ^s ,09			+ 44° 41' 18'',8
19,0	8 52 40 ,53	+ 3 58 ,89	— 4 ^s ,20	— 1	44 20 32 ,6
19,5	8 56 39 ,42	+ 3 54 ,68	— 4 ,21	+ 2	43 59 16 ,5
20,0	9 0 34 ,10	+ 3 50 ,49	— 4 ,19	+ 1	43 37 32 ,1
20,5	9 4 24 ,59	+ 3 46 ,31	— 4 ,18	+ 3	43 15 20 ,8
21,0	9 8 10 ,90	+ 3 42 ,16	— 4 ,15	+ 1	42 52 44 ,4
21,5	9 11 53 ,06	+ 3 38 ,02	— 4 ,14	+ 6	42 29 44 ,3
22,0	9 15 31 ,08	+ 3 33 ,94	— 4 ,08	+ 3	42 6 22 ,0
22,5	9 19 5 ,02	+ 3 29 ,89	— 4 ,05	+ 5	41 42 39 ,0
23,0	9 22 34 ,91	+ 3 25 ,89	— 4 ,00	+ 5	41 18 36 ,7
23,5	9 26 0 ,80	+ 3 21 ,94	— 3 ,95	+ 7	40 54 16 ,6
24,0	9 29 22 ,74	+ 3 18 ,06	— 3 ,88	+ 4	40 29 40 ,0
24,5	9 32 40 ,80	+ 3 14 ,22	— 3 ,84	+ 9	40 4 48 ,2
25,0	9 35 55 ,02	+ 3 10 ,47	— 3 ,75	+ 4	39 39 42 ,5
25,5	9 39 5 ,49	+ 3 6 ,76	— 3 ,71	+ 9	39 14 24 ,2
26,0	9 42 12 ,25	+ 3 3 ,14	— 3 ,62	+ 5	38 48 54 ,4
26,5	9 45 15 ,39	+ 2 59 ,57	— 3 ,57	+ 9	38 23 14 ,4
27,0	9 48 14 ,96	+ 2 56 ,09	— 3 ,48		37 57 25 ,2
27,5	9 51 11 ,05				37 31 28 ,0

Die Oerter für Juli 14,5 und 16,5 in der ursprünglichen Ephemeride haben uns nur dazu gedient, die zu Anfang der Ephemeride für die Interpolation in die Mitte nöthigen Differenzreihen zu liefern. Der Sicherheit halber ist es immer zu empfehlen, in der, der Interpolation in die Mitte zu Grunde zu legenden Ephemeride am Anfange und Ende zwei oder drei Epochen mehr zu berechnen, als das strenge genommen nöthig wäre.

Wir wollen jetzt eine Beobachtung von Herrn Coggia in Marseille, dem Entdecker des Kometen, mit obiger Ephemeride vergleichen. Dazu wählen wir die Beobachtung vom 22. Juli. Dieselbe ist in den Astronomischen Nachrichten Nr. 2982, S. 91 bis 92 in folgender Form mitgetheilt:

Juli	TM Marseille	ΔAR	ΔDP	Cp	AR_{app}	$lg p \Delta$	Dp_{app}	$lg p \Delta$	Red. a. l. $app^1)$	*
22	9h 26 ^m 9 ^s	— 2 ^m 16 ^s ,93	— 6' 37'',3	6,5	9h 18 ^m 25 ^s ,24	9,692	48° 12' 42'',82	0,838 _n	— 0 ^s ,68 — 5'',1	5

d. h. der Beobachter hat den Kometen am 22. Juli um 9h 26^m 9^s mittlerer Marseiller Ortszeit beobachtet. Er verglich ihn mit dem Stern (*) 5 und fand im Sinne Komet minus Stern für die Rectascensionsdifferenz:

$$\Delta AR : -2^m 16^s,93 \text{ (durch sechs Vergleichen vergl. } Cp)$$

und als Differenz der Poldistanzen:

$$\Delta DP : -6' 37'',3 \text{ (durch fünf Vergleichen siehe } Cp).$$

(Der Beobachter giebt also, wie das zum Theil geschieht, Poldistanzen an Stelle von Declinationen.)

¹⁾ d. h. Reductio ad locum apparentem.

1. Differenz	2. Differenz	3. Differenz	Aberrationszeit	1. Differenz	$lg \varrho$	1. Differenz
— 20 46,2			0d,008984		0,1922	
— 21 16,1	— 29,9		9004	+ 20	0,1931	+ 9
— 21 44,4	— 28,3	+ 1,6	9024	+ 20	0,1941	+ 10
— 22 11,3	— 26,9	+ 1,4	9046	+ 22	0,1952	+ 11
— 22 36,4	— 25,1	+ 1,8	9068	+ 22	0,1963	+ 11
— 23 0,1	— 23,7	+ 1,4	9092	+ 24	0,1974	+ 11
— 23 22,3	— 22,2	+ 1,5	9116	+ 24	0,1985	+ 11
— 23 43,0	— 20,7	+ 1,5	9140	+ 24	0,1997	+ 12
— 24 2,3	— 19,3	+ 1,4	9166	+ 26	0,2009	+ 12
— 24 20,1	— 17,8	+ 1,5	9192	+ 26	0,2021	+ 12
— 24 36,6	— 16,5	+ 1,3	9219	+ 27	0,2034	+ 13
— 24 51,8	— 15,2	+ 1,3	9246	+ 27	0,2047	+ 13
— 25 5,7	— 13,9	+ 1,3	9275	+ 29	0,2060	+ 13
— 25 18,3	— 12,6	+ 1,3	9304	+ 29	0,2074	+ 14
— 25 29,8	— 11,5	+ 1,1	9333	+ 29	0,2088	+ 14
— 25 40,0	— 10,2	+ 1,3	9364	+ 31	0,2102	+ 14
— 25 49,2	— 9,2	+ 1,0	9395	+ 31	0,2116	+ 14
— 25 57,2	— 8,0	+ 1,2	9427	+ 32	0,2131	+ 15
			9459	+ 32	0,2146	+ 15

Nun giebt er im Folgenden die Stellungen seiner Vergleichssterne; wir entnehmen daraus das, was sich auf den Stern (5) bezieht:

*	Grösse	AR 1890,0	DP 1890,0	Autorität
5	7,8	9h 20m 42s,85	48° 19' 25'',2	W_z 9h,389

Der Beobachter hat also im zweiten Weiss'schen Kataloge seinen Stern in der neunten Stunde (der Katalog ist nach den Stunden in Rectascension geordnet) unter Nummer 389 gefunden, mit der Angabe, dass er 7,8ter Grösse ist, hat hierauf die angegebene Stellung durch Anbringung der Präcession auf das mittlere Aequinoctium 1890,0 reducirt, und so als Rectascension 9h 20m 42s,85, als Poldistanz 48° 19' 25'',2 gefunden. Er hat dann mit Hülfe eines Jahrbuches die Reduction auf den scheinbaren Ort für diesen Stern berechnet, und so:

Red. a. l. a : — 0s,68 in Rectascension und — 5'',1 in Poldistanz

erhalten (diese Grössen enthalten also Präcession vom Jahresanfang bis zur Zeit der Beobachtung, sowie Nutation und Aberration). Der scheinbare Ort des Vergleichssterne zur Zeit der Beobachtung wäre demnach:

9h 20m 42s,17 in Rectascension und 48° 19' 20'',1 in Poldistanz.

Diese Grössen giebt der Beobachter aber nicht erst, sondern sogleich durch Hinzufügung der Differenzen Komet minus Stern:

und: $\Delta AR = - 2^m 16^s,93$

$\Delta PD = - 6' 37'',3,$

die scheinbare Stellung des Kometen zur Zeit der Beobachtung:

$$ARapp = 9^h 18^m 25^s,24$$

$$Dpapp = 48^\circ 12' 42'',8.$$

Schliesslich giebt er noch die Parallaxenfactoren:

$$\text{In Rectascension: } \lg p \mathcal{A} = \{9^s,692\}$$

$$\text{In Poldistanz: } \lg p \mathcal{A} = [0'',838_n].$$

Wollte man sich auf diese Angaben allein stützen, so könnte man die Parallaxe mit dem Werthe $\log \varrho = \log \mathcal{A} = 0,2007$ (nach obiger Ephemeride) berechnen und würde so für Rectascension und Poldistanz die folgenden Parallaxencorrectionen erhalten:

$$d\alpha = + 0^s,31 \qquad dDp = - 4'',3.$$

Diese Correctionen hätte man dann den obigen Werthen für die scheinbare Rectascension und Poldistanz hinzuzufügen und würde so erhalten:

$$ARapp = 9^h 18^m 25^s,55$$

$$Dpapp = 48^\circ 12' 38'',5$$

oder für die scheinbare Declination:

$$\delta = 41^\circ 47' 21'',5.$$

Diese Werthe könnte man dann nach Reduction auf das mittlere Aequinoctium zu Jahresanfang einer vorläufigen Bahnbestimmung zu Grunde legen.

Soll aber die Beobachtung zur Bestimmung einer definitiven Bahn herangezogen werden, so empfiehlt es sich, sämtliche Angaben des Beobachters von Neuem zu berechnen.

Wir beginnen mit der Neubestimmung der Stellung des Vergleichssterne:

Seien α_0 und δ_0 die Coordinaten des Sterne für den Anfang des Katalogjahres t_0 , α_1 und δ_1 diejenigen für den Anfang des Beobachtungsjahres.

Man hat dann mit hinreichender Genauigkeit:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_0 &= m (t_1 - t_0) + n (t_1 - t_0) \operatorname{tg} \frac{\delta_1 + \delta_0}{2} \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_0}{2} \\ \delta_1 - \delta_0 &= n (t_1 - t_0) \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_0}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (I)$$

Das Berliner astronomische Jahrbuch giebt nun für das laufende Jahr, das wir hier mit t_1 bezeichnen, die Grössen $m(t_1 - t_0)$ in Zeitsecunden, ferner:

$$\lg [n(t_1 - t_0)]^s \text{ und } \lg [n(t_1 - t_0)]'',$$

wobei t_0 die Epoche der wichtigsten Kataloge ist. Diese Angaben beruhen, wie schon erwähnt, auf Zugrundelegung der Newcomb'schen Präcessionsconstante.

Hat man derartige Werthe nicht zur Verfügung, so muss man sich m und n nach den im Capitel über Präcession gegebenen Vorschriften selbst berechnen.

Die Grössen α_0 und δ_0 sind also durch den Katalog gegeben, und man hat hieraus durch successive Annäherung α_1 und δ_1 zu bestimmen.

Zunächst kann man sich einen Näherungswerth von α_1 und δ_1 verschaffen, indem man setzt:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_0 &= \left\{ \text{variatio annua} + \frac{t_1 - t_0}{200} \text{variatio saecularis} \right\} (t_1 - t_0) \\ \delta_1 - \delta_0 &= \left\{ \text{variatio annua} + \frac{t_1 - t_0}{200} \text{variatio saecularis} \right\} (t_1 - t_0), \end{aligned}$$

wobei man die variatio annua und die variatio saecularis für beide Coordinaten aus dem Kataloge entnimmt. Da diese letzteren Angaben jedoch auf verschiedenen Werthen für die Präcessionsconstante beruhen und zum Theil auch Versehen enthalten

können, so thut man gut, die so erhaltenen α_1 und δ_1 nur als erste Annäherung zu betrachten. Man berechnet dann mit ihnen

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_0}{2} \quad \text{und} \quad \frac{\delta_1 + \delta_0}{2}$$

und hieraus mit Formel (I) einen verbesserten Werth von α_1 und δ_1 .

Weichen die so erhaltenen Werthe von α_1 und δ_1 merklich von den aus den Katalogen hergeleiteten ab, so controlirt man die Rechnung durch nochmalige Anwendung der Formel (I).

Wir erhielten so für obigen Stern nach verschiedenen Katalogen:

Autorität	Grösse	Zahl der Beobachtungen		Mittleres Jahr der Beobachtung		α 1890,0	δ 1890,0
		α	δ	α	δ		
<i>P—Ll</i> 18562 . . .	—	—	—	1796,2	1796,2	9 ^h 20 ^m 42 ^s ,59	+ 41° 40' 32'',2
<i>W</i> ₂ 9 ^h ,389	7,8	1	1	—	—	9 20 42 ,93	+ 41 40 34 ,7
<i>P</i> 11 628	7,8	2	2	1867,2	1867,2	9 20 42 ,43	+ 41 40 28 ,0
<i>A G</i> Bonn	7,2	2	2	1869,7	1869,7	9 20 42 ,32	+ 41 40 28 ,9

Hierzu sei Folgendes bemerkt. Der wegen seines Alters zum Zwecke der Bestimmung von Eigenbewegungen wichtige Katalog von Lalande (*Ll*) enthält in seiner ursprünglichen, englischen Bearbeitung gewisse Ungenauigkeiten. Seine sämtlichen Sterne sind indess in Paris neu beobachtet worden und gleichzeitig hat man die alten Beobachtungen neu reducirt. Der Pariser Katalog, welcher unseren Stern als Nr. 11628 enthält, giebt gleichzeitig die Differenz Paris minus Lalande. Auf diese Weise wurde die erste Stellung *P—Ll* 18562 erhalten. Für den Katalog *W*₂ ist die Zeit der Beobachtung im Texte selbst nicht angegeben; sie liegt aber jedenfalls in der Nähe des Katalogjahres 1825.

Die letzte Stellung ist schliesslich dem Kataloge der Astronomischen Gesellschaft (Zone von Bonn) entnommen. Diese Beobachtungen scheinen ein allmähiges Abnehmen der Rectascension und Declination anzudeuten. Sie sind aber viel zu wenig zahlreich, um etwa eine Eigenbewegung bestimmen zu können, zumal die beiden älteren Beobachtungen unter sich schlecht übereinstimmen. Da die Zahl der Einzelbestimmungen für die beiden neueren Angaben dieselbe ist, so nehmen wir aus ihnen einfach das Mittel:

$$\alpha = 9^h 20^m 42^s,38 \quad \delta = + 41^\circ 40' 28'',5.$$

Eine kleine Eigenbewegung des Sternes könnte dieses Resultat übrigens nicht sehr beeinflussen, da der Zeitraum zwischen den Katalogbeobachtungen (im Mittel 1868,5) und 1890 noch nicht allzu bedeutend ist.

Der Rest der Reduction gestaltet sich wie folgt:

1. Berechnung der reducirten Beobachtungszeit.

T_1 = mittlere Zeit Marseille	9 ^h 26 ^m 9 ^s
Länge von Berlin in Zeit ¹⁾	+ 32 ^m 0 ^s ,3
T_2 = mittlere Zeit Berlin	9 ^h 58 ^m 9 ^s ,3
Idem in Tagen	Juli 22,415 386
Aberrationszeit	0,009 162
Reducirte Beobachtungszeit.	Juli 22,406 224

¹⁾ Nach dem Berliner Jahrbuche.

2. Berechnung der Sternzeit des Beobachtungsortes.

2 ^a) $T_1 + \text{Acceleration } T_2$ ¹⁾	9 ^h 27 ^m 47 ^s
Sternzeit im mittleren Berliner Mittag ²⁾	8 0 37
$\Sigma = \theta$	17 ^h 28 ^m 24 ^s
oder aber:	
2 ^b) $T_1 + \text{Acceleration } T_1$	9 ^h 27 ^m 42 ^s
Sternzeit im mittleren Berliner Mittag	
+ Correction ³⁾	8 0 42
$\Sigma = \theta$	17 ^h 28 ^m 24 ^s

3. Berechnung der Parallaxen.

θ	17 ^h 28 ^m 24 ^s	$\Sigma_2 \left\{ \begin{array}{l} \lg \text{Factor } d \delta''^5) \\ \sin(\gamma - \delta) \\ \text{cosec } \gamma \end{array} \right\}$	0,7787 9,9905 0,0618
α_{app}	9 18 25		
$\theta - \alpha$ in Bogenmaass	122° 30'		
$\sec(\theta - \alpha)$	0,2698 _n	Σ_1	9,6847
$\lg \varphi'^4)$	9,9714	$\lg \Delta$	0,2007
		Σ_2	0,8310
$\lg \gamma$	0,2412 _n		
γ	119° 51'	$\lg d \alpha^s$	9,4840
δ	41 47	$\lg d \delta''$	0,6303
$\gamma - \delta$	78° 4'	$d \alpha^s$	+ 0 ^s ,31
		$d \delta''$	+ 4'',3
$\Sigma_1 \left\{ \begin{array}{l} \lg \text{Factor } d \alpha^s^5) \\ \sin(\theta - \alpha) \\ \sec \delta \end{array} \right\}$	9,6334 9,9260 0,1275		

Die beiden Parallaxenfactoren Σ_1 und Σ_2 müssen nahezu mit den von den Beobachtern gegebenen übereinstimmen.

¹⁾ Unter Acceleration von T verstehen wir die Grösse, die man zu T hinzufügen müsste, um es in Sternzeit zu verwandeln (nach Tafel IIa).

²⁾ Nach dem Berliner Jahrbuche.

³⁾ Diese Correction findet sich im Berliner Jahrbuche unter der Rubrik: Sternzeit im mittleren Mittag weniger Sternzeit im mittleren Berliner Mittag.

⁴⁾ φ' ist die geocentrische Breite des Beobachtungsortes nach dem Berliner Jahrbuche.

⁵⁾ Hierbei ist:

$$\text{Factor } d \alpha^s = \frac{\pi \varrho \cos \varphi'}{15}, \text{ Factor } d \delta'' = \pi \varrho \sin \varphi'.$$

Setzt man mit dem Berliner Jahrbuche für Marseille $\varphi' = + 43^\circ 7'$ und $\lg \varrho = 9,9993$ (in Einheiten des Aequatorealhalbmessers) und schliesslich $\pi = 8'',802$, so erhält man obige Werthe.

4. Reduction des Sternes auf den scheinbaren Ort¹⁾.

δ	+ 41° 41'	i	0,6086
G	346° 43'	$\cos \delta$	9,8732
α	140 11	f''	+ 11'',03
H	152 10	$g \sin(G + \alpha) \operatorname{tg} \delta$	+ 3 ,52
$\alpha + G$	126° 54'	$h \sin(H + \alpha) \sec \delta$	— 24 ,81
$\alpha + H$	292 21	$\Sigma = d \alpha''$	— 10'',26
$\operatorname{tg} \delta$	9,9995	$g \cos(G + \alpha)$	— 2'',97
$\sin(G + \alpha)$	9,9029	$h \cos(H + \alpha) \sin \delta$	+ 5 ,07
g	0,6943	$i \cos \delta$	+ 3 ,03
$\cos(G + \alpha)$	9,7785	$\Sigma = d \delta$	+ 5'',14
$\sec \delta$	0,1268	$d \alpha^s$	— 0 ^s ,68
$\sin(H + \alpha)$	9,9661 _n		
h	1,3018		
$\cos(H + \alpha)$	9,5801		
$\sin \delta$	9,8228		

Auch diese Grössen müssen nahezu mit den vom Beobachter gegebenen übereinstimmen.

5. Vergleich der Beobachtung mit der Ephemeride.

	α	δ
* 1890,0	9 ^h 20 ^m 42 ^s ,38	+ 41° 40' 28'',5
Red. a. l. <i>app</i>	— 0 ,68	+ 5 ,1
Scheinbare Stellung des *	9 ^h 20 ^m 41 ^s ,70	+ 41° 40' 33'',6
\mathcal{C} — *	— 2 16 ,93	+ 6' 37'',3 ²⁾
\mathcal{C} <i>app</i>	9 ^h 18 ^m 24 ^s ,77	+ 41° 47' 10'',9
Parallaxe	+ 0 ,31	+ 4 ,3
Wahrer Ort des \mathcal{C} zur reducirt	9 ^h 18 ^m 25 ^s ,08	+ 41° 47' 15'',2
Beobachtungszeit		
\mathcal{C} nach Ephemeride ³⁾	9 18 25 ,20	+ 41 47 7 ,4
Correction der Ephemeride	— 0 ^s ,12	+ 7'',8

Demnach wäre also nach dieser Beobachtung an obige Ephemeride in Rectascension eine Correction von — 0^s,12, in Declination von + 7'',8 anzubringen. Die letztere ist etwas stark; doch zeigten andere in der Nähe liegende Beobachtungen eine bessere Uebereinstimmung.

¹⁾ Die Grössen g , G etc. sind dem Berliner Jahrbuche interpolatorisch entnommen. Gewöhnlich begnügt man sich indess bei derartigen Reductionen, bei denen nicht die äusserste Genauigkeit erreicht werden soll, die Bessel'schen Constanten einfach für Berliner Mitternacht anzunehmen, obgleich die Beobachtung streng genommen nicht zu dieser Zeit stattfand.

²⁾ Das Zeichen dieser Grösse wurde geändert, weil der Beobachter die Differenz in Poldistanz giebt, wir aber die in Declination brauchen.

³⁾ Diese Grösse ist aus der Ephemeride durch Interpolation mit der reducirtten Beobachtungszeit: Juli 22,406224 erhalten worden.

Zweite Abtheilung.

Die Berechnung von Bahnen aus gegebenen Beobachtungen.

Sechszehnte Vorlesung.

Berechnung einer Kreisbahn.

Von den Problemen, welche sich mit der Bestimmung der Bahnelemente aus gegebenen geocentrischen Beobachtungen beschäftigen, ist das der Berechnung einer Kreisbahn, welche sich an zwei vollständige geocentrische Oerter anschliesst, das leichteste, und obwohl mit der Annahme, dass die Excentricität e gleich Null sei, die Strenge verletzt wird, doch bei Planeten nicht ohne praktische Bedeutung. Vor der Entdeckung der kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter und der dadurch veranlassten Einführung der Gauss'schen Methoden in die Astronomie war es sogar der einzige Weg, den man zur Ermittlung der Bahnelemente kannte, zuerst die Annahme $e = 0$ zu machen und das gefundene Resultat durch kleine Correctionen mehr und mehr zu verbessern. Die Bahnen aller älteren und grösseren Planeten mit Einschluss des im Jahre 1781 von Wilhelm Herschel entdeckten Uranus sind auf diese Weise gefunden worden; dieselbe konnte sogar noch bei Gelegenheit der Auffindung des Neptun gute Dienste leisten. Auch für die kleinen Planeten, deren Bahnen bekanntlich im Durchschnitt viel excentrischer sind, als die der grösseren, wird man sich recht gut einer auf eine Kreisbahn gegründeten Ephemeride bedienen können, wenn es bloss darauf ankommt, einen solchen neu entdeckten Himmelskörper auf einige Wochen zu verfolgen; es ist dann angenehm, dass man zu dem Zwecke nicht eine dritte Beobachtung abzuwarten hat, und doch schon Einiges über den Lauf erfährt, z. B. vor Allem, ob die Neigung der Bahnebene gegen die Ekliptik gross oder gering ist, in welchem letzteren Falle nachher bei der Bestimmung der elliptischen Elemente anders verfahren werden muss, als wenn sie gross ist; die Berechnung der Kreisbahn eignet sich daher sehr gut zum Sondiren der Neigung, auf welches Geschäft Gauss aus dem eben vorläufig angedeuteten Grunde grosses Gewicht legte.

Handelt es sich dagegen darum, einen kleinen Planeten nach Monate lang andauernder Unsichtbarkeit wieder aufzufinden, so wird das nach einer Kreisbahn-Ephemeride fast niemals gelingen, weil deren Fehler anfangs schwach, dann immer stärker und stärker anwachsen. Es bedarf, wenn eine solche Periode der Unsichtbarkeit im Anzuge ist, durchaus einer mit aller Sorgfalt und ohne die Hypothese $e = 0$ durchgeführten Rechnung, wie sie in den folgenden Abschnitten gezeigt werden soll. Für Kometenbahnen vollends würde jene Annahme durchaus unzulässig sein.

Es ist hier der Ort, den Leser noch mit einigen Verhältnissen des Planetenlaufes bekannt zu machen, welche bei Untersuchungen dieser Art von Bedeutung sind. Hat ein Planet dieselbe geocentrische Länge, wie die Sonne, so sagt man, der Planet sei in Conjunction; dabei wird noch weiter unterschieden, ob derselbe jenseits oder diesseits der Sonne stehe. Das Letztere nennt man die untere, das Erstere obere Conjunction. Die untere Conjunction bringt, wenn mit dieser Gleichheit der geocentrischen Längen von Planet und Sonne zugleich ein geringer Unterschied der Breiten, kleiner als der Halbmesser der Sonnenscheibe, verbunden ist, einen Vorübergang des Planeten vor der Sonnenscheibe. Von den bis jetzt bekannten Planeten können nur Mercur und Venus, die sogenannten unteren Planeten, eine untere Conjunction haben; alle übrigen, wie Mars, die kleinen Planeten, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun, haben nur die obere Conjunction und sind schon längere Zeit vor und nach derselben für unsere Instrumente unsichtbar wegen der Nähe der Sonne, deren Strahlen sie gleichsam verdecken. Die günstigste Zeit für ihre Sichtbarkeit und demnach auch für die Beobachtungen ist ihre sogenannte Opposition, d. h. die Zeit, zu welcher ihre geocentrische Länge um 180° von der der Sonne verschieden ist. Sie culminiren dann um Mitternacht, sind also die ganze Nacht oder doch einen grossen Theil derselben hindurch über dem Horizonte und ausserdem der Erde am nächsten. Die Figuren 41, 42 und 43, in welchen S die

Fig. 41.

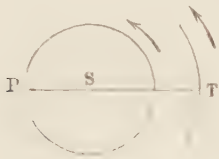
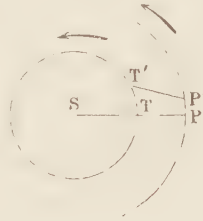


Fig. 42.



Fig. 43.



Sonne, T die Erde, P einen Planeten vorstellen, versinnlichen nach der Reihe die obere Conjunction, die untere und die Opposition der Planeten. Die Richtung der Bewegung in der kreisförmig angenommenen Bahn ist mit einem Pfeil angedeutet, zum leichteren Verständniss des Folgenden.

Wir wissen schon aus Vorlesung Vier, dass die Winkelbewegung eines Planeten in kreisförmiger Bahn desto grösser ist, je kleiner der Halbmesser a derselben, da sich ja die mittlere tägliche Bewegung durch $\frac{k}{a^{3/2}}$ ausdrückt. Nun erhält man die lineare Bewegung des Planeten oder seinen in der Zeiteinheit zurückgelegten Weg offenbar, wenn man jene Winkelbewegung mit a multiplicirt; in der Kreisbahn drückt sich demnach die lineare Geschwindigkeit durch $\frac{k}{\sqrt{a}}$ aus. Hiernach ist auch die lineare Geschwindigkeit in der Kreisbahn um so kleiner, je grösser a oder der Halbmesser der Bahn ist. Die Geschwindigkeit der Erde übertrifft also die des in Opposition befindlichen Planeten; ist nun in Fig. 43 noch T' ein Ort der Erde kurze Zeit nach der Opposition, P' der entsprechende Ort des Planeten, so ist die Richtung in Länge, in welcher der Planet gesehen wird, d. h. die Projection der Verbindungslinie zwischen Erde und Planet auf der Ekliptik von \overline{TP} in $\overline{T'P'}$ übergegangen, hat also, da $\overline{TT'} > \overline{PP'}$, eine rückgängige Bewegung gemacht. Man sieht hieraus, dass zur Zeit der Opposition die geocentrischen Längen abnehmen, der Planet daher sich in dem Theile des unendlich entfernten Fixsternhimmels, auf welchen er sich für unser Auge projectirt, in einem Sinne gegen die Sterne zu bewegen scheint, welcher seiner wahren Bewegung entgegengesetzt

ist; der Planet ist dann rückläufig. Dasselbe ist auch bei unteren Conjunctionen der Fall, bei den oberen dagegen ist es umgekehrt, denn bei den letzteren wirkt die Erdbewegung der Planetenbewegung in ihrem Bestreben, die geocentrischen Längen zu vergrößern, nicht entgegen, sondern trägt noch selbst dazu bei; in den oberen Conjunctionen wird deshalb schnelles Wachsen der geocentrischen Längen stattfinden. Offenbar müssen Zu- und Abnahme allmählig in einander übergehen, es muss einige Zeit vor der Opposition sowohl wie einige Zeit nachher einen Zeitpunkt geben, wo weder Abnahme noch Zunahme der geocentrischen Länge stattfindet und der Planet seinen Ort unter den Fixsternen beinahe gar nicht zu ändern scheint. Es sind dies die Zeiten des sogenannten Stationärwerdens des Planeten; die Bewegungen der Erde und des Planeten stehen dann in einem solchen Verhältniss zu einander, dass die Verbindungslinie beider Körper für eine kurze Zeit sich parallel bleibt.

Nach diesen Bemerkungen können wir uns leicht von den Hauptzügen in dem geocentrischen Laufe der oberen Planeten (die vorläufig mehr als die unteren unsere Aufmerksamkeit in Anspruch nehmen) Rechenschaft ablegen. Ein Asteroid z. B., um die Opposition herum vorzüglich sichtbar, und deshalb auch meistens nahe bei derselben entdeckt, rückt, wie die Sternbilder, in welchen es aufzusuchen ist, immer früher und früher, zuerst nach Mitternacht, darauf gegen Mitternacht, endlich schon in der Abenddämmerung untergehend, während zuletzt sein Abstand von der Erde rasch zunimmt, der Periode seiner Unsichtbarkeit entgegen. Nach längerer Zeit, bei den meisten von diesen Gestirnen nach mehr als Jahresfrist, kommt der Planet in einer ganz anderen Gegend des Sternhimmels in der Morgendämmerung wieder zum Vorschein, indem er einige Stunden vor der Sonne aufgeht. Immer mehr in den Nachthimmel hineinrückend, dabei wegen seiner Annäherung zur Erde fortwährend an Licht zunehmend, wird der Planet stationär, kommt in Opposition, wird zum zweiten Male stationär, verschwindet am Abendhimmel u. s. f. Diesen Verlauf vom Auftauchen in der Morgendämmerung bis zum Verschwinden am Abendhimmel pflegt man eine Erscheinung des Planeten zu nennen.

Die oben erklärten Grundzüge in der Erscheinung eines oberen Planeten sich zu vergegenwärtigen, ist bei vielen Gelegenheiten nützlich, ja fast nothwendig, weswegen sie denn auch in diesen einleitenden Bemerkungen ausführlich vorzutragen waren.

Siebenzehnte Vorlesung.

Formeln zu der Berechnung einer Kreisbahn.

Es wurde schon in voriger Vorlesung beiläufig bemerkt, dass man für die Bestimmung einer Kreisbahn nur zwei vollständige Beobachtungen, welche zwei Längen und zwei Breiten, also vier von einander unabhängige Daten, enthalten, nöthig hat; denn die Anzahl der zu bestimmenden Unbekannten beträgt ebenfalls nur vier: Ω oder die Länge des aufsteigenden Knotens, i oder die Neigung der Bahn, a oder der Halbmesser der Bahn, endlich, weil man wissen muss, in welchem Punkte seiner Bahn der Planet zu einer gegebenen Epoche sich befunden hat, das Argument der Breite für jene Zeit, d. h. der Winkelabstand vom aufsteigenden Knoten, in der Bahnebene gezählt.

Wir bezeichnen die letztere Grösse, welche hier an die Stelle von dem $\pi - \Omega + v$ der allgemeinen Formeln tritt, wieder mit u .

Wir beginnen hier mit einer Methode, welche an die räumliche Phantasie des Lesers nur geringe Anforderungen stellt, aus den Gleichungen der Vorlesungen des Abschnittes I. mit Leichtigkeit entwickelt werden kann, und die auch an Bequemlichkeit kaum hinter den später mitzutheilenden zurücksteht.

Es seien λ und λ' die geocentrischen Längen des Gestirnes zu den Beobachtungszeiten t und t' , β und β' die geocentrischen Breiten, \odot und \odot' die Längen der Sonne um dieselbe Zeit, R und R' die beiden zugehörigen Radienvectoren oder Abstände der Erde von der Sonne, so lassen sich nach den Fundamentalformeln des Abschnittes I. die heliocentrischen Polarcordinaten des Gestirnes, r, l, b in der ersten Beobachtung oder zur Zeit t , und r', l', b' in der zweiten Beobachtung oder zur Zeit t' , durch die entsprechenden geocentrischen Coordinaten ϱ, λ, β und $\varrho', \lambda', \beta'$ wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} r \cos b \cos l &= \varrho \cos \beta \cos \lambda - R \cos \odot \\ r \cos b \sin l &= \varrho \cos \beta \sin \lambda - R \sin \odot \\ r \sin b &= \varrho \sin \beta \\ r' \cos b' \cos l' &= \varrho' \cos \beta' \cos \lambda' - R' \cos \odot' \\ r' \cos b' \sin l' &= \varrho' \cos \beta' \sin \lambda' - R' \sin \odot' \\ r' \sin b' &= \varrho' \sin \beta'. \end{aligned}$$

Wegen der Voraussetzung einer Kreisbahn ist $r' = r$. Man sieht ferner, dass die Kenntniss von einer der Unbekannten in diesen beiden Systemen von Gleichungen, die Kenntniss von ϱ zum Beispiel, sogleich auch die übrigen, r, b, l, b', l' und ϱ' liefern würde. Denn man findet, wenn man die drei ersten Gleichungen addirt, nachdem man auf beiden Seiten in das Quadrat erhoben:

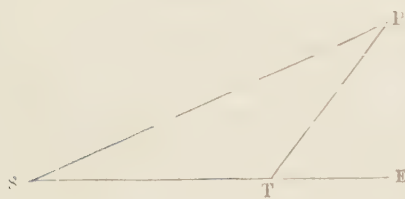
$$\left. \begin{aligned} r^2 &= \varrho^2 - 2 R \varrho \cos \beta (\cos \lambda \cos \odot + \sin \lambda \sin \odot) + R^2 \\ &= \varrho^2 - 2 R \varrho \cos \beta \cos (\lambda - \odot) + R^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

und ebenso aus den drei anderen:

$$\left. \begin{aligned} r'^2 &= \varrho'^2 - 2 R' \varrho' \cos \beta' (\cos \lambda' \cos \odot' + \sin \lambda' \sin \odot') + R'^2 \\ &= \varrho'^2 - 2 R' \varrho' \cos \beta' \cos (\lambda' - \odot') + R'^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

Die Grösse $\cos \beta \cos (\lambda - \odot)$ in der Gleichung (1) giebt sich durch eine sehr leichte Betrachtung als der Cosinus des Winkels zu erkennen, den an der Erde die Richtung nach dem Planeten und die nach der Sonne mit einander bilden. Um dies zu erkennen,

Fig. 44.



braucht man sich nur mit Fig. 44 das Dreieck Sonne, Erde, Planet zur Zeit der Beobachtung zu vergegenwärtigen; bedeutet S die Sonne, T die Erde, P den Planeten, E einen in der Verlängerung von \overline{ST} gelegenen Punkt, so ist:

$$\overline{SP}^2 = \overline{ST}^2 + \overline{TP}^2 - 2 \overline{ST} \cdot \overline{TP} \cdot \cos P T S$$

oder

$$r^2 = R^2 + \varrho^2 + 2 R \varrho \cos \chi \dots \dots (3)$$

wenn wir den Winkel PTE , der bei vollständigen Beobachtungen immer bekannt wird und in den Rechnungen dieser Art eine grosse Rolle spielt, mit χ bezeichnen. Analog haben wir für die andere Beobachtung:

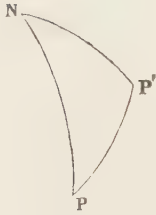
$$r'^2 = R'^2 + \varrho'^2 + 2 R' \varrho' \cos \chi' \dots \dots (4)$$

Daher ergibt sich durch Vergleich dieser Gleichungen mit (1) und (2)

$$\begin{aligned} \cos \chi &= - \cos \beta \cos (\lambda - \odot) \\ \cos \chi' &= - \cos \beta' \cos (\lambda' - \odot'). \end{aligned}$$

Wir können nun mit Leichtigkeit prüfen, ob ein bestimmter Werth von ϱ der Bewegungsbedingung in einer Kreisbahn genügt, d. h. ob der von den beiden gleichen Radienvectoren r des Planeten eingeschlossene Bogen, wie wir ihn aus den uns bekannt werdenden Grössen l, b, l' und b' finden, gleich

Fig. 45.



$$\frac{k}{a^{3/2}} (t' - t) \text{ oder } \frac{k}{r^{3/2}} (t' - t)$$

wird, wie es die Bewegung in einer Kreisbahn erfordert. Die zur Berechnung dieses Winkels, der in den praktischen Anwendungen immer recht klein sein wird, und daher sich nicht scharf durch den Cosinus bestimmen lässt, aus l, b, l', b' geeigneten Formeln ergeben sich mit Hülfe der Fig. 45.

In dem sphärischen Dreieck NPP' ist N der Nordpol der Ekliptik, P der heliocentrische Ort des Planeten auf der Sphäre in der ersten, P' der in der zweiten Beobachtung, also

$$\begin{aligned} \text{Seite } NP & \dots = 90^\circ - b \\ \text{„ } NP' & \dots = 90^\circ - b' \\ \text{Winkel } PNP' & \dots = l' - l. \end{aligned}$$

Nach einer bekannten Fundamentalformel hat man:

$$\begin{aligned} \cos \overline{PP'} &= \cos \overline{NP} \cdot \cos \overline{NP'} + \sin \overline{NP} \cdot \sin \overline{NP'} \cdot \cos PNP' \\ &= \sin b \sin b' + \cos b \cos b' \cos (l' - l). \end{aligned}$$

Um die Gleichung für kleine Werthe von $\overline{PP'}$ brauchbarer zu machen, kann man setzen:

$$\begin{aligned} \sin b \sin b' &= \sin b \sin b' [\cos 1/2 (l' - l)^2 + \sin 1/2 (l' - l)^2] \\ \cos b \cos b' \cos (l' - l) &= \cos b \cos b' [\cos 1/2 (l' - l)^2 - \sin 1/2 (l' - l)^2], \end{aligned}$$

wodurch zunächst:

$$\cos \overline{PP'} = \cos (b' - b) \cos 1/2 (l' - l)^2 - \cos (b' + b) \sin 1/2 (l' - l)^2$$

erhalten wird. Subtrahirt man diese Gleichung nun noch von der Gleichung:

$$1 = \cos 1/2 (l' - l)^2 + \sin 1/2 (l' - l)^2,$$

so findet man:

$$\sin 1/2 \overline{PP'}^2 = \sin 1/2 (b' - b)^2 \cos 1/2 (l' - l)^2 + \cos 1/2 (b' + b)^2 \sin 1/2 (l' - l)^2 \quad (5)$$

und es muss nun nach dem Vorhergehenden, um die Bewegungsgesetze in der Kreisbahn zu befriedigen,

$$\overline{PP'} = \frac{k}{r^{3/2}} (t' - t) \dots \dots \dots (6)$$

werden. Durch Versuche wird man meistens mit Leichtigkeit den Werth von ϱ und entsprechend die r, b, l, b', l' finden, welche der Bedingung genügen. Denkt man sich diejenigen Werthe von ϱ , welche man auf diese Eigenschaft prüft, als Abscissen auf einer Axe aufgetragen, die zugehörigen Werthe von $\overline{PP'}$, wie sie aus der Gleichung (6) sich ergeben, als die Ordinaten, anderentheils aber auch die Werthe von $\frac{k}{r^{3/2}} (t' - t)$ als Ordinaten aufgetragen, so entstehen zwei Curven, welche durch ihren Schnittpunkt den Werth von ϱ , welcher der zu erfüllenden Bedingung genügt, angeben. Vorausgesetzt, dass überhaupt der Anschluss der Beobachtungen an die Kreisbahn möglich ist (was bei einigermaassen grossem Zeitintervall der beiden Beobachtungen keineswegs immer der Fall ist), müssen die beiden Curven eine die andere schneiden und es ist leicht einzusehen, dass die Abscisse des Schnittpunktes das gesuchte ϱ ist. Mittelst dieser geometrischen Betrachtung und dem darauf gebauten graphischen Verfahren kann

man zunächst einen sehr hohen Grad von Annäherung an die Wahrheit erreichen, und dann nach der bekannten Regel vom sogenannten falschen Satze (*regula falsi*), welcher annimmt, dass die Fehler einer Hypothese über eine zu ermittelnde Unbekannte [im gegenwärtigen Falle der Unterschied zwischen dem Ergebniss der Gleichungen (5) und (6)], sich verhalten, wie die Correctionen, deren die entsprechenden angenommenen Werthe der Unbekannten bedürfen, den definitiven Werth von q interpoliren. Gesetzt, es sei für eine gewisse Annahme von q : $q = q_0$, der Unterschied des Ergebnisses von (5) und (6) gleich p , für eine andere Annahme von q dagegen: $q = q_0 + \Delta q$, sei der Unterschied aus jenen Gleichungen $p + \Delta p$, ferner $q_0 + \xi$ der wahre Werth von q , so hat man die Proportion:

$$\Delta q : \Delta p = \xi : p,$$

und

$$q = q_0 + \xi = q_0 + \frac{p \Delta q}{\Delta p}$$

wird der wahre Werth von q sein. Dieser Ausdruck für die Verbesserung setzt voraus, dass ξ schon sehr klein sei; um zu sehen, ob diese letztere Bedingung in hinreichendem Grade erfüllt war, wird man den verbesserten Werth von q substituiren, und wenn er noch nicht ganz genügt, das angegebene Verfahren wiederholen. Ist auf solche Weise q und dann r , b , l , b' , l' bestimmt worden, so findet man die Argumente der Breite u und u' , welche zu den beiden Beobachtungszeiten gehören, sowie die Elemente Ω und i aus folgenden im Abschnitte I. entwickelten Formeln:

$$\begin{aligned} \sin b &= \sin i \sin u \\ \sin b' &= \sin i \sin u' \\ \operatorname{tg}(l - \Omega) &= \cos i \operatorname{tg} u \\ \operatorname{tg}(l' - \Omega) &= \cos i \operatorname{tg} u'. \end{aligned}$$

Indem man einmal die beiden ersten dieser Gleichungen zu einander addirt, das andere Mal von einander subtrahirt, erhält man

$$\begin{aligned} \sin i \sin^{1/2}(u' + u) \cos^{1/2}(u' - u) &= \sin^{1/2}(b' + b) \cos^{1/2}(b' - b) \\ \sin i \cos^{1/2}(u' + u) \sin^{1/2}(u' - u) &= \cos^{1/2}(b' + b) \sin^{1/2}(b' - b) \end{aligned} \quad (7)$$

woraus sich, da $u' - u$ bekannt und gleich $\frac{k}{r^{3/2}} (t' - t)$ ist, sowohl i als auch u und u' ergeben. Die Substitution in die beiden letzten der vier obigen Gleichungen, wobei dann wieder zu berücksichtigen, dass $l - \Omega$ mit u , ebenso $l' - \Omega'$ mit u' in demselben Quadranten liegen muss, liefert zwei Werthe von Ω ; letztere müssen offenbar mit einander sehr nahe übereinstimmen, wenn die Rechnung in allen Theilen für richtig gelten soll. Zur vollständigen Controle der Rechnung ist immer sehr rathsam, zu prüfen, ob die bei der Bahnbestimmung zu Grunde liegenden Beobachtungen durch die gefundenen Elemente auch wirklich dargestellt werden.

Achtzehnte Vorlesung.

Modification der Formeln der letzten Vorlesung.

Die eben gegebenen Formeln haben noch eine Unbequemlichkeit, die sich auf ziemlich einfache Weise vermeiden lässt; sie erfordern nämlich für jeden Versuch, den man über den Werth von ϱ anstellt, auch die Berechnung von b, l, b', l' . Da nun die Kenntniss dieser letzteren Grössen von keinem weiteren Nutzen ist, so lange man nicht den definitiven Werth von ϱ ermittelt hat, erscheint es zweckmässig, dieselben aus der Rechnung für die Versuche ganz zu eliminiren. Ziemlich bequem gestalten sich diese Formeln, wenn man für ϱ und r eine andere Unbekannte einführt, und zwar in folgender Weise: Nennen wir in Fig. 44 den Winkel an P , d. h. am Planeten, in der ersten Beobachtung z , in der zweiten z' (wobei nur noch vor der Verwechselung mit der heliocentrischen Coordinate z und z' gewarnt werden muss), so wird:

$$\begin{aligned} r &= \frac{R \sin \chi}{\sin z} \\ r' &= \frac{R' \sin \chi'}{\sin z'} \\ \varrho &= \frac{R \sin(\chi - z)}{\sin z} \\ \varrho' &= \frac{R' \sin(\chi' - z')}{\sin z'}. \end{aligned}$$

Es ist nun $r = r'$, also besteht zwischen z und z' die Gleichung:

$$\frac{R \sin \chi}{\sin z} = \frac{R' \sin \chi'}{\sin z'}$$

oder:

$$\frac{\sin z'}{\sin z} = \frac{R' \sin \chi'}{R \sin \chi},$$

und es ist daher z' aus z immer leicht zu berechnen. Das Verhältniss $\frac{\varrho'}{\varrho}$ wird ausgedrückt durch:

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{\sin z}{\sin z'} \frac{R' \sin(\chi' - z')}{R \sin(\chi - z)} = \frac{\sin \chi}{\sin \chi'} \frac{\sin(\chi' - z')}{\sin(\chi - z)}.$$

Führen wir auf kurze Zeit wieder die rechtwinkligen heliocentrischen Coordinaten des Planeten, und zwar mit x, y, z für die erste, mit x', y', z' für die zweite Beobachtung ein, sind ferner X, Y, Z, X', Y', Z' die zugehörigen Coordinaten der Erde und bedeutet α die zu dem heliocentrischen Bogen des Planeten gehörige Sehne, so wird noch:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = r^2 + r'^2 - 2(x x' + y y' + z z') \\ &= 2 r^2 - 2(\varrho \cos \beta \cos \lambda + X)(\varrho' \cos \beta' \cos \lambda' + X') \\ &\quad - 2(\varrho \cos \beta \sin \lambda + Y)(\varrho' \cos \beta' \sin \lambda' + Y') \\ &\quad - 2(\varrho \sin \beta + Z)(\varrho' \sin \beta' + Z'). \end{aligned}$$

Bei dem Auflösen dieser Parenthesen erkennt man, dass der Factor, mit welchem der Ausdruck $- 2 \varrho \varrho'$ in dem entwickelten Producte multiplicirt erscheint, nämlich:

$$\cos \beta \cos \beta' \cos \lambda \cos \lambda' + \cos \beta \cos \beta' \sin \lambda \sin \lambda' + \sin \beta \sin \beta'$$

nichts Anderes ist, als der Cosinus des zwischen den beiden geocentrischen Oertern, auf welche die Richtungen von ϱ und ϱ' zielen, gelegenen Bogens eines grössten Kreises, d. h. des völlig bekannten Abstandes der beiden geocentrischen Oerter auf der Sphäre. Ersetzt man auch X, Y, Z, X', Y', Z' durch die entsprechenden Polarcordinaten der Erde, so erscheint in dem genannten Product die Grösse $-2R\varrho'$ mit einem Factor multiplicirt, welchen wir leicht als Cosinus des Bogens zwischen dem zweiten geocentrischen Orte und dem ersten heliocentrischen Erdorte erkennen, analog ist $-2R'\varrho$ mit dem Cosinus des Bogens zwischen dem ersten geocentrischen Orte und dem zweiten heliocentrischen Erdorte multiplicirt. Endlich ist:

$$XX' + YY' + ZZ' = RR' \cos(\odot' - \odot),$$

wenn wieder \odot und \odot' die Längen der Sonne vorstellen; also ist auch der Ausdruck $-2RR'$ des genannten Productes mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, welchen die Richtungen von R und R' mit einander bilden.

Bezeichnet man nun der Kürze halber:

mit (RR') den Cosinus des Winkels zwischen den Richtungen von R und R'

" $(R\varrho')$ " " " " " " " " R " ϱ'

" $(R'\varrho)$ " " " " " " " " R' " ϱ

" $(\varrho\varrho')$ " " " " " " " " ϱ " ϱ'

so erhält man, da auch $\kappa^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos(u' - u)$:

$$r^2 \cos(u' - u) = (RR')RR' + (R\varrho')R\varrho' + (R'\varrho)R'\varrho + (\varrho\varrho')\varrho\varrho' . . . (4)$$

oder:

$$\cos(u' - u) = (RR') \frac{RR'}{rr} + (R\varrho') \frac{R\varrho'}{rr} + (R'\varrho) \frac{R'\varrho}{rr} + (\varrho\varrho') \frac{\varrho\varrho'}{rr}.$$

Alles auf der rechten Seite dieser Gleichung wird bekannt, wenn man den Winkel z kennt oder über den Werth desselben eine Hypothese macht; die Werthe von (RR') , $(R\varrho')$, $(R'\varrho)$, $(\varrho\varrho')$ werden vorher, d. h. vor Anstellung der Versuche über z , von denen sie unabhängig sind, berechnet, immer unter Anwendung der Grundformel der sphärischen Trigonometrie, welche aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel den Cosinus der dritten Seite liefert. Es wird demnach, wenn wir unter L und L' die Längen der Erde oder die Grössen $\odot + 180^\circ$, $\odot' + 180^\circ$ verstehen:

$$\begin{aligned} (RR') &= \cos(L' - L) = \cos(\odot' - \odot) \\ (R\varrho') &= \cos \beta' \cos(\lambda' - L) = -\cos \beta' \cos(\lambda' - \odot) \\ (R'\varrho) &= \cos \beta \cos(\lambda - L') = -\cos \beta \cos(\lambda - \odot') \\ (\varrho\varrho') &= \sin \beta \sin \beta' + \cos \beta \cos \beta' \cos(\lambda' - \lambda). \end{aligned}$$

Die Gültigkeit der Gleichung (4) erstreckt sich auch noch auf den Fall, wo die beiden Radienvectoren, welche den Winkel $(u' - u)$ einschliessen, nicht gleich sind. Allgemeiner demnach kann man sie schreiben, wenn wir die abkürzende Bezeichnung der Cosinus auch auf $\cos(u' - u)$ ausdehnen, wobei dann $\cos(u' - u) = (rr')$,

$$(rr') rr' = (RR')RR' + (R\varrho')R\varrho' + (R'\varrho)R'\varrho + (\varrho\varrho')\varrho\varrho' . . . (5)$$

Diese dem Gedächtniss sich leicht einprägende Formel ist auch für einige unserer späteren Untersuchungen von Bedeutung.

In unserem speciellen Falle soll nun wieder das aus Gleichung (5) oder (4) hervorgehende $(u' - u) = \frac{k(t' - t)}{r^{3/2}}$ sein. Fast immer ist dies in den Anwendungen ein so kleiner Winkel, dass seine Bestimmung durch den Cosinus mangelhaft ausfallen wird.

Ist nun durch Versuche in der in voriger Vorlesung beschriebenen Weise ein Werth des Winkels z , von welchem alle übrigen Unbekannten auf der rechten Seite der

Gleichung (4) wie z' , φ , φ' , r abhängen, gefunden, so kann man endlich die heliocentrischen Polarcoordinaten l , b , l' , b' berechnen und daraus die Elemente, wie früher vorgetragen, bestimmen.

Es erscheint kaum nöthig, hier zu bemerken, dass der Gleichung (4) unmittelbar die Gestalt einer Relation zwischen den Winkeln am Planeten z und z' und bekannten Grössen gegeben werden kann, während z und z' noch ausserdem durch die Gleichung:

$$\frac{R \sin \chi}{\sin z} = \frac{R' \sin \chi'}{\sin z'}$$

mit einander verbunden sind. Bei der Einfachheit dieser letzteren Relation verhält sich die Bestimmung des richtigen Werthes von z in praktischer Hinsicht fast ebenso, als hätte man in der Gleichung (4) nur die eine Unbekannte z .

In doppelter Hinsicht scheint die eben entwickelte Methode, aus zwei vollständigen Beobachtungen die Elemente einer Kreisbahn zu finden, den Vorzug vor derjenigen der vorigen Vorlesung geltend machen zu können. Einestheils braucht man bei den Versuchen nicht allzu weit auszuholen, weil eine sogenannte Finalgleichung vorhanden ist; anderentheils lässt sich diese Methode mit grösserer Leichtigkeit als die anderen dem Coordinatensysteme des Aequators anpassen. Wir werden die meisten Methoden zu Bahnberechnungen so anlegen, dass am Schlusse der Rechnung unmittelbar die zur Berechnung der Ephemeride nöthigen Gauss'schen Constanten und fast zugleich mit ihnen auch die Elemente, bezogen auf die Ekliptik, erhalten werden. Die verhältnissmässig grosse Einfachheit und Kürze jener Methoden, welche vorzugsweise durch die jetzige, viel vollständigere Einrichtung der astronomischen Jahrbücher¹⁾ ermöglicht wird, lassen in den Formeln der Bahnberechnung den Gebrauch der Rectascension und Declination, statt der Längen und Breiten, wegen der vielen, bei einer schärferen Rechnung auftretenden, lästigen Anforderungen (als da besonders sind die Verwandlung der beobachteten Rectascensionen und Declinationen in Länge und Breite, die weit grössere Complication in der Berücksichtigung der Parallaxe und der Aberration, anderer wichtiger Umstände vorläufig nicht zu gedenken) als das Bequemere erscheinen.

Aus diesen Gründen erscheint es zweckmässig, unsere Methode für Berechnung einer Kreisbahn ebenfalls noch für das System des Aequators zu geben. Dabei sehen wir hier noch vorläufig von allen den kleinen Correctionen ab, welche eine scharfe Rechnung erforderlich machen würde, obwohl dieselben gerade für dieses Coordinatensystem alles Lästige und Ermüdende verlieren, d. h. wir vernachlässigen noch Parallaxe und Aberration, ebenso die Bewegung des Aequinoctiums von einer Beobachtung bis zur anderen, indem wir die Oerter auf das scheinbare Aequinoctium des Tages, an welchem sie angestellt sind, beziehen. Wir dürfen das hier um so mehr, als ja doch immer die Voraussetzung der Kreisbahn in praktischer Hinsicht einen Fehler in sich schliesst.

¹⁾ Das verbreitetste astronomische Jahrbuch ist das englische, dessen vollständiger Titel lautet: „The Nautical Almanac and Astronomical Ephemeris for the year . . . for the Meridian of the Royal Observatory at Greenwich. Published by order of the lords commissioners of the admiralty. London: printed for Her Majesty's Stationery Office by Darling & Son, LTD., 1 — 3, Great. St. Thomas Apostle E. C. Price two shillings and six pence.“ Ein Appendix dazu enthält Ephemeriden von kleinen Planeten. Doch ist in letzterer Beziehung das Berliner Jahrbuch vollständiger. Dasselbe erscheint jetzt unter dem Titel: „Berliner Astronomisches Jahrbuch mit Angaben für die Oppositionen der Planeten (1) — (674) für 1910. Herausgegeben von dem Rechen-Institute der Königlichen Sternwarte zu Berlin. Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung.“ Empfehlenswerth ist auch das in Washington erscheinende Jahrbuch: „The American Ephemeris and Nautical Almanac“ und die in Paris von dem Bureau des longitudes herausgegebene „Connaissance des temps ou des mouvements célestes à l'usage des astronomes et des navigateurs.“

Es seien also:

t, t' die Beobachtungszeiten,
 α, α' die Rectascensionen,
 δ, δ' die Declinationen,
 A, A' die Rectascensionen der Sonne,
 D, D' die Declinationen der Sonne,
 R, R' die Radienvectoren der Sonne oder der Erde.

Die Sonnenörter, sowie R und R' , finden sich in jedem Jahrbuche angegeben. Man berechne nun unter Benutzung der Zech'schen Tafeln für Summen- und Differenzlogarithmen:

$$\begin{aligned}(R\varrho) &= \cos \chi = - \sin D \sin \delta - \cos D \cos \delta \cos(\alpha - A) \\(R'\varrho') &= \cos \chi' = - \sin D' \sin \delta' - \cos D' \cos \delta' \cos(\alpha' - A') \\(R\varrho') &= - \sin D \sin \delta' - \cos D \cos \delta' \cos(\alpha' - A) \\(R'\varrho) &= - \sin D' \sin \delta - \cos D' \cos \delta \cos(\alpha - A') \\(RR') &= \sin D \sin D' + \cos D \cos D' \cos(A' - A) \\(\varrho\varrho') &= \sin \delta \sin \delta' + \cos \delta \cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha).\end{aligned}$$

Es ist dann ferner, wenn der vom Planeten aus gesehene Winkelabstand zwischen Erde und Sonne in der ersten Beobachtung mit z , in der zweiten mit z' bezeichnet wird,

$$\begin{aligned}r &= \frac{R \sin \chi}{\sin z} = \frac{R' \sin \chi'}{\sin z'} \\ \varrho &= \frac{R \sin(\chi - z)}{\sin z} \\ \varrho' &= \frac{R' \sin(\chi' - z')}{\sin z'}\end{aligned}$$

und es muss nun durch Versuche derjenige Werth des Winkels z bestimmt werden, welcher den aus der Gleichung:

$$\begin{aligned}\cos(u' - u) &= (RR') \frac{\sin z \sin z'}{\sin \chi \sin \chi'} + (R\varrho') \frac{\sin z \sin(\chi' - z')}{\sin \chi \sin \chi'} \\ &+ (R'\varrho) \frac{\sin z' \sin(\chi - z)}{\sin \chi \sin \chi'} + (\varrho\varrho') \frac{\sin(\chi - z) \sin(\chi' - z')}{\sin \chi \sin \chi'}\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}\cos(u' - u) \sin \chi \sin \chi' &= (RR') \sin z \sin z' + (R\varrho') \sin z \sin(\chi' - z') \\ &+ (R'\varrho) \sin z' \sin(\chi - z) + (\varrho\varrho') \sin(\chi - z) \sin(\chi' - z')\end{aligned}$$

von $u' - u$ mit dem von $\frac{k(t' - t)}{r'^{3/2}}$ übereinstimmend macht.

Neunzehnte Vorlesung.

Directe Berechnung der Gauss'schen Constanten aus den heliocentrischen Coordinaten für den Aequator.

Wir wollen nun gleich hier für alle zukünftigen Fälle die Vorschrift entwickeln, nach welcher man aus sechs heliocentrischen Coordinaten für den Aequator, welches auch die Gestalt der Bahn sei, die Gauss'schen Constanten für den Aequator findet. Nach der zehnten Vorlesung hat man:

$$\left. \begin{aligned} ar \sin(A + \pi - \Omega + v) &= x = ar \sin(A' + v) \\ ar' \sin(A + \pi - \Omega + v') &= x' = ar' \sin(A' + v') \\ br \sin(B + \pi - \Omega + v) &= y = br \sin(B' + v) \\ br' \sin(B + \pi - \Omega + v') &= y' = br' \sin(B' + v') \\ cr \sin(C + \pi - \Omega + v) &= z = cr \sin(C' + v) \\ cr' \sin(C + \pi - \Omega + v') &= z' = cr' \sin(C' + v') \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot (1)$$

worin v und v' die wahren Anomalien in beiden Beobachtungen bedeuten und A' für die Constante $A + \pi - \Omega$, B' für $B + \pi - \Omega$, C' für $C + \pi - \Omega$ gesetzt ist. Verbindet man von diesen Gleichungen die erste mit der zweiten, die dritte mit der vierten, die fünfte mit der sechsten, einmal durch Addition, das andere Mal durch Subtraction, so erhält man folgende zur Bestimmung von a, A', b, B', c, C' aus den Coordinaten geeignete Formeln:

$$\left. \begin{aligned} a \sin[A' + \frac{1}{2}(v' + v)] &= \frac{1}{2} \left(\frac{x'}{r'} + \frac{x}{r} \right) \sec \frac{1}{2}(v' - v) \\ a \cos[A' + \frac{1}{2}(v' + v)] &= \frac{1}{2} \left(\frac{x'}{r'} - \frac{x}{r} \right) \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(v' - v) \\ b \sin[B' + \frac{1}{2}(v' + v)] &= \frac{1}{2} \left(\frac{y'}{r'} + \frac{y}{r} \right) \sec \frac{1}{2}(v' - v) \\ b \cos[B' + \frac{1}{2}(v' + v)] &= \frac{1}{2} \left(\frac{y'}{r'} - \frac{y}{r} \right) \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(v' - v) \\ c \sin[C' + \frac{1}{2}(v' + v)] &= \frac{1}{2} \left(\frac{z'}{r'} + \frac{z}{r} \right) \sec \frac{1}{2}(v' - v) \\ c \cos[C' + \frac{1}{2}(v' + v)] &= \frac{1}{2} \left(\frac{z'}{r'} - \frac{z}{r} \right) \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(v' - v) \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot (2)$$

In allen Fällen der Anwendung ist v und v' bekannt; hier, d. h. bei der Kreisbahn, ist die Grösse $v' - v$ gleich $u' - u$, und offenbar die Lage des Perihels willkürlich zu wählen; daher ist es erlaubt, das Perihel in die Mitte der beiden dargestellten Beobachtungen fallen zu lassen. Es wird hierdurch $v' = -v$, oder $\frac{1}{2}(v + v') = 0$. Auf diese Weise kommt man sehr schnell zu allen für die Berechnung einer Ephemeride nöthigen Grössen, und ohne dass man auf die auf die Ekliptik bezogenen Elemente zurückzugehen hätte.

Um aber auch Ω und i zu finden, genügt eine leichte Betrachtung. Nach dem öfter angewandten Satze von der Transformation der Coordinaten drückt sich die auf die Ekliptik bezogene z -Coordinate durch die y und z für den Aequator in der Form:

$$-y \sin \varepsilon + z \cos \varepsilon$$

oder:

$$cr \cos \varepsilon \sin(C' + v) - br \sin \varepsilon \sin(B' + v)$$

aus, worin ε die Schiefe der Ekliptik vorstellt. Um den Abstand des Ω vom Perihel zu finden, kommt es also nur darauf an, denjenigen Werth von v zu bestimmen, welcher die Grösse:

$$c \cos \varepsilon \sin(C' + v) - b \sin \varepsilon \sin(B' + v)$$

zu Null macht; dieser Werth, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, ist immer gleich $\pi - \Omega$. (Der aufsteigende Knoten ist vom niedersteigenden leicht dadurch zu unterscheiden, dass bei dem ersteren die z -Coordinate bezüglich der Ekliptik bei wachsendem v positiv wird, bei letzterem negativ.)

Man hat hiernach:

$$\frac{\sin[B' + (\delta - \pi)]}{\sin[C' + (\delta - \pi)]} = \frac{c \cos \varepsilon}{b \sin \varepsilon}$$

oder:

$$\frac{\sin[B' + (\delta - \pi)] + \sin[C' + (\delta - \pi)]}{\sin[B' + (\delta - \pi)] - \sin[C' + (\delta - \pi)]} = \frac{c \cos \varepsilon + b \sin \varepsilon}{c \cos \varepsilon - b \sin \varepsilon}$$

oder endlich $\frac{b}{c} = \operatorname{tg} q$ gesetzt,

$$\operatorname{tg} \{ \frac{1}{2} (B' + C') - (\pi - \delta) \} = \frac{\cos(\varepsilon - q)}{\cos(\varepsilon + q)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (B' - C') \quad . \quad (3)$$

Bei unserer speciellen Lage des Perihels, wie wir es zur Vereinfachung der Formeln bei der Kreisbahn annehmen durften, ist offenbar die Grösse $\pi - \delta$ identisch mit dem Abstände des Planeten vom aufsteigenden Knoten für die in die Mitte der beiden Beobachtungen fallende Zeit des Perihels.

Man hat nun ferner allgemein aus den Formeln der zehnten Vorlesung zur Berechnung der Gauss'schen Constanten

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta &= a \sin A = a \sin[A' - (\pi - \delta)] \\ - \sin \delta \cos i &= a \cos A = a \cos[A' - (\pi - \delta)] \\ \sin \delta \cos \varepsilon &= b \sin B = b \sin[B' - (\pi - \delta)] \\ \sin \delta \sin \varepsilon &= c \sin C = c \sin[C' - (\pi - \delta)] \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

woraus sich, unter Benutzung zweier dieser Gleichungen zur Controle, δ und i mit Leichtigkeit ergeben.

Zwanzigste Vorlesung.

Rechnungsbeispiel für Harmonia.

Es sollen nun die vorhergehenden Vorschriften dazu angewendet werden, eine Kreisbahn aus den folgenden geocentrischen Oertern der Harmonia:

Mittl. Berl. Zeit

$$\begin{aligned} 1864 \text{ Sept. } 21,5 & \quad . \quad . \quad \alpha = 21^\circ 29' 8'',85 \quad \delta = + 0^\circ 48' 4'',2 \\ \text{,, } 29,5 & \quad . \quad . \quad \alpha' = 19^\circ 50' 27'',45 \quad \delta' = + 0^\circ 1' 29'',6, \end{aligned}$$

welche auf den Aequator bezogen sind, zu berechnen. Schlagen wir in den Jahrbüchern noch die Rectascensionen der Sonne für dieselben Zeiten, A und A' , deren Declinationen D und D' und die $\log R$ und $\log R'$ auf, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} A &= 179^\circ 14' 39'',9, & D &= + 0^\circ 19' 39'',0, & \log R &= 0,0013202, \\ A' &= 186^\circ 27' 21'',75, & D' &= - 2^\circ 47' 35'',4, & \log R' &= 0,0003442. \end{aligned}$$

Die Formeln der achtzehnten Vorlesung geben dann folgende Rechnung¹⁾:

¹⁾ Es ist in den Rechnungsbeispielen einfach $\sin D$ für $\log \sin D$, $\cos D$ für $\log \cos D$ u. s. w. geschrieben. Die Rechnung ist zu einem Theile mit siebenstelligen Logarithmen durchgeführt worden, um wenigstens für diesen Zweck den Cosinussen kleiner Bogen dennoch hinreichende Genauigkeit für die Bestimmung des Bogens zu geben. Eine Umformung der Grundgleichung würde mehr Unbequemlichkeiten verursachen, als es der zeitweilige Gebrauch solcher Tafeln thut.

$$\begin{array}{r} \sin D = 7,7570863 \\ \sin D' = 8,6878022_n \\ \hline 6,4448885_n \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sin D = 7,7570863 \\ \sin \delta = 8,1455861 \\ \hline 5,9026724 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sin D = 7,7570863 \\ \sin \delta' = 6,6378829 \\ \hline 4,3949692 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sin D' = 8,6878022_n \\ \sin \delta = 8,1455861 \\ \hline 6,8333883_n \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sin D' = 8,6878022_n \\ \sin \delta' = 6,6378829 \\ \hline 5,3256851_n \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cos D = 9,9999929 \\ \cos D' = 9,9994838 \\ \cos (A' - A) = 9,9965507 \\ \hline 9,9960274 \\ 6,4448885_n \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Differenz} \dots 3,5511389 \\ \text{Zech} \dots \dots 0,0001221 \\ \hline \log (R R') = 9,9959053 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cos D = 9,9999929 \\ \cos \delta = 9,9999576 \\ \cos (A - \alpha) = 9,9664222_n \\ \hline 9,9663727_n \\ 5,9026724 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Differenz} \dots 4,0637003 \\ \text{Zech} \dots \dots 0,0000375 \\ \hline \log (R \varrho) = 9,9663352 \\ \chi = 22^\circ 16' 9'',9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cos D = 9,9999929 \\ \cos \delta' = 0,0000000 \\ \cos (A - \alpha') = 9,9713133_n \\ \hline 9,9713062_n \\ 4,3949692 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Differenz} \dots 5,5763370 \\ \text{Zech} \dots \dots 0,0000012 \\ \hline \log (R \varrho') = 9,9713050 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cos D' = 9,9994838 \\ \cos \delta = 9,9999576 \\ \cos (A' - \alpha) = 9,9848833_n \\ \hline 9,9843247_n \\ 6,8333883_n \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Differenz} \dots 3,1509364 \\ \text{Zech} \dots \dots 0,0003066 \\ \hline \log (R' \varrho) = 9,9846313 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cos D' = 9,9994838 \\ \cos \delta' = 0,0000000 \\ \cos (A' - \alpha') = 9,9880401_n \\ \hline 9,9875239_n \\ 5,3256851_n \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Differenz} \dots 4,6618388 \\ \text{Zech} \dots \dots 0,0000095 \\ \hline \log (R' \varrho') = 9,9875334 \\ \chi' = 13^\circ 39' 46'',1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sin \delta' = 6,6378829 \\ \sin \delta = 8,1455861 \\ \hline 4,7834690 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cos \delta' = 0,0000000 \\ \cos \delta = 9,9999576 \\ \cos (\alpha' - \alpha) = 9,9998210 \\ \hline 9,9997786 \\ 4,7834690 \end{array}$$

$$\text{Differenz} \dots 5,2163096$$

$$\text{Zech} \dots 0,0000026$$

$$\log (\varrho \varrho') = 9,9997812$$

Wir erhalten also:

$$\log \frac{(R R')}{\sin \chi \sin \chi'} = 1,0440158 \quad \log \frac{(R \varrho')}{\sin \chi \sin \chi'} = 1,0194155$$

$$\log \frac{(R' \varrho)}{\sin \chi \sin \chi'} = 1,0327418 \quad \log \frac{(\varrho \varrho')}{\sin \chi \sin \chi'} = 1,0478917,$$

und für die Fundamentalgleichung (4) der achtzehnten Vorlesung die Form:

$$\begin{aligned} \cos (v' - v) &= \cos \frac{k(t' - t)}{r^{3/2}} = (1,0440158) \sin z \sin z' \\ &+ (1,0194155) \sin z \sin (\chi' - z') + (1,0327418) \sin (\chi - z) \sin z' \\ &+ (1,0478917) \sin (\chi - z) \sin (\chi' - z'), \end{aligned}$$

wobei die eingeschlossenen Zahlen schon die Logarithmen der Zahlenfactoren vorstellen.

Eine Probe mit dem Werthe $r = 2,3$ (als einem der kleinsten, der bei einem Asteroid zwischen Jupiter und Mars nach der Erfahrung zu erwarten steht und demnach also einer Art von Grenze für die Versuche entsprechend) führt auf die folgenden Zahlen:

$\log R \sin \chi = 9,5799162$	$\log R' \sin \chi' = 9,3736377$
$\log 2,3 = 0,3617278$	$\log 2,3 = 0,3617278$
$\sin z = 9,2181884$	$\sin z' = 9,0119099$
$z = 9^\circ 30' 46'',05$	$z' = 5^\circ 53' 57'',40$
$1,0440158$	$1,0194155$
$\log \sin z = 9,2181884$	$\log \sin z = 9,2181884$
$\log \sin z' = 9,0119099$	$\log \sin (\chi' - z') = 9,1306071$
$9,2741141$	$9,3682110$
$\text{numerus} = 0,18798108$	$0,23345920$
$1,0327418$	$1,0478917$
$\log \sin (\chi - z) = 9,3440191$	$\log \sin (\chi - z) = 9,3440191$
$\log \sin z' = 9,0119099$	$\log \sin (\chi' - z') = 9,1306071$
$9,3886708$	$9,5225179$
$\text{numerus} = 0,24472074$	$0,33305649$

$$\begin{aligned} \cos (v' - v) &= \cos (u' - u) = 0,18798108 + 0,23345920 + 0,24472074 \\ &+ 0,33305649 = 0,99921751; \quad v' - v = 2^\circ 16' 1'',1. \end{aligned}$$

Es ist aber $\frac{k(t' - t)}{r^{3/2}}$ für diese Hypothese gleich $2^\circ 15' 37'',76$, also der Fehler derselben gleich $2^\circ 16' 1'',1 - 2^\circ 15' 37'',76 = 23'',34$. Macht man den zweiten Versuch mit einem um fünf Einheiten der dritten Stelle vergrößerten Werthe von $\log r$ oder, was dasselbe ist, mit um ebensoviel verminderten Werthen von $\log \sin z$ und $\log \sin z'$, so erhält man durch eine Rechnung von derselben Art $u' - u = v' - v = 2^\circ 13' 18'',7$; $\frac{k(t' - t)}{r^{3/2}} = 2^\circ 13' 18'',43$, als Fehler der Hypothese $\pm 0'',27$. Die fünf Einheiten der

dritten Stelle des Logarithmus haben demnach den Fehler der Hypothese um $-23'',07$ geändert, eine solche Einheit wird also darauf einen Einfluss von $-4'',61$ haben. Man wird daraus ohne Mühe schliessen, dass $\log r = 0,366757$ sehr nahe der richtige Werth sein wird, welchen wir, ohne unseren Zweck zu verfehlen, als definitiven annehmen können. Es entsprechen demselben für q und q' : $\log q = 0,135864$, $\log q' = 0,127842$.

Die bekannten Vorschriften geben dann:

$$\begin{array}{lll} x = 2,275101 & y = 0,487526 & z = 0,013385 \\ x' = 2,255862 & y' = 0,567980 & z' = 0,049352 \end{array}$$

Wie schon bemerkt wurde, kann man die Formeln (2) der neunzehnten Vorlesung bei der Kreisbahn so zur Anwendung bringen, dass man das ganz willkürliche Perihel in die Mitte der beiden Beobachtungen verlegt, wobei dann das gleich nachher zu findende $\pi - \Omega$ mit dem Argumente der Breite für jene Epoche identisch wird. Ausserdem ist noch, weil $r' = r$ ist, ar , br , cr constant, daher man bei der Kreisbahn einfacher:

$$\begin{array}{l} 2ar \sin A' = (x' + x) \sec \frac{1}{2}(v' - v) \\ 2ar \cos A' = (x' - x) \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(v' - v) \\ \text{u. s. w.} \end{array}$$

schreiben kann. Da für den definitiven Werth von z oder von r :

$$\frac{k(t' - t)}{r^{3/2}} = 2^{\circ} 13' 17'',62$$

ist, also $\frac{1}{2}(v' - v) = 1^{\circ} 6' 38'',81$, so findet man durch leichte Rechnung:

$$\begin{array}{ll} \log ar = 0,365414 & A' = 102^{\circ} 21' 8'',68 \\ \log br = 0,330654 & B' = 14 \ 16 \ 18,81 \\ \log cr = 9,967648 & C' = 1 \ 56 \ 13,30 \end{array}$$

mit welchen Grössen wir sofort eine Ephemeride berechnen könnten. Denn bezeichnen wir für irgend eine Zeit den vom Planeten seit jener Epoche des Perihels zurückgelegten Bogen oder das Product von $\frac{k}{r^{3/2}}$ mit der Zeit durch w , so werden die heliocentrischen Coordinaten des Planeten allgemein durch:

$$\begin{array}{l} x = ar \sin(A' + w) \\ y = br \sin(B' + w) \\ z = cr \sin(C' + w) \end{array}$$

gegeben sein. Mit diesen brauchte man nur auf bekannte Art die Sonnencoordinaten aus den Jahrbüchern zu verbinden, um den zugehörigen geocentrischen Ort zu finden.

Es bedürfte zu dem Berechnen der Ephemeride, wie in den ähnlichen Fällen, welche der Leser später kennen lernen wird, noch nicht einmal der Ermittlung des Argumentes der Breite, indem A' schon gleich $A + \pi - \Omega$, $B' = B + \pi - \Omega$, $C' = C + \pi - \Omega$. Da es aber ein Interesse hat, auch die auf die Ekliptik bezogenen Elemente zu finden, so machen wir noch von den Formeln (3) und (4) der neunzehnten Vorlesung Gebrauch. Wird die Schiefe der Ekliptik oder ε gleich $23^{\circ} 27' 14'',8$, aus den Jahrbüchern für 1864 entnommen, so ist

$$\operatorname{tg} q = \frac{b}{c} = \frac{br}{cr} = \operatorname{tg} 66^{\circ} 33' 46'',8,$$

also:

$$\begin{array}{l} \varepsilon - q = -43^{\circ} 6' 32'',0 \\ \varepsilon + q = 90^{\circ} 1' 1'',6, \end{array}$$

und wir erhalten:

$$\frac{1}{2}(B' + C') - (\pi - \Omega) = 90^{\circ} 6' 56'',17$$

oder:

$$\pi - \Omega = \text{Arg. der Breite} = 277^{\circ} 59' 19'',88,$$

zum Sept. 25,5 gehörig, hieraus:

$$A = A' - (\pi - \Omega) = 184^{\circ} 21' 48'',80$$

$$\Omega = 94^{\circ} 20' 58'',4$$

$$i = 4^{\circ} 31' 0'',0.$$

Diese Genauigkeit genügt, um zu beurtheilen, ob die Kleinheit von i vielleicht nöthigt, bei der Berechnung einer elliptischen Bahn die Bestimmung aus drei vollständigen Beobachtungen, welches die bequemere ist, zu verlassen.

Einundzwanzigste Vorlesung.

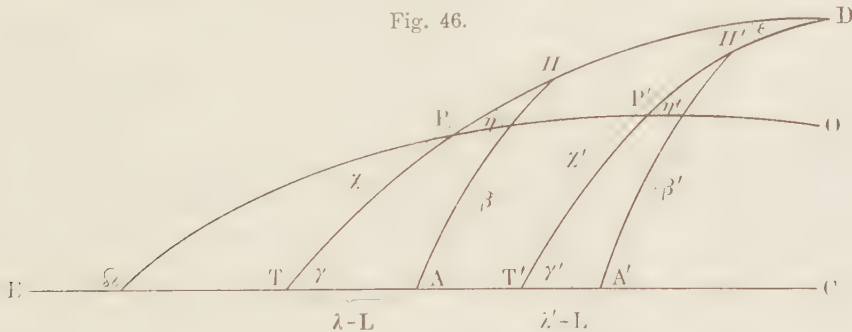
Die Gauss'sche Methode zur Berechnung einer Kreisbahn¹⁾.

Das Verfahren von Gauss, an zwei vollständige Beobachtungen eines Planeten eine Kreisbahn anzuschliessen, gewährt für die Ekliptik eine sehr bequeme Rechnung.

Wir beginnen damit, uns die Lage der Bahnebene gegen die Ekliptik, sowie die Bedingungen der Aufgabe, noch auf eine andere Art in Fig. 46 zu versinnlichen.

Es sei EC der die Ekliptik vorstellende grösste Kreis der Himmelskugel, T und T' seien die Oerter der Erde auf derselben, d. h. diejenigen Punkte der Sphäre, auf welche die Radienvectoren der Erde in den beiden Beobachtungen gerichtet sind. Durch jede vollständige Beobachtung wird die Richtung oder eine Gerade, auf welcher der

Fig. 46.



Planet sich zur Zeit der Beobachtung befinden muss, völlig bekannt, demnach auch die Lage der Ebene, welche durch diese Gerade und den Radius vector der Erde in derselben Beobachtung gelegt werden kann. Diese Ebenen für die erste und die zweite Beobachtung werden in der Figur durch die grössten Kreise TD und $T'D$, welche sich in D schneiden, vorgestellt. Es sei $\Omega PP'O$ die Bahnebene des Planeten, in der Ω der aufsteigende Knoten, in der Ekliptik, P und P' die heliocentrischen Oerter des Planeten in beiden Beobachtungen seien. Die geocentrischen Oerter in der Fig. 46 mit II und II' bezeichnet, fallen offenbar ebenfalls in die grössten Kreise TD und $T'D$. Man kann ferner noch leicht bemerken, dass der Bogen TP nichts Anderes ist, als der Winkel,

¹⁾ Der Verfasser verdankt diese Methode den mündlichen Mittheilungen von Gauss, bei Gelegenheit eines Auftrages zur Untersuchung der Bahn der *Eunomia*.

Hat man diese Vorbereitungsrechnungen beendigt, so erhält man für jede Hypothese über den Werth von r oder den Abstand des Planeten von der Sonne sofort die Bogen DP und DP' , aus denen man dann in Verbindung mit dem von ihnen eingeschlossenen Winkel ε die Seite PP' des Dreiecks $PP'D$, d. h. den heliocentrischen Bogen PP' , welcher, wenn die Hypothese richtig ist, gleich $\frac{k(t' - t)}{r^{1/2}}$ sein soll, bestimmen kann. Denn ein Blick auf die Fig. 46 zeigt, dass:

$$DP = DT - PT = DT - (\chi - z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$DP' = DT' - P'T' = DT' - (\chi' - z') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

während nach dem Früheren:

$$\sin z = \frac{R \sin \chi}{r}$$

$$\sin z' = \frac{R' \sin \chi'}{r}$$

wobei wieder R und R' die Radien vectoren der Erde vorstellen.

Setzen wir der Kürze halber:

$$\text{Winkel } DPO = \eta,$$

$$,, \quad DP'O = \eta',$$

so haben wir wieder nach den Gauss'schen trigonometrischen Formeln:

$$\sin \frac{1}{2} PP' \sin \frac{1}{2} (\eta' + \eta) = \sin \frac{1}{2} \varepsilon \sin \frac{1}{2} (DP + DP') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$\cos \frac{1}{2} PP' \sin \frac{1}{2} (\eta' - \eta) = \sin \frac{1}{2} \varepsilon \cos \frac{1}{2} (DP + DP') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$\sin \frac{1}{2} PP' \cos \frac{1}{2} (\eta' + \eta) = \cos \frac{1}{2} \varepsilon \sin \frac{1}{2} (DP - DP') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$\cos \frac{1}{2} PP' \cos \frac{1}{2} (\eta' - \eta) = \cos \frac{1}{2} \varepsilon \cos \frac{1}{2} (DP - DP') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

aus denen PP' , η' und η sich ergeben. Die beiden letzteren Grössen η und η' gewinnen erst Interesse, wenn man den definitiven Werth von r gefunden hat, weshalb es vorthellhaft ist, dieselben aus den Versuchen zu eliminiren. Man addire zu dem Zwecke die Gleichungen (11) und (13), nachdem man auf beiden Seiten in das Quadrat erhoben hat, wodurch sich ergibt:

$$\sin \frac{1}{2} PP'^2 = \sin \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin \frac{1}{2} (DP + DP')^2 + \cos \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin \frac{1}{2} (DP - DP')^2 \quad . \quad (15)$$

(während kaum nöthig scheint, zu bemerken, dass sich der Exponent 2 nicht auf die in Klammern stehenden Bogen, sondern auf das Quadriren des Sinus bezieht).

Hat man die definitive Lösung gefunden, so rechnet man nach den Formeln (9) bis (12), so dass auch η und η' bekannt werden. Wieder ein Blick auf Fig. 46 zeigt uns, wie die drei Elemente δ , i und der Abstand vom Knoten bei der ersten Beobachtung oder das Argument der Breite u durch Auflösung des Dreiecks $P\delta T$ zu finden sind. In diesem ist offenbar:

$$\text{Winkel } P\delta T = i = \text{Neigung der Bahnebene zur Ekliptik,}$$

$$\delta P = u$$

$$\delta T = (L - \delta),$$

und da auch Winkel $\delta PT = \eta$,

$$PT\delta = 180^\circ - \gamma,$$

$$PT = \chi - z,$$

so ist nach den Dreiecksformeln:

$$\sin \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} [u + (L - \delta)] = \sin \frac{1}{2} (\chi - z) \sin \frac{1}{2} (\gamma + \eta) \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

$$\sin \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} [u + (L - \delta)] = \cos \frac{1}{2} (\chi - z) \sin \frac{1}{2} (\gamma - \eta) \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

$$\cos \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} [u - (L - \delta)] = \sin \frac{1}{2} (\chi - z) \cos \frac{1}{2} (\gamma + \eta) \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

$$\cos \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} [u - (L - \delta)] = \cos \frac{1}{2} (\chi - z) \cos \frac{1}{2} (\gamma - \eta) \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Zur Controle der Rechnung dient die Uebereinstimmung des i oder der Neigung, wie sie aus (14) und (15) und aus $\sin \frac{1}{2} i$ folgt, mit der aus (16) und (17) und aus $\cos \frac{1}{2} i$.

Zu weiterer Sicherung der Richtigkeit kann man noch das Dreieck $\triangle P'T'$ zur Bestimmung der Elemente verwenden.

Man hat danach auch:

$$\sin \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} [u' + (L' - \Omega)] = \sin \frac{1}{2} (\chi' - z') \sin \frac{1}{2} (\gamma' + \eta') \quad . \quad (20)$$

$$\sin \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} [u' + (L' - \Omega)] = \cos \frac{1}{2} (\chi' - z') \sin \frac{1}{2} (\gamma' - \eta') \quad . \quad (21)$$

$$\cos \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} [u' - (L' - \Omega)] = \sin \frac{1}{2} (\chi' - z') \cos \frac{1}{2} (\gamma' + \eta') \quad . \quad (22)$$

$$\cos \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} [u' - (L' - \Omega)] = \cos \frac{1}{2} (\chi' - z') \cos \frac{1}{2} (\gamma' - \eta') \quad . \quad (23)$$

Das Argument der Breite in der zweiten Beobachtung, u' , muss noch der Bedingung genügen, dass $u' - u = PP' = \frac{k(t' - t)}{r^{\frac{3}{2}}}$ wird, wie es immer der Fall sein wird, wenn die Rechnung vorher in allen Theilen scharf geführt worden ist.

Zweiundzwanzigste Vorlesung.

Rechnungsbeispiel für die Gauss'sche Methode zur Bestimmung einer Kreisbahn.

Auf die in der zwanzigsten Vorlesung gegebenen Oerter der Harmonia wollen wir jetzt die Gauss'schen Vorschriften aus der vorigen Vorlesung zur Anwendung bringen, nachdem wir sie, wie in der neunten Vorlesung gelehrt wurde, in Länge und Breite verwandelt haben. Der Werth von ε oder der Schiefe der Ekliptik findet sich in den astronomischen Jahrbüchern für die Beobachtungszeiten zu $23^\circ 27' 14'',8$ angegeben. Die Verwandlung des ersten geocentrischen Ortes in Länge und Breite gestaltet sich dann wie folgt:

$\alpha = 21^\circ 29' 8'',8$	$\delta = + 0^\circ 48' 4'',2$
$\log \sin \alpha = 9,563802$	$\log \sin (M + \varepsilon) = 9,969367$
$\log \cos \delta = 9,999958$	$\log m = 9,564076$
$\log m \sin M = 9,563760$	$\log \frac{1}{\cos \beta} = 0,003872$
$\log \sin \delta = \log m \cos M = 8,145586$	$\log \sin \lambda = 9,537315$
$\log \tan M = 1,418174$	$\lambda = 20^\circ 9' 26'',5$
$M = 87^\circ 48' 48'',9$	Controle der Verwandlung
$\log \sin M = 9,999684$	$\log \cos \alpha = 9,968720$
$\log m = 9,564076$	$\log \cos \delta = 9,999958$
$\varepsilon = 23^\circ 27' 14'',8$	$\log \cos \delta \cos \alpha = 9,968678$
$\log \cos (M + \varepsilon) = 9,559578_n$	$\log \cos \lambda = 9,972550$
$\log \sin \beta = 9,123654_n$	$\log \cos \beta = 9,996128$
$\beta = -7^\circ 38' 22'',2$	$\log \cos \beta \cos \lambda = 9,968678$

Durch dieselbe Verwandlung erhält man für die zweite Beobachtung:

$$\lambda' = 18^{\circ} 19' 29'',7$$

$$\beta' = - 7^{\circ} 44' 26'',1.$$

Ferner wird:

$$1864, \text{ Sept. } 21,5: L = 359^{\circ} 10' 37'',1 \quad \log R = 0,001320$$

$$\text{Sept. } 29,5: L' = 7^{\circ} 1' 55'',8 \quad \log R' = 0,000344$$

und nach Formel (1) und (2) der einundzwanzigsten Vorlesung:

$$\begin{array}{rcl} \log \operatorname{tg} \beta & & 9,127527_n \quad \log \sin \beta = 9,123665_n \\ \log \sin(\lambda - L) & & 9,553942 \quad \log \sin \gamma = 9,545069_n \\ \hline \log \operatorname{tg} \gamma & & 9,573585_n \quad \log \sin \chi = 9,578596 \\ \gamma & = - & 20^{\circ} 32' 12'',2 \quad \chi = 22^{\circ} 16' 10'',0 \\ & & \log \cos \beta = 9,996128 \\ & & \log \cos(\lambda - L) = 9,970208 \\ & & \hline & & 9,966336 \\ & & \log \cos \chi = 9,966335. \end{array}$$

Durch eine Rechnung dieser Art für den zweiten geocentrischen Ort wird nach Formel (3) und (4):

$$\gamma' = - 34^{\circ} 45' 56'',9 \quad \chi' = 13^{\circ} 39' 45'',1,$$

und da:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}(L' - L) = 3^{\circ} 55' 39'',35 \\ \frac{1}{2}(\gamma' + \gamma) = - 27^{\circ} 39' 4'',55 \\ \frac{1}{2}(\gamma' - \gamma) = - 7^{\circ} 6' 52'',35, \end{array}$$

so wird die weitere Rechnung für ε , TD und $T'D$ nach der Formel (5) bis (8) die folgende:

$$\begin{array}{ll} \sin \frac{1}{2}(L' - L) = 8,835664 & \sin \frac{1}{2}(L' - L) \sin \frac{1}{2}(\gamma' + \gamma) = 8,502265_n \\ \cos \frac{1}{2}(L' - L) = 9,998979 & \cos \frac{1}{2}(L' - L) \sin \frac{1}{2}(\gamma' - \gamma) = 9,091887_n \\ \sin \frac{1}{2}(\gamma' + \gamma) = 9,666601_n & \sin \frac{1}{2}(L' - L) \cos \frac{1}{2}(\gamma' + \gamma) = 8,782994 \\ \cos \frac{1}{2}(\gamma' + \gamma) = 9,947330 & \cos \frac{1}{2}(L' - L) \cos \frac{1}{2}(\gamma' - \gamma) = 9,995622 \\ \sin \frac{1}{2}(\gamma' - \gamma) = 9,092908_n & \operatorname{tg} \frac{1}{2}(DT + DT') = 9,410378 \\ \cos \frac{1}{2}(\gamma' - \gamma) = 9,996643 & \frac{1}{2}(DT + DT') = 194^{\circ} 25' 38'',07 \\ & \sin \frac{1}{2}\varepsilon = 9,105803. \end{array}$$

In Betreff des Quadranten, in welchem $\frac{1}{2}(DT + DT')$ und $\frac{1}{2}(DT - DT')$ zu nehmen sind, kann man sich an die Regel halten, dass $\frac{1}{2}\varepsilon$ im ersten Quadranten liegen soll, also $\sin \frac{1}{2}\varepsilon$ und $\cos \frac{1}{2}\varepsilon$ positiv werden müssen.

Es wird ferner:

$$\begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(DT - DT') = 8,787372 \\ \frac{1}{2}(DT - DT') = 3^{\circ} 30' 25'',65 \\ \cos \frac{1}{2}\varepsilon = 9,996436. \end{array}$$

Eine Controle der Auflösung des Dreiecks besteht darin, dass $\sin \frac{1}{2}\varepsilon$ und $\cos \frac{1}{2}\varepsilon$ einander entsprechend gefunden werden; dies ist hier der Fall. Man erhält

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}\varepsilon = 7^{\circ} 19' 48'',41 \\ DT = 197 \ 56 \ 3,72 \\ DT' = 190 \ 55 \ 12,42. \end{array}$$

Hiermit sind die Vorbereitungsrechnungen erledigt. Macht man nun einen Versuch mit der Hypothese:

$$r = 2,3,$$

so ergibt sich für z und z' die Rechnung:

$\begin{aligned} \log R &= 0,001320 \\ \sin \chi &= 9,578596 \\ \log \frac{1}{r} &= 9,638272 \\ \hline \sin z &= 9,218188 \\ z &= 9^\circ 30' 46'',0 \\ \chi - z &= 12^\circ 45' 24'',0 \\ \text{und nach (9) und (10) } DP &= \\ DT - (\chi - z) &= 185^\circ 10' 39'',7 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \log R' &= 0,000344 \\ \sin \chi' &= 9,373285 \\ \log \frac{1}{r} &= 9,638272 \\ \hline \sin z' &= 9,011901 \\ z' &= 5^\circ 53' 57'',0 \\ \chi' - z' &= 7^\circ 45' 48'',1 \\ DP' &= DT' - (\chi' - z') \\ &= 183^\circ 9' 24'',3. \end{aligned}$
--	---

Da es wahrscheinlich, dass die Hypothese nicht gleich genügen wird, also die Grössen η und η' in den Gleichungen (11) bis (14) vorläufig ohne Bedeutung sind, kommt zunächst Formel (15) zur Anwendung:

$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} \varepsilon &= 9,105803 \\ \sin \frac{1}{2} (DP + DP') &= 8,861341_n \\ &\quad 7,967144_n \\ \times 2 &= 5,934288 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2} \varepsilon &= 9,996436 \\ \sin \frac{1}{2} (DP - DP') &= 8,246379 \\ &\quad 8,242815 \\ \times 2 &= 6,485630 \\ &\quad 5,934288 \\ \hline \text{Differenz} &\dots 0,551342 \\ \text{Zech} &\dots 0,107539 \\ \hline &6,593169 \\ \times \frac{1}{2} &= \sin \frac{1}{2} P = 8,296584 \end{aligned}$
--	--

$$\frac{1}{2} PP' = 1^\circ 8' 3'',55$$

$$PP' = 2^\circ 16' 7'',10.$$

$\log k(t' - t)$ ist, wie in der zwanzigsten Vorlesung, gleich 4,453096, also $\log k(t' - t) - \frac{3}{2} \log r = 4,453096 - 0,542592 = 3,910504$,

$$\frac{k(t' - t)}{r^{3/2}} = 8137'',74 = 2^\circ 15' 37'',74,$$

und demnach:

$$PP' - \frac{k(t' - t)}{r^{3/2}} = + 29'',36.$$

Führt man die Rechnung für eine Hypothese, worin $\log r$ um fünf Einheiten der dritten Stelle grösser als in der vorigen, d. h. gleich 0,366728 angenommen wird, so erhält man:

$$PP' - \frac{k(t' - t)}{r^{3/2}} = - 2'',31.$$

Die Aenderung von fünf Einheiten in der dritten Stelle des Logarithmus von r hat demnach eine Aenderung von $31'',67$ in jener Differenz bewirkt, eine solche Einheit bringt also eine Aenderung von $6'',83$ hervor. Um den Fehler von $-2'',31$ zu beseitigen, wird man den entsprechenden Werth von $\log r$ um 0,000277 verkleinern, also

$$\log r = 0,366363 \quad r = 2,324679^1)$$

¹⁾ In der zwanzigsten Vorlesung wurde $\log r = 0,366757$ gefunden; der Unterschied gegen den obigen Werth rührt daher, dass $v' - v$ in der 20. Vorlesung durch den Cosinus nur auf einige Secunden genau berechnet werden konnte.

setzen müssen, welches Letztere wir ohne Bedenken als definitive Lösung behandeln können. Es werden daher die definitiven Werthe von z und z' :

$$z = 9^{\circ} 24' 39'', 13$$

$$z' = 5^{\circ} 50' 10'', 78,$$

Dadurch wird:

$$DP = 185^{\circ} 4' 32'', 85$$

$$DP' = 183^{\circ} 5' 38'', 10$$

$$\frac{1}{2}(DP + DP') = 184^{\circ} 5' 5'', 47$$

$$\frac{1}{2}(DP - DP') = 0^{\circ} 59' 27'', 37,$$

auf welche Zahlen nun die Formeln (11) bis (14) in folgender Rechnung zur Anwendung kommen:

$$\sin \frac{1}{2}(DP + DP') = 8,852686_n \quad \sin \frac{1}{2} PP' \sin \frac{1}{2}(\eta' + \eta) = 7,958489_n$$

$$\cos \frac{1}{2}(DP + DP') = 9,998895_n \quad \sin \frac{1}{2} PP' \cos \frac{1}{2}(\eta' + \eta) = 8,234337$$

$$\sin \frac{1}{2}(DP - DP') = 8,237901 \quad \cos \frac{1}{2} PP' \sin \frac{1}{2}(\eta' - \eta) = 9,104698_n$$

$$\cos \frac{1}{2}(DP - DP') = 9,999935 \quad \cos \frac{1}{2} PP' \cos \frac{1}{2}(\eta' - \eta) = 9,996371$$

$$\sin \frac{1}{2} \varepsilon = 9,105803$$

$$\cos \frac{1}{2} \varepsilon = 9,996436$$

Es ergibt sich (ohne Zweideutigkeit, weil $\sin \frac{1}{2} PP'$ und $\cos \frac{1}{2} PP'$ positiv werden muss):

$$\frac{1}{2}(\eta' + \eta) = - 27^{\circ} 55' 0'', 59$$

$$\frac{1}{2}(\eta' - \eta) = - 7^{\circ} 18' 46'', 00$$

$$\eta = - 20^{\circ} 36' 14'', 59$$

$$\eta' = - 35^{\circ} 13' 46'', 59$$

$$\frac{1}{2} PP' = 1^{\circ} 6' 44'', 24$$

$$PP' = 2^{\circ} 13' 28'', 48$$

$$\frac{k(t' - t)}{r^{\frac{3}{2}}} = 2^{\circ} 13' 28'', 50,$$

ferner wird die Rechnung der Gleichungen (16) bis (19) der vorigen Vorlesung in folgender Weise erledigt:

$$\frac{1}{2}(\gamma + \eta) = - 20^{\circ} 34' 13'', 39$$

$$\frac{1}{2}(\gamma - \eta) = + 0^{\circ} 2' 1'', 19$$

$$\frac{1}{2}(\chi - z) = 6^{\circ} 25' 45'', 43$$

$$\sin \frac{1}{2}(\gamma + \eta) = 9,545750_n \quad \sin \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2}[u + (L - \odot)] = 8,584879_n$$

$$\cos \frac{1}{2}(\gamma + \eta) = 9,971388 \quad \sin \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2}[u + (L - \odot)] = 6,766302$$

$$\sin \frac{1}{2}(\gamma - \eta) = 6,769042 \quad \cos \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2}[u - (L - \odot)] = 9,020517$$

$$\cos \frac{1}{2}(\gamma - \eta) = 0,000000 \quad \cos \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2}[u - (L - \odot)] = 9,997260$$

$$\sin \frac{1}{2}(\chi - z) = 9,049129$$

$$\cos \frac{1}{2}(\chi - z) = 9,997260$$

also:

$$\frac{1}{2}[u + (L - \odot)] = 270^{\circ} 51' 0'', 67$$

$$\frac{1}{2}[u - (L - \odot)] = 6^{\circ} 1' 20'', 94$$

$$\frac{1}{2} i = 2^{\circ} 15' 18'', 28$$

oder:

$$u = 276^{\circ} 52' 21'', 61$$

$$L - \odot = 264^{\circ} 49' 39'', 73$$

und also:

$$\odot = 94^{\circ} 20' 57'', 37$$

$$i = 4^{\circ} 30' 36'', 56.$$

Zur Controle berechnet man endlich u' , Ω und i auch aus (20) bis (23) auf dieselbe Art und erhält:

$$\begin{aligned} u' &= 279^\circ 5' 50'',28 \\ \Omega &= 94^\circ 20' 57'',20 \\ i &= 4^\circ 30' 36'',52, \end{aligned}$$

es ist demnach hier $u' - u = 2^\circ 13' 28'',67$, nahe mit dem Früheren übereinstimmend, die stattfindende Abweichung von $0'',17$ wird durch die Abweichung in Ω bei der geringen Neigung so gut wie vollständig aufgehoben und unwirksam gemacht.

Nach Dr. Powalky, welcher die Bahn der Harmonia auf das Sorgfältigste bestimmt hat, ist $\Omega = 93^\circ 35' 58'',8$, $i = 4^\circ 15' 54'',8$.

Zum Schluss dieser Abtheilung sei noch auf die Unmöglichkeit einer Kreisbahn hingewiesen, wenn gewisse Umstände eintreten. Wie schon auf S. 222 gesagt wurde, ist die Annahme einer Kreisbahn für stark excentrische Bahnen unzulässig. Dass aber auch für Bahnen mit schwacher Excentricität keine Kreisbahn existiren kann, wenn die geocentrische Bewegung in Breite gewisse Grenzen überschreitet, hat Tisserand im Bull. astron. T. XII, p. 53, 1895, bewiesen. Setzt man in der Gleichung (4), S. 229,

$$r^2 \cos(u' - u) = (RR')RR' + (R\varrho')R\varrho' + (R'\varrho)R'\varrho + (\varrho\varrho')\varrho\varrho',$$

die aus den Gleichungen (3) und (4), S. 225, folgenden Werthe für ϱ und ϱ' ein, nämlich:

$$\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \chi} - R \cos \chi \\ \varrho' &= \sqrt{r^2 - R'^2 \sin^2 \chi'} - R' \cos \chi', \end{aligned}$$

und setzt

$$u' - u = k(t' - t)r^{-3/2},$$

so folgt:

$$\begin{aligned} r^2 \cos \frac{k(t' - t)}{r^{3/2}} &= (RR')RR' + (R\varrho')R \left\{ \sqrt{r^2 - R'^2 \sin^2 \chi'} - R' \cos \chi' \right\} \\ &\quad + (R'\varrho)R' \left\{ \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \chi} - R \cos \chi \right\} \\ &\quad + (\varrho\varrho') \left\{ \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \chi} - R \cos \chi \right\} \left\{ \sqrt{r^2 - R'^2 \sin^2 \chi'} - R' \cos \chi' \right\}. \end{aligned}$$

In dieser transcendenten Gleichung kommen nur die trigonometrischen Functionen der Seiten und Diagonalen des Vierecks zwischen den beiden Planeten und den beiden Erdörtern vor. Nimmt man die Erdbahn als Kreisbahn an mit dem Radius 1, so muss $r = 1$ die der Erdbahn entsprechende Wurzel der Gleichung sein. Setzt man voraus, dass $t' - t$ klein ist und dass der Planet in der Nähe der Opposition und zugleich in der Nähe der Ekliptik steht, setzt man ferner $R = R' = 1$ und berücksichtigt in der Entwicklung der Gleichung nur die ersten Potenzen der Bogen, so findet man, dass bei einer, gewisse Grenzen überschreitenden Bewegung in Breite, r imaginär wird, also eine Kreisbahn unmöglich ist. Wegen Einzelheiten muss auf die citirte Abhandlung verwiesen werden.

Dritte Abtheilung.

Die Bestimmung der parabolischen Bahnen von Kometen.

Dreiundzwanzigste Vorlesung.

Einleitende Bemerkungen über die Kometenbahnen. Wiedererkennen früher erschienener Kometen.

Die in der zweiten Abtheilung vorgetragenen Methoden zur Berechnung einer Kreisbahn, welche gelegentlich der Entdeckung neuer Planeten schätzbare Dienste leisten können (obgleich sie im Allgemeinen nicht ermöglichen würden, einen solchen Himmelskörper nach seinem zweiten Stationärwerden und Unsichtbarwerden in der Abenddämmerung in einer nächstfolgenden Erscheinung zwischen unzähligen Sternen desselben Aussehens wieder aufzusuchen), erweisen sich gänzlich unbrauchbar bei den Kometen, einer ihrer physischen Erscheinung nach noch immer sehr räthselhaften Classe von Gestirnen, die nach Keppler's Ausdrucksweise zahlreicher ist, als die Fische im Ocean. Ihre Bahnen vertreten den Grenzfall der Ellipse, wo dieselbe zur Parabel übergeht, so ausserordentlich nahe, dass selbst aus längeren Beobachtungsreihen eine Abweichung nur in den selteneren Fällen festzustellen ist. Es kann daher immer ohne alles Bedenken, bis die Beobachtungen mit Entschiedenheit eine Abweichung von der Parabel und dass der Komet zu den sogenannten periodischen gehört, verrathen, die Excentricität $e = 1$, also der Excentricitätswinkel $\varphi = 90^\circ$ gesetzt werden, womit, wie dem Leser aus der ersten Abtheilung bekannt, die Bewegung in der Parabel ausgedrückt wird. Somit bleiben noch die folgenden fünf Elemente zu bestimmen übrig:

- T die Epoche des Perihels,
- π die Länge des Perihels,
- Ω die Länge des aufsteigenden Knotens,
- i die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik,
- q der Abstand von der Sonne im Perihel;

es sind daher auch fünf von einander unabhängige Data nöthig, wie sie z. B. in zwei vollständigen Beobachtungen und einer unvollständigen, in drei Rectascensionen und zwei Declinationen oder drei Längen und zwei Breiten enthalten sind. Die gebräuchlichste Methode für solche Rechnungen wendet, aus Gründen, welche der Leser weiter unten kennen lernen wird, drei vollständige Beobachtungen, d. h. drei geocentrische Längen und Breiten an, worin nach dem eben Gesagten ein überflüssiges Datum enthalten ist.

Wir haben in den obigen fünf Elementen zwar nur eine einzige Unbekannte mehr als bei der Kreisbahn, aber dieser Umstand war genügend, die Berechnung einer parabolischen Bahn, nicht bloss für das Zeitalter Newton's, welcher zuerst die parabolische Natur der Kometenbahnen verkündete, sondern noch für fast das ganze vorige Jahrhundert zu einer ausserordentlich schwierigen und zeitraubenden Aufgabe zu machen. Als *problema longe difficillimum* bezeichnet sie Newton, und obgleich er selbst und seine Nachfolger, die grossen Mathematiker des 18. Jahrhunderts, unter Anderen A. Lambert, Euler, Legendre, Laplace, Lösungen des Problems gegeben haben, so genügte doch keine darunter dem praktischen Bedürfniss. Erst die im Jahre 1796 von Olbers erfundene Methode, deren Darstellung einen wichtigen Theil dieses Werkes bilden wird, besiegte auf überraschend einfache Art alle Schwierigkeiten. Bevor wir zur Auseinandersetzung von Principien übergehen, welche mit besonderer Leichtigkeit auf die Olbers'sche Methode führen, erscheint es zweckmässig, noch Einiges über das praktische Bedürfniss, welchem die Kometenberechnung zu genügen hat, zu sagen.

Ein nächstliegender Zweck bei solcher Bahnbestimmung ist, wie bei allen anderen Untersuchungen dieser Art, die Ableitung einer Ephemeride, durch welche man den Lauf des Kometen und seine Helligkeit (soweit dieselbe von reflectirtem Sonnenlicht herrührt und sich nach bekannten Gesetzen richtet) in den Hauptzügen für den ganzen Verlauf der Erscheinung voraussehen kann. Es ist dies um so wünschenswerther, als gerade der geocentrische Lauf der Kometen viel zu verwickelt und reich an Wendungen ist, als dass man ihn ohne Ephemeride auch nur einigermaassen beurtheilen könnte¹⁾.

Es ist gar nicht selten, dass ein Komet gegen die Zeit seines Perihels durch die Annäherung an die Sonne und weil er nur bei Tage über dem Horizont ist, unsichtbar wird, nach dem Perihel aber mit zuweilen gänzlich verändertem Glanze und Aussehen wieder auftaucht, wie dies unter vielen bei den berühmten Kometen der Jahre 1770 und 1811 der Fall war.

Ein anderes wichtiges Interesse bietet die Vergleichung der Elemente eines neu erscheinenden Kometen mit denen früher berechneter, weil sie den besten Anhalt bei der Beantwortung der Frage liefert, ob der neue Komet mit einem anderen identisch sei. Ein Verzeichniss der Bahnelemente aller bekannten Kometen, bis in die neueste Zeit fortgeführt, findet man in mehreren Büchern, die sich mit den Kometen näher beschäftigen²⁾.

Je grösser die Uebereinstimmung von zwei Elementensystemen ist (wobei natürlich das Element T oder die Perihelzeit nicht in Betracht kommt), desto grösser ist auch die Wahrscheinlichkeit der Identität der Kometen. Hier wird also die Berechnung des ganzen Elementensystems erfordert. Wenn es hingegen nur darauf ankommt, zu wissen,

¹⁾ Gauss sagt daher in der Stelle der Vorrede der *Theoria motus corporum coelestium*, wo Newton's Entdeckung, dass die Kometen sich in Parabeln bewegen, besprochen wird: *Cometaeque usque ad illum diem semper indomiti, vel si devicti videbantur mox seditiosi et rebelles, frena sibi injici passi, atque ex hostibus hospites redditi, iter suum in tramitibus a calculo delineatis prosequuti sunt etc. etc.*

²⁾ So in der dritten Ausgabe der hier schon oft citirten Olbers'schen Abhandlung: „Dr. Wilhelm Olbers' Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Kometen zu berechnen. Mit Berichtigung und Erweiterung der Tafeln im Jahre 1847 von Neuem herausgegeben von J. F. Encke, Director der Berliner Sternwarte. Dritte Ausgabe, vermehrt mit einem Anhang, die Fortsetzung und Ergänzung des Kometenverzeichnisses bis zum Jahre 1864 enthaltend. Von Dr. J. G. Galle, Professor der Astronomie und Director der Sternwarte in Breslau. Mit dem Bildnisse von Olbers und einer Figurentafel. Leipzig, Voigt u. Günther 1864. Schliesslich: „Verzeichniss der Elemente der bisher berechneten Kometenbahnen nebst Anmerkungen und Literaturnachweisen, neu bearbeitet, ergänzt und fortgesetzt bis zum Jahre 1891 von Dr. J. G. Galle, Geh. Regierungsrath Professor der Astronomie und Director der Sternwarte zu Breslau. Verlag von Wilhelm Engelmann.

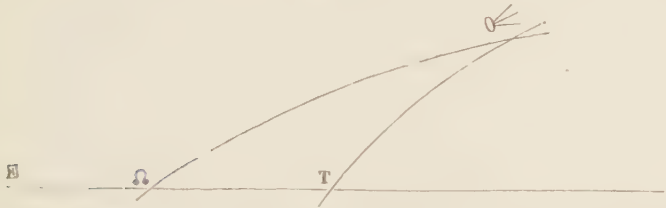
ob ein eben entdeckter Komet mit einem, dessen Wiederkehr ins Perihel ungefähr um dieselbe Zeit erwartet wird, identisch sein könne, so reicht dazu schon eine einzige vollständige Beobachtung und das Verfahren der folgenden Vorlesung aus. Es versteht sich übrigens noch von selbst, dass die Bahn eines Kometen, welcher von Zeit zu Zeit in sein Perihel zurückkehrt, elliptisch sein müsse, wie denn ja der Satz, dass die Kometenbahnen Parabeln seien, nicht in aller Strenge gelten kann.

Vierundzwanzigste Vorlesung.

Kriterium aus einer vollständigen Beobachtung eines neu erschienenen Kometen, ob derselbe mit einem erwarteten identisch sein kann.

Jede vollständige Beobachtung liefert auch die Lage einer geraden Linie, in welcher der Himmelskörper zur Zeit der Beobachtung sich befinden muss, vollständig; die Lage der Bahnebene eines erwarteten Kometen ist gleichfalls durch dessen Knoten und Neigung gegeben, also auch der Punkt des Raumes, in welchem jene Gesichtslinie die Bahnebene schneidet. Soll nun die Vermuthung, dass die Beobachtung dem erwarteten Kometen angehört, einige Festigkeit erhalten und nicht gleich ganz zu widerlegen sein, so ist vor allen Dingen nöthig, dass der genannte Schnittpunkt nicht bloss in die Bahnebene, sondern auch in die Bahnlinie des erwarteten Körpers falle. Hierin besteht das

Fig. 47.



einfache Princip des Kriteriums, welchem sich nun leicht die folgende Formel geben lässt.

Es sei wieder, in Erinnerung der einundzwanzigsten Vorlesung der zweiten Abtheilung in Fig. 47 EC

die Ekliptik, Ω der aufsteigende Knoten der Bahn des erwarteten Kometen, T der Ort der Erde, $T \angle$ der Winkel, welchen der Radius vector R der Erde mit dem Radius vector r des Kometen macht, ferner wieder der sphärische Winkel $\angle TC = \gamma$, wie in der genannten Vorlesung. Bedeutet auch λ die geocentrische Länge, β die Breite, welche die Beobachtung ergeben hat, L die Länge der Erde, so ist, wie früher:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(\lambda - L)}$$

$$\sin \chi = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

und:

$$\cos \chi = \cos \beta \cos(\lambda - L).$$

Der sphärische Winkel $\angle \Omega T$ ist offenbar gleich i ; wir haben demnach durch Auflösen des Dreiecks $\angle \Omega T$ nach den Gauss'schen Formeln, wenn $\angle \angle = u =$ Argument der Breite, $T \angle = \chi - z$, Winkel $\angle \angle T = \eta$ gesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} \eta \sin \frac{1}{2} (u + \chi - z) &= \sin \frac{1}{2} (L - \Omega) \sin \frac{1}{2} (\gamma + i) \\ \sin \frac{1}{2} \eta \cos \frac{1}{2} (u + \chi - z) &= \cos \frac{1}{2} (L - \Omega) \sin \frac{1}{2} (\gamma - i) \\ \cos \frac{1}{2} \eta \sin \frac{1}{2} [u - (\chi - z)] &= \sin \frac{1}{2} (L - \Omega) \cos \frac{1}{2} (\gamma + i) \\ \cos \frac{1}{2} \eta \cos \frac{1}{2} [u - (\chi - z)] &= \cos \frac{1}{2} (L - \Omega) \cos \frac{1}{2} (\gamma - i) \end{aligned} \right\} \dots (A)$$

Nachdem aus diesen Formeln die Grössen u und z , d. h. das Argument der Breite und derjenige Winkel, welcher am Kometen von den Richtungen nach der Sonne und nach der Erde gebildet, bestimmt worden, ergibt sich die wahre Anomalie v des Kometen auf doppelte Weise, denn einmal ist:

$$r = \frac{q}{\cos \frac{1}{2} v^2} = \frac{R \sin \chi}{\sin z}$$

oder:

$$\cos \frac{1}{2} v^2 = \frac{q \sin z}{R \sin \chi},$$

wenn q den bekannten Perihelabstand des erwarteten Kometen vorstellt, anderentheils aber auch:

$$\pi - \Omega + v = u$$

oder:

$$v = u - (\pi - \Omega),$$

wobei $\pi - \Omega$ dem Elementensystem desselben Gestirnes zu entnehmen ist. Beide Werthe von v müssen übereinstimmen, es muss also die Gleichung:

$$\cos \frac{1}{2} [u - (\pi - \Omega)]^2 = \frac{q \sin z}{R \sin \chi}$$

ganz oder doch sehr nahe erfüllt sein, wenn die Möglichkeit und sogar Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtung dem erwarteten Kometen angehöre, bestehen bleiben soll.

Bei Bahnen von kürzerer Umlaufzeit kann es zuweilen erforderlich sein, den Ausdruck von r in der Ellipse zu wählen. Man berechnet in solchem Falle:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} [u - (\pi - \Omega)]$$

und es muss dann:

$$\cos \frac{1}{2} [u - (\pi - \Omega)]^2 = \frac{q \sin z}{R \sin \chi} \cos \frac{1}{2} E^2 (B)$$

sein.

Erstes Rechnungsbeispiel.

Man erwartete im Jahre 1835 den Halley'schen Kometen zurück; gesetzt, man wäre über die Zeit seines Periheldurchganges sehr unsicher gewesen, so wäre die Frage aufzuwerfen und zu beantworten gewesen, ob folgende von Bessel in Königsberg angestellte Beobachtung:

Aug. 25: 14^h 44' 19" mittl. Zeit Rectasc. = 86° 17' 7",7 Decl. = + 24° 2' 56",8 sich auf den Halley'schen Kometen beziehen kann.

Verwandelt man den Ort in Länge und Breite und auf Berliner Zeit, indem man den Meridianunterschied zwischen der Königsberger und der Berliner Sternwarte: 0^h 28' 24" von der Beobachtungszeit subtrahirt, so wird der zu prüfende Ort:

Aug. 25: 14^h 15' 55" oder Aug. 25,594387: $\lambda = 86^\circ 36' 30",6$, $\beta = + 0^\circ 37' 51",6$. Für diese Zeit findet man die (mit Aberration behaftete) Länge der Sonne aus dem Berliner Jahrbuche für 1835 gleich 152° 4' 36",4, also die Länge der Erde:

$$L = 332^\circ 4' 36",4, \log R = 0,004406.$$

Den Einfluss der Aberration können wir noch bei einer Rechnung, wie die gegenwärtige, vernachlässigen, zumal der Einfluss der durch die Planeten erlittenen Störungen viel bedeutender ist.

Die weitere Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned} \gamma &= 0^\circ 41' 36",9 \\ \chi &= 114 \quad 31 \quad 28 \quad 0. \end{aligned}$$

Nach der sehr sorgfältigen Bahnbestimmung von Rosenberger war für die Erscheinung des Halley'schen Kometen in 1759 $\delta = 53^{\circ} 50' 27''$ $\pi - \delta = 110^{\circ} 39' 59''$ $i = 162^{\circ} 36' 52''$, wobei zu berücksichtigen, dass das Aequinoctium das mittlere vom 13. März 1759 ist. Für die Erscheinung von 1835 (genauer für die Zeit des Perihels und das mittlere Aequinoctium des 7. November) giebt Rosenberger jene Grössen wie folgt an:

$$\begin{aligned}\delta &= 55^{\circ} 11' 21'',4 \\ \pi - \delta &= 110 \ 40 \ 22 \ 7 \\ i &= 162 \ 16 \ 35 \ 5,\end{aligned}$$

und diese Werthe wollen wir daher bei Beantwortung der uns gestellten Frage zu Grunde legen.

Es wird demnach $\frac{1}{2}(\gamma + i) = 81^{\circ} 29' 6'',2$, $\frac{1}{2}(\gamma - i) = -80^{\circ} 47' 29'',3$, $\frac{1}{2}(L - \delta) = 138^{\circ} 26' 37'',5$ und die Gleichungen (A) ergeben:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[u + (\chi - z)] &= 221^{\circ} 36' \ 5'',6 \\ \frac{1}{2}[u - (\chi - z)] &= 140 \ 38 \ 26'',3 \\ u &= 2 \ 14 \ 31'',9 \\ \chi - z &= 80 \ 57 \ 39'',3 \\ z &= 33 \ 33 \ 48'',7.\end{aligned}$$

Den Gleichungen (A) genügen zwar auch Werthe von u und $(\chi - z)$, welche um 180° grösser sind; diese letzteren werden indessen durch die Betrachtung ausgeschlossen, dass der Komet nothwendig bei nördlicher geocentrischer Breite auch nördliche heliocentrische Breite gehabt haben, mit anderen Worten: dass $u < 180^{\circ}$ gewesen sein muss; desgleichen ist $\chi - z$ als Winkel in einem ebenen Dreieck in diese Grenzen $0^{\circ} - 180^{\circ}$ eingeschlossen, und es bleibt somit nur die angegebene Lösung übrig. Bei dem Halley'schen Kometen ist noch ferner:

$$\begin{aligned}e &= 0,967684 \\ \log q &= 9,766799,\end{aligned}$$

und da nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{1}{2}[u - (\pi - \delta)] = \frac{1}{2}v = -53^{\circ} 42' 55'',4,$$

so wird:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}E &= 9^{\circ} 54' 6'',0 \\ \log \cos \frac{1}{2}[u - (\pi - \delta)]^2 &= 9,544344 \\ \log \frac{q \sin z}{R \sin \chi} \cos \frac{1}{2}E^2 &= 9,533034.\end{aligned}$$

Bei dieser Uebereinstimmung der rechten und linken Seite der Gleichung (B) konnte die Identität des von Bessel beobachteten Kometen mit dem Halley'schen schon nach der einen Beobachtung als sehr wahrscheinlich gelten.

Zweites Rechnungsbeispiel.

Die Bahnen der Kometen von 1264 und 1556 zeigen einige Aehnlichkeit mit einander; man hat aus den allerdings nicht sehr sicheren Beobachtungen gefunden, für den Kometen von 1264:

$$\pi - \delta = 275^{\circ} 45' 0'', \delta = 178^{\circ} 45' 0'', i = 30^{\circ} 25' 0'', \log q = 9,61364,$$

bezogen auf das mittlere Aequinoctium von 1264,0 und für den von 1556:

$$\pi - \delta = 262^{\circ} 49' 6'', \delta = 176^{\circ} 29' 6'', i = 36^{\circ} 39' 12'', \log q = 9,78254,$$

bezogen auf das mittlere Aequinoctium von 1556,0.

Waren die beiden Kometen identisch, so durfte man die Wiederkehr im Jahre 1848, und mit Berücksichtigung des Umstandes, dass im gegenwärtigen Falle die von den grossen Planeten verursachten Störungen die Wiederkehr um einige Jahre verzögern mussten, gegen Mitte der 50er Jahre dieses Jahrhunderts erwarten. Konnte nach einer einzigen, und zwar der folgenden Beobachtung: 1855, Juni 4, $10^h 30'$ mittlerer Göttinger Zeit, Rectasc. = $104^{\circ} 20'$, Decl. $36^{\circ} 30'$ zu urtheilen, ein am 3. Juni 1855 von Donati zu Florenz entdeckter Komet wohl der erwartete sein?

Durch eine Transformation, wie die frühere, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{Juni 4: } 10^h 43' 49'' \text{ mittlerer Berliner Zeit} &= \text{Juni 4,4471 } \lambda = 78^{\circ} 11' 6'' \\ \beta &= + 13^{\circ} 37' 37''. \end{aligned}$$

Zur selbigen Zeit ist die Länge der Erde $L = 253^{\circ} 38' 30''$ und $\log R = 0,00642$. Die Berechnung von γ und χ ergiebt:

$$\begin{aligned} \gamma &= 108^{\circ} 5' 42'' \\ \chi &= 165^{\circ} 38' 58''. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Quadranten, in welchen γ und χ liegen, trägt auch hier die Bemerkung bei, dass nicht nur $\chi < 180^{\circ}$ werden muss, sondern auch die Gleichung $\cos \chi = \cos \beta \cos(\lambda - L)$ erfüllt sein, also da $\cos \beta$ nothwendig positiv ist, $\cos \chi$ mit $\cos(\lambda - L)$ gleiches Vorzeichen haben muss. Die Formeln (A) rechnen wir mit den Elementen von 1556 als den wahrscheinlich sicherer bestimmten, wobei wir indessen nicht vergessen dürfen, dass wir auf das Aequinoctium der Beobachtung angenähert reduciren müssen. Durch die Präcession seit 1556 wächst Ω um $4^{\circ} 10' 30''$; es ist also das reducirte $\Omega = 180^{\circ} 39' 36''$; die sehr viel kleineren Aenderungen, welche auch $\pi - \Omega$ und i durch die Präcession erfahren, können wir hier, ebenso wie die Nutation, vernachlässigen. Wir setzen demnach $L - \Omega = 72^{\circ} 58' 54''$, $\gamma + i = 144^{\circ} 44' 54''$, $\gamma - i = 71^{\circ} 26' 30''$, $\frac{1}{2}(L - \Omega) = 36^{\circ} 29' 27''$; $\frac{1}{2}(\gamma + i) = 72^{\circ} 22' 27''$, $\frac{1}{2}(\gamma - i) = 35^{\circ} 43' 15''$, und erhalten dann aus den Formeln (A):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[u + (\chi - z)] &= 50^{\circ} 22' 12'' \\ \frac{1}{2}[u - (\chi - z)] &= 15 \quad 25 \quad 24 \\ u &= 65 \quad 47 \quad 36 \\ \chi - z &= 34 \quad 56 \quad 48 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} z &= 130 \quad 42 \quad 10 \\ u - (\pi - \Omega) &= 162 \quad 58 \quad 30 \\ \frac{1}{2}[u - (\pi - \Omega)] &= 81 \quad 29 \quad 15 \\ \log \cos \frac{1}{2} v^2 &= 8,34068 \\ \log \frac{q \sin z}{R \sin \chi} &= 0,26165. \end{aligned}$$

In diesem Falle zeigen sich die Zahlen, auf deren Vergleichung es ankommt, gänzlich verschieden; die Gleichung (B) ist nicht erfüllt und es konnte deshalb die Identität des neu entdeckten Kometen mit dem von 1556 entschieden verneint werden.

Fünfundzwanzigste Vorlesung.

Vorbereitende Bemerkungen zu der Methode von Olbers.

Für das Problem der Bahnbestimmung von Kometen, nicht weniger auch für die Planeten, ist die Bemerkung von der grössten Wichtigkeit, dass der Aufgabe alle ihre Schwierigkeiten genommen sind, sobald man für zwei in Zeit hinreichend verschiedene Beobachtungen die Entfernungen der Himmelskörper von der Erde kennt. Denn aus diesen Grössen, für die wir mit Beibehaltung der früheren Bezeichnung wieder q und q'' setzen, ergeben sich, wie schon in der zweiten Abtheilung ausführlich gezeigt wurde, die beiden zugehörigen Radienvectoren r und r'' , die heliocentrischen Längen und Breiten l, b, l'', b'' , und der durch die heliocentrische Bewegung in dem Zeitintervall $t'' - t$ zurückgelegte Bogen, d. h. die Differenz der wahren Anomalien $v'' - v$. Nun haben wir aber für die Parabel nach der fünften Vorlesung:

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \cos \frac{1}{2} v = \frac{1}{\sqrt{r}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \cos \frac{1}{2} v'' = \frac{1}{\sqrt{r''}}$$

oder, wenn wir diese Gleichungen einmal zu einander addiren, das andere Mal von einander subtrahiren:

$$\frac{2}{\sqrt{q}} \cdot \cos \frac{1}{4} (v'' + v) \cos \frac{1}{4} (v'' - v) = \frac{1}{\sqrt{r''}} + \frac{1}{\sqrt{r}}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{q}} \cdot \sin \frac{1}{4} (v'' + v) \sin \frac{1}{4} (v'' - v) = \frac{1}{\sqrt{r''}} - \frac{1}{\sqrt{r}},$$

demnach:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{q}} \cdot \sin \frac{1}{4} (v'' + v) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sqrt{r''}} \right) \operatorname{cosec} \frac{1}{4} (v'' - v) \\ \frac{1}{\sqrt{q}} \cdot \cos \frac{1}{4} (v'' + v) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r''}} \right) \sec \frac{1}{4} (v'' - v) \end{aligned} \right\} \dots \dots (I)$$

Diese Gleichungen liefern den Perihelabstand q und die halbe Summe der wahren Anomalien $\frac{1}{2} (v'' + v)$, welche letztere mit der schon bekannten Differenz $\frac{1}{2} (v'' - v)$ verbunden, die beiden wahren Anomalien selbst giebt. Aus v folgt mittelst der Barker'schen Tafel das zugehörige M , also auch der zeitliche Abstand der ersten Beobachtung vom Perihel; auf dieselbe Art ergibt v'' die Epoche des Perihels.

Was die Elemente $\delta, \pi - \delta, i$ betrifft, so hat man schon nach dem Früheren:

$$\sin b = \sin i \sin (v + \pi - \delta)$$

$$\sin b'' = \sin i \sin (v'' + \pi - \delta),$$

welche Gleichungen, addirt und subtrahirt, i und $\pi - \delta$ finden lassen. Für die Berechnung von δ hat man:

$$\operatorname{tg} (l - \delta) = \cos i \operatorname{tg} (v + \pi - \delta)$$

und auch:

$$\operatorname{tg} (l'' - \delta) = \cos i \operatorname{tg} (v'' + \pi - \delta).$$

Man ersieht hieraus, wie in Wirklichkeit die ganze Aufgabe, die fünf Bahnelemente eines Kometen zu finden, darauf zurückgeführt werden kann, die zwei Unbekannten q

und ϱ'' zu bestimmen, ganz ähnlich, wie bei der Kreisbahn die in ihr vorkommenden vier Elemente leicht zu berechnen waren, sobald man ϱ kannte. Im gegenwärtigen Falle haben wir eine Unbekannte mehr, als bei der Kreisbahn, und entsprechend auch eine Bedingungsgleichung mehr. Denn während bei der Kreisbahn für das den beiden Beobachtungen geometrisch genügende r die Bewegungsbedingung, oder, wie man zu sagen pflegt, die phoronomische Bedingung $\frac{k(t' - t)}{r^{3/2}} = v' - v$ zu erfüllen war, haben wir bei der Parabel erstlich der phoronomischen Bedingung für die Parabel aus der achten Vorlesung:

$$(r + r'' + \varkappa)^{3/2} - (r + r'' - \varkappa)^{3/2} = 6k(t' - t),$$

worin \varkappa die beide Radienvectoren verbindende Sehne bedeutet, zu genügen, zweitens aber auch noch von einer weiteren Beobachtung die eine Coordinate darzustellen. Die eben angeführte Gleichung ist uns schon unter dem Namen der Lambert'schen bekannt.

Es stände uns somit der Weg offen, die beiden Abstände von der Erde ϱ und ϱ'' durch Versuche so zu bestimmen, dass sowohl der Lambert'schen Gleichung, als auch der einen Coordinate der Rectascension oder Declination, der Länge oder der Breite einer, am besten in die Mitte der Epochen t und t' fallenden Beobachtung genügt wird. Es ist dies auch in Wirklichkeit eine der empfehlenswerthesten Methoden für die Verbesserung eines schon nahe bekannten Elementensystems; für den Fall jedoch, welchen wir hier zu behandeln haben, in welchem wir gänzliche Unkenntniß aller Bestimmungsstücke der Bahn voraussetzen, würde ein solches Tatonnement über zwei Unbekannte meistens eine erschreckend lange Rechnung verursachen. Dieser zu entgehen und die Versuche von ähnlicher Einfachheit, wie bei der Kreisbahn, zu haben, müssten wir wie dort eine Relation zwischen ϱ und ϱ'' haben, welche Alles auf die eine Unbekannte ϱ reducirt.

Wir werden nun in der folgenden Vorlesung sehen, wie in Wirklichkeit das Verhältniss $\frac{\varrho''}{\varrho}$ unmittelbar durch die Data dreier vollständiger Beobachtungen und die Zeitintervalle mit genügender Schärfe ausgedrückt werden kann; wir können also dann aus ϱ allein die Grössen r, r'', \varkappa berechnen und den Werth suchen, welcher durch Befriedigung der Lambert'schen Gleichung sich als den richtigen zu erkennen giebt.

Sechszwanzigste Vorlesung.

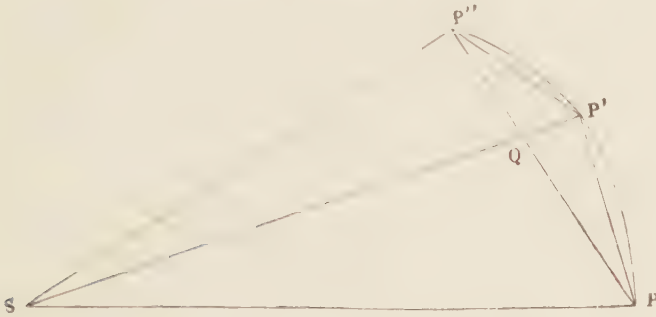
Ableitung des Olbers'schen Ausdruckes für das Verhältniss von zwei Distanzen von der Erde ϱ und ϱ'' .

Eine solche Vereinfachung der Bestimmung von noch gänzlich unbekannten Bahnelementen, wie wir sie jetzt vornehmen wollen, wird durch eine in der Praxis regelmässig von der Natur gebotene Erleichterung ermöglicht, die darin besteht, dass die der ersten Berechnung zu Grunde zu legenden Beobachtungen niemals durch sehr grosse Zeitintervalle von einander getrennt sind. Es ist z. B. erfahrungsmässig selten, dass man genöthigt wäre, das Zeitintervall zwischen zwei benachbarten Beobachtungen zur

Bahnbestimmung grösser als zehn Tage zu wählen, obgleich meistens mit Nutzen für die zu erhaltende Näherung ein grösseres angewendet werden kann. Der eben erwähnte Umstand nun erlaubt eine der einfachsten, angenähertsten und nützlichsten unter den vielen nicht ganz strengen Voraussetzungen, zu denen man zur Abkürzung dieser sonst sehr zeitraubenden Rechnungen zu greifen pflegt.

Es sei in Fig. 48 S die Sonne, $\overline{PP'P''}$ ein Stück der Bahn irgend eines Himmelskörpers um die Sonne, mag dieselbe parabolisch oder elliptisch sein. SP oder r , SP'

Fig. 48.



oder r' , SP'' oder r'' seien drei Radienvektoren, entsprechend den Zeiten t, t', t'' ; Q der Durchschnitt des mittleren dieser Radienvektoren mit der die Punkte P und P'' verbindenden Sehne. Betrachten wir nun das Verhältniss eines der von zwei Radienvektoren und einer Sehne gebildeten Dreiecke zu dem ihm entsprechenden

Sector, so bemerken wir leicht, dass dasselbe für mässig grosse Zeiten immer der Einheit sehr nahe bleiben wird; wir dürfen uns daher erlauben, für das Verhältniss:

$$\frac{\Delta SP'P''}{\Delta SP'P}$$

das Verhältniss der Sektoren:

$$\frac{\text{Sector } SP'P''}{\text{Sector } SP'P},$$

welches letztere aber bekanntlich gleich:

$$\frac{t'' - t'}{t' - t}$$

ist, zu setzen. Ausserdem haben aber die mit einander verglichenen Dreiecke $SP'P''$ und $SP'P$ die gemeinschaftliche Basis SP' ; sie verhalten sich demnach wie QP'' zu QP , woraus denn die für die Olbers'sche Methode fundamentale Bemerkung folgt, dass die Sehne zwischen den beiden äusseren Oertern sowohl bei den Kometen, als bei der Erde, vom mittleren Radius vector sehr nahe im Verhältniss der Zwischenzeiten geschnitten werde. Es ist auch leicht zu erkennen, dass dies ganz besonders nahe der Fall sein wird, wenn die Zwischenzeiten gleich sind, d. h. $t'' - t' = t' - t$ ist.

Führen wir nun die Constrution der Fig. 48 noch einmal, sowohl für die drei Oerter eines Kometen in seiner Bahn C, C', C'' , als auch für die drei zugehörigen Oerter der Erde T, T', T'' durch, und verbinden den Schnittpunkt der Erdsehne zwischen dem ersten und dritten Orte Q mit dem entsprechenden q der Kometenbahn, Fig. 49, so lässt sich sogleich eine sehr wichtige Eigenschaft der Richtung dieser Verbindungslinie und der Lage einer Ebene, auf welcher sie senkrecht steht, nachweisen.

Es ist nämlich klar, dass, wenn man sowohl die drei Punkte C, q, C'' der Kometenbahn, als auch die entsprechenden T, Q, T'' der Erdbahn auf eine solche Ebene rechtwinklig projicirt, die Verbindungslinie Qq als Punkt erscheinen und folgende Figur entstehen wird (Fig. 50).

In dieser sind nun aber, wenn man die oben gemachte Annahme, dass die Sehne der Erdbahn von dem mittleren Radius vector in demselben Verhältniss geschnitten

werde, wie die Kometensehne, beibehält, die Dreiecke QTC und $QT''C''$ ähnlich; denn es verhält sich:

$$\overline{QT''} : \overline{QT} = \overline{QC''} : \overline{QC}$$

d. h.

$$\overline{QT''} : \overline{qC''} = \overline{QT} : \overline{qC},$$

da durch eine solche Projection das Verhältniss der projecirten Stücke offenbar nicht geändert wird, und ausserdem ist Winkel $CQT = \text{Winkel } C''QT''$.

Es ist also CT parallel $T''C''$, oder die auf diese Ebene projecirten Verbindungslinien zwischen Erde und Komet für die erste und dritte Beobachtung sind sich diametral entgegengesetzt. Demnach würden die geocentrischen Oerter des Kometen in der ersten und dritten Beobachtung, wenn sie für eine solche Ebene als Fundamentelebene transformirt würden, die beiden Längencoordinaten 180° von einander differirend ergeben. Diese auf eine andere Fundamentelebene als die Ekliptik bezogenen Längen

Fig. 49.

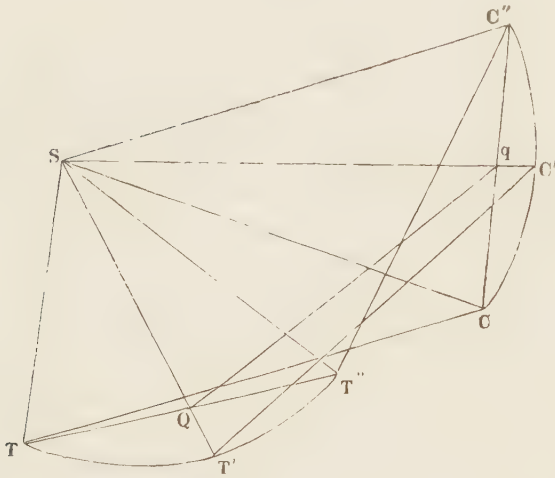
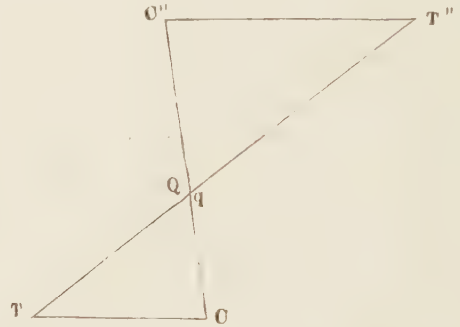


Fig. 50.



wollen wir im Folgenden der Kürze halber die Quasilängen, die zugehörigen Breitencoordinaten die Quasibreiten nennen. Die Richtung der Linie Qq in Fig. 49 ist der Pol

einer solchen Fundamentelebene; er muss also, da die Quasilängen der ersten und dritten Beobachtung um 180° verschieden sind, nothwendig auf einem den ersten und dritten geocentrischen Ort verbindenden grössten Kreise der Sphäre liegen. Die Richtung von Qq liegt aber offenbar auch, da sie einen Punkt des Radius vectors der Erde in der zweiten Beobachtung, mit einem Punkte des entsprechenden Radius vectors des Kometen verbindet, in einer durch diese beiden Radienvectoren, oder auch durch die Linien ST' und $T'C'$ in Fig. 49 gelegten Ebene. Allen in diese Ebene fallenden Richtungen entspricht aber der durch den geocentrischen Ort und den Sonnenort in der zweiten Beobachtung gelegte grösste Kreis der Sphäre. Die Richtung von Qq , d. h. der Pol der Fundamentelebene, für welche die Fig. 50 in Beziehung auf die Projectionen gültig ist, liegt also auf dem Durchschnitte zweier grösster Kreise, wovon der eine die gegebenen geocentrischen Oerter der ersten und dritten Beobachtung, der andere den zweiten geocentrischen Ort und den zugehörigen Sonnenort verbindet. Diese Richtung ist also zu bestimmen; denken wir uns letzteres Geschäft ausgeführt, so haben wir aus Fig. 50:

$$\overline{C''T''} = \frac{l'' \cdot l'}{l' - l} \cdot \overline{CT},$$

worin $\overline{C''T''}$ und \overline{CT} die Projectionen der Distanzen q'' und q bedeuten. Bezeichnen

wir die Quasibreiten für diese Fundamentalebene mit (β) und (β'') , so hat man

$$\overline{CT} = \varrho \cos(\beta), \quad \overline{C''T''} = \varrho'' \cos(\beta''),$$

demnach

$$\varrho'' \cos(\beta'') = \frac{t'' - t'}{t' - t} \varrho \cos(\beta),$$

d. h.

$$\frac{\varrho''}{\varrho} = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\beta'')} \cdot \frac{t'' - t'}{t' - t} \cdot \dots \dots \dots (2)$$

Um zu einer einfachen Relation zwischen ϱ'' und ϱ zu gelangen, an der uns aus bekannten Gründen so viel gelegen ist, haben wir jetzt nur noch $\cos(\beta)$ und $\cos(\beta'')$ zu entwickeln. Es sind diese Grössen auch die Sinus der Abstände des geocentrischen Ortes vom Pole der Fundamentalebene, oder vom Durchschnitte der genannten grössten Kreise. In Fig. 51

Fig. 51.



denken wir uns die drei geocentrischen Oerter des Kometen in C, C', C'' und den Sonnenort der zweiten Beobachtung in S

auf einen Himmelsglobus aufgetragen und die beiden grössten Kreise durch C und C'' , S und C' construiert; der Durchschnitt beider sei q . Dann ist:

$$\frac{\cos(\beta)}{\cos(\beta'')} = \frac{\sin q C}{\sin q C''}.$$

Werden noch die Bogen grösster Kreise SC und SC'' gezogen, so hat man ferner:

$$\frac{\sin q C}{\sin S C} = \frac{\sin C S q}{\sin C q S}$$

$$\frac{\sin q C''}{\sin S C''} = \frac{\sin C'' S q}{\sin C'' q S},$$

also

$$\frac{\sin q C}{\sin q C''} = \frac{\sin S C}{\sin S C''} \frac{\sin C S q}{\sin C'' S q} \cdot \dots \dots \dots (3)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich unmittelbar durch die drei geocentrischen Längen und Breiten des Kometen $\lambda, \beta, \lambda', \beta', \lambda'', \beta''$ und durch die Länge der Sonne in der zweiten Beobachtung, \odot' , ausdrücken. Bedeuten nämlich $\gamma, \gamma', \gamma''$ die Winkel, welche die durch SC, SC', SC'' gelegten grössten Kreise mit der Ekliptik bilden, so wird:

$$\begin{aligned} \text{Winkel } CSq &= \gamma' - \gamma \\ \text{„ } C''Sq &= \gamma'' - \gamma' \\ \frac{\sin CSq}{\sin C''Sq} &= \frac{\sin(\gamma' - \gamma)}{\sin(\gamma'' - \gamma')} = \frac{\sin \gamma' \cos \gamma - \cos \gamma' \sin \gamma}{\sin \gamma'' \cos \gamma' - \cos \gamma'' \sin \gamma'}. \end{aligned}$$

Es ist aber nach Früherem (einundzwanzigste Vorlesung):

$$\begin{aligned} \sin \chi &= \sin S C = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \\ \sin \chi'' &= \sin S C'' = \frac{\sin \beta''}{\sin \gamma''} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin (\lambda - L')} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin [\lambda - (\odot' + 180^\circ)]} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin (\odot' - \lambda)} \\ \operatorname{tg} \gamma' &= \frac{\operatorname{tg} \beta'}{\sin (\odot' - \lambda')} \\ \operatorname{tg} \gamma'' &= \frac{\operatorname{tg} \beta''}{\sin (\odot' - \lambda'')} \end{aligned}$$

Die Gleichung (3) geht dadurch in die folgende über:

$$\begin{aligned} \frac{\sin q C}{\sin q C''} &= \frac{\sin \beta}{\sin \beta''} \cdot \frac{\sin \gamma''}{\sin \gamma'} \cdot \frac{\sin \gamma' \cos \gamma - \cos \gamma' \sin \gamma}{\sin \gamma'' \cos \gamma' - \cos \gamma'' \sin \gamma'} \\ &= \frac{\sin \beta}{\sin \beta''} \cdot \frac{\sin \gamma' \cotg \gamma - \cos \gamma'}{\cos \gamma' - \sin \gamma' \cotg \gamma''} \\ &= \frac{\sin \beta}{\sin \beta''} \cdot \frac{\cotg \gamma - \cotg \gamma'}{\cotg \gamma' - \cotg \gamma''} \\ &= \frac{\cos \beta}{\cos \beta''} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta' \sin (\lambda - \odot') - \operatorname{tg} \beta \sin (\lambda' - \odot')}{\operatorname{tg} \beta'' \sin (\lambda' - \odot') - \operatorname{tg} \beta' \sin (\lambda'' - \odot')}, \end{aligned}$$

oder, wenn man der Kürze halber:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta'}{\sin (\lambda' - \odot')} = m$$

setzt, und endlich in der Gleichung (2) den hier für $\frac{\cos(\beta)}{\cos(\beta'')}$ gefundenen Ausdruck substituirt:

$$\frac{q''}{q} = \frac{t'' - t'}{t' - t} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \beta''} \cdot \frac{m \sin (\lambda - \odot') - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta'' - m \sin (\lambda'' - \odot')} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (4)$$

Es ergibt sich hiernach zu jedem Werthe von q sogleich das zugehörige q'' , also auch r und r'' und die Sehne \varkappa , die einzigen Grössen, welche in der Lambert'schen Gleichung ausser dem bekannten $6k(t'' - t)$ eine Rolle spielen, und es bleibt nur noch übrig, sich für die über q anzustellenden Versuche bequem einzurichten.

Siebenundzwanzigste Vorlesung.

Die Olbers'sche Methode zur Berechnung einer Kometenbahn in verschiedenen Formen.

Der Schwerpunkt der Olbers'schen Methode liegt in der Gleichung (4), welche durch die Annahme erlangt wurde, dass die Sehne der Erdbahn zwischen dem ersten und dritten Orte vom zweiten Radius vector in demselben Verhältnisse, wie bei dem Kometen, speciell in dem der Zeitintervalle $t'' - t$ und $t' - t$, geschnitten werde, was in den Fällen praktischer Anwendung immer äusserst nahe richtig ist. Der weitere Gang der Operationen kann mannigfaltig modificirt werden. Eine der einfachsten und kunstlosesten Arten, die Versuche über q anzustellen, würde darin bestehen, dass man die heliocentrischen Coordinaten des Kometen, hier bezogen auf die Ekliptik, also, unter Anwendung früherer Bezeichnung, die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \beta \cos \lambda - R \cos \odot, & x'' &= \varrho'' \cos \beta'' \cos \lambda'' - R'' \cos \odot'', \\ y &= \varrho \cos \beta \sin \lambda - R \sin \odot, & y'' &= \varrho'' \cos \beta'' \sin \lambda'' - R'' \sin \odot'', \\ z &= \varrho \sin \beta, & z'' &= \varrho'' \sin \beta'', \end{aligned}$$

$$\kappa^2 = (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2,$$

$$r^2 = R^2 + \varrho^2 + 2(R\varrho)R\varrho, \quad r''^2 = R''^2 + \varrho''^2 + 2(R''\varrho'')R''\varrho'',$$

worin die Symbole $(R\varrho)$ und $(R''\varrho'')$ die in der achtzehnten Vorlesung angegebene Bedeutung haben, berechnete, und zur Probe für den Werth von ϱ in die Gleichung:

$$(r + r'' + \kappa)^{3/2} - (r + r'' - \kappa)^{3/2} = 6k(t' - t)$$

einsetzte. Man sieht übrigens noch leicht ein, dass sich der Ausdruck für das Quadrat der Sehne κ für alle Versuche auf die Form:

$$\kappa^2 = A + B\varrho + C\varrho'' + D\varrho^2 + E\varrho\varrho'' + F\varrho''^2$$

bringen lässt, welche, wenn man unter Benutzung der Gleichung (4) der vorigen Vorlesung:

$$\varrho'' = M\varrho$$

setzt, in:

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= A + (B + CM)\varrho + (D + EM + FM^2)\varrho^2 \\ &= A + B'\varrho + C'\varrho^2 \end{aligned}$$

übergeht. Denkt man sich einen Versuch mit dem Werthe $\varrho = 0$ gemacht, so muss offenbar das entsprechende κ^2 das Quadrat der Sehne der Erdbahn zwischen dem ersten und dritten Orte werden; also ist der Coefficient A das Quadrat dieser Sehne. Auch die Coefficienten B' und C' enthalten nur gegebene Grössen und können daher vor den Versuchen berechnet werden.

Die eben gegebene Form ist durchaus nicht unbequem und von Olbers selbst gewählt worden. Wir können für die Versuche aber auch an die Gleichung (5) der achtzehnten Vorlesung, welche wir hier unter der Form:

$$(rr'')rr'' = (Rr'')RR'' + (R\varrho'')R\varrho'' + (R''\varrho)R''\varrho + (\varrho\varrho'')\varrho\varrho''$$

schreiben, anknüpfen. Da $\kappa^2 = r^2 + r''^2 - 2(rr'')rr''$, so erhält man aus ihr:

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= r^2 + r''^2 - 2(Rr'')RR'' - 2(R\varrho'')R\varrho'' \\ &\quad - 2(R''\varrho)R''\varrho - 2(\varrho\varrho'')\varrho\varrho'', \end{aligned}$$

oder auch, da

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 + \varrho^2 + 2(R\varrho)R\varrho = R^2 + \varrho^2 + 2R\varrho \cos \chi \\ r''^2 &= R''^2 + \varrho''^2 + 2(R''\varrho'')R''\varrho'' = R''^2 + \varrho''^2 + 2R''\varrho'' \cos \chi'' \\ \kappa^2 &= R^2 + R''^2 - 2(Rr'')RR'' + 2(R\varrho)R\varrho - 2(R\varrho'')R\varrho'' \\ &\quad + 2(R''\varrho'')R''\varrho'' - 2(R''\varrho)R''\varrho \\ &\quad + \varrho^2 + \varrho''^2 - 2(\varrho\varrho'')\varrho\varrho''. \end{aligned}$$

Die Summen der drei Glieder $R^2 + R''^2 - 2(Rr'')RR''$ geben sich hier unmittelbar als das Quadrat der Erdsehne, welches wir im Folgenden mit g^2 bezeichnen wollen, zu erkennen. Die Summen $\varrho^2 + \varrho''^2 - 2(\varrho\varrho'')\varrho\varrho''$ entsprechen dem Quadrate einer Grösse, welche man die geocentrisch genommene Sehne des Kometen nennen könnte, d. h. derjenigen, welche man erhalten würde, wenn man die Verbindungslinie zwischen Erde und Kometen bis zu einem Durchschnitte in der Erdsehne parallel verschöbe. Bezeichnen wir diese Grösse mit s und setzen $(\varrho\varrho'') = \cos \omega$, so wird:

$$\begin{aligned} s^2 &= \varrho^2 + \varrho''^2 - 2\varrho\varrho'' \cos \omega = \varrho^2 - 2\varrho\varrho'' + \varrho''^2 + 2\varrho\varrho'' \\ &\quad - 2\varrho\varrho'' \cos \omega = (\varrho'' - \varrho)^2 + 4\varrho\varrho'' \sin^2 \frac{1}{2} \omega = [(M - 1)^2 \\ &\quad + 4M \sin^2 \frac{1}{2} \omega^2] \varrho^2. \end{aligned}$$

Die Einführung des $\sin^2 \frac{1}{2} \omega$ ist für scharfe Rechnung nothwendig, wenn ω ein

Nach der Natur der eben ausgeführten Construction, wegen des Parallelismus und der Gleichheit der in C aufgetragenen Länge mit der Erdsehne, übertreffen die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes c_0 die des Punktes C um eben so viel, als die Coordinaten des dritten Erdortes T'' die des ersten T übertreffen. Es ist also, mit Beibehaltung früherer Bezeichnung:

$$\begin{aligned}x_0 - x &= R'' \cos L'' - R \cos L = R \cos \odot - R'' \cos \odot'' \\y_0 - y &= R'' \sin L'' - R \sin L = R \sin \odot - R'' \sin \odot'' \\z_0 - z &= 0.\end{aligned}$$

Setzt man demnach:

$$\begin{aligned}x - x_0 &= R'' \cos \odot'' - R \cos \odot = g \cos G \\y - y_0 &= R'' \sin \odot'' - R \sin \odot = g \sin G,\end{aligned}$$

so ist G die Länge des Punktes C von c_0 aus gesehen, oder, was wegen der Construction dasselbe ist, die Länge des ersten Erdortes, vom dritten aus gesehen, und g wieder die Sehne zwischen beiden. Bezeichnen wir hier mit ϱh dieselbe Grösse, welche wir in der vorigen Vorlesung s genannt haben, d. h. den Abstand des Punktes c_0 von dem dritten Kometenorte C'' und setzen:

$$\begin{aligned}x'' - x_0 &= \varrho'' \cos \lambda'' - \varrho \cos \lambda = \varrho h \cos \xi \cos H \\y'' - y_0 &= \varrho'' \sin \lambda'' - \varrho \sin \lambda = \varrho h \cos \xi \sin H \\z'' - z_0 &= \varrho'' \operatorname{tg} \beta'' - \varrho \operatorname{tg} \beta = \varrho h \sin \xi,\end{aligned}$$

so bedeutet offenbar H die Länge des Punktes C'' , von c_0 aus gesehen, ξ die Breite derselben Richtung. Da aber ausserdem, mit Rücksicht auf die hier stattfindende Bedeutung von ϱ und ϱ'' :

$$\varrho'' = \frac{t'' - t'}{t' - t} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta' \sin (\lambda - \odot') - \operatorname{tg} \beta \sin (\lambda' - \odot')}{\operatorname{tg} \beta'' \sin (\lambda' - \odot') - \operatorname{tg} \beta' \sin (\lambda'' - \odot')} \cdot \varrho,$$

welche in der sechsundzwanzigsten Vorlesung abgeleitete Gleichung wir im Folgenden unter der Form:

$$\varrho'' = M \varrho$$

schreiben, so haben wir:

$$\begin{aligned}M \varrho \cos \lambda'' - \varrho \cos \lambda &= \varrho h \cos \xi \cos H \\M \varrho \sin \lambda'' - \varrho \sin \lambda &= \varrho h \cos \xi \sin H \\M \varrho \operatorname{tg} \beta'' - \varrho \operatorname{tg} \beta &= \varrho h \sin \xi.\end{aligned}$$

Da ϱ aus diesen Gleichungen herausfällt, werden h , ξ , H völlig bekannte Grössen.

In dem allgemeinen Ausdrucke für κ^2 :

$$\kappa^2 = (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2,$$

geben wir den Differenzen $x'' - x$, $y'' - y$, $z'' - z$ die Form:

$$\begin{aligned}x'' - x &= x'' - x_0 - (x - x_0) = \varrho h \cos \xi \cos H - g \cos G \\y'' - y &= y'' - y_0 - (y - y_0) = \varrho h \cos \xi \sin H - g \sin G \\z'' - z &= z'' - z_0 - (z - z_0) = \varrho h \sin \xi,\end{aligned}$$

wodurch der Ausdruck für κ^2 wird:

$$\kappa^2 = \varrho^2 h^2 + g^2 - 2g \varrho h \cos \xi \cos (G - H).$$

Für r^2 und r''^2 erhält man durch Bildung der Summen $x^2 + y^2 + z^2$ und $x''^2 + y''^2 + z''^2$, in welchen:

$$\begin{aligned}x &= \varrho \cos \lambda - R \cos \odot & x'' &= \varrho'' \cos \lambda'' - R'' \cos \odot'' \\y &= \varrho \sin \lambda - R \sin \odot & y'' &= \varrho'' \sin \lambda'' - R'' \sin \odot'' \\z &= \varrho \operatorname{tg} \beta & z'' &= \varrho'' \operatorname{tg} \beta'',\end{aligned}$$

die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} r^2 &= \varrho^2 \sec \beta^2 + R^2 - 2 R \varrho \cos(\lambda - \odot) \\ r''^2 &= M^2 \varrho^2 \sec \beta''^2 + R''^2 - 2 M R'' \varrho \cos(\lambda'' - \odot''). \end{aligned}$$

Zu weiterer Abkürzung führt Gauss noch die Hilfsgrößen ψ , ψ'' und φ mittelst der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cos \beta \cos(\lambda - \odot) &= \cos \psi \\ \cos \beta'' \cos(\lambda'' - \odot'') &= \cos \psi'' \\ \cos \xi \cos(G - H) &= \cos \varphi \end{aligned}$$

ein; dann wird:

$$\begin{aligned} r^2 &= (\varrho \sec \beta - R \cos \psi)^2 + R^2 \sin^2 \psi \\ r''^2 &= (M \varrho \sec \beta'' - R'' \cos \psi'')^2 + R''^2 \sin^2 \psi'' \\ \kappa^2 &= (\varrho h - g \cos \varphi)^2 + g^2 \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Da es sich empfiehlt, für ϱ eine andere Unbekannte einzuführen, so wird ferner:

$$\varrho h - g \cos \varphi = u$$

gesetzt. Man bestimmt also hierbei zunächst u , aus dessen Werthe sich dann ϱ nach der Formel:

$$\varrho = \frac{u + g \cos \varphi}{h}$$

ergiebt.

Der Leser ist durch das Vorhergehende in Stand gesetzt, das folgende Schema in allen Theilen zu verstehen, welches Gauss für Anstellung der Versuche bei einer Kometenbahn (v. Zach's monatliche Correspondenz, Bd. 28) aufstellt¹⁾. Bei der schon früher angegebenen, doch der Vollständigkeit der Vorschrift wegen hier noch einmal zu wiederholenden Bedeutung der Zeichen, wobei:

t, t', t'' die drei Beobachtungszeiten,
 $\lambda, \lambda', \lambda''$ die drei beobachteten geocentrischen Längen,
 β, β', β'' die drei geocentrischen Breiten,
 ϱ, ϱ' die curtirten Abstände des Kometen von der Erde,
 \odot, \odot', \odot'' die drei Längen der Sonne,
 R, R', R'' die drei Radien vectoren der Erde

vorstellen, berechne man:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{t'' - t'}{t' - t} \cdot \frac{tg \beta' \sin(\lambda - \odot') - tg \beta \sin(\lambda' - \odot')}{tg \beta'' \sin(\lambda' - \odot') - tg \beta' \sin(\lambda'' - \odot')} \\ R'' \cos(\odot'' - \odot) - R &= g \cos(G - \odot)^2 \\ R'' \sin(\odot'' - \odot) &= g \sin(G - \odot) \\ M - \cos(\lambda'' - \lambda) &= h \cos \xi \cos(H - \lambda'') \\ \sin(\lambda'' - \lambda) &= h \cos \xi \sin(H - \lambda'') \\ M tg \beta'' - tg \beta &= h \sin \xi \\ \cos \xi \cos(G - H) &= \cos \varphi \\ \cos \beta \cos(\lambda - \odot) &= \cos \psi \\ \cos \beta'' \cos(\lambda'' - \odot'') &= \cos \psi'' \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

¹⁾ Wir empfehlen dem Leser noch den vortrefflichen, in vieler Beziehung lehrreichen Aufsatz von Encke: „Ueber die Olbers'sche Methode zur Bestimmung der Kometenbahnen“ im Berliner astronomischen Jahrbuche für 1833, zum Studium.

²⁾ Diese Gleichung ist mit der vorher abgeleiteten

$$R'' \cos \odot'' - R \cos \odot = g \cos G$$

identisch, da man sich immer denken kann, alle Längen würden vom ersten Sonnenorte an gezählt. Eine ähnliche Bemerkung ist noch von einigen anderen Gleichungen der Formeln (1) zu machen.

$$\left. \begin{aligned}
 g \sin \varphi &= A \\
 R \sin \psi &= B \\
 R'' \sin \psi'' &= B'' \\
 h \cos \beta &= b \\
 \frac{h \cos \beta''}{M} &= b'' \\
 g \cos \varphi - b R \cos \psi &= c \\
 g \cos \varphi - b'' R'' \cos \psi'' &= c''
 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot (1)$$

Die Ausdrücke für r^2 , r''^2 und κ^2 werden dann:

$$\left. \begin{aligned}
 r^2 &= \left(\frac{u + c}{b} \right)^2 + B^2 \\
 r''^2 &= \left(\frac{u + c''}{b''} \right)^2 + B''^2 \\
 \kappa^2 &= u^2 + A^2,
 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$$

und es muss noch u so bestimmt werden, dass der aus denselben abzuleitende Werth von:

$$(r + r'' + \kappa)^{3/2} - (r + r'' - \kappa)^{3/2},$$

gleich $6k(t'' - t)$ wird. Hat man dies durch in bekannter Weise anzustellende Versuche erreicht, so berechnet man:

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi &= \frac{u + g \cos \varphi}{h} \\
 \varphi'' &= M \varphi.
 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (3)$$

Man kann nun sofort die heliocentrischen Längen und Breiten des Kometen l , b , l'' , b'' bestimmen, wozu sich die aus den Fundamentalformeln des ersten Abschnittes leicht abzuleitenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi \cos(\lambda - \odot) - R &= r \cos b \cos(l - \odot) \\
 \varphi \sin(\lambda - \odot) &= r \cos b \sin(l - \odot) \\
 \varphi \operatorname{tg} \beta &= r \sin b \\
 \varphi'' \cos(\lambda'' - \odot'') - R'' &= r'' \cos b'' \cos(l'' - \odot'') \\
 \varphi'' \sin(\lambda'' - \odot'') &= r'' \cos b'' \sin(l'' - \odot'') \\
 \varphi'' \operatorname{tg} \beta'' &= r'' \sin b''
 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (4)$$

sehr gut eignen.

Es gewährt hier eine erste Prüfung der Rechnung, dass die durch die Auflösung der Gleichungen folgenden Werthe von r und r'' mit den aus den Versuchen über u folgenden übereinstimmen müssen. Der Komet ist rechtläufig, d. h. die Neigung der Bahnebene gegen die Ekliptik i ist im Folgenden im ersten Quadranten zu nehmen, wenn:

$$l'' - l \text{ positiv;}$$

im anderen Falle, wenn:

$$l'' - l \text{ negativ,}$$

ist der Komet rückläufig, was, wie wir wissen, am einfachsten dadurch berücksichtigt wird, dass man i im zweiten Quadranten wählt und das Vorzeichen von $(\pi - \odot)$ geändert wird.

\odot und i berechnen sich aus den Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} tgb &= \pm tgi \sin(l - \delta)^1) \\ tgb'' - \frac{tgb \cos(l'' - l)}{\sin(l'' - l)} &= \pm tgi \cos(l - \delta) \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (5)$$

Ueber den Quadranten von $l - \delta$ bleibt kein Zweifel, da tgi positiv werden muss, wenn $l'' - l$ positiv, dagegen negativ, wenn $l'' - l$ negativ ist. Die erste der beiden eben genannten Gleichungen ist nichts Anderes, als die Auflösungsformel eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, in welchem $l - \delta$ die eine Kathete, i der ihr anliegende Winkel, b die andere Kathete ist. Es besteht daher auch noch die Gleichung:

$$tgb'' = \pm tgi \sin(l'' - \delta),$$

welche mit der ersteren verbunden, die zweite der in Rede stehenden Gleichungen giebt. Bequemer noch ist es, die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} tgb &= \pm tgi \sin(l - \delta) \\ tgb'' &= \pm tgi \sin(l'' - \delta) \end{aligned}$$

durch Addition und Subtraction umzuformen, wodurch man für die Bestimmung von i und δ erhält:

$$\left. \begin{aligned} \pm tgi \sin[1/2(l'' + l) - \delta] \\ = 1/2(tgb'' + tgb) \sec 1/2(l'' - l) \\ \pm tgi \cos[1/2(l'' + l) - \delta] \\ = 1/2(tgb'' - tgb) \operatorname{cosec} 1/2(l'' - l) \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (6)$$

Auch hier findet keine Zweideutigkeit der Lösung statt.

Wir sind jetzt im Stande, die Argumente der Breite, $v \pm (\pi - \delta)$ und $v'' \pm (\pi - \delta)$ zu berechnen, da nach uns bekannten Formeln:

$$\left. \begin{aligned} tg[v \pm (\pi - \delta)] &= \frac{tg(l - \delta)}{\cos i} \\ tg[v'' \pm (\pi - \delta)] &= \frac{tg(l'' - \delta)}{\cos i} \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (7)$$

und es bietet sich hier wieder eine Gelegenheit zur Prüfung der Rechnung bis zu diesem Punkte. Der Werth von κ^2 aus der Gleichung:

$$\kappa^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\{[v'' \pm (\pi - \delta)] - [v \pm (\pi - \delta)]\}$$

muss mit dem früher gefundenen genau übereinstimmen.

Endlich haben wir noch, wie früher gezeigt, für die Bestimmung von $1/2(v'' + v)$, welches mit dem bekannten Werthe von $1/2(v'' - v)$ verbunden, die beiden wahren Anomalien mit $v \pm (\pi - \delta)$ und $v'' \pm (\pi - \delta)$, das Element $\pi - \delta$ ergibt, und für die Bestimmung des Perihelabstandes, die Formeln:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{q}} \cdot \sin 1/4(v'' + v) &= 1/2 \left(\frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sqrt{r''}} \right) \operatorname{cosec} 1/4(v'' - v)^2) \\ \frac{1}{\sqrt{q}} \cdot \cos 1/4(v'' + v) &= 1/2 \left(\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r''}} \right) \sec 1/4(v'' - v) \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (8)$$

¹⁾ Wo in diesen und den folgenden Formeln ein doppeltes Vorzeichen vorkommt, bezieht sich das obere auf rechtläufige Kometen, das untere auf rückläufige.

²⁾ In der Olbers'schen Abhandlung ist den Formeln:

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{\cos 1/2 v}{\sqrt{q}}, \quad \frac{\cotg 1/2(v'' - v)}{\sqrt{r}} = \frac{\operatorname{cosec} 1/2(v'' - v)}{\sqrt{r''}} = \frac{\sin 1/2 v}{\sqrt{q}}$$

der Vorzug gegeben.

Für die Berechnung der Epoche des Perihels T mittelst des Perihels bedurfte es keiner besonderen Vorschrift, da sie dem Leser aus dem ersten Abschnitte schon hinreichend bekannt ist. Es sei jedoch bemerkt, dass bei unserer Art, das i bei rückläufigen Kometen zu zählen, auch hier eine etwas lästige Unterscheidung überflüssig wird. Bei uns ist stets:

$$T = t - Mq^{\frac{3}{2}}n = t'' - M''q^{\frac{3}{2}}n,$$

wobei M und M'' die zu v und v'' nach der Barker'schen Tafel gehörenden mittleren Bewegungen und n einen festen Coëfficienten bedeutet, dessen Logarithmus $= 0,0398723$.

Die Probe, dass die beiden Werthe von T übereinstimmen müssen, controlirt die sorgfältige Auflösung der Lambert'schen Gleichung.

Neunundzwanzigste Vorlesung.

Rechnungsbeispiel für die Gauss'sche Modification der Olbers'schen Methode.

Nach Göttinger Beobachtungen vom 7., 14. und 21. April 1813 ist für den zweiten Kometen von 1813:

$$t = 7,55002$$

$$t' = 14,54694$$

$$t'' = 21,59931$$

$$\lambda = 271^{\circ} 16' 38''$$

$$\beta = + 29^{\circ} 2' 0''$$

$$\lambda' = 266 \quad 27 \quad 22$$

$$\beta' = + 22 \quad 52 \quad 18$$

$$\lambda'' = 256 \quad 48 \quad 8$$

$$\beta'' = + 9 \quad 53 \quad 12$$

$$\odot = 17 \quad 47 \quad 41$$

$$\log R = 0,00091$$

$$\odot' = 24 \quad 38 \quad 45$$

$$\log R' = 0,00175$$

$$\odot'' = 31 \quad 31 \quad 25$$

$$\log R'' = 0,00260.$$

Aus diesem Materiale ergeben sich:

$$\log M = 9,75799$$

$$\log B = 9,98706$$

$$G = 113^{\circ} 43' 57''$$

$$\log B'' = 9,86038$$

$$\log g = 9,38029$$

$$\log b = 9,75645$$

$$H = 109^{\circ} 5' 49''$$

$$\log b'' = 0,05028$$

$$\xi = 44 \quad 13 \quad 9$$

$$g \cos \varphi = 0,17147$$

$$\log h = 9,81477$$

$$c = 0,31365$$

$$\log A = 9,22527$$

$$c'' = 0,95443$$

In Beziehung auf h , ξ , H kann es vielleicht nützlich sein, den Leser daran zu erinnern, dass h und $\cos \xi$ nach ihrer im Früheren gegebenen Definition stets positiv zu nehmen sind; hiernit ist denn auch der Quadrant von H völlig bestimmt.

Machen wir den ersten Versuch mit $u = 0,3$, so stellt sich die Rechnung für denselben wie folgt:

$\log u = 9,47712$	$(u + c) = 0,61365$	$u + c'' = 1,25443$
$\log u^2 = 8,95424$	$\log(u + c) = 9,78793$	$\log(u + c'') = 0,09844$
$\log A^2 = 8,45054$	$\log \frac{1}{b} = 0,24355$	$\log \frac{1}{b''} = 9,94972$
Differ. = 0,50370	0,03148	0,04816
Zech = 0,11844	0,06296	0,09632
$\log \kappa^2 = 9,07268$	$\log B^2 = 9,97412$	$\log B''^2 = 0,72076$
$\log \kappa = 9,53634$	Differ. = 0,08884	Differ. = 0,37556
$\kappa = 0,34382$	Zech = 0,25888	Zech = 0,15264
	$\log r^2 = 0,32184$	$\log r''^2 = 0,24896$
	$\log r = 0,16092$	$\log r'' = 0,12448$
	$r = 1,44850$	$r'' = 1,33193$

$$r + r'' + \kappa = 3,12425, \quad r + r'' - \kappa = 2,43661$$

$$(r + r'' + \kappa)^{3/2} - (r + r'' - \kappa)^{3/2} = 1,71883.$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned} \log 6 &= 0,77815 \\ \log k &= 8,23558 \\ \log(t'' - t) &= 1,14765 \\ &0,16138 = \log \text{numeri } 1,45040. \end{aligned}$$

Die Hypothese $u = 0,3$ zeigt hiernach in der Befriedigung der Lambert'schen Gleichung einen Fehler von 0,26843, um welche Grösse die linke Seite die rechte übertrifft.

Machen wir einen zweiten Versuch mit dem Werthe $u = 0,4$, so finden wir auf die nämliche Art:

$$(r + r'' + \kappa)^{3/2} - (r + r'' - \kappa)^{3/2} = 2,24869;$$

diese Hypothese hat in demselben Sinne, wie vorhin, den Fehler 0,79829; da demnach die Aenderung von einer Einheit der ersten Stelle von u den Fehler um die Grösse 0,52986 hat wachsen lassen, so werden wir den Werth $u = 0,3$ um die Grösse

$$\frac{0,26843}{0,52986} \cdot 0,1 \text{ oder } 0,05066$$

vermindern müssen, um der Wahrheit näher zu kommen; den dritten Versuch würden wir deshalb mit $u = 0,24934$ anstellen. Setzen wir die Versuche bis zur grössten Schärfe fort, so erhalten wir als definitiven Werth

$$u = 0,24389,$$

welchem entsprechen:

$$\begin{aligned} \log \kappa &= 9,47150 \\ \log r &= 0,13896 \\ \log r'' &= 0,11068 \\ \log q &= \log \frac{u + g \cos \varphi}{h} = 9,80366 \\ \log q'' &= \log M q = 9,56165. \end{aligned}$$

Die heliocentrischen Coordinaten des Kometen werden:

$$\begin{aligned} q \cos \lambda - R \cos \odot &= 0,01418 - 0,95415 = - 0,93997 \\ q \sin \lambda - R \sin \odot &= - 0,63614 - 0,30625 = - 0,94239 \\ q \operatorname{tg} \beta &= 0,35319 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x'' &= \varrho'' \cos \lambda'' - R'' \cos \odot'' = - 0,08321 - 0,85755 = - 0,94076 \\y'' &= \varrho'' \sin \lambda'' - R'' \sin \odot'' = - 0,35483 - 0,52599 = - 0,88082 \\z'' &= \varrho'' \operatorname{tg} \beta = 0,06352.\end{aligned}$$

Aus diesen Zahlen folgt durch eine uns schon hinlänglich bekannte Rechnung:

$$\begin{aligned}l &= 225^\circ 4' 25'' & l'' &= 223^\circ 6' 56'' \\b &= + 14 51 40 & b'' &= + 2 49 18 \\\log r &= 0,13896 & \log r'' &= 0,11069.\end{aligned}$$

Diese Werthe von $\log r$ und $\log r''$ zeigen, dass die Rechnung bis auf die kleinen unvermeidlichen Unsicherheiten der letzten Stelle richtig geführt worden ist. Da $l'' - l$ negativ ausfällt, giebt sich der Komet als rückläufig zu erkennen. Wir wenden deshalb zur Berechnung von Ω und i die Formeln (6) mit den unteren Zeichen an, welches folgende Rechnung giebt:

$$\begin{aligned}\log \frac{1}{2} &= 9,69897 & \log \frac{1}{2} &= 9,69897 \\ \log (\operatorname{tg} b'' + \operatorname{tg} b) &= 9,49781 & \log (\operatorname{tg} b'' - \operatorname{tg} b) &= 9,33458 \\ \log \sec \frac{1}{2} (l'' - l) &= 0,00006 & \log \operatorname{cosec} \frac{1}{2} (l'' - l) &= 1,76735_n \\ & & & \hline & & & 0,80090\end{aligned}$$

Die Auflösung muss so gewählt werden, dass $\operatorname{tg} i$ negativ wird; man erhält:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} (l'' + l) - \Omega &= 181^\circ 25' 32'' \\ i &= 98 59 5 \\ \Omega &= 42 40 8.\end{aligned}$$

Die Formeln (7) haben nur ein einfaches Vorzeichen, wenn wir bei retrograden Kometen für $\pi - \Omega$ seine Ergänzung zu 360° nehmen. Sie ergeben:

$$\begin{aligned}v + \pi - \Omega &= 164^\circ 56' 57''^1) \\ v' + \pi - \Omega &= 177 8 32 \\ v'' - v &= + 12 11 35,\end{aligned}$$

womit:

$$\kappa^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(v'' - v) = 0,08771$$

wird, während der früher erhaltene Werth die rechte Seite gleich 0,08770 liefert. Der Unterschied ist von keiner Bedeutung.

Bei der nun folgenden Rechnung der Bestimmung von q , v und v'' ist es immer zu empfehlen, siebenstellige Logarithmen anzuwenden.

$$\begin{aligned}\log \frac{1}{2} &= 9,6989700 & \log \frac{1}{2} &= 9,6989700 \\ \log \left(\frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sqrt{r''}} \right) &= 8,4502743_n & \log \left(\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r''}} \right) &= 0,2386775 \\ \log \operatorname{cosec} \frac{1}{4} (v'' - v) &= 1,2742750 & \log \sec \frac{1}{4} (v'' - v) &= 0,0006149 \\ & & & \hline & & & 9,9382624.\end{aligned}$$

Aus diesen Zahlen folgt eindeutig, da q positiv werden muss:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} (v'' + v) &= - 16^\circ 59' 49'',09 \\ \frac{1}{2} (v'' + v) &= - 33 59 38 18 \\ \frac{1}{2} (v'' - v) &= 6 5 47 50 \\ & \hline v'' &= - 27^\circ 53' 51'' \\ v &= - 40 5 26 \\ \log q &= 0,0846818.\end{aligned}$$

¹⁾ Wenn $\cos i$ negativ ist, liegt die Ergänzung des Argumentes der Breite zu 360° mit $l - \Omega$ immer in demselben Quadranten.

Wir hatten auch noch $v + \pi - \Omega = 164^{\circ} 56' 57''$; demnach wird:

$$\pi - \Omega = 205^{\circ} 2' 23''^1).$$

Zu $v = -40^{\circ} 5' 26''$ gehört in der Barker'schen Tafel $\log M = 1,45605_n$; also wird $-Mnq^{\frac{3}{2}} = 41,971$, die Zeit des Perihels = April (7,550 + 41,971), oder Mai 19,521. Aus v'' folgt $T = \text{Mai } 19,519$, nahe mit dem ersten Werthe stimmend, so dass wir $T = 19,520$ setzen können.

Am Schlusse stellen wir die einzelnen Resultate, welche wir erhalten haben, noch einmal zusammen:

$$\begin{aligned} T &= 1813 \text{ Mai } 19,520 \text{ mittl. Berl. Zeit} \\ \pi - \Omega &= 205^{\circ} 2' 23'' \\ \Omega &= 42 \ 40 \ 8 \\ i &= 98 \ 59 \ 5 \\ \log q &= 0,08468, \end{aligned}$$

oder, wenn wir die andere Unterscheidung für rückläufige Kometen wählen wollen:

$$\begin{aligned} T &= 1813 \text{ Mai } 19,520 \\ \pi - \Omega &= 154^{\circ} 57' 37'' \\ \Omega &= 42 \ 40 \ 8 \\ i &= 81 \ 0 \ 55 \\ \log q &= 0,08468 \\ \text{Bewegung: Retrograd.} \end{aligned}$$

Dreissigste Vorlesung.

Verschiedene Arten, die erste Hypothese für q oder u bei der Olbers'schen Methode zu bilden.

In dem eben gegebenen Rechnungsbeispiele haben wir bei dem ersten Versuche $u = 0,3$ angenommen, ohne davon Rechenschaft abzulegen, weshalb wir mit diesem Werthe beginnen. Die Olbers'sche Methode überlässt in der That die Bildung der ersten Hypothese dem praktischen Takte des Rechners, welcher uns in dem gegenwärtigen Falle mit einem leichten Ueberschlage erkennen liess, dass der Werth von u nicht viel grösser sein werde als 0,3 oder 0,4, weil wir sonst auf Entfernungen des Kometen von der Sonne geführt werden, in denen diese Körper für uns meistens nicht sichtbar sind. Es kommt jedoch zuweilen vor, dass man das Fehlen einer bestimmten und festen Vorschrift in der Beziehung als eine Lücke in der Methode empfindet. Olbers selbst hat diesem Gegenstande noch eine besondere Abhandlung gewidmet, welche man in der zweiten und dritten Ausgabe des Olbers'schen Buches unter der Ueberschrift „Ueber die zweckmässigste Art, bei Berechnung einer Kometenbahn die Versuche anzustellen“ und in dem Berliner Astronom. Jahrbuche für 1833 mit abgedruckt findet. Es wird darin gezeigt, wie aus einer genähert richtigen Hypothese eine andere

¹⁾ Bei den übergeneigten Bahnen retrograder Kometen ist, wie schon bemerkt wurde, das $\pi - \Omega$ der hier befolgten Zählungsweise identisch mit $-(\pi - \Omega)$ der anderen Zählungsweise von i , wie man am leichtesten findet, wenn man sich den Uebergang von einer directen zu einer retrograden Bahn bei $i = 90^{\circ}$ vorstellt.

noch mehr genäherte gebildet werden kann, was den allerdings grossen Vorthail gewährt, dass man sich nicht, wie bei den auf das Gerathewohl angestellten Versuchen, von der Wahrheit einmal wieder entfernen kann. Beispielsweise begegnete uns das Letztere auch bei der Rechnung der neunundzwanzigsten Vorlesung, wo der dem zweiten Versuche zu Grunde gelegte Werth von u , $u = 0,4$, fehlerhafter war, als der bei dem ersten Versuche angenommene $u = 0,3$. Im Wesentlichen besteht das von Olbers vorgeschlagene Verfahren darin, dass aus einem genäherten Werthe von $r + r''$ das nach der Lambert'schen Gleichung, also phoronomisch, entsprechende x bestimmt wird, woraus sich dann wieder durch rein geometrische Bedingungen r und r'' finden. So lange man nicht die richtige Lösung besitzt, werden die beiden Summen von $r + r''$, nämlich diejenige, welche man durch die Substitution in der Lambert'schen Gleichung erhält, und die geometrisch aus dem dieser Gleichung genügenden Werthe der Sehne x abgeleitete, verschieden sein. Die Umformungen, welche wir unten für solche Zwecke mit der Lambert'schen Gleichung vornehmen werden, lassen uns auch erkennen, dass das aus derselben zu berechnende x für einen Fehler in der Annahme von $r + r''$ viel empfindlicher ist, als das geometrisch aus $r + r''$ zu bestimmende. Aus demselben Grunde wird das aus x geometrisch (d. h. hier immer ohne Zuziehung der Zeit) bestimmte $r + r''$ der Wahrheit näher kommen, als das, von welchem man ausgegangen ist. Den so gefundenen genaueren Werth von $r + r''$ substituirt man dann von Neuem in die Lambert'sche Gleichung, erhält einen genaueren Werth von x , aus diesem abermals genauer r und r'' u. s. w.

Der Gewinn, welchen dieses Verfahren mit sich bringt, würde noch erheblich grösser sein, wenn man von vornherein den Werth von $r + r''$ genauer bestimmen könnte. In der Bildung der ersten Hypothese wird indessen von Olbers noch Vieles dem praktischen Gefühle des Rechners überlassen; es wird nur empfohlen, wenn der Coëfficient von q in dem Ausdrücke für r^2 nahe Null ist, $r + r'' = 2$ zu setzen, wenn er sehr stark negativ ausfällt, $r + r''$ kleiner als 2, etwa $= 1,5$, und wenn er stark positiv wird, grösser als 2, etwa 2,5 zu wählen.

In einer Zusammenstellung der Formeln für Berechnung einer Kometenbahn, welche sich im Anhang der Encke'schen Ausgabe von Olbers' Abhandlung findet, wird in Betreff der Bildung der ersten Hypothese Folgendes bemerkt: „Kennt man sonst keine Näherung für q oder r oder r'' , wodurch u genähert bekannt würde, so kann man ausgehen von:

$$u = \pm \sqrt{\left(\frac{t'' - t}{41}\right)^2 - A^2},$$

ein Vorschlag, der offenbar darauf hinauskommt, $x = \frac{t'' - t}{41}$ zu setzen. Zu dieser wegen des Divisors 41 etwas fremdartig ausschenden Näherungsformel wollen wir bemerken, dass $\frac{1}{41}$ hier nur eine Abrundung für $k\sqrt{2}$ ist. Entwickelt man die Differenz $(r + r'' + x)^{3/2} - (r + r'' - x)^{3/2}$ unter Voraussetzung eines sehr kleinen Werthes von x , dessen höhere Potenzen vernachlässigt werden können, setzt man demnach:

$$\begin{aligned} (r + r'' + x)^{3/2} &= (r + r'')^{3/2} + \frac{3}{2}(r + r'')^{1/2} x \\ (r + r'' - x)^{3/2} &= (r + r'')^{3/2} - \frac{3}{2}(r + r'')^{1/2} x, \end{aligned}$$

so geht die Lambert'sche Gleichung in die folgende:

$$(r + r'')^{1/2} x = 2 k (t'' - t)$$

oder:

$$x = \frac{2 k (t'' - t)}{\sqrt{r + r''}}$$

über. Setzt man hier, was Olbers als Mittelwerth vorschlägt, $r + r'' = 2$, so erhält man:

$$\kappa = k \sqrt{2}(t'' - t) = \frac{t'' - t}{41,11}.$$

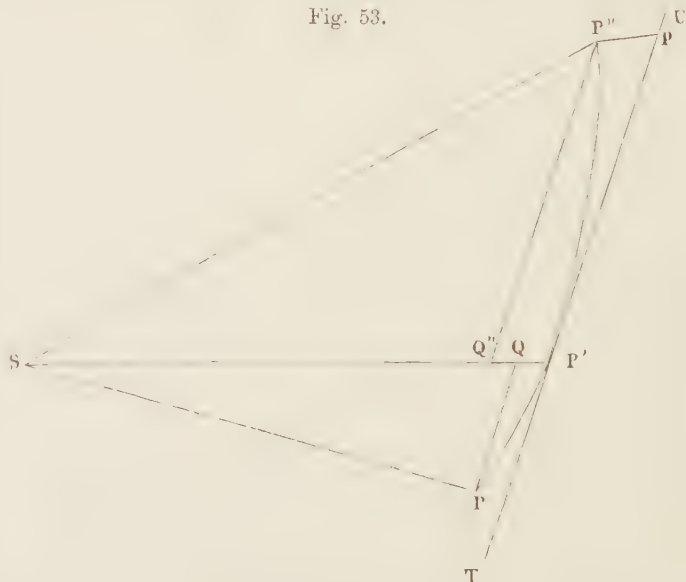
In dem durchgeführten Rechnungsbeispiele würde danach $\log \kappa = 9,53487$ geworden sein, was von dem definitiv gefundenen $\log \kappa = 9,47150$ nicht gerade stark abweicht. Indessen kann es doch für manche Fälle erwünscht sein, gleich der ersten Hypothese mit Sicherheit einen höheren Grad von Annäherung geben zu können, ohne zu einer weitläufigen Rechnung genöthigt zu sein. Aus den für solchen Zweck in der nächsten Vorlesung anzustellenden Betrachtungen folgt dann auch mit Leichtigkeit der berühmte Satz von Lambert über die Krümmung der geocentrischen Bahn eines Himmelskörpers, nach welchem man aus dieser Krümmung entscheiden kann, ob derselbe der Sonne entfernter oder näher ist als die Erde.

Einunddreissigste Vorlesung.

Vorbereitende Betrachtungen für den Lambert'schen Satz über die Krümmung des geocentrischen Laufes.

Nach den Elementen der Attractionslehre, der wir einige Betrachtungen hier entlehnen müssen, kann man die Bewegung eines die Sonne in einem Kegelschnitte umkreisenden Körpers an jedem Punkte der Bahn als das Resultat einer in der Richtung der Tangente wirkenden

Fig. 53.



Wurfgeschwindigkeit und einem nach der Sonne vermöge deren Attraction gerichteten Fallen ansehen. Ist in Fig. 53 S die Sonne, $PP'P''$ ein Theil des Kegelschnittes, wobei P, P', P'' der Reihe nach den Zeiten t, t', t'' entsprechen sollen, ferner TU die Tangente in P' , so ist $\overline{P'U}$ zugleich die Richtung, welche der Körper verfolgen würde, wenn im Punkte P' zur Zeit t' die Attraction der Sonne plötzlich aufhörte. Er würde dann seinen Weg gleichförmig mit derjenigen Geschwindigkeit zurücklegen, welche er im Punkte P' besass, und auf diese Weise zur Zeit t'' bis zu einem gewissen Punkte p der Tangente gelangen. Unter dem fortdauernden Einflusse der Schwerkraft jedoch wird der Richtung von $\overline{SP'}$ parallel mit beschleunigter Ge-

schwindigkeit zurücklegen, welche er im Punkte P' besass, und auf diese Weise zur Zeit t'' bis zu einem gewissen Punkte p der Tangente gelangen. Unter dem fortdauernden Einflusse der Schwerkraft jedoch wird der Richtung von $\overline{SP'}$ parallel mit beschleunigter Ge-

schwindigkeit in dem Zeitraume $t'' - t$ das Stück $p\bar{P}''$ durchfallen, so dass der Körper die nach der Sonne concave Bahn $\bar{P}'P''$ verfolgt. Ziehen wir noch durch den Punkt P'' mit der Tangente parallel die Linie $\bar{P}''Q''$, wodurch $Q''\bar{P}''$ parallel und gleich $\bar{Q}P''$ wird. So lange nun das Zeitintervall $t'' - t'$ an Grösse nicht diejenigen Grenzen überschreitet,

Fig. 54.



welche wir bei diesen Untersuchungen innehalten dürfen, sind die Veränderungen in der Intensität der beschleunigenden Kraft sehr gering; es ist dann erlaubt, diese Kraft während der ganzen Fallzeit gleich

$$\frac{C}{(SP')^2} \text{ oder } \frac{C}{r'^2}$$

zu setzen, wobei C eine gleich zu bestimmende, von der Sonnenmasse abhängende Constante vorstellt. Den durchfallenen Raum findet man be-

kanntlich aus der beschleunigenden Kraft, indem man diese letztere mit dem halben Quadrate der Zeit multiplicirt; also hat man:

$$\bar{Q}''P' = \frac{C}{2r'^2} (t'' - t')^2.$$

Diese Formel muss aber offenbar auch noch ihre Gültigkeit für die Bewegung in einer Kreisbahn vom Radius 1 behalten, in einer solchen wird:

$$\bar{Q}''P' = 1 - \cos k(t'' - t') = 1 - [1 - \frac{1}{2}k^2(t'' - t')^2 + \dots],$$

demnach:

$$\frac{C(t'' - t')^2}{2} = \frac{k^2}{2} (t'' - t')^2$$

oder:

$$C = k^2.$$

Setzen wir zur Abkürzung $k(t'' - t') = \vartheta$, so wird daher in dem allgemeineren Falle:

$$\bar{Q}''P' = \frac{\vartheta^2}{2r'^2}.$$

Ein Körper, welcher nach der Fig. 53 die Bahn $\bar{P}''P'$ verfolgt hätte, würde in dem Zeitintervall $t' - t$ nach P gelangen. Construirt man PQ und QP' gerade so, wie vorhin $P''Q''$ und $Q''P'$, so wird daher nach denselben Betrachtungen:

$$\bar{Q}P' = \frac{k^2(t' - t)^2}{2r'^2} = \frac{\vartheta'^2}{2r'^2},$$

wenn wir zur Abkürzung $k(t' - t) = \vartheta'$ setzen.

In Fig. 54 wiederholen wir die Construction von Q und Q'' und ziehen noch die Sehne $\bar{P}P''$. Deren Durchschnitt mit $\bar{S}P'$ sei Q' .

Es entstehen wegen des Parallelismus von $\bar{Q}P$ und $\bar{Q}''P''$ die ähnlichen Dreiecke $PQ'Q$ und $P''Q'Q''$, daher die Proportionen:

$$\bar{Q}Q' : Q'Q'' = PQ' : P''Q'' = P'Q' : Q'P''$$

oder, da sich die letzteren Grössen sehr nahe wie die Zeiten verhalten:

$$\bar{Q}Q' : Q'Q'' = \vartheta' : \vartheta,$$

Wir wollen den eben ausgesprochenen Satz zunächst beweisen und dann Anwendungen von demselben machen.

In Fig. 55 zeichnen wir wieder, wie in Fig. 49 der 26. Vorlesung, das ebene Dreieck $ST'C'$ der zweiten Beobachtung und die Verbindungslinie Qq zwischen den Schnittpunkten der Sehnen mit dem mittleren Radius vector, die dort gebrauchte Bezeichnung so weit hier unverändert beibehaltend. Ist nun $SC' > ST'$, d. h. $r' > R'$, so ist nothwendig Winkel $SQq > \text{Winkel } ST'C'$; denn wären beide Winkel einander gleich, so würde man die Proportion haben:

$$QT' : qC' = ST' : SC'.$$

Nach der Voraussetzung, dass $SC' > ST'$, müsste also auch $qC' > QT'$ werden; dasselbe würde in noch höherem Grade stattfinden, wenn gar der Winkel $SQq < \text{Winkel } ST'C'$ wäre. Nun ist aber nach der Relation (Q) am Schlusse der 31. Vorlesung:

$$qC' = \frac{\vartheta \vartheta''}{2 r'^2}$$

$$QT' = \frac{\vartheta \vartheta''}{2 R'^2},$$

also $qC' < QT'$, so lange $r' > R'$. Demnach muss Winkel SQq in der That grösser sein, als Winkel $ST'C'$, wenn kein Widerspruch mit den Bewegungsgesetzen entstehen soll; und es liegt $T'C'$ oder die Richtung des zweiten geocentrischen Ortes der Richtung $T'S$, d. h. dem Ort der Sonne in der zweiten Beobachtung, näher als die Richtung von Qq der letzteren Richtung liegt. Qq zielt aber bekanntlich auf einen Punkt des durch den ersten und dritten geocentrischen Ort gelegten grössten Kreises und es ist somit bewiesen, dass, wenn $r' > R'$, der zweite geocentrische Ort und der zweite Sonnenort auf einer und derselben von den beiden Hemisphären liegen, in welche die Kugel durch jenen Kreis getheilt wird.

Auf ganz dieselbe Art ist zu zeigen, dass, wenn $r' < R'$, dann nothwendig auch Winkel $SQq < \text{Winkel } ST'C'$ sein muss, weil sonst wieder ein mit der Gleichung (Q) der 31. Vorlesung unvereinbares Resultat erhalten werden würde. Es müssen also in diesem Falle der zweite geocentrische Ort und der zweite Sonnenort auf verschiedene Halbkugeln fallen.

Dreiunddreissigste Vorlesung.

Anwendung des Lambert'schen Kriteriums über die Entfernung eines Gestirns von der Sonne.

Der in der 32. Vorlesung bewiesene Satz lässt sich offenbar auch umkehren, so dass aus der Krümmung des geocentrischen Laufes eines Planeten oder Kometen ein Schluss, vorerst allgemeinerer Art, auf die Entfernung des Körpers von der Sonne zu ziehen ist. Ob nach der Seite der Sonne, d. h. nach derjenigen Richtung hin, nach welcher die Sonne weniger als 180° im grössten Kreise absteht, die Krümmung concav oder convex ist, kann durch Construction auf einem Globus oder auf einer sorgfältig gezeichneten Karte, in welche man die geocentrischen Oerter einträgt, am Sichersten aber durch Rechnung ermittelt werden.

Nach der Bezeichnung in Fig. 51 der 26. Vorlesung und den darauf folgenden Gleichungen ist zu entscheiden, ob der Bogen $Sq <$ oder grösser $> SC'$. Nennen wir λ_0, β_0 die geocentrische Länge und Breite des Punktes q , Grössen, welche sich leicht finden lassen, so wird:

$$\left. \begin{aligned} \sin \overline{Sq} &= \frac{\sin \beta_0}{\sin \gamma'} \\ \sin \overline{SC'} &= \frac{\sin \beta'}{\sin \gamma'} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (R)$$

oder auch:

$$\left. \begin{aligned} tg \overline{Sq} &= - \frac{tg (\lambda_0 - \odot')}{\cos \gamma'} \\ tg \overline{SC'} &= - \frac{tg (\lambda' - \odot')}{\cos \gamma'} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (S)$$

Es wird sich demnach hauptsächlich darum handeln, λ_0 und β_0 auf möglichst kurze Weise zu bestimmen. Bezeichnen wir die heliocentrischen rechtwinkligen Coordinaten des Schnittpunktes der Sehne des Himmelskörpers und seines zweiten Radius vector mit x_0, y_0, z_0 , die entsprechenden Grössen bei der Erde mit X_0, Y_0, Z_0 und bedienen uns der Olbers'schen Annahme, dass beide Sehnen im Verhältniss der Zwischenzeiten geschnitten werden, so haben wir:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= x + \frac{t' - t}{t'' - t} (x'' - x) = \frac{t'' - t'}{t'' - t} x + \frac{t' - t}{t'' - t} x'' \\ y_0 &= y + \frac{t' - t}{t'' - t} (y'' - y) = \frac{t'' - t'}{t'' - t} y + \frac{t' - t}{t'' - t} y'' \\ z_0 &= z + \frac{t' - t}{t'' - t} (z'' - z) = \frac{t'' - t'}{t'' - t} z + \frac{t' - t}{t'' - t} z'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (T)$$

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= X + \frac{t' - t}{t'' - t} (X'' - X) = \frac{t'' - t'}{t'' - t} X + \frac{t' - t}{t'' - t} X'' \\ Y_0 &= Y + \frac{t' - t}{t'' - t} (Y'' - Y) = \frac{t'' - t'}{t'' - t} Y + \frac{t' - t}{t'' - t} Y'' \\ Z_0 &= Z + \frac{t' - t}{t'' - t} (Z'' - Z) = \frac{t'' - t'}{t'' - t} Z + \frac{t' - t}{t'' - t} Z'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (U)$$

Gleichungen, welche, wie gleich bemerkt werden mag, auch für andere Fundamentelebenen, als die Ekliptik, ihre Gültigkeit behalten, da durch rechtwinklige Projection auf irgend welche Ebene das Verhältniss der Theilstücke einer Geraden keine Aenderung erleidet.

Es besteht hiernach die Gleichung:

$$tg \lambda_0 = \frac{y_0 - Y_0}{x_0 - X_0} = \frac{(t'' - t') (y - Y) + (t' - t) (y'' - Y'')}{(t'' - t') (x - X) + (t' - t) (x'' - X'')}.$$

Substituiren wir, hier die Ekliptik als Fundamentelebene beibehaltend, für $x - X, y - Y, x'' - X'', y'' - Y''$ die dafür bekannten Ausdrücke:

$$\begin{aligned} x - X &= \varrho \cos \lambda \\ y - Y &= \varrho \sin \lambda \\ x'' - X'' &= \varrho'' \cos \lambda'' = M \varrho \cos \lambda'' \\ y'' - Y'' &= \varrho'' \sin \lambda'' = M \varrho \sin \lambda'', \end{aligned}$$

worin noch ϱ und ϱ'' die curtirten Distanzen von der Erde in der ersten und dritten Beobachtung vorstellen, so erhalten wir:

$$\operatorname{tg} \lambda_0 = \frac{(t'' - t') \sin \lambda + M (t' - t) \sin \lambda''}{(t'' - t') \cos \lambda + M (t' - t) \cos \lambda''},$$

oder aber, wenn wir mit Rücksicht auf den Ausdruck für M in den Formeln (1) der 28. Vorlesung:

$$N = \frac{\operatorname{tg} \beta' \sin(\lambda - \odot') - \operatorname{tg} \beta \sin(\lambda' - \odot')}{\operatorname{tg} \beta'' \sin(\lambda' - \odot') - \operatorname{tg} \beta' \sin(\lambda'' - \odot')} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (\text{V})$$

und:

$$M = \frac{t'' - t'}{t' - t} \cdot N \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (\text{W})$$

setzen:

$$\operatorname{tg} \lambda_0 = \frac{\sin \lambda + N \sin \lambda''}{\cos \lambda + N \cos \lambda''} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (\text{X})$$

Aus Grössen also, welche auf dem Wege der Olbers'schen Methode liegen, kann λ_0 auf die einfachste Weise berechnet werden.

Es mag dann noch bemerkt werden, dass die Grösse $\operatorname{tg} \gamma'$ mit der Grösse m am Schlusse der 26. Vorlesung, deren Einführung Olbers zur Abkürzung des Ausdruckes für M empfiehlt, identisch ist.

Man sieht aus dem Vorhergehenden, dass aus den Vorbereitungsgrössen für die Olbers'sche Methode $\overline{S q}$ und $\overline{S C'}$ mit leichter Mühe und zwar, ganz seltene Ausnahmen abgerechnet, nach den Formeln (V), (W), (X) und (S) zu finden sind. Findet sich dabei der Bogen $S C' < S q$, oder wenn $S C'$ grösser als 180° wäre, $360^\circ - S C' < 360^\circ - S q$, so ist der beobachtete Himmelskörper in der zweiten Beobachtung von der Sonne entfernter als die Erde; im anderen Falle ist er näher.

Ein Beispiel wird die Bequemlichkeit der Rechnung zeigen.

Aus den Zahlen der 29. Vorlesung erhalten wir:

$$\log m = \log \operatorname{tg} \gamma' = \log \frac{\operatorname{tg} \beta'}{\sin(\lambda' - \odot')} = 9,679974_n$$

$$\log N = \log \frac{m \sin(\lambda - \odot') - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta'' - m \sin(\lambda'' - \odot')} = 9,754515,$$

woraus etwas abweichend, aber wegen der mit sechs Stellen geführten Rechnung auch etwas genauer als im Früheren:

$$\log M = 9,757944$$

sich ergibt. Bis hierher haben wir nur Grössen gebraucht, deren wir bei der Olbers'schen Methode nothwendig bedurften. Es wird nun ferner:

$$\log \operatorname{tg} \lambda_0 = \log \frac{\sin \lambda + N \sin \lambda''}{\cos \lambda + N \cos \lambda''} = 1,159989$$

$$\lambda_0 = 266^\circ 2' 32'',3$$

$$\log \operatorname{tg} \overline{S q} = \log \frac{\operatorname{tg}(\lambda_0 - \odot')}{\cos \gamma'} = 0,308152$$

$$\overline{S q} = 243^\circ 48' 32'',1, \quad \begin{array}{l} \text{Abstand des Punktes } q \text{ von der} \\ \text{Sonne} = 116^\circ 11' 27'',9 \end{array}$$

$$\log \operatorname{tg} S C' = \log \frac{\operatorname{tg}(\lambda' - \odot')}{\cos \gamma'} = 0,315549$$

$$\overline{S C'} = 244^\circ 11' 36'',3, \quad \begin{array}{l} \text{Abstand des Punktes } C' \text{ von der} \\ \text{Sonne} = 115^\circ 48' 23'',7. \end{array}$$

Der Quadrant von $\overline{S q}$ ist stets derselbe, wie der von $\lambda_0 - \odot'$, ebenso liegt $\overline{S C'}$ mit $\lambda' - \odot'$ in demselben Quadranten, wie schon bei verschiedenen Gelegenheiten er-

wähnt wurde. Da nun also hier der Abstand des Punktes C' von der Sonne kleiner als der der Richtung Qq ist, so ist ganz gewiss der Komet in der zweiten Beobachtung von der Sonne entfernter gewesen als die Erde. Dieses sichere Urtheil haben wir durch Nebenrechnung gewonnen.

Vierunddreissigste Vorlesung.

Bestimmung der Entfernung des Himmelskörpers von der Sonne.

Mit einem nur geringen Mehraufwande von Rechnung kann das oben angegebene Lambert'sche Kriterium zu einer wirklichen Bestimmung von r' vervollkommenet werden. In den dahin führenden Betrachtungen wollen wir für den Bogen \overline{Sq} , den kleinsten Abstand des Punktes q von der Sonne, die Bezeichnung mit χ_0 , für das entsprechende SC' das Zeichen χ' einführen, wonach wir also haben:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \chi_0 &= \frac{\operatorname{tg}(\lambda_0 - \odot')}{\cos \gamma'} \\ \operatorname{tg} \chi' &= \frac{\operatorname{tg}(\lambda' - \odot')}{\cos \gamma'}. \end{aligned}$$

Ferner sei für die in Fig. 55 dargestellten ebenen Dreiecke $Sq = r_0$, $SC' = r'$, $SQ = R_0$, $ST' = R'$, Winkel $SC'T' = z$, dann haben wir

$$r' = \frac{R' \sin ST'C'}{\sin z} = \frac{R' \sin \chi'}{\sin z}$$

$$r_0 = \frac{R_0 \sin SQq}{\sin [z - (SQq - ST'C')]} = \frac{R_0 \sin \chi_0}{\sin (z + \chi' - \chi_0)},$$

also auch:

$$r' - r_0 = qC' = \frac{\vartheta \vartheta''}{2r'^2} = \frac{R' \sin \chi'}{\sin z} - \frac{R_0 \sin \chi_0}{\sin (z + \chi' - \chi_0)} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (1)$$

und wenn für r' sein Werth $\frac{R' \sin \chi'}{\sin z}$ gesetzt wird:

$$\frac{\vartheta \vartheta''}{2} \cdot \frac{\sin z^2}{R'^2 \sin \chi'^2} = \frac{R' \sin \chi'}{\sin z} - \frac{R_0 \sin \chi_0}{\sin (z + \chi' - \chi_0)} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (2)$$

Die Seiten dieser Gleichung sind von der Ordnung des Productes der kleinen Grössen ϑ und ϑ'' , oder nach einem gebräuchlichen Ausdrucke, kleine Grössen der zweiten Ordnung. Man darf deshalb die rechte Seite der Gleichung mit einem Factor multipliciren, welcher von der Einheit um eine kleine Grösse zweiter Ordnung verschieden ist, da man dabei nur eine Grösse der vierten Ordnung vernachlässigt. Man multiplicire die rechte Seite mit dem Factor $\frac{r'}{r_0}$, d. h. mit:

$$\frac{R'}{R_0} \frac{\sin \chi'}{\sin \chi_0} \cdot \frac{\sin (z + \chi' - \chi_0)}{\sin z},$$

wodurch man erhält:

$$\frac{\vartheta \vartheta''}{2} \frac{\sin z^2}{R'^2 \sin \chi'^2} = \frac{R'^2 \sin \chi'^2}{R_0 \sin \chi_0 \sin z} \cdot \frac{\sin (z + \chi' - \chi_0)}{\sin z} - \frac{R' \sin \chi'}{\sin z}$$

oder:

$$\sin z^3 = \frac{2 R'^4 \sin \chi'^4}{\vartheta \vartheta'' R_0 \sin \chi_0} \cdot \frac{\sin(z + \chi' - \chi_0)}{\sin z} - \frac{2 R'^3 \sin \chi'^3}{\vartheta \vartheta''}.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} \frac{R' \sin \chi'}{R_0 \sin \chi_0} \cdot \cos(\chi' - \chi_0) - 1 &= a \\ \frac{R' \sin \chi'}{R_0 \sin \chi_0} \cdot \sin(\chi' - \chi_0) &= b, \end{aligned}$$

so erhält man:

$$\sin z^3 = \frac{2 a R'^3 \sin \chi'^3}{\vartheta \vartheta''} + \frac{2 b R'^3 \sin \chi'^3}{\vartheta \vartheta''} \cotg z \dots \dots \dots (3)$$

Wird $\cotg z = x$ gesetzt, so geht die Gleichung über in:

$$(1 + x^2)^{-3/2} = \frac{2 a R'^3 \sin \chi'^3}{\vartheta \vartheta''} + \frac{2 b R'^3 \sin \chi'^3}{\vartheta \vartheta''} x \dots \dots \dots (4)$$

Hieraus ist sofort eine sehr einfache Construction für die reellen Lösungen dieser Gleichung zu erkennen. Man zeichne nämlich die durch die Gleichung:

$$y = (1 + x^2)^{-3/2}$$

vorgestellte Curve, was, da dieselbe keinen veränderlichen Parameter enthält, nur einmal für alle möglichen Fälle zu geschehen braucht, und lege durch diese die der Gleichung:

$$y = \frac{2 a R'^3 \sin \chi'^3}{\vartheta \vartheta''} + \frac{2 b R'^3 \sin \chi'^3}{\vartheta \vartheta''} x$$

entsprechende gerade Linie hindurch, deren Lage sich in jedem gegebenen Falle auf das Leichteste bestimmt. Die Abscissen der Schnittpunkte werden die Werthe von $\cotg z$ sein, welche die Gleichung (4) befriedigen. Die Ordinaten stellen $\sin z^3$ vor.

Die Curve besteht aus zwei von einander getrennten, zur Abscissenaxe symmetrisch liegenden und die letztere zur gemeinschaftlichen Asymptote habenden Zweigen; sie hat also nothwendig mindestens zwei Schnittpunkte mit jeder gegen die Abscissenaxe geneigten Geraden. Eine dieser reellen Lösungen entspricht sehr nahe der Erdbahn, liefert also $r' = R'$, d. h. $z = 180^\circ - \chi'$, da doch auch die Erde ein in den Gesichts- oder Beobachtungsrichtungen gelegener Himmelskörper ist, welcher bei seiner Bewegung die zu Grunde gelegten Gesetze befolgt. Die praktisch in Betracht kommende Lösung ist in den allermeisten Fällen leicht dadurch zu erkennen, dass bei ihr z zwar positiv, aber kleiner als $180^\circ - \chi'$ ausfallen muss. In dem nicht seltenen Falle, wo mehr als eine Lösung dieser Bedingung genügt, giebt es auch in der That mehr als eine Bahn, welche die gegebenen Beobachtungen darstellt, und es können dann nur weitere Beobachtungen entscheiden, welche Lösung man zu wählen hat.

In den Ausdrücken für a und b kommt das Verhältniss $\frac{R'}{R_0}$ vor. Nach der in Vorlesung 32 entwickelten Relation haben wir:

$$R' - R_0 = Q T' = \frac{\vartheta \vartheta''}{2 R'^2},$$

also:

$$\frac{R'}{R_0} = 1 + \frac{\vartheta \vartheta''}{2 R'^2 R_0},$$

wofür wir unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung:

$$1 + \frac{\vartheta \vartheta''}{2 R'^2}$$

setzen dürfen.

Eine für die Auflösung durch Rechnung und Verbesserung des durch Construction gefundenen Werthes von z bequeme Form der oben entwickelten Gleichung erhält man, wenn man zwei Hilfsgrößen n und q einführt.

Macht man:

$$\begin{aligned} a &= n \cos q \\ b &= n \sin q, \end{aligned}$$

so geht die Gleichung (3) über in:

$$\frac{\vartheta \vartheta'' \sin z^4}{2 R'^3 \sin \chi'^3} = n \sin(z + q) \quad (5)$$

Durch eine einigermaassen sorgfältige Construction kann meistens z bis auf einen kleinen Bruchtheil eines Grades genau gefunden werden; nachher kann man die Gleichung (5) unter der Form:

$$\log \frac{\vartheta \vartheta'' \sin z^4}{2 R'^3 \sin \chi'^3} = \log [n \sin(z + q)]$$

durch Anwendung des schon bekannten Gauss'schen Kunstgriffes des logarithmischen Increments leicht so genau auflösen, wie man für nöthig hält.

Es ist somit:

$$r' = \frac{R' \sin \chi'}{\sin z}$$

bekannt und nach Vorlesung 30 wird:

$$z = \sqrt{\frac{2}{r'}} \cdot k(t'' - t) = \vartheta' \sqrt{\frac{2}{r'}}$$

ein sehr genäherter Werth für die in der Zeit $t'' - t$ beschriebene Sehne sein. Das Ausgehen von demselben bei der Olbers'schen Art der Hypothesenbildung oder ein derselben im Wesentlichen gleich kommendes Verfahren, welches wir später noch entwickeln wollen, führt dann bald zu definitiven Werthen.

Es erschien zweckmässig, die obigen Vorschriften zur Bestimmung von r' zu entwickeln, sowohl um zu zeigen, dass sich für die Bildung der ersten Hypothese ein gar nicht beschwerliches Verfahren angeben lässt, als auch, weil doch in einzelnen Fällen auch das practische Gefühl des erfahrenen Rechners eine Zeit lang vergeblich nach einer brauchbaren Näherung suchen würde.

Rechnungsbeispiel für die Bestimmung von r' .

Am Schlusse der 33. Vorlesung fanden wir:

$$\begin{aligned} 360^\circ - \overline{S}q &= \chi_0 = 116^\circ 11' 27'',9 \\ 360^\circ - \overline{S}C' &= \chi' = 115^\circ 48' 4'',9 \end{aligned}$$

Da:

$$\begin{aligned} \log \vartheta &= 9,083917 \\ \log \vartheta'' &= 9,080488 \\ \log R' &= 0,001750 \\ \log \frac{\vartheta \vartheta''}{2 R'^2} &= 0,304530, \end{aligned}$$

so ist:

$$\begin{aligned} \log \frac{R'}{R_0} &= 0,003144 & q &= - 32^\circ 59' 37'',4 \\ \log b &= 7,837213_n & \log n &= 8,101179 \\ \log a &= 8,024801 & \log \frac{\vartheta \vartheta''}{2 R'^3 \sin \chi'^3} &= 7,994052, \\ \log \operatorname{tg} q &= 9,812412_n \end{aligned}$$

wonach denn die aufzulösende Gleichung heisst:

oder: $(7,994\,952) \sin z^4 = (8,101\,179) \sin(z - 32^\circ 59' 37'',4)$
 $(9,893\,773) \sin z^4 = \sin(z - 32^\circ 59' 37'',4).$

Durch eine vierstellige Versuchsrechnung finden wir, dass z zwischen 42° und 43° liegt.

Für $z = 42^\circ$ hat man:

$$\begin{array}{r} \log \sin z = 9,8255 \\ 4 \log \sin z = 9,3020 \\ \hline 9,8938 \\ \hline 9,1958 \end{array}$$

$$\log \sin (42^\circ - 32^\circ 59' 37'',4) = 9,1946$$

$$\text{Differenz} = + 0,0012$$

Für $z = 43^\circ$ hat man:

$$\begin{array}{r} \log \sin z = 9,8338 \\ 4 \log \sin z = 9,3352 \\ \hline 9,8938 \\ \hline 9,2290 \end{array}$$

$$\log \sin (43^\circ - 32^\circ 59' 37'',4) = 9,2399$$

$$\text{Differenz} = - 0,0109$$

Aus der regula falsi ergiebt sich als Verbesserung Δz von z in Minuten:

$$\Delta z = \frac{0,0012 \cdot 60}{0,0121} = \frac{0,0012 \cdot 60 \cdot 10000}{0,0121 \cdot 10000} = \frac{12 \cdot 60}{121} = \frac{720}{121} = 6'.$$

Nennen wir die Verbesserung von z in Secunden x und entnehmen für jede Seite der Gleichung aus den Logarithmentafeln die Aenderung des Logarithmus in Einheiten der letzten Stelle, die der Aenderung von z um $1''$ entspricht, so ergiebt sich durch sechsstellige Rechnung:

$$\begin{array}{r} \log \sin 42^\circ 6' 0'' = 9,826\,351 + 2,34 x \\ 4 \log \sin 42^\circ 6' 0'' = 9,305\,404 + 9,36 x \\ \hline 9,893\,773 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9,199\,177 + 9,36 x \\ \hline \log \sin (42^\circ 6' 0'' - 32^\circ 59' 37'',4) = 9,199\,387 + 13,13 x \end{array}$$

Für die Correction x erhalten wir demnach die Bedingungsgleichung:

$$9,199\,177 + 9,36 x = 9,199\,387 + 13,13 x$$

$$- 3,77 x = + 210$$

$$x = - 55'',7$$

$$z = 42^\circ 6' 0'',0 - 55'',7 = 42^\circ 5' 4'',3$$

$$\log r' = \log \frac{R' \sin \chi'}{\sin z} = 0,12992.$$

Da nun $\log \vartheta' = \log k(t'' - t) = 9,38323$, so erhalten wir für die erste Hypothese bei $\log \kappa$ den Näherungswerth:

$$\log \kappa = \log \vartheta' \sqrt{\frac{2}{r'}} = 9,46878,$$

in der 29. Vorlesung erhielten wir als definitiven Werth:

$$\log \kappa = 9,47150.$$

Die Kenntniss von r' giebt uns sogar die Mittel an die Hand, q und q'' ohne die Vermittelung von κ zu finden und darauf hin die ganze Bahnbestimmung zu vollenden. Wir würden aber damit ein wesentliches Stück der Olbers'schen Methode, die Benutzung der Lambert'schen Gleichung, aufgeben.

Da, wie wir in den vorhergehenden Entwicklungen gesehen haben, die erste Hypothese für die Versuche der Olbers'schen Methode, wenn man will, auf eine systematische und sichere Weise gebildet werden kann, so beschäftigen wir uns im Folgenden mit der Verbesserung der Hypothesen. Hierbei ist, wie schon bemerkt wurde, eine Transformation der Lambert'schen Gleichung für die Parabel von grossem Nutzen.

Fünfunddreissigste Vorlesung.

Umformung der Lambert'schen Gleichung; Ausdruck für das Verhältniss des Sectors zum Dreieck bei der Parabel.

Durch Einführung der Hilfsgrösse φ mittelst der Relation:

$$\sin \varphi = \frac{\kappa}{r + r''}$$

nimmt die Lambert'sche Gleichung für die Parabel eine Gestalt an, welche unseren Zwecken sehr förderlich ist. Dieselbe geht dadurch zunächst über in:

$$\begin{aligned} 6k(t'' - t) &= (r + r'')^{3/2} \{ [1 + \cos(90^\circ - \varphi)]^{3/2} - [1 - \cos(90^\circ - \varphi)]^{3/2} \} \\ &= 2^{3/2} (r + r'')^{3/2} \{ \cos(45^\circ - 1/2 \varphi)^3 - \sin(45^\circ - 1/2 \varphi)^3 \}, \end{aligned}$$

oder, da:

$$\begin{aligned} &\cos(45^\circ - 1/2 \varphi)^3 - \sin(45^\circ - 1/2 \varphi)^3 \\ &= \{ \cos(45^\circ - 1/2 \varphi) - \sin(45^\circ - 1/2 \varphi) \} \{ 1 + 1/2 \cos \varphi \} \\ &= 2 \cos 45^\circ \cdot \sin 1/2 \varphi (1 + 1/2 \cos \varphi) \\ &= 2^{1/2} \sin 1/2 \varphi (1 + 1/2 \cos \varphi), \end{aligned}$$

in:

$$3k(t'' - t) = 2 \sin 1/2 \varphi (1 + 1/2 \cos \varphi) (r + r'')^{3/2} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Multiplieirt und dividirt man auf der rechten Seite mit $\cos 1/2 \varphi$ und bemerkt, dass:

$$2 \sin 1/2 \varphi \cos 1/2 \varphi = \sin \varphi = \frac{\kappa}{r + r''},$$

so erhält man:

$$6k(t'' - t) = \kappa (r + r'')^{1/2} \frac{2 + \cos \varphi}{\cos 1/2 \varphi},$$

oder nach κ aufgelöst:

$$\kappa = \frac{3 \cos 1/2 \varphi}{2 + \cos \varphi} \cdot \frac{2k(t'' - t)}{(r + r'')^{1/2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Auf dieser Umformung beruht die Construction der Encke'schen Hülftafel für Auflösung der Lambert'schen Gleichung. Dieselbe giebt für das Argument $\frac{2k(t'' - t)}{(r + r'')^{1/2}}$ den Logarithmus von $\frac{3 \cos 1/2 \varphi}{2 + \cos \varphi}$. Bezeichnen wir diese Grösse $\frac{3 \cos 1/2 \varphi}{2 + \cos \varphi}$, welche in den Fällen der Praxis immer sehr nahe gleich 1 bleibt, mit dem Buchstaben μ , so wird die Sehne aus der Formel:

$$\kappa = \frac{2k(t'' - t)}{(r + r'')^{1/2}} \mu$$

erhalten. Auf diese Weise reicht die in dem Anhange aufgenommene Tafel X aus, mit aller Bequemlichkeit κ aus $r + r''$ der Lambert'schen Gleichung gemäss zu bestimmen.

Aus Gleichung (1) erhält man noch, wenn man $\cos \varphi$ in $1 - 2 \sin 1/2 \varphi^2$ umsetzt

$$\sin 1/2 \varphi^3 - 3/2 \sin 1/2 \varphi = - 3/2 \frac{k(t'' - t)}{(r + r'')^{3/2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$\frac{k(t'' - t)}{(r + r'')^{3/2}}$ fortläuft; denn der Winkel φ ist nur selten unmittelbar gegeben. Wir wollen zur Abkürzung die Grösse $\frac{2k(t'' - t)}{(r + r'')^{3/2}}$ oder $\frac{2\vartheta'}{(r + r'')^{3/2}}$, welche auch zugleich das Argument der vorhin erwähnten Encke'schen Hülftafel ist, mit dem Buchstaben ν bezeichnen und dann die Wurzel der cubischen Gleichung (3), d. h. $\sin \frac{1}{2} \varphi$, in eine nach Potenzen der Grösse ν fortlaufende Reihe zu entwickeln suchen.

Die kleinste positive Wurzel der reducirten cubischen Gleichung:

$$x^3 - \frac{3}{2}x = -\frac{3\nu}{4}$$

existirt unter der Form:

$$x = A\nu + B\nu^2 + C\nu^3 + D\nu^4 + \dots,$$

worin A, B, C, D u. s. w. Zahlenfactoren vorstellen, welche nach der bekannten Methode der unbestimmten Coëfficienten zu ermitteln sind. Substituirt man die für x angenommene Reihe in $x^3 - \frac{3}{2}x$ und ordnet nach Potenzen von ν , so erhält man:

$$-\frac{3A}{2}\nu - \frac{3B}{2}\nu^2 + \left(A^3 - \frac{3C}{2}\right)\nu^3 + \left(3A^2B - \frac{3D}{2}\right)\nu^4 + \dots = -\frac{3\nu}{4},$$

das heisst:

$$\begin{aligned} -\frac{3A}{2} &= -\frac{3}{4} \\ -\frac{3B}{2} &= 0 \\ -\frac{3C}{2} &= -A^3 \\ -\frac{3D}{2} &= -3A^2B \\ -\frac{3E}{2} &= -3AB^2 - 3A^2C \\ -\frac{3F}{2} &= -B^3 - 6ABC - 3A^2D \\ -\frac{3G}{2} &= -3B^2C - 3AC^2 - 6ABD - 3A^2E \end{aligned}$$

u. s. w.

also:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} & E &= \frac{1}{24} \\ B &= 0 & F &= 0 \\ C &= \frac{1}{12} & G &= \frac{1}{36} \\ D &= 0 \end{aligned}$$

Man hat also für $\sin \frac{1}{2} \varphi$ den folgenden Ausdruck:

$$\sin \frac{1}{2} \varphi = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{12}\nu^3 + \frac{1}{24}\nu^5 + \frac{1}{36}\nu^7 + \dots$$

Das Verhältniss des Dreiecks zum Sector hat man:

$$\begin{aligned} \frac{A}{\Sigma} &= \frac{3 \cos \varphi}{2 + \cos \varphi} = \frac{3 \cos \varphi}{3 - (1 - \cos \varphi)} = \frac{1 - 2 \sin \frac{1}{2} \varphi^2}{1 - \frac{2}{3} \sin \frac{1}{2} \varphi^2} \\ &= (1 - 2 \sin \frac{1}{2} \varphi^2)(1 + \frac{2}{3} \sin \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{4}{9} \sin \frac{1}{2} \varphi^4 + \frac{8}{27} \sin \frac{1}{2} \varphi^6 \\ &\quad + \frac{16}{81} \sin \frac{1}{2} \varphi^8 + \dots) = 1 - \frac{4}{3} \sin \frac{1}{2} \varphi^2 - \frac{8}{9} \sin \frac{1}{2} \varphi^4 \\ &\quad - \frac{16}{27} \sin \frac{1}{2} \varphi^6 - \frac{32}{81} \sin \frac{1}{2} \varphi^8 - \dots \end{aligned}$$

Substituirt man nun den Werth von $\sin \frac{1}{2} \varphi$ aus obiger Reihenentwicklung, so erhält man nach leichten Reductionen:

$$\frac{1}{\Sigma} = 1 - \frac{1}{3} \nu^2 - \frac{1}{6} \nu^4 - \frac{1}{9} \nu^6 - \frac{55}{648} \nu^8 - \frac{91}{1296} \nu^{10} - \frac{119}{1044} \nu^{12} - \frac{323}{5682} \nu^{14} \dots \quad (5)$$

Nach dieser in allen praktischen Fällen sehr schnell convergirenden Reihe ist im Anhang die Tafel XI construirt worden, aus welcher der Werth von $\log \frac{A}{\Sigma}$, der für viele Rechnungen von grosser Bedeutung ist, mit dem Argumente:

$$\frac{2k(t'' - t)}{(r + r')^2}$$

entnommen werden kann.

Sechsenddreissigste Vorlesung.

Systematische Verbesserung der Hypothesen in den Versuchen zur Olbers'schen Methode, durch ein Rechnungsbeispiel erläutert.

Durch die vorhergehenden Entwicklungen haben wir uns die nöthigen Hilfsmittel verschafft, um ohne Unbequemlichkeit zu einem angenommenen oder gegebenen Werthe von $r + r''$ die Sehne x zu berechnen, welche die Lambert'sche Gleichung befriedigt, und das schon früher angegebene Verfahren der Verbesserung der Versuchswerthe der Olbers'schen Methode mit weniger Arbeit durchzuführen.

Ein Beispiel wird den Gang einer solchen Rechnung am besten erläutern.

In der 34. Vorlesung ermittelten wir, dass der auf das Rechnungsbeispiel der 29. Vorlesung bezügliche Werth von $\log x$ nahe gleich 9,46878 sein müsse. Wir hatten $\log r' = 0,12992$ gefunden; betrachten wir dies als Näherungswerth für $\log \frac{1}{2}(r + r'')$, setzen demnach $\log(r + r'') = 0,43083$, so wird:

$$\frac{2k(t'' - t)}{(r + r'')^{3/2}} = \frac{2\vartheta'}{(r + r'')^{3/2}} = 0,10915.$$

Geht man mit diesem Werthe $v = 0,10915$ in die Encke'sche Hilfstafel, so findet man:

$$\log \mu = 0,00022,$$

und es ist nun:

$$\log x = \log \frac{2\mu\vartheta'}{(r + r'')^{3/2}} = \log [\mu v (r + r'')] = 9,46906.$$

Ferner ist:

$$u^2 = x^2 - A^2 = (0,24187)^2; \quad u = 0,24187.$$

Mittelst der Ausdrücke:

$$r^2 = \left(\frac{a + c}{b} \right)^2 + B^2, \quad r'^2 = \left(\frac{a + c''}{b''} \right)^2 + B'^2$$

findet man:

$$\begin{aligned} \log r &= 0,13817 \\ \log r' &= 0,11178. \end{aligned}$$

Demnach hat man viel genäherter für die folgende Hypothese:

$$\log(r + r'') = 0,42621$$

$$v = 0,11091$$

$$\log \mu = 0,00022$$

$$\log \kappa = 9,47139$$

$$u = 0,24380,$$

woraus dann wieder genauer:

$$\log r = 0,13892$$

$$\log r'' = 0,11067$$

$$\log(r + r'') = 0,42605$$

$$v = 0,11096$$

$$\log \mu = 0,00022$$

$$\log \kappa = 9,47144.$$

Aus dem Gange der Zahlen, die wir für $\log \kappa$ erhielten, nämlich:

$$9,46906 \quad \text{Diff.} = + 0,00233$$

$$9,47139 \quad \text{Diff.} = + 0,00005$$

$$9,47144$$

können wir schliessen, dass der definitive Werth von $\log \kappa = 9,47145$ sein wird, welcher nur fünf Einheiten der letzten Stelle von dem in der 29. Vorlesung gefundenen abweicht.

Siebenunddreissigste Vorlesung.

Verbesserung des nach dem Olbers'schen Princip gefundenen

Werthes von $\frac{\varrho''}{\varrho}$. Kunstgriff von Carlini.

Erste Bahnbestimmungen von Kometen pflegt man im Allgemeinen nicht auf einen sehr hohen Grad von Schärfe anzulegen; man vernachlässigt auch meistens den Einfluss der Parallaxe und der Aberration, ohne die Gefahr, eine brauchbare Annäherung zu verfehlen. Nur in einzelnen Fällen kann diese Vernachlässigung für den Erfolg der Rechnung, welche aus nur wenige Tage umfassenden Beobachtungsmaterial schon die ganze Individualität der von einem neuen Kometen beschriebenen Bahn im Wesentlichen verrathen soll, von grösserer Bedeutung, gewissermaassen verhängnissvoll, werden. Es tritt dies häufig dann ein, wenn der beschriebene geocentrische Bogen sehr klein ist, und dennoch eine Bahnbestimmung gewagt werden soll; in einem solchen Falle ist es rathsam, eine Form der Rechnung zu wählen, welche die Berücksichtigung von Aberration, Parallaxe und anderer kleiner Correctionen möglichst erleichtert, wie sie der Leser später kennen lernen wird. Hiervon abgesehen, ist aber die Olbers'sche Methode an und für sich, soweit dieselbe von der Voraussetzung Gebrauch macht, dass die Sehne der Kometenbahn und die der Erdbahn in gleichem Verhältniss geschnitten werden, welche Annahme man auch wohl das Olbers'sche Princip zu nennen pflegt, keine ganz strenge.

Der dadurch begangene Fehler kann ebenfalls gewöhnlich vernachlässigt werden, besonders, wenn die Zwischenzeiten der Beobachtungen sich nicht sehr von der Gleichheit entfernen. Werden dagegen diese Intervalle sehr ungleich, oder ist die geocentrische Bewegung des Kometen so schwach, dass dadurch ein jeder sonst unschädliche Fehler eine grössere Bedeutung erlangt, so wird es nöthig, auch den Olbers'schen Ausdruck für $\frac{q''}{q}$ oder M zu verbessern. Ziemlich einfach kann dies durch einen von Carlini vorgeschlagenen Kunstgriff, auf welchen die folgenden Betrachtungen führen, erreicht werden.

Es ist einleuchtend, dass wir, um den Werth von M verbessern zu können, auch ein Merkmal haben müssen, zu erkennen, dass derselbe der Verbesserung bedarf; dieses Merkmal liegt in der Art, wie die Beobachtungen dargestellt werden. Offenbar werden die äusseren Beobachtungen nach den Rechnungen der Olbers'schen Methode stets vollständig dargestellt, wie fehlerhaft auch das angenommene M sein möge; damit aber auch die mittlere Beobachtung vollständig durch die Elemente wiedergegeben werde, dazu ist Zweierlei erforderlich: erstlich müssen die Beobachtungen selbst einer parabolischen Bahn entsprechen, obwohl sie eine gegebene Grösse mehr enthalten, als die Parabel erfordert; zweitens darf die Voraussetzung, auf welcher die Herleitung des Olbers'schen M beruht, nicht fehlerhaft sein. Ist diese zweite Bedingung vollständig erfüllt, aber nicht die erstere, so werden weder die geocentrische Länge noch die Breite der mittleren Beobachtung dargestellt, doch ist alsdann der aus den Elementen zu berechnende Ort der zweiten Beobachtung noch ein Punkt jenes grössten Kreises, welcher den beobachteten Ort mit dem Sonnenorte in der zweiten Beobachtung verbindet. Es wird also dann mit anderen Worten die Grösse:

$$m = tg \gamma' = \frac{tg \beta'}{\sin(\lambda' - \odot')}$$

durch das aus den Elementen zu berechnende λ' und β' , welches wir zur Unterscheidung im Folgenden mit λ_0' und β_0' bezeichnen wollen, genau wiedergegeben werden müssen. Dass alsdann auch die Grösse M so dargestellt wird, wie sie bei der Rechnung zu Grunde gelegt wurde, die Elemente also a posteriori das angenommene M bestätigen, ist leicht einzusehen, weil in dem Ausdruck für die letztere Grösse λ' und β' , nur so weit sie in m enthalten sind, vorkommen. Ist dagegen das Olbers'sche Princip wirklich fehlerhaft, so wird sich das eben dadurch verrathen, dass der aus den Elementen berechnete Ort einem anderen durch den zweiten Sonnenort gelegten Kreise entspricht, als dem eben genannten, wonach denn also die zweite Beobachtung selbst in dem Falle, dass sie genau einer Parabel entspräche, nicht dargestellt werden könnte.

Diese Betrachtungen geben nun den von Carlini vorgeschlagenen Kunstgriff an die Hand, durch welchen man erreicht, dass nach einer zweiten Bestimmung der Elemente der durch den zweiten Sonnenort und den schliesslich berechneten Ort gehende grösste Kreis in Wirklichkeit auch sehr nahe durch den beobachteten Ort geht und folglich diesen darstellt, wenn derselbe einer Parabel entspricht. Man wird dies, wie leicht einzusehen, dadurch erreichen, dass man den bei der ersten Rechnung gefundenen Unterschied:

$$\frac{tg \beta'}{\sin(\lambda' - \odot')} - \frac{tg \beta_0'}{\sin(\lambda_0' - \odot')} = \text{Beobachtung} - \text{Rechnung}$$

als eine Correction betrachtet, welche an dem Werth:

$$m = \frac{tg \beta'}{\sin(\lambda' - \odot')}$$

angebracht werden muss. Der verbesserte Werth von M , welchen man bei der Wiederholung der Bahnberechnung zu Grunde zu legen hat, wird also auf einfache Weise dadurch erhalten werden, dass man darin:

$$m = 2 \frac{tg \beta'}{\sin(\lambda' - \odot')} - \frac{tg \beta'_0}{\sin(\lambda'_0 - \odot')} = \text{Beobachtung} - \text{Rechnung}$$

setzt. Ein Beispiel wird hinreichen, diese Vorschrift zu erläutern.

Für den zweiten Kometen des Jahres 1813 fanden wir die Elemente:

$$\begin{aligned} T &= 1813, \text{ Mai } 19,520 \text{ Berl. Zeit} \\ \pi - \odot &= 205^\circ 2' 23'' \\ \odot &= 42 \ 40 \ 8 \\ i &= 98 \ 59 \ 5 \\ \log q &= 0,08468. \end{aligned}$$

Die mittlere Beobachtung fiel auf April 14,5469; also ist $t' - T = -34,9731$. Die mittlere tägliche Bewegung ist $\frac{75 k}{q^{3/2} \sqrt{2}}$; $\log \text{ motus medii diurni } 9,83311$. In die Barker'sche Tafel hat man demnach mit dem Logarithmus $9,83311 + \log 34,9731$, d. h. mit 1,37684 einzugehen, um die wahre Anomalie v' zu finden. Letztere ergibt sich gleich

$$-34^\circ 13' 2'', \log r' = \log \frac{q}{\cos^{1/2} v'} = 0,12399.$$

Das Argument der Breite $\pi - \odot + v'$ wird demnach:

$$205^\circ 2' 23'' - 34^\circ 13' 2'' = 170^\circ 49' 21''.$$

Setzen wir nach Formeln der Vorlesung Zehn:

$$\begin{aligned} x' &= r' \cos(\pi - \odot + v') \\ y' &= r' \cos i \sin(\pi - \odot + v') \\ z' &= r' \sin i \sin(\pi - \odot + v') \\ X' &= R' \cos(\odot' - \odot) \\ Y' &= R' \sin(\odot' - \odot), \end{aligned}$$

so wird:

$$\begin{aligned} \varrho' \cos(\lambda'_0 - \odot) &= x' + X' \\ \varrho' \sin(\lambda'_0 - \odot) &= y' + Y' \\ \varrho' tg \beta'_0 &= z'. \end{aligned}$$

Im gegenwärtigen Falle werden wir auf folgende Zahlen geführt:

$$\begin{aligned} x' &= r' \cos(170^\circ 49' 21'') = -1,31340 \\ y' &= r' \cos(98^\circ 59' 5'') \sin(170^\circ 49' 21'') = -0,03314 \\ z' &= r' \sin(98^\circ 59' 5'') \sin(170^\circ 49' 21'') = +0,20959 \\ X' &= R' \cos 341^\circ 58' 37'' = +0,95477 \\ Y' &= R' \sin 341^\circ 58' 37'' = -0,31065 \\ \lambda'_0 - \odot &= 223^\circ 47' 22'' \\ \lambda'_0 &= 266^\circ 27' 30'' \\ \beta'_0 &= +22^\circ 52' 28'' \end{aligned}$$

Es sollte $\lambda' = 266^\circ 27' 22''$, $\beta' = +22^\circ 52' 18''$ erhalten werden.

Legt man nun auf diesen für eine erste Bahnbestimmung sehr wenig in Betracht kommenden Unterschied derartiges Gewicht, dass man die Bahnberechnung mit einem verbesserten M wiederholen will, so hat man zunächst die Grösse:

$$\frac{tg \beta'_0}{\sin(\lambda'_0 - \odot')},$$

welche hier gleich $-0,47865$ gefunden wird, zu berechnen. Oben hatten wir:

$$m = \frac{tg \beta'}{\sin(\lambda' - \odot')} = -0,47860$$

erhalten. Bei der Wiederholung müsste deshalb:

$$m = -0,95720 + 0,47865 = -0,47855$$

angenommen und in die Formel:

$$M = \frac{t'' - t}{t' - t} \cdot \frac{m \sin(\lambda - \odot') - tg \beta}{tg \beta' - m \sin(\lambda'' - \odot')}$$

eingesetzt werden. Durch diese Substitution wird:

$$\log M = 9,75826$$

und hat demnach gegen die erste Rechnung eine Correction von $0,00027$ erlitten.

Achtunddreissigste Vorlesung.

Die Berücksichtigung der Aberration, der Parallaxe und der Bewegung der Aequinoctien bei Bahnbestimmungen.

Schon im ersten Abschnitte wurde bewiesen, dass in Folge der Aberration ein Himmelskörper unseres Sonnensystems bis auf eine in der Praxis völlig unmerkliche Grösse genau in derjenigen Richtung gesehen wird, welche zu der Zeit, als das unser Auge treffende Licht von dem Körper ausging, die Richtung der Verbindungslinie zwischen ihm und der Erde war, dass man demgemäss, wenn man die Zeit der Beobachtung um so viel vermindert, als das Licht nöthig hat, den Weg zwischen den beiden Himmelskörpern zurückzulegen, Alles so betrachten kann, als sei die Aberration des Lichtes gar nicht vorhanden. In der Regel wird nun bei ersten Bahnbestimmungen, auch wenn sie gar keine Rücksicht auf die Aberration nehmen, die Entfernung von der Erde hinreichend genau bekannt, um bei einer Wiederholung der Bahnbestimmung diese einfachste Methode in Anwendung bringen zu können, und so könnte man denn auch bei der ersten Bahnbestimmung selbst schon die ganze Rechnung mit wegen Aberration verbesserten Beobachtungszeiten wiederholen. Ein solches Verfahren würde aber die sehr fühlbare Unbequemlichkeit mit sich führen, dass man für die verbesserten Zeiten auch die Erd- oder Sonnencoordinaten von Neuem bestimmen oder, den veränderten Zeiten gemäss, ebenfalls corrigiren müsste, was zur weiteren Folge hätte, dass sogar unter den Grössen der Vorbereitungsrechnungen nicht eine einzige Zahl ungeändert bliebe. Diesen Uebelstand kann man nun aber dadurch vermeiden, dass man die Beobachtungsrichtungen von derjenigen Täuschung, welche die Bewegung der Erde verursacht, d. h. von der sogenannten Fixsternaberration befreit. Sind dann t, t', t'' die Beobachtungszeiten, $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}''$ die wirklichen (nicht curtirten) Distanzen des Gestirnes von der Erde, so entsprechen diese verbesserten Beobachtungen den Richtungen der Verbindungslinien zwischen den Erdörtern der Zeiten t, t', t'' mit den Planeten- oder Kometenörtern der Zeiten $t - 498'',5 \mathcal{A}, t' - 498'',5 \mathcal{A}', t'' - 498'',5 \mathcal{A}''$. Da nun die Fixsternaberration im Gegensatze zu der Planetenaberration von der Entfernung unabhängig ist, so ändern sich weder die Sonnenörter, noch die beobachteten Oerter bei

solcher Behandlungsweise der Aberration, wenn nur immer den gefundenen Abständen von der Erde gemäss die Zeiten, welchen die heliocentrischen Coordinaten des beobachteten Himmelskörpers entsprechen, verbessert werden. Schon im ersten Abschnitte haben wir gesehen, dass die volle Wirkung der Fixsternaberration in einen durch die Richtung der Erdbewegung und die Richtung nach dem Stern gelegten grössten Kreis fällt, und dass sie stets beide Richtungen um eine Grösse zu nähern strebt, welche dem Producte aus der Erdgeschwindigkeit mit dem Sinus des von beiden Richtungen eingeschlossenen Winkels proportional ist. Bei der Aberration spielt also der Punkt am Himmel, auf den die Erdbewegung gerichtet ist, eine ganz ähnliche Rolle, als bei der Wirkung der Parallaxe Zenith oder Nadir des Beobachtungsortes, da die Parallaxe den Ort eines Gestirnes dem Nadir um eine Grösse zu nähern strebt, welche dem Producte aus der Horizontalparallaxe mit dem Sinus der Nadirdistanz proportional ist.

Die Parallaxe kann schon bei einer ersten Bahnbestimmung und ohne alle Kenntniss der Abstände des Gestirnes von der Erde und der daraus folgenden Horizontalparallaxe in aller Strenge berücksichtigt werden. Man braucht zu dem Zwecke nur anstatt der Coordinaten des Erdmittelpunktes die des Beobachtungsortes in die Rechnung einzuführen. Die letzteren findet man offenbar dadurch, dass die auf den Erdmittelpunkt bezogenen Coordinaten des Beobachtungsortes zu den heliocentrischen des Erdmittelpunktes addirt werden. Wählt man den Aequator zur Fundamentalebene, so nehmen die zu den Sonnencoordinaten hinzuzufügenden Grössen sehr einfache Gestalt an, denn bezeichnet man mit s die Sternzeit der Beobachtung, mit φ die Polhöhe des Ortes und mit π die Sonnenparallaxe in Secunden (nach den neuesten Bestimmungen zu $8'',80$ angenommen), mit X , Y , Z die unmittelbar den Jahrbüchern zu entnehmenden Sonnencoordinaten, so sind für die Bahnbestimmung die Grössen:

$$X = \frac{\pi}{206264,8} \cdot \cos \varphi \cdot \cos s$$

$$Y = \frac{\pi}{206264,8} \cdot \cos \varphi \cdot \sin s$$

$$Z = \frac{\pi}{206264,8} \cdot \sin \varphi$$

als Sonnencoordinaten zu gebrauchen, um die Parallaxe von vornherein zu berücksichtigen. Es ist nun aber noch leicht zu sehen, dass, wenn diese corrigirten rechtwinkligen Coordinaten der Sonne in Polarcoordinaten umgesetzt werden, z. B. in Rectascension und Declination, der durch die Sonnenparallaxe veränderte Sonnenort erhalten wird. Auf die Parallaxe des zu berechnenden Himmelskörpers kann also in dreierlei Formen Rücksicht genommen werden: entweder corrigirt man die Sonnencoordinaten X , Y , Z auf die oben angegebene Weise, oder die geocentrischen Oerter des Kometen (Planeten) mit der aus seiner Distanz Δ folgenden Parallaxe, oder man bringt an den Sonnenort den Effect der Sonnenparallaxe an. Im letzteren Falle muss jedoch auch R um eine von dem Cosinus der Zenithdistanz der Sonne abhängige Grösse vermindert werden, und zwar um den Betrag:

$$\sin \pi \cdot \cos \text{Zenithdistanz},$$

wie sich leicht daraus ergibt, dass die Sonne im Zenith dem Beobachtungsorte um den Erddurchmesser, d. h. um $\sin \pi$, genähert ist.

Bei einer scharfen Bahnbestimmung muss auch noch auf die Bewegung der Aequinoctien von einer Beobachtung zur anderen Rücksicht genommen und auf ein festes Aequinoctium reducirt werden, wie wir in Vorlesung 14 gesehen haben. Man wählt zu letzterem gewöhnlich das mittlere Aequinoctium vom Anfange desjenigen Jahres, in welchem der Komet in sein Perihel kommt. Es ist bei den Astronomen vorwiegend

Gebrauch geblieben, den scheinbaren Ort der Beobachtungen, d. h. den mit der Nutation und der Fixsternaberration behafteten Ort anzugeben; die Reductionen demnach, welche ausser der für Parallaxe nach dem Vorhergehenden anzubringen, werden nichts Anderes sein als diejenigen Grössen, welche man nach Angabe der astronomischen Jahrbücher an den mittleren Ort für den Jahresanfang angegebenen Ort anzubringen hat, um den scheinbaren zu erhalten, nur mit entgegengesetztem Zeichen.

In Anbetracht des Umstandes, dass die weitaus grössere Zahl der Beobachtungen neuer Himmelskörper in der Form von Messungen des Rectascensions- und Declinationsunterschiedes gegen einen sehr benachbarten Stern erhalten werden, dessen Reduction vom scheinbaren auf den mittleren Ort bis auf eine äusserst kleine Grösse dieselbe sein wird, wie die des zu bestimmenden Gestirnes, wird man sich ausserordentlich häufig erlauben dürfen, der Rechnung ganz einfach diejenigen Positionen zu Grunde zu legen, welche durch Anbringung des beobachteten Rectascensions- und Declinationsunterschiedes an den mittleren Ort des Vergleichsternes erhalten werden. Nur, wenn der letztere nicht ganz benachbart war, wie wohl bei Meridianbeobachtungen vorzukommen pflegt, wird man zu einer Ausnahme genöthigt sein, d. h. die Reduction des Vergleichssterne und die des Beobachtungsobjectes verschieden setzen müssen. Die so behandelten Beobachtungen geben, wenn man noch ausserdem auf angegebene Art die Parallaxe berücksichtigt, die Bahnelemente, bezogen auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges, also gerade das, was man haben will. Man kann dann sogar mit diesen festen Elementen die Ephemeride berechnen; nur muss man, wenn sie auf das Aequinoctium des Tages bezogen und auf die gewöhnliche, dem Leser schon bekannte Art mit den Beobachtungen vergleichbar sein soll, an die Oerter der Ephemeride noch die Reduction vom mittleren auf den scheinbaren Ort, wie ihn die Jahrbücher geben, jedoch mit Ausschluss der Glieder für die Fixsternaberration, anbringen.

Diese letztere Form der Ephemeridenrechnung, bei welcher man ein unveränderliches System Gauss'scher Constanten anwenden kann, empfiehlt sich vor dem früher erklärten durch grössere Bequemlichkeit und Uebersichtlichkeit.

Neununddreissigste Vorlesung.

Die Olbers'sche Methode für den Aequator als Fundamentalebene umgeformt.

Die jetzige Einrichtung der Jahrbücher kommt, wie schon an anderer Stelle bemerkt wurde, dem Gebrauche des Aequators als Fundamentalebene so sehr entgegen, dass die Ekliptik einen grossen Theil ihrer Bequemlichkeit verloren hat. Wo die Ekliptik ohne Weiteres den Vortheil bietet, durch das Nullwerden der Z-Coordinate des Sonnenortes die Formeln zu vereinfachen, scheint sich allerdings auch bei der jetzigen Einrichtung der Jahrbücher die Verwandlung der Beobachtungen in Länge und Breite noch zu lohnen. In Strenge besteht aber jener Vortheil fast niemals, wegen der Sonnenbreite, welche nach der positiven sowohl als der negativen Seite ganz nahe 1" erreichen kann, und ausserdem, wie wir wissen, wegen der Parallaxe. Nur wo man diese Correctionen vernachlässigen will, und dies ist allerdings bei ersten Bestimmungen in der Regel

erlaubt, dürfte sich die Ekliptik unbedingt empfehlen; für scharfe Rechnungen und diejenigen besonderen Fälle dagegen, wo schon auf die erste Bestimmung ein höherer Grad von Sorgfalt und Genauigkeit zu verwenden ist, scheint der Aequator als Fundamentalebene mehr Aufmerksamkeit zu verdienen, als ihm bis jetzt, trotz der sehr zu seinen Gunsten veränderten Einrichtung der astronomischen Jahrbücher, zu Theil geworden ist. Hierher ist besonders zu rechnen, dass die Jahrbücher jetzt auch die Sonnen-coordinaten für das mittlere Aequinoctium des Jahresanfangs geben.

Man könnte vielleicht zu Gunsten der Ekliptik noch geltend machen, dass doch schliesslich die Bahnelemente auf dieselbe bezogen zu werden pflegen, wogegen wieder zu bemerken sein würde, dass man für den doch vorwiegend wichtigen Zweck der Ephemeridenberechnung der Gauss'schen Constanten für den Aequator bedarf, und dass es ebenso leicht ist, die Elemente für die Ekliptik aus den Gauss'schen Constanten, wie diese aus jenen zu berechnen. Nur besteht hier auch noch für den Aequator der Vorthail, dass sich aus den Zahlen einer mit dieser Fundamentalebene ausgeführten Bahnbestimmung sofort auch die Gauss'schen Constanten ergeben, während man im anderen Falle erst von den ursprünglich immer auf den Aequator bezogenen Beobachtungen durch Verwandlung der Rectascensionen und Declinationen in Längen und Breiten auf die Ekliptik und von dieser schliesslich wieder auf den Aequator zurückgehen muss.

Aus den eben angeführten Gründen wollen wir denn die Ekliptik hier nicht in dem Grade bevorzugen, wie es in den meisten Schriften dieser Art zu geschehen pflegt, und demnach untersuchen, wie sich die Olbers'sche Methode für den Aequator als Fundamentalebene gestaltet.

Die Hauptaufgabe wird hier darin bestehen, das Verhältniss $\frac{\varrho''}{\varrho}$ oder das Olbers'sche M möglichst unmittelbar durch Rectascensionen und Declinationen auszudrücken, was wir aber jetzt auf eine andere und allgemeiner anwendbare Art thun wollen, als früher. In der 26. Vorlesung kam es uns vor Allem darauf an, die Kenntniss jenes Verhältnisses als nahe und fast unmittelbare Folge des Olbers'schen Principis darzulegen. Zu unserem jetzigen Zwecke können wir an die Bemerkung anknüpfen, dass für irgend drei Bogen A , B und C folgende identische Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin(B - A) \sin C + \sin(C - B) \sin A + \sin(A - C) \sin B &= 0 \\ \sin(B - A) \cos C + \sin(C - B) \cos A + \sin(A - C) \cos B &= 0 \end{aligned}$$

existiren, wovon man sich sehr leicht durch Auflösung der Klammern überzeugt. Bezeichnen wir nun die doppelte Dreiecksfläche zwischen den Radienvectoren r' und r'' , d. h. die Grösse $r' r'' \sin(v'' - v')$ mit n , die doppelte Dreiecksfläche zwischen r und r' , d. h. $r r' \sin(v' - v)$ mit n'' , $r r'' \sin(v'' - v)$ mit n' , und berücksichtigen, dass auf irgend welche durch die Sonne gelegte Fundamentalebene bezogen, die rechtwinkligen heliocentrischen Coordinaten $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$ durch die Formeln:

$$\begin{aligned} x &= a' r \sin(A' + v) & x' &= a' r' \sin(A' + v') & x'' &= a' r'' \sin(A' + v'') \\ y &= b' r \sin(B' + v) & y' &= b' r' \sin(B' + v') & y'' &= b' r'' \sin(B' + v'') \\ z &= c' r \sin(C' + v) & z' &= c' r' \sin(C' + v') & z'' &= c' r'' \sin(C' + v'') \end{aligned}$$

erhalten werden, so ist nach obigen Identitäten:

$$\begin{aligned} n' x' &= n x + n'' x'' \\ n' y' &= n y + n'' y'' \\ n' z' &= n z + n'' z'' \end{aligned}$$

oder, wenn $\frac{n}{n'} = c$, $\frac{n''}{n'} = c''$ zur Abkürzung gesetzt werden:

$$\left. \begin{aligned} x' &= cx + c''x'' \\ y' &= cy + c''y'' \\ z' &= cz + c''z'' \end{aligned} \right\} (1)$$

Letztere Gleichungen bilden den Ausgangspunkt sehr vieler hierher einschlagender Untersuchungen, so auch der uns jetzt vorliegenden Aufgabe. Bedeuten nämlich $\alpha, \alpha', \alpha''$ die drei beobachteten Rectascensionen, $\delta, \delta', \delta''$ die Declinationen, $X, Y, Z, X', Y', Z', X'', Y'', Z''$ die zugehörigen Sonnenkoordinaten, aus denen das Verhältniss der für den Aequator erhirtten Abstände ϱ und ϱ'' gefunden werden soll, so haben wir zunächst die bekannten Gleichungen:

$$\frac{y' + Y'}{x' + X'} = \operatorname{tg} \alpha'$$

$$\frac{z' + Z'}{x' + X'} = \sec \alpha' \operatorname{tg} \delta'$$

oder, nach dem Obigen:

$$\frac{cy + c''y'' + Y'}{cx + c''x'' + X'} = \operatorname{tg} \alpha' (2)$$

$$\frac{cz + c''z'' + Z'}{cx + c''x'' + X'} = \sec \alpha' . \operatorname{tg} \delta' (3)$$

Drückt man hier nun noch x, x'', y, y'', z, z'' durch ϱ und ϱ'' aus, da:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \alpha - X & x'' &= \varrho'' \cos \alpha'' - X'' \\ y &= \varrho \sin \alpha - Y & y'' &= \varrho'' \sin \alpha'' - Y'' \\ z &= \varrho \operatorname{tg} \delta - Z & z'' &= \varrho'' \operatorname{tg} \delta'' - Z'', \end{aligned}$$

so erhält man aus (2) und (3) zwei Gleichungen zwischen ϱ und ϱ'' . Setzt man zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} M &= (X \sin \alpha' - Y \cos \alpha') . \operatorname{cosec} (\alpha'' - \alpha') \\ M' &= (X' \sin \alpha' - Y' \cos \alpha') . \operatorname{cosec} (\alpha'' - \alpha') \\ M'' &= (X'' \sin \alpha' - Y'' \cos \alpha') . \operatorname{cosec} (\alpha'' - \alpha'), \end{aligned}$$

so geht Gleichung (2) in die folgende über:

$$c'' \varrho'' = M' - Mc - M'' c'' - \frac{\sin (\alpha - \alpha')}{\sin (\alpha'' - \alpha')} . c \varrho (4)$$

Der Gleichung (3) kann man eine ganz analoge Gestalt geben; setzt man:

$$\begin{aligned} N &= X \operatorname{tg} \delta' - Z \cos \alpha' \\ N' &= X' \operatorname{tg} \delta' - Z' \cos \alpha' \\ N'' &= X'' \operatorname{tg} \delta' - Z'' \cos \alpha', \end{aligned}$$

so hat man:

$$(\cos \alpha' \operatorname{tg} \delta'' - \cos \alpha'' \operatorname{tg} \delta') c'' \varrho'' = N' - Nc - N'' c'' - (\cos \alpha' \operatorname{tg} \delta - \cos \alpha'' \operatorname{tg} \delta') c \varrho \quad (5)$$

Aus diesen beiden Gleichungen (4) und (5) könnte man nun die Grösse c'' eliminiren,

in der Weise, dass die daraus resultirende Gleichung nur das Verhältniss $\frac{c}{c''}$ oder $\frac{n}{n''}$

als einzigen nicht in aller Strenge bekannten Factor von ϱ enthielte. Erlaubten wir uns nun auch hier, dieses Verhältniss der Dreiecksflächen für die Erde und für den Kometen gleich gross zu setzen, so kämen wir auf einen für jede beliebige Fundamentalebene gültigen und brauchbaren Ausdruck. Da nun aber hier die X, Y, Z u. s. w. wegen der in voriger Vorlesung angegebenen Berücksichtigung der Parallaxe nicht mehr den Punkten einer Planetenbahn entsprechen, indem sie sich nicht auf den Erdmittelpunkt beziehen, so würden wir hier mit Anwendung des Olbers'schen Principis ohne Correction eine Inconsequenz begehen. Deshalb müssen wir, wenn sich die Berücksichtigung der Parallaxe

und der Aberration vollständig lohnend zeigen soll, der Gleichung zwischen ϱ und ϱ'' eine grössere Genauigkeit geben, als in der Olbers'schen Annahme enthalten ist.

Vorläufig aber machen wir hier von den Gleichungen (4) und (5) unmittelbar Gebrauch; von der ersteren, wenn die Rectascension des Kometen sich stärker ändert, als die Declination, von der letzteren, wenn das Gegentheil der Fall ist. Weiter unten werden wir aus (5) eine Gleichung ableiten, welche vollkommen streng den Olbers'schen Ausdruck für $\frac{\varrho''}{\varrho}$ als speciellen Fall enthält.

Um in den genannten Gleichungen c und c'' auf eine vortheilhafte Weise auszudrücken, führen wir die Verhältnisse des Sectors zum Dreieck ein.

Bezeichnet man das dem Zeitintervalle $t'' - t'$ entsprechende Verhältniss $\frac{\text{Dreieck}}{\text{Ausschnitt}}$ mit η , das dem Intervalle $t' - t$ entsprechende mit η'' , das für $t'' - t$ mit η' , so ist offenbar:

$$\begin{aligned} n &= k (t'' - t') \eta \cdot \sqrt{p} \\ n'' &= k (t' - t) \eta'' \cdot \sqrt{p} \\ n' &= k (t'' - t) \eta' \cdot \sqrt{p}, \end{aligned}$$

dennach:

$$\begin{aligned} c &= \frac{t'' - t'}{t'' - t} \cdot \frac{\eta}{\eta'} = \frac{\partial \eta}{\partial' \eta'} \\ c'' &= \frac{t' - t}{t'' - t} \cdot \frac{\eta''}{\eta'} = \frac{\partial'' \eta''}{\partial' \eta'}. \end{aligned}$$

Hierdurch gehen die Gleichungen (4) und (5) in die folgenden über:

$$\varrho'' = M' \frac{\partial' \eta'}{\partial'' \eta''} - M \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} - M'' - \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha'' - \alpha')} \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \cdot \varrho \cdot \cdot \cdot \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (\cos \alpha' \operatorname{tg} \delta'' - \cos \alpha'' \operatorname{tg} \delta') \varrho'' &= N' \frac{\partial' \eta'}{\partial'' \eta''} - N \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} - N'' \left\{ \begin{aligned} & - (\cos \alpha' \operatorname{tg} \delta - \cos \alpha \operatorname{tg} \delta') \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \cdot \varrho \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \quad (7) \end{aligned}$$

welche völlig streng sind, aber auch die nicht völlig bekannten Grössen η , η' , η'' enthalten. Aus unseren Entwicklungen in der 35. Vorlesung, speciell der Gleichung oder Reihenentwicklung (5) geht hervor, dass η von $r' + r''$, η' von $r + r''$, η'' von $r + r'$ abhängig ist und sofort bekannt wird, sobald es diese Summen werden. Zu bemerken ist, dass die Verhältnisse η , η' , η'' nur um kleine Grössen zweiter Ordnung von der Einheit verschieden sind, durch welchen Umstand es ermöglicht wird, wenn man will, das unten zu beschreibende Verfahren der successiven Verbesserung schon während der systematischen Versuche für die ϱ und ϱ'' , welche die Olbers'sche Methode vorschreibt, durchzuführen, im Gegensatze zu der Verbesserung des Olbers'schen M nach ausgeführter Bahnbestimmung. Zugleich erhält man Gelegenheit, an die Zeiten die Verbesserung wegen der Aberration anzubringen.

Dass die Gleichungen (6) und (7) überhaupt auch zur Verbesserung des Olbers'schen Verhältnisses gut gebraucht werden können, liegt auf der Hand; wir wollen es aber hier doch noch an dem früher behandelten M des zweiten Kometen von 1813 erläutern. Wo die beobachteten geocentrischen Längen und Breiten gebraucht werden, wird zur Anwendung von (6) etwas einfacher:

$$\begin{aligned} M &= R \sin(\lambda' - \odot) \operatorname{cosec}(\lambda'' - \lambda') \\ M' &= R' \sin(\lambda' - \odot') \operatorname{cosec}(\lambda'' - \lambda') \\ M'' &= R'' \sin(\lambda' - \odot'') \operatorname{cosec}(\lambda'' - \lambda'), \end{aligned}$$

und wenn wir (7) anwenden wollen:

$$\begin{aligned} N &= R \operatorname{tg} \beta' \cos \odot \\ N' &= R' \operatorname{tg} \beta' \cos \odot' \\ N'' &= R'' \operatorname{tg} \beta' \cos \odot''. \end{aligned}$$

Für das in Rede stehende Beispiel gestaltet sich die Aufstellung der Gleichung (6) wie folgt:

Es wird:

$$\begin{aligned} \log M &= 0,74555 \\ \log M' &= 0,72240 \\ \log M'' &= 0,69108 \\ \log \frac{\sin (\lambda - \lambda')}{\sin (\lambda'' - \lambda')} &= 9,69999_n. \end{aligned}$$

Ferner ist nach früher geführter Rechnung:

$$\begin{aligned} r &= 1,37708 \\ r' &= 1,33042 \\ r'' &= 1,29027; \end{aligned}$$

da nun $\frac{2 \vartheta}{(r' + r'')} = 0,057191$, welche letztere Zahl für v in die Reihenentwicklung (5) der 35. Vorlesung gesetzt werden muss, um η zu erhalten, so ergibt sich:

$$\eta = 0,99891, \quad \log \eta = 9,99953,$$

was auch der Tafel XI im Anhang entnommen werden kann.

Ebenso findet sich:

$$\begin{aligned} \eta' &= 0,99587, & \log \eta' &= 9,99820, \\ \eta'' &= 0,99903, & \log \eta'' &= 9,99958, \end{aligned}$$

also, da: $\log \vartheta = 9,08392, \quad \log \vartheta' = 9,38323, \quad \log \vartheta'' = 9,08049,$

$$\begin{aligned} \log \vartheta \eta &= 9,08345 \\ \log \vartheta' \eta' &= 9,38143 \\ \log \vartheta'' \eta'' &= 9,08007, \end{aligned}$$

wird die numerisch ausgedrückte Gleichung (6):

$$\varrho'' = 0,04278 + 0,50509 \cdot \varrho.$$

Wir hatten früher gefunden, dass $\log \varrho$ sehr nahe gleich 9,80366 sei; nach der eben aufgestellten Relation gehört dazu:

$$\log \varrho'' = 9,56130,$$

also ist hiernach der verbesserte Logarithmus des Olbers'schen $M = 9,75764$.

Die Uebereinstimmung der aus den Gleichungen (6) und (7) folgenden Relationen zwischen ϱ'' und ϱ mit der nach der Carlini'schen Verbesserungsmethode folgenden ist davon abhängig, ob die Länge und die Breite der zweiten Beobachtung einer und derselben Parabel entsprechen. Wenn wir die Gleichung (7) zur Aufstellung jener Relation benutzen wollen, was hier in Anbetracht der grösseren Bewegung in Breite das Genauere ist, so bekommen wir:

$$\begin{aligned} \log N &= 9,60476 \\ \log N' &= 9,58541 \\ \log N'' &= 9,55840 \\ \log (\cos \lambda' \operatorname{tg} \beta'' - \cos \lambda'' \operatorname{tg} \beta') &= 8,93215 \\ \log (\cos \lambda' \operatorname{tg} \beta - \cos \lambda \operatorname{tg} \beta') &= 8,64061_n \end{aligned}$$

und endlich:

$$\varrho'' = 0,03638 + 0,51504 \varrho;$$

dem Werthe $\log \varrho = 9,80366$ entspricht hiernach $\log \varrho'' = 9,56122$; folglich ergibt sich aus Gleichung (5) der Logarithmus des Olbers'schen $M = 9,75756^1$.

Nach dieser Abschweifung über die Verbesserung des Verhältnisses $\frac{\varrho''}{\varrho}$ kehren wir zu unserem Hauptthema, der strengen Bestimmung einer Kometenbahn aus drei vollständigen Beobachtungen, welche in Rectascension und Declination gegeben sein sollen, zurück.

Es lässt sich zu dem Zwecke folgender Gang der Rechnung vorschlagen.

Man macht zuerst eine Annahme über ϱ , welche dem Werthe $r = 1$ entspricht, setzt gleichzeitig für die Berechnung von η, η', η'' $r = 1, r' = 1, r'' = 1$, und bestimmt das zu ϱ gehörige ϱ'' entweder nach der Formel (6) oder nach (7), je nachdem der Gebrauch der Rectascensionen, oder der der Declinationen eine grössere Genauigkeit verspricht. Aus ϱ'' ergibt sich dann auf einfache Weise r'' und nach der Encke'schen Hülftafel die zu ϱ und ϱ'' , oder r und r'' gehörige Sehne κ . Darauf berechnet man die heliocentrische Bewegung $(v'' - v)$, deren Cosinus wir in der 18. Vorlesung mit (rr'') bezeichnet haben. Die Gleichungen (4) oder (5) der genannten Vorlesung, d. h. die Gleichung:

$$(rr'') rr'' = (RR'') RR'' + (R\varrho'') R\varrho'' + (R''\varrho) R''\varrho + (\varrho\varrho'') \varrho\varrho'',$$

mit Beibehaltung der dort eingeführten Bezeichnung geschrieben, liefert hier mit aller nur zu wünschenden Schärfe das Product der Radienvectoren rr'' , da das gegen die Anwendung derselben bei kleiner geocentrischer Bewegung geäusserte Bedenken jetzt wegfällt. Denn man kann nun nicht mehr, wie früher der Fall war, das Beobachtungsmaterial merklich ändern, ohne auch auf das Resultat für rr'' erheblich einzuwirken.

Den so gefundenen Logarithmus des rr'' zieht man von demjenigen, welcher der Hypothese für ϱ und ϱ'' entspricht, ab; die ganze Differenz betrachtet man als die an den angenommenen $\log r$ anzubringende Verbesserung. Sollte dieselbe zufälligerweise schon bei dem ersten Versuche klein ausfallen, so lohnt sich die Mühe, gleich auch r' aus der Formel:

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = (cx + c''x'')^2 + (cy + c''y'')^2 + (cz + c''z'')^2,$$

und hieraus dann noch ϱ' zu berechnen. Die drei Abstände von der Erde $\varrho \sec \delta, \varrho' \sec \delta', \varrho'' \sec \delta''$ dienen dann dazu, die Beobachtungszeiten wegen der Aberration zu corrigiren; die r, r', r'' ergeben mit gesteigerter Schärfe η, η', η'' und ermöglichen auch, eine genauere Relation zwischen ϱ und ϱ'' für die weiteren Versuche in Anwendung zu bringen.

Zeigt sich hingegen der erste Versuch, indem sich aus Gleichung (5) der 18. Vorlesung ein ganz anderes rr'' ergibt, als den zu Grunde gelegten Werthen entspricht, noch sehr von der Wahrheit entfernt, so wird man sich erlauben, die Correction wegen Aberration noch zu unterlassen, und für die eine Berechnung von $\eta, \eta', \eta'', r' = \frac{1}{2}(r + r'')$ zu setzen. Sollten die beiden Zwischenzeiten sich aber hierfür zu weit von der Gleichheit entfernen, so interpolire man r' im Verhältniss der Zwischenzeiten, setze demnach:

$$r' = \frac{\vartheta}{\vartheta'} r + \frac{\vartheta''}{\vartheta'} r''.$$

¹⁾ Im Berliner Jahrbuche von 1833 findet Encke nach ebenfalls beinahe strengen Formeln in diesem Falle einmal $\log M = 9,75863$, ein anderes Mal $\log M = 9,75824$, welcher letztere Werth mit dem nach der Carlini'schen Verbesserungsmethode gefundenen $\log M = 9,75826$ fast ganz übereinkommt. Die Unterschiede sind bei einer mit fünf Stellen geführten Rechnung zu erwarten.

Dieser letztere Ausdruck wird sich häufig auch während der ganzen Rechnung vollständig genügend erweisen.

Erscheint die Zweideutigkeit, welche der Bestimmung von ϱ aus r , oder von ϱ'' aus r'' anhaftet, störend, so wird man es vorziehen, die obige Gleichung (5) in Beziehung auf $\varrho \varrho''$ aufzulösen, und den dafür gefundenen Werth mit dem Producte der angenommenen Werthe zu vergleichen. Im Uebrigen bleibt der Gang der Rechnung wie beschrieben wurde. Der Leser darf bei der Gleichung (5) aus Vorlesung 18 nicht übersehen, dass darin ϱ und ϱ'' die wirklichen, nicht curtirten Abstände bedeuten.

In den meisten Fällen wird man bei der eben beschriebenen Art, bei welcher die Verbesserung des Olbers'schen Verhältnisses mit der Auflösung der Lambert'schen Gleichung vereinigt wird, ziemlich schnell definitive Werthe bekommen; übrigens sind die Formeln dieser und der folgenden Vorlesung mehr für einen Noth- und Ausnahmefall der Olbers'schen Methode geeignet, und ausserdem hier als Vorbereitungen zu einer weit vollkommeneren Form zu betrachten.

Vierzigste Vorlesung.

Zusammenstellung der Formeln für eine auf den Aequator zu beziehende Kometenbahnberechnung.

Es seien:

$\alpha, \alpha', \alpha''$ die zu den Zeiten t, t', t'' gehörigen, von der bekannten Reduction vom mittleren Aequinoctium des Jahresanfanges auf das scheinbare Aequinoctium wieder befreiten Rectascension, $\delta, \delta', \delta''$ die auf eben solche Art behandelten Declinationen des Gestirns, $X, Y, Z, X', Y', Z', X'', Y'', Z''$ die zugehörigen, auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges bezogenen, wegen der Lage des Beobachtungsortes verbesserten Sonnenkoordinaten. Um daraus die heliocentrischen Coordinaten des Gestirns, bezogen auf das genannte mittlere Aequinoctium, mit aller Schärfe zu finden, hat man nun zunächst folgende Vorbereitungsrechnungen, betreffend die Grössen $R^2, R'^2, R''^2, (RR''), (R\varrho''), (R''\varrho), (\varrho\varrho'')$, desgleichen $\cos \chi$ oder $(R\varrho)$ und $\cos \chi''$ oder $(R''\varrho'')$ zu erledigen:

$$\left. \begin{aligned} R^2 &= X^2 + Y^2 + Z^2 \\ R'^2 &= X'^2 + Y'^2 + Z'^2 \\ R''^2 &= X''^2 + Y''^2 + Z''^2 \\ RR''(RR'') &= XX'' + YY'' + ZZ'' \\ - R \cdot (R\varrho'') &= X \cos \delta'' \cos \alpha'' + Y \cos \delta'' \sin \alpha'' + Z \sin \delta'' \\ - R'' \cdot (R''\varrho) &= X'' \cos \delta \cos \alpha + Y'' \cos \delta \sin \alpha + Z'' \sin \delta \\ (\varrho\varrho'') &= \sin \delta \sin \delta'' + \cos \delta \cos \delta'' \cos (\alpha'' - \alpha) \\ - R \cdot (R\varrho) &= - R \cos \chi = X \cos \delta \cos \alpha + Y \cos \delta \sin \alpha + Z \sin \delta \\ - R'' \cdot (R''\varrho'') &= - R'' \cos \chi'' = X'' \cos \delta'' \cos \alpha'' + Y'' \cos \delta'' \sin \alpha'' + Z'' \sin \delta'' \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

Nachher berechne man, wenn die geocentrische Bewegung in Rectascension den grösseren Bogen umfasst, die Relation zwischen den auf den Aequator projecirten Abständen ϱ und ϱ'' :

$$\left. \begin{aligned} \sin(\alpha'' - \alpha') \varrho'' &= M' \frac{\partial' \eta'}{\partial'' \eta''} - M \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \\ &- M'' - \sin(\alpha - \alpha') \cdot \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \cdot \varrho \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

wobei η, η', η'' die in der 39. Vorlesung erklärte Bedeutung haben, die Grössen M, M', M'' aber der Reihe nach durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} M &= (X \sin \alpha' - Y \cos \alpha') \\ M' &= (X' \sin \alpha' - Y' \cos \alpha') \\ M'' &= (X'' \sin \alpha' - Y'' \cos \alpha') \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

definiert werden, und als nur Gegebenes enthaltend, in die Vorbereitungsrechnung mit aufzunehmen sind.

Entspricht dagegen der Bewegung in Declination ein grösserer Bogen, so bediene man sich statt der Gleichung (2) der folgenden:

$$\left. \begin{aligned} (\cos \alpha' \operatorname{tg} \delta'' - \cos \alpha'' \operatorname{tg} \delta') \varrho'' &= N' \frac{\partial' \eta'}{\partial'' \eta''} - N \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \\ &- N'' - (\cos \alpha' \operatorname{tg} \delta - \cos \alpha \operatorname{tg} \delta') \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \cdot \varrho \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

worin die Grössen:

$$\left. \begin{aligned} N &= X \operatorname{tg} \delta' - Z \cos \alpha' \\ N' &= X' \operatorname{tg} \delta' - Z' \cos \alpha' \\ N'' &= X'' \operatorname{tg} \delta' - Z'' \cos \alpha' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

ebenfalls schon in den Vorbereitungsrechnungen vollständig zu bestimmen sind.

Man mache nun über ϱ eine zweckmässig scheinende Hypothese und berechne:

$$r^2 = R^2 + \varrho^2 \sec \delta^2 + 2 R \varrho \sec \delta \cos \chi \dots \dots \dots (6)$$

Dem hieraus folgenden Werthe von r setzt man zuerst auch r' und r'' gleich, und mit diesen Werthen bestimme man auf die oben beschriebene Weise die Grössen η, η', η'' in (2) oder (4). Man ist jetzt im Stande, das zu ϱ gehörige ϱ'' nach (2) oder (4) zu berechnen, aus welchem wiederum r'' durch die Formel:

$$r''^2 = R''^2 + \varrho''^2 \sec \delta''^2 + 2 R'' \varrho'' \sec \delta'' \cos \chi'' \dots \dots \dots (7)$$

zu bestimmen ist. Es kommt darauf die Encke'sche Hülftafel für die Lambert'sche Gleichung in Anwendung, welche aus ∂' und $r + r''$ die Sehne κ liefert. Zur Prüfung der Richtigkeit des angenommenen Werthes von ϱ dient dann die Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} (\varrho \varrho'') \varrho \varrho'' \sec \delta \sec \delta'' &= \frac{1}{2} (r^2 + r''^2 - \kappa^2) - (R R'') R R'' \\ &- (R'' \varrho) R'' \varrho \sec \delta - (R \varrho'') R \varrho'' \sec \delta'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

aus welcher $\varrho \varrho''$ übereinstimmend mit den der Gleichung (2) oder (4) gemäss angenommenen Werthen von ϱ und ϱ'' sich ergeben müsste. Aus einem sich zeigenden Unterschiede leitet man auf die oben beschriebene Art ein verbessertes ϱ ab, um damit denselben Versuch zu wiederholen.

Ist man durch die successiven Verbesserungen der Wahrheit schon sehr nahe gekommen, so berechnet man, wenn man sehr grosse Schärfe in die Bestimmung zu legen wünscht, r' aus der Gleichung:

$$(\partial' \eta' r')^2 = [(\partial \eta)^2 + \partial \partial'' \eta \eta''] r^2 + [(\partial'' \eta'')^2 + \partial \partial'' \eta \eta''] r''^2 - \partial \partial'' \eta \eta'' \kappa^2 \dots (9)$$

Genügt geringere Genauigkeit, so setzt man:

$$\partial' r' = \partial r + \partial' r'' \dots \dots \dots (10)$$

Aus r' bestimmt man, wenn man der Rechnung die volle Schärfe bewahren will, ϱ' unter Anwendung der Formel:

$$\varrho' \sec \delta' = -R' \cos \chi' \pm \sqrt{r'^2 - l'^2 \sin^2 \chi'} \quad \dots \quad (11)$$

wobei:

$$-R' \cos \chi' = X' \cos \delta' \cos \alpha' + Y' \cos \delta' \sin \alpha' + Z' \sin \delta',$$

bei etwas geringeren Ansprüchen an die Genauigkeit kann man auch hier einfacher:

$$\vartheta' \varrho' = \vartheta \varrho + \vartheta'' \varrho'' \quad \dots \quad (12)$$

zu setzen sich erlauben, was zugleich dazu dienen kann, im anderen Falle das Vorzeichen der Wurzelgrösse in Gleichung (11) zu entscheiden. Die weitere Rechnung hat man dann mit den Zeiten:

$$t = 498^s,5 \varrho \sec \delta \quad t' = 498^s,5 \varrho' \sec \delta' \quad t'' = 498^s,5 \varrho'' \sec \delta''$$

zu führen, um die Aberration zu berücksichtigen; demgemäss sind auch $\vartheta, \vartheta', \vartheta''$ zu ändern.

Zu bemerken ist dabei jedoch, dass die Gleichungen (10) und (12) nur brauchbar sind, solange die äusseren Beobachtungen auf derselben Seite des Perihels liegen, unbrauchbar dagegen, wenn auf entgegengesetzten Seiten.

Hat man die definitiven Werthe von ϱ und ϱ'' , r und r'' und aus κ noch den heliocentrischen Bogen $v'' - v$ gefunden, so berechnet man zunächst auf schon bekannte Weise die Epoche des Perihels T , den Radius vector des Perihels q , sowie die wahren Anomalien v und v'' . Diesem Geschäfte kann man dann fast unmittelbar die Berechnung der Ephemeride folgen lassen, da sich, wie wir wissen, die heliocentrischen Coordinaten auf die Form:

$$\begin{aligned} x &= a' r \sin(A' + v) \\ y &= b' r \sin(B' + v) \\ z &= c' r \sin(C' + v) \end{aligned}$$

bringen lassen, deren Constanten a', b', c', A', B', C' , sich deshalb aus $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}, \frac{x''}{r''}, \frac{y''}{r''}, \frac{z''}{r''}, v$ und v'' auf folgende Weise bestimmen:

$$\left. \begin{aligned} a' \sin [A' + \frac{1}{2} (v'' + v)] &= \frac{1}{2} \left(\frac{x''}{r''} + \frac{x}{r} \right) \sec \frac{1}{2} (v'' - v) \\ a' \cos [A' + \frac{1}{2} (v'' + v)] &= \frac{1}{2} \left(\frac{x''}{r''} - \frac{x}{r} \right) \operatorname{cosec} \frac{1}{2} (v'' - v) \\ b' \sin [B' + \frac{1}{2} (v'' + v)] &= \frac{1}{2} \left(\frac{y''}{r''} + \frac{y}{r} \right) \sec \frac{1}{2} (v'' - v) \\ b' \cos [B' + \frac{1}{2} (v'' + v)] &= \frac{1}{2} \left(\frac{y''}{r''} - \frac{y}{r} \right) \operatorname{cosec} \frac{1}{2} (v'' - v) \\ c' \sin [C' + \frac{1}{2} (v'' + v)] &= \frac{1}{2} \left(\frac{z''}{r''} + \frac{z}{r} \right) \sec \frac{1}{2} (v'' - v) \\ c' \cos [C' + \frac{1}{2} (v'' + v)] &= \frac{1}{2} \left(\frac{z''}{r''} - \frac{z}{r} \right) \operatorname{cosec} \frac{1}{2} (v'' - v) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (13)$$

Will man die Ephemeride, wie das in der Regel bei der ersten Berechnung eines Himmelskörpers zu sein pflegt, nur zum Zwecke des Aufsuchens und der Vorausberechnung seiner Helligkeitsverhältnisse (da nach der Erfahrung auch bei Kometen nahezu die Helligkeit dem Quadrate des Productes der Entfernungen von der Erde und von der Sonne sich umgekehrt proportional zeigt) benutzen, so kann man auch die zu berechnenden Oerter sämmtlich auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges beziehen. Es sind dann also mit den heliocentrischen Coordinaten die Sonnencoordinaten,

bezogen auf dasselbe Aequinoctium, zu verbinden. Im anderen Falle, wenn die Ephemeride auch zu scharfen Vergleichen zwischen Rechnung und Beobachtung dienen soll, und dieses Geschäft auf die gewöhnliche Weise ausgeführt werden soll, hat man den berechneten mittleren Oertern noch die Reduction auf das wahre Aequinoctium des Beobachtungsmomentes hinzuzufügen. Die Fixsternaberration hat man wegzulassen, da diese nachher bei der Vergleichung der Beobachtungen mit der Ephemeride in der uns bekannten anderen Art berücksichtigt wird ¹⁾.

Um endlich mit leichter Mühe auch die Elemente Ω , $\pi - \Omega$ und i , bezogen auf die Ekliptik, zu haben, braucht man nur die Gleichungen (8) und (9) der 19. Vorlesung in Anwendung zu bringen. Jene Gleichungen machen keinen Unterschied zwischen rechtläufigen und rückläufigen Kometen; man erhält bei letzteren einfach einen im zweiten Quadranten liegenden Werth von i , und für $\pi - \Omega$ das $\Omega - \pi$ der anderen Zählungs- und Bezeichnungsweise rückläufiger Kometen; will man auf diese andere übergehen, so hat man daher i in $180^\circ - i$, $\pi - \Omega$ in $360^\circ - (\pi - \Omega)$ zu verwandeln, und den Elementen noch das Zeichen R. oder Retrograd hinzuzufügen.

Da hier die Bezeichnung in einzelnen Stücken von der in der 19. Vorlesung abweicht, und der Vollständigkeit halber mögen hier jene Vorschriften zur Berechnung von $\pi - \Omega$, Ω , i noch einmal aufgeführt werden. Bedeutet ε die Schiefe der Ekliptik zur Epoche des gewählten Aequinoctiums, so berechne man einen Hülfswinkel ψ aus der Formel:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b'}{c'},$$

dann hat man:

$$\operatorname{tg} [1/2 (B' + C') - (\pi - \Omega)] = \frac{\cos(\varepsilon - \psi)}{\cos(\varepsilon + \psi)} \cdot \operatorname{tg} 1/2 (B' - C') \dots (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \Omega &= a' \sin [A' - (\pi - \Omega)] \\ - \sin \Omega \cos i &= a' \cos [A' - (\pi - \Omega)] \\ \sin \Omega &= b' \sec \varepsilon \sin [B' - (\pi - \Omega)] \\ &= c' \operatorname{cosec} \varepsilon \sin [C' - (\pi - \Omega)] \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

In welchem Quadranten $\pi - \Omega$ und Ω liegen, muss hier, da wir die geocentrischen Breiten nicht unmittelbar haben, auf etwas andere Art, als in Vorlesung 19 entschieden werden, nämlich dadurch, dass eine der beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} b' \cos [B' - (\pi - \Omega)] &= \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon \\ c' \cos [C' - (\pi - \Omega)] &= \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon \end{aligned}$$

zugezogen wird. Ist noch eine derselben befriedigt, so ist in (14) der Quadrant von $\pi - \Omega$ richtig gewählt; im anderen Falle sind $\pi - \Omega$ und Ω um 180° zu ändern. Das auf solche Weise bestimmte System wird die Gauss'schen Constanten wiedergeben, daher die Beobachtungen darstellen, und man hat somit auch die Elemente, bezogen auf die Ekliptik und das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges.

¹⁾ Nach der Bezeichnung des Berliner Jahrbuches hat man also an die mittleren Rectascensionen noch die Grössen Aa , Bb , an die Declinationen die Grössen Aa' , Bb' anzubringen.

Einundvierzigste Vorlesung.

Rechnungsbeispiel zu Vorlesung Vierzig¹⁾.

Der Komet 1857. III. wurde vom Herrn Professor Förster am Berliner Refractor wie folgt beobachtet:

	Mittlere Berliner Zeit	Rectascension	Declination
1857. Juni 23.	12 ^h 56' 53"	53° 6' 53",4	+ 40° 59' 38",5
27.	12 56 37	61 20 51 ,1	+ 44 53 50 ,1
Juli 2.	13 27 37	77 2 50 ,6	+ 48 47 8 ,8.

Wir führen zunächst an diesen Beobachtungen die Reduction vom scheinbaren Orte auf den mittleren aus, d. h. beziehen die Beobachtungen auf das mittlere Aequinoctium des Jahres 1857,0, indem wir sie zugleich von der Fixsternaberration befreien. Die Jahrbücher geben die dazu gehörigen Formeln und Zahlen. Dem Jahrbuche (hier dem Nautical Almanac) entnehmen wir auch noch die Sonnenkoordinaten für die Beobachtungszeiten und bringen daran zur Berücksichtigung der Parallaxe die in der 38. Vorlesung angegebenen, von der Sternzeit und Polhöhe des Beobachtungsortes abhängigen Correctionen an, nämlich:

$$\begin{aligned} \text{an den } X \text{ die Correction} &= \frac{\pi}{206264,8} \cos \varphi \cos s \\ \text{" " } Y \text{ " " " } &= \frac{\pi}{206264,8} \cos \varphi \sin s \\ \text{" " } Z \text{ " " " } &= \frac{\pi}{206264,8} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Wir wollen diese leichten Reductionen hier nicht in das Einzelne durchführen, sondern gleich das auf solche Weise von fremdartigen Beimischungen befreite Material der Rechnung selbst hier anführen.

t, t', t''	Juni 23,53950	Juni 27,53932	Juli 2,56085
$\alpha, \alpha', \alpha''$	53° 6' 51"	61° 20' 48"	77° 2' 44"
$\delta, \delta', \delta''$	40 59 35	44 43 46	48 47 4
X, X', X''	— 0,04203	— 0,10953	— 0,19350
Y, Y', Y''	0,93183	0,92730	0,91569
Z, Z', Z''	0,40432	0,40235	0,39731.

Die Vorbereitungsrechnungen nach den Gleichungen (1) der vorigen Vorlesung ergeben nun nach (1):

$$\begin{aligned} R^2 &= 1,03355 & (R'' \varrho) R'' \sec \delta &= - 0,96155 \\ R'^2 &= 1,03377 & (\varrho \varrho'') \sec \delta \sec \delta'' &= 1,90622 \\ R''^2 &= 1,03378 & (R \varrho) R &= R \cos \chi = - 0,80873 \\ (RR'') RR'' &= 1,02204 & (R'' \varrho'') R'' &= R'' \cos \chi'' = - 0,85827, \\ (R \varrho'') R \sec \delta'' &= - 1,36029 \end{aligned}$$

¹⁾ Da es hier bloss darauf ankommt, den Gang der Rechnung zu veranschaulichen, so wurde von einer Umrechnung des Beispiels mit den modernen Werthen der Sonnenparallaxe und Aberrationszeit abgesehen. Anmerkung des Herausgebers der 2. Auflage.

und für den Fall einer scharfen Berechnung der Aberration:

$$\begin{aligned} R' \cos \chi' &= -0,82396 \\ R'^2 \sin \chi'^2 &= 0,35486. \end{aligned}$$

Von den Formeln (2) und (4) verdient offenbar hier die erstere bei der Aufstellung der Relation zwischen ϱ und ϱ'' den Vorzug, weil die Bewegung in Rectascension die in Declination bedeutend übertrifft; berechnet man deshalb die M, M', M'' , so erhält man:

$$\begin{aligned} M &= -0,48370 \\ M' &= -0,54077 \\ M'' &= -0,60888, \end{aligned}$$

und jene Relation wird überhaupt:

$$0,27058 \cdot \varrho'' = -0,54077 \frac{\partial' \eta'}{\partial'' \eta''} + 0,48370 \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} + 0,60888 + 0,14319 \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \cdot \varrho.$$

Die Gleichungen (6) und (7) nehmen, in Zahlen ausgedrückt, folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} r^2 &= 1,03355 - 2,14293 \varrho + 1,75529 \varrho^2 \\ r'^2 &= 1,03378 - 2,60520 \varrho'' + 2,30340 \varrho''^2, \end{aligned}$$

und die Gleichung (8) endlich wird:

$$3,81244 \cdot \varrho \varrho'' = r^2 + r'^2 - \kappa^2 - 2,04408 + 1,92310 \varrho + 2,72058 \varrho''.$$

Da hiermit die Vorbereitungsrechnungen beendet sind, schreiten wir zu den Versuchen über ϱ ; ohne Gefahr, unser Ziel zu verfehlen, könnten wir mit einem Werthe beginnen, der $r = 1$ entspricht. Die Grösse der negativen Coëfficienten von ϱ in dem Ausdrücke für r^2 lässt indessen vermuthen, dass r bedeutend kleiner als 1 ist; deshalb schätzen wir $r = 0,75$ und beginnen die Versuche mit $\varrho = 0,9$. Mittelst der geschätzten Werthe von $r' + r''$, $r + r''$, $r + r'$, welche wir vorläufig bei der Berechnung von η, η', η'' alle drei gleich 1,5 setzen, bekommen wir nach den nun bekannten Vorschriften:

$$\begin{aligned} \log \eta &= 9,99871 & \log \partial \eta &= 8,93513 \\ \log \eta' &= 9,99578 & \log \partial' \eta' &= 9,18663 \\ \log \eta'' &= 9,99918 & \log \partial'' \eta'' &= 8,83680. \end{aligned}$$

Um die Gleichung zwischen ϱ und ϱ'' zu verbessern, hat man jetzt die η, η', η'' mit den Werthen $r = 0,72574$, $r' = 0,64809$, $r'' = 0,55063$ zu berechnen. Zu $\varrho = 0,9$ oder $\log \varrho = 9,95424$ gehört zufolge der Relation (2) $\log \varrho'' = 9,79022$, aus (6) und (7) ergeben sich die zugehörigen r^2 und r'^2 :

$$\begin{aligned} r^2 &= 0,52670 & r &= 0,72574 \\ r'^2 &= 0,30325 & r' &= 0,55067. \end{aligned}$$

Bestimmt man aus ∂' und $(r + r'')$ die Sehne κ mittelst der Lambert'schen Gleichung und Encke's Hülftafel, so wird $\log \kappa = 9,43970$, $\kappa^2 = 0,07575$. Wird letzterer Werth auf der rechten Seite von Gleichung (8) substituirt, so erhält man:

$$(r r'') r r'' = 0,37582;$$

wir wollen diesen aus Gleichung (8) hervorgehenden den geometrischen, den aus der Lambert'schen Gleichung zu bestimmenden, wenn man das derselben entsprechende κ in die Formel $(r r'') r r'' = \frac{1}{2} (r^2 + r'^2 - \kappa^2)$ einsetzt, den phoronomischen Werth von $(r r'') r r''$ nennen. Der letztere wird hier gleich 0,37710. Um die Fehler von

η, η', η'' zu verbessern, berechnen wir zu dem r und r'' der ersten Hypothese noch das r' nach der Formel:

$$(\partial' \eta')^2 r'^2 = (\partial \eta + \partial'' \eta'') (\partial \eta r^2 + \partial'' \eta'' r''^2) - \partial \eta \cdot \partial'' \eta'' \cdot \kappa^2.$$

Diese Rechnung liefert uns: $r' = 0,64407$; bestimmen wir jetzt aus den drei Radienvectoren von Neuem η, η', η'' , so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \log \eta &= 9,99744 & \log \partial \eta &= 8,93386 \\ \log \eta' &= 9,99309 & \log \partial' \eta' &= 9,18394 \\ \log \eta'' &= 9,99893 & \log \partial'' \eta'' &= 8,83655. \end{aligned}$$

Dem Werthe von $\log \varrho = 9,95424$ entspricht nach Gleichung (2) demnach genauer der Werth: $\log \varrho'' = 9,80303$; die weiteren Zahlen der zweiten Hypothese werden nun:

$$\begin{aligned} r^2 &= 0,52670 & r &= 0,72574 \\ r'^2 &= 0,30839 & r' &= 0,55533 \\ \log \kappa &= 9,48894 \\ \kappa^2 &= 0,07548 \\ (r r'') r r'' \text{ geometr.} &= 0,38237 \\ (r r'') r r'' \text{ phoron.} &= 0,37980. \end{aligned}$$

Um der Wahrheit sich mehr zu nähern, müsste daher das Product $r r''$, welches dem angenommenen Werthe von ϱ und ϱ'' entspricht, in dem Verhältniss von 0,37980 zu 0,38240, oder das hypothetische $r = 0,72574$ im Verhältniss von $\sqrt{0,37980} : \sqrt{0,38240}$ vergrößert werden. Es würde dies eine Vermehrung des r von 0,00248 erfordern, welchem Zuwachs von r nach der Relation:

$$r^2 = 1,03355 - 2,14293 \varrho + 1,75529 \varrho^2,$$

oder:

$$r \triangle r = (1,75529 \varrho - 1,07146) \triangle \varrho$$

als Zuwachs von ϱ die Grösse 0,00354, als Zuwachs von $\log \varrho$ die Grösse 0,00171 entspricht.

Bei der folgenden Hypothese nehmen wir demgemäss an: $\log \varrho = 9,95595$; um mit grösserer Genauigkeit den entsprechenden Werth von $\log \varrho''$ zu finden, verbessern wir mit den drei Radienvectoren der vorhergehenden Hypothese $r = 0,72574$, $r' = 0,64859$, $r'' = 0,55533$ die Werthe von $\log \eta, \log \eta', \log \eta''$. Die letzteren werden dadurch:

$$\begin{aligned} \log \eta &= 9,99750, \\ \log \eta' &= 9,99316, \\ \log \eta'' &= 9,99894. \end{aligned}$$

$\log \varrho''$ wird gleich 9,80459, und die weiteren Zahlen der Rechnung ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned} r^2 &= 0,53032, & r &= 0,72822, \\ r'^2 &= 0,30915, & r' &= 0,55601, \\ \log \kappa &= 9,48839, \\ \kappa^2 &= 0,07530, \\ (r r'') r r'' \text{ geometr.} &= 0,38411, \\ (r r'') r r'' \text{ phoron.} &= 0,38208. \end{aligned}$$

Das $\log \varrho$ der Hypothese bedürfte diesmal der Verbesserung von 0,00131; um die Convergenz des Verbesserungsverfahrens zu erhöhen, nehmen wir an, dass die durch dasselbe zu erhaltenden einzelnen Correctionen eine geometrische Progression bilden; dieselbe würde hier mit den Gliedern:

$$0,00171 + 0,00131 + \dots$$

beginnen; ihr Exponent würde 0,77, ihre Summe gleich $0,00171 \cdot \frac{1}{1-0,77}$, also gleich 0,00727 sein. Demgemäss dürfen wir schliessen, dass $\log \varrho$ sehr nahe gleich 9,95424 + 0,00727 oder 9,96151 sein wird, was sich in der That bestätigt findet.

Es ist deshalb jetzt die Verbesserung der Beobachtungszeiten wegen der Aberration vorzunehmen. Benutzen wir die η, η', η'' der vorhergehenden Hypothese, so finden wir, dass zu $\log \varrho = 9,96151$ ein $\log \varrho'' = 9,80982$ gehört, und dann wieder folgende drei Radienvectoren:

$$\begin{aligned} r &= 0,73658 \\ r' &= 0,65664 \\ r'' &= 0,55819. \end{aligned}$$

Aus dem r' folgt der Abstand von der Erde in der zweiten Beobachtung gleich:

$$- R' \cos \chi' + \sqrt{r'^2 - R'^2 \sin^2 \chi'} \text{ oder } 0,82396 + 0,27628.$$

Die drei nicht curtirten Abstände von der Erde, mit denen man die Aberrations-constante von 493,3¹⁾ nach den gegebenen Vorschriften multipliciren soll, werden somit:

$$\begin{aligned} 1,21250 \\ 1,10024 \\ 0,97950, \end{aligned}$$

und die geforderten Verbesserungen der Beobachtungszeiten, in Tagen ausgedrückt, gleich:

$$\begin{aligned} - 0,00692 \\ - 0,00628 \\ - 0,00559. \end{aligned}$$

Man wird also für den Schluss der Rechnung die Beobachtungszeiten:

$$\begin{aligned} \text{Juni } 23,53258 \\ \text{Juni } 27,53304 \\ \text{Juli } 2,55526, \end{aligned}$$

und die $\eta, \eta', \eta'', \vartheta \eta, \vartheta' \eta', \vartheta'' \eta''$ noch einmal dementsprechend berechnen.

Für die folgende Hypothese wird mit Rücksicht hierauf:

$$\begin{aligned} \log \eta &= 9,99757, & \log \vartheta \eta &= 8,93405, \\ \log \eta' &= 9,99338, & \log \vartheta' \eta' &= 9,18430, \\ \log \eta'' &= 9,99898, & \log \vartheta'' \eta'' &= 8,83667. \end{aligned}$$

Führt man die Versuche zu Ende²⁾, so findet man endlich für $\log \varrho$ die definitive Lösung:

$$\log \varrho = 9,96102,$$

und für $\log \varrho''$:

$$\log \varrho'' = 9,80809.$$

Es entsprechen dieser Lösung die Radienvectoren:

$$\begin{aligned} r &= 0,73582, & \log r &= 9,86677 \\ r' &= 0,55755, & \log r' &= 9,74628 \\ \kappa^2 &= 0,074787. \end{aligned}$$

Zunächst berechnet man darauf den Bogen $\frac{1}{2}(v'' - v)$ nach der Formel:

$$4 r r'' \sin \frac{1}{2}(v'' - v)^2 = \kappa^2 - (r'' - r)^2,$$

¹⁾ Siehe Anmerkung S. 297.

²⁾ Bei dem Schlusse der Versuche ist es, wenn man eine sehr grosse Genauigkeit in die Rechnung legen will, vorzuziehen, den geometrischen Werth von κ^2 aus der Gleichung $(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2$ zu suchen, um mit dem phoronomischen Werthe zu vergleichen; um so mehr, als die heliocentrischen Coordinaten doch später berechnet werden müssen.

woraus sich:

$$\frac{1}{2}(v'' - v) = 9^{\circ} 18' 59'',3$$

ergiebt.

Rechnet man darauf nach den Formeln (12) der 28. Vorlesung, so findet man noch:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(v'' + v) &= -40^{\circ} 21' 45'',8 \\ \log q &= 9,565436\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}v &= -90^{\circ} 2' 30'',9 \\ v'' &= -71 24 32,3,\end{aligned}$$

und hieraus mittelst der Barker'schen Tafel die Zeit des Perihels:

$$T = 1857, \text{ Juli } 17,99482 \text{ (Berl. Zeit).}$$

Die definitiven Werthe der heliocentrischen Coordinaten des Kometen waren für die erste Beobachtung:

$$x = 0,59073, \quad y = -0,20066, \quad z = 0,39015;$$

für die zweite Beobachtung:

$$x'' = 0,33761, \quad y'' = -0,28923, \quad z'' = 0,33658;$$

also werden die Grössen a', A', b', B', c', C' u. s. w.

$$\begin{aligned}a' &= \text{num. log. } 9,97237, & A' &= 211^{\circ} 13' 14'' \\ b' &= \text{num. log. } 9,93412, & B' &= 288 32 45 \\ c' &= \text{num. log. } 9,79078, & C' &= 149 10 41.\end{aligned}$$

Hiermit ist nun alles für Berechnung einer Ephemeride Erforderliche bekannt. Prüft man, wie die zweite Beobachtung durch diese Constanten dargestellt wird, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\text{Berechnete Rectascension} &= 61^{\circ} 20' 50'' \\ \text{Beobachtete} \quad \quad \quad &= 61 20 48 \\ \text{Berechnete Declination} &= + 44 43 56 \\ \text{Beobachtete} \quad \quad \quad &= 44 43 46.\end{aligned}$$

Die Rectascension wird so genau dargestellt, als es der Gebrauch der fünfstelligen Tafeln ermöglicht. Eine ebenso genaue Darstellung der Declination dagegen war, weil wir die Relation (2) angewandt, welche nur die Rectascensionen berücksichtigt, nicht zu erwarten.

Wollen wir nun noch die auf die Ekliptik bezogenen Elemente des Kometen kennen lernen, so haben wir, nach den Gleichungen (14) und (15) der 40. Vorlesung, mit dem Werthe $\varepsilon = 23^{\circ} 27' 37''$ für die Schiefe der Ekliptik zu der Epoche 1857,0:

$$\begin{aligned}\pi - \oslash &= 134^{\circ} 4' 0'' \\ \oslash &= 23 48 42 \\ i &= 121 6 52,\end{aligned}$$

oder, nach anderer Bezeichnungsweise:

$$\begin{aligned}\pi - \oslash &= 225^{\circ} 56' 0'' \\ \oslash &= 23 48 42 \\ i &= 58 53 8. \\ &\text{Retrograd.}\end{aligned}$$

Zweiundvierzigste Vorlesung.

Die Gauss'sche Form der Olbers'schen Methode, auf den Aequator übertragen.

Wir haben absichtlich in den vorhergehenden Rechnungen aus bald zu errathenden Gründen von einer Umformung der Gleichung (4) keinen Gebrauch gemacht, durch welche die Grösse $\frac{1}{c''}$, welche am meisten durch die Convergenz der Verbesserungen verzögert wird, ganz aus der Relation verschwindet. Unsere Absicht war, den Leser schon an diesen Rechnungen erkennen zu lassen, wie man für den Fall, dass eine Beobachtung wegen fehlender Declinationsbestimmung unvollständig wäre, doch nicht allzu mühsam zu einem scharfen Resultate gelangen könnte. Diesem Falle widmen wir in der folgenden Vorlesung noch einige Betrachtungen; jetzt aber wollen wir zeigen, wie in dem Falle vollständiger Beobachtungen für die Fundamentalebene des Aequators eine vollständig strenge Gleichung zwischen q'' und q , den auf diese Ebene curtirten Distanzen zu erhalten ist, in welcher als Unbekannte ausser q und q'' selbst nur das Verhältniss $\frac{c}{c''}$ noch auftritt. Von diesem Verhältnisse lässt sich nach den früheren Entwicklungen erkennen, dass es bis auf Grössen von der Ordnung des Productes der kleinen Zwischenzeiten, d. h. bis auf Grössen der zweiten Ordnung inclusive genau, gleich dem Verhältnisse der Zwischenzeiten $\frac{t'' - t'}{t' - t}$ oder $\frac{\partial}{\partial t''}$ gesetzt werden kann. Hieraus geht noch hervor, dass eine solche Relation, wie wir sie zu entwickeln vorhaben, um die Genauigkeit des Olbers'schen M zu erreichen, die Kenntniss der η , η' , η'' nicht mehr erfordert. Substituirt man aber bei einer Wiederholung der Rechnung die η und η'' , welche dann selbst bis auf Grössen zweiter Ordnung inclusive bekannt sind, so erhält man die Unbekannten bis auf Grössen vierter Ordnung genau; überhaupt steigert jede Wiederholung die Genauigkeit hier um zwei Ordnungen, und wenn die Zwischenzeiten gleich sind, sogar um drei Ordnungen.

Dieses vorausgeschickt, bemerken wir, dass der Coëfficient N' der Gleichung (4) im Gegensatze zu M' der Gleichung (2) von der Wahl der Anfangsrichtung in der Fundamentalebene abhängig erscheint, so dass es immer möglich sein wird, durch eine blossе Drehung des Coordinatensystems um die Z-Axe den Coëfficienten N' und demnach auch $N' \cdot \frac{1}{c''}$ zum Verschwinden zu bringen. Es sollen also jetzt die Rectascensionen von einem Meridian gerechnet werden, welchem nach der gewöhnlichen Zählweise die Rectascension A'_0 entspricht, unter der Bedingung, dass:

$$N' = X' \operatorname{tg} \delta' \cos A'_0 + Y' \operatorname{tg} \delta' \sin A'_0 - Z' \cos (\alpha' - A'_0) = 0$$

wird. Die Auflösung dieser Bedingung ergibt:

$$\operatorname{tg} A'_0 = - \frac{X' \operatorname{tg} \delta' - Z' \cos \alpha'^1)}{Y' \operatorname{tg} \delta' - Z' \sin \alpha'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

¹⁾ Es mag hier vorläufig Erwähnung finden, dass nach dieser Gleichung A'_0 mit der Rectascension (beziehungsweise der Länge) der Pole eines grössten Kreises identisch ist, welcher den zweiten geocentrischen Ort und den zugehörigen Sonnenort verbindet.

Die Zweideutigkeit des Quadranten von A'_0 ist hier gleichgültig, da sie keinen Einfluss hat.

An die Stelle der Gleichung (4) können wir daher jetzt die folgende setzen:

$$\varrho'' = \left. \begin{aligned} & \frac{tg \delta \cos(\alpha' - A'_0) - tg \delta' \cos(\alpha - A'_0)}{tg \delta' \cos(\alpha'' - A'_0) - tg \delta'' \cos(\alpha' - A'_0)} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \varrho \\ & + \frac{tg \delta' (X'' \cos A'_0 + Y'' \sin A'_0) - Z'' \cos(\alpha' - A'_0)}{tg \delta' \cos(\alpha'' - A'_0) - tg \delta'' \cos(\alpha' - A'_0)} \\ & + \frac{tg \delta' (X \cos A'_0 + Y \sin A'_0) - Z \cos(\alpha' - A'_0)}{tg \delta' \cos(\alpha'' - A'_0) - tg \delta'' \cos(\alpha' - A'_0)} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \end{aligned} \right\} (2)$$

welche Formel noch vollkommen streng ist.

Nimmt man nun aber an, dass das Verhältniss $\frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''}$ bei dem Kometen und bei der Erde gleichen Werth hat, was bis auf Grössen zweiter Ordnung inclusive richtig ist, so muss die vorstehende Relation auch die Lösung der Erdbahn: $\varrho = 0$ und $\varrho'' = 0$ mit einschliessen, was nur möglich ist, wenn sich auch das von ϱ freie Glied der rechten Seite auf Null reducirt. Man kann daher mit demselben Grade von Annäherung, den die Olbers'sche Methode besitzt, von der Gleichung:

$$\varrho'' = \frac{tg \delta \cos(\alpha' - A'_0) - tg \delta' \cos(\alpha - A'_0)}{tg \delta' \cos(\alpha'' - A'_0) - tg \delta'' \cos(\alpha' - A'_0)} \cdot \frac{t'' - t'}{t' - t} \cdot \varrho (3)$$

Gebrauch machen, bei welcher die Verwandlung der Beobachtungen in Länge und Breite nicht mehr verlangt wird.

Gelingt es nun noch, die Gauss'sche Form, die Versuche anzustellen, auf den Aequator zu übertragen, so werden wir zu einer Methode gelangen, welche grösste Bequemlichkeit mit grösster Schärfe vereinigen lässt. Wir erreichen unseren Zweck wenn wir setzen:

$$\begin{aligned} X'' - X &= g \cos \gamma \cos G \\ Y'' - Y &= g \cos \gamma \sin G \\ Z'' - Z &= g \sin \gamma, \end{aligned}$$

wobei, wie leicht ersichtlich, g die Erdschne zwischen der ersten und dritten Beobachtung, G die Rectascension des ersten Erdortes, vom dritten aus gesehen, γ die zugehörige Declination bedeutet.

Ferner setzen wir, analog den früheren Entwicklungen in der 28. Vorlesung:

$$\begin{aligned} M \cos \alpha'' - \cos \alpha &= h \cos \xi \cos H \\ M \sin \alpha'' - \sin \alpha &= h \cos \xi \sin H \\ M tg \delta'' - tg \delta &= h \sin \xi, \end{aligned}$$

wodurch man für κ^2 oder $(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2$ folgenden Ausdruck erhalten wird:

$$\kappa^2 = \varrho^2 h^2 - 2 g \varrho h [\sin \gamma \sin \xi + \cos \gamma \cos \xi \cos (G - H)] + g^2.$$

Bezeichnen wir den Winkelabstand des ersten geocentrischen Ortes des Kometen vom ersten Sonnenorte mit ψ , die entsprechende Grösse bei der dritten Beobachtung mit ψ'' , so haben wir:

$$\begin{aligned} R \cos \psi &= X \cos \delta \cos \alpha + Y \cos \delta \sin \alpha + Z \sin \delta \\ R'' \cos \psi'' &= X'' \cos \delta'' \cos \alpha'' + Y'' \cos \delta'' \sin \alpha'' + Z'' \sin \delta''. \end{aligned}$$

Es sei auch noch der Kürze wegen:

$$\cos \varphi = \sin \gamma \sin \xi + \cos \gamma \cos \xi \cos (G - H),$$

so werden r^2 , r''^2 und κ^2 wieder ganz ihre frühere Form (28. Vorlesung) annehmen; man wird nämlich haben:

$$\begin{aligned} r^2 &= (\varrho \sec \delta - R \cos \psi)^2 + R^2 \sin^2 \psi \\ r''^2 &= (M \varrho \sec \delta'' - R'' \cos \psi'')^2 + R''^2 \sin^2 \psi'' \\ \kappa^2 &= (\varrho h - g \cos \varphi)^2 + g^2 \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Man braucht jetzt nur noch wieder die Grösse u mittelst der Gleichung:

$$\varrho h - g \cos \varphi = u,$$

d. h.:

$$\varrho = \frac{u + g \cos \varphi}{h}$$

einzuführen, und die Versuchsgleichungen werden wieder ganz die früheren, nur mit dem Unterschiede, dass sich ϱ , und entsprechend u , ebenso wie das wieder mit M bezeichnete Verhältniss $\frac{\varrho''}{\varrho}$ hier auf den Aequator, statt auf die Ekliptik beziehen. Es ist leicht zu sehen, dass die Formeln für die Ekliptik durch Specialisirung aus den vorhergehenden zu erhalten sind.

Wir wollen für diese der Olbers'schen nahe verwandte Methode, welche ihr an Bequemlichkeit ungefähr gleich kommt, aber dabei so ungemein leicht den höchsten Grad von Schärfe in die Bestimmung legen lässt, noch einmal die Formeln zusammenstellen.

Dreiundvierzigste Vorlesung.

Zusammenstellung der Formeln für die unmittelbar auf den Aequator bezogene, strenge Form der Olbers'schen Methode. Rechnungsbeispiel.

Man berechne:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} V &= \frac{X' \operatorname{tg} \delta' - Z' \cos \alpha'}{Y' \operatorname{tg} \delta' - Z' \sin \alpha'}^1), \\ M &= \frac{\operatorname{tg} \delta \cos (V + \alpha') - \operatorname{tg} \delta' \cos (V + \alpha)}{\operatorname{tg} \delta' \cos (V + \alpha'') - \operatorname{tg} \delta'' \cos (V + \alpha')} \cdot \frac{t'' - t'}{t' - t}, \\ g \cos \gamma \cos G &= X'' - X \\ g \cos \gamma \sin G &= Y'' - Y \\ g \sin \gamma &= Z'' - Z \\ M - \cos (\alpha'' - \alpha) &= h \cos \xi \cos (H - \alpha'') \\ \sin (\alpha'' - \alpha) &= h \cos \xi \sin (H - \alpha'') \\ M \operatorname{tg} \delta'' - \operatorname{tg} \delta &= h \sin \xi \\ \cos \varphi &= \sin \gamma \sin \xi + \cos \gamma \cos \xi \cos (G - H) \\ R \cos \psi &= X \cos \delta \cos \alpha + Y \cos \delta \sin \alpha + Z \sin \delta \\ R'' \cos \psi'' &= X'' \cos \delta'' \cos \alpha'' + Y'' \cos \delta'' \sin \alpha'' + Z'' \sin \delta''. \end{aligned}$$

¹⁾ Oder auch, wenn man lieber die Polarcoordinaten, Rectascension und Declination des Sonnenortes A' und D' gebrauchen will:

$$\operatorname{tg} V = \frac{\operatorname{tg} \delta' \cos A' - \operatorname{tg} D' \cos \alpha'}{\operatorname{tg} \delta' \sin A' - \operatorname{tg} D' \sin \alpha'}.$$

Desgleichen kann man im Folgenden setzen:

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos (\alpha - A), \\ \cos \psi'' &= \sin \delta'' \sin D'' + \cos \delta'' \cos D'' \cos (\alpha'' - A''). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= g \sin \varphi \\ B &= R \sin \psi \\ B'' &= R'' \sin \psi'' \\ b &= h \cos \delta \\ b'' &= \frac{h \cos \delta''}{M} \\ c &= g \cos \varphi - b R \cos \psi \\ c'' &= g \cos \varphi - b'' R'' \cos \psi'', \end{aligned}$$

dann wird wieder:

$$\begin{aligned} r^2 &= \left(\frac{u + c}{b} \right)^2 + B^2 \\ r''^2 &= \left(\frac{u + c''}{b''} \right)^2 + B''^2 \\ \kappa^2 &= u^2 + A^2; \end{aligned}$$

ist u auf bekannte Weise, der Lambert'schen Gleichung genügend, bestimmt, so wird:

$$\varrho = \frac{u + g \cos \varphi}{h}.$$

Für eine Wiederholung der Rechnung wird man die Zeiten wegen Aberration corrigiren, und M nach Gleichung (2) unter Berücksichtigung der η und η'' von Neuem bestimmen, dabei jene Gleichung unter der Form:

$$\varrho'' = a \varrho + a' = \left(a + \frac{a'}{\varrho} \right) \varrho$$

schreibend, in welcher:

$$\begin{aligned} a' &= \frac{tg \delta'' (X'' \cos V - Y'' \sin V) - Z'' \cos (\alpha' + V)}{tg \delta' \cos (V + \alpha'') - tg \delta'' \cos (V + \alpha')} \\ &+ \frac{tg \delta' (X \cos V - Y \sin V) - Z \cos (\alpha' + V)}{tg \delta' \cos (V + \alpha'') - tg \delta'' \cos (V + \alpha')}, \\ a &= \frac{tg \delta \cos (V + \alpha') - tg \delta' \cos (V + \alpha)}{tg \delta' \cos (V + \alpha'') - tg \delta'' \cos (V + \alpha')} \cdot \frac{\delta \eta}{\delta'' \eta''}. \end{aligned}$$

Die zweite oder Verbesserungsrechnung wird also mit dem Werthe:

$$M = a + \frac{a'}{\varrho},$$

worin der in der ersten Rechnung gefundene Werth von ϱ zu substituiren ist, zu führen sein.

Man erreicht durch die Verbesserung des M hier dasselbe, was man auch durch andere Arten der Correction des Olbers'schen M erreicht, dass der durch den zweiten Sonnenort und den zweiten geocentrischen Ort gehende Kreis durch die berechnete Parabel wiedergegeben wird. Entsprechen die Beobachtungen in Wirklichkeit einer Parabel, so müssen auch wieder der beobachtete und der berechnete Ort in einen Punkt des genannten grössten Kreises fallen.

Wir benutzen noch weiter das Material des Kometen 1857 III., um die grosse Bequemlichkeit der oben gegebenen Formeln zu zeigen. Mit Zugrundelegung also der Daten der 41. Vorlesung erhält man:

V	$= - 28^\circ 3' 32''$	H	$= 194^\circ 17' 28''$
$\log M$	$= 9,84828$	ξ	$= - 7 59 19$
G	$= 186^\circ 4' 56''$	$\log h$	$= 9,66345$
γ	$= - 2 38 5$	$g \cos \varphi$	$= 0,14833$
$\log g$	$= 9,18324$	$R \cos \psi$	$= 0,80873$

$R'' \cos \psi'' =$	0,85827	$\log b =$	9,54128
$\log A =$	8,54866	$\log b'' =$	9,63398
$\log B =$	9,78961	$c =$	— 0,13227
$\log B'' =$	9,73647	$c'' =$	— 0,22117

Den Gleichungen:

$$\begin{aligned} r^2 &= \left(\frac{u + c}{b} \right)^2 + B^2 \\ r''^2 &= \left(\frac{u + c''}{b''} \right)^2 + B''^2 \\ \kappa^2 &= u^2 + A^2 \end{aligned}$$

und der Lambert'schen Gleichung wird nun, wie man leicht findet, genügt durch:

$$u = 0,27132,$$

d. h. durch folgende Werthe von $\log \varrho$, $\log \varrho''$, $\log r$, $\log r''$ und κ^2 :

$$\begin{aligned} \log \varrho &= 9,95942 \\ \log \varrho'' &= 9,80770 \\ \log r &= 9,86595 \\ \log r'' &= 9,74617 \\ \kappa^2 &= 0,074866. \end{aligned}$$

Will man die Genauigkeit noch weiter bis zu den Grössen vierter Ordnung inclusive treiben, so hat man die Gleichung (2) anzuwenden, in welcher A'_0 mit $-V$ identisch ist. Es wird nun, wie wir hier nicht von Neuem zu berechnen brauchen, mit Berücksichtigung der Aberration ¹⁾, $\log \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} = 0,09738$, demnach:

$$\begin{aligned} \varrho'' &= 0,70285 \varrho + 0,24517 - 0,24458 \\ &= \left(0,70285 + 0,00059 \cdot \frac{1}{(\varrho)} \right) \varrho, \end{aligned}$$

oder, wenn wir für (ϱ) den eben gefundenen Werth, dessen Logar. = 9,95942, einsetzen:

$$\varrho'' = 0,70350 \varrho,$$

d. h.:

$$\log M = 9,84726;$$

bei der zweiten, mit diesem Werthe zu führenden Rechnung wird man so gut wie völlig strenge, mit dem früher auf längerem Wege gefundenen Resultate übereinstimmende Zahlen erhalten.

Vierundvierzigste Vorlesung.

Der sogenannte Ausnahmefall der Olbers'schen Methode. Berechnung der Bahn eines Kometen aus drei Beobachtungen, von denen nur zwei vollständig sind.

Nach den Principien der Olbers'schen Methode war das Verhältniss M der Distanzen von der Erde aus der Lage des Durchschnittspunktes jener beiden grössten Kreise der Sphäre zu finden, von denen der eine die beiden äusseren geocentrischen

¹⁾ Siehe Bemerkung S. 297.

Oerter, der andere den mittleren geocentrischen Ort mit dem Orte der Sonne verbindet. Es ist klar, dass dieser Durchschnittspunkt und demnach auch der Olbers'sche Ausdruck für das genannte Verhältniss an grosser Unbestimmtheit und Unsicherheit leiden werden, so oft die beiden Kreise nur einen sehr kleinen Winkel mit einander bilden, d. h. wenn die Richtung der geocentrischen Bewegung eines Kometen sehr nahe mit dem durch die Sonne gelegten grössten Kreise zusammenfällt. Diesen Fall, wo man demnach die Relation zwischen q und q'' mit anderen Hülfsmitteln ableiten muss, nennen die Astronomen den Ausnahmefall bei der Olbers'schen Methode.

Die Hülfsmittel nun, welche alsdann zugezogen werden können, besitzen wir schon in den Entwicklungen der 40. Vorlesung; denn in den Relationen (2) und (4) dieser Vorlesung spielt der Durchschnittspunkt der genannten Kreise keine Rolle.

Obgleich hiernach die Untersuchung im Ausnahmefalle als erledigt betrachtet werden könnte, weil man sich, sei es für den Aequator, oder für die Ekliptik, durchaus der Formeln der genannten Vorlesungen bedienen kann, so mag doch hier noch eine Entwicklung Platz finden, welche zuweilen mit Nutzen bei Kometenbahnen von geringer Neigung gegen die Erdbahn angewendet werden kann. Die Parallaxe kann dabei nicht gut von vornherein berücksichtigt werden, weshalb es hier bequemer erscheint, die Formeln auf die Ekliptik zu beziehen.

Die früher entwickelte Relation (4), S. 289, wobei die M definirt sind durch die Gleichungen (3), S. 294:

$$\sin(\lambda'' - \lambda') \cdot c'' q'' = M' - Mc - M''c'' - \sin(\lambda - \lambda') \cdot c q$$

geht dann über in:

$$\begin{aligned} \sin(\lambda'' - \lambda') c'' q'' &= R' \sin(\lambda' - \odot') - R \sin(\lambda' - \odot) \cdot c \\ &\quad - R'' \sin(\lambda' - \odot'') c'' - \sin(\lambda - \lambda') c q. \end{aligned}$$

Es ist nun einleuchtend, dass, wenn in dieser Gleichung die Verhältnisse $\frac{n}{n'}$, $\frac{n''}{n'}$, wie sie für die Erdbewegung stattfinden, substituirt würden, dieselbe durch die Werthe $q = 0$ und $q'' = 0$ befriedigt werden müsste, da die Erde selbst sich in den drei durch die Beobachtungen gegebenen Gesichtslinien befindet. Bezeichnen wir daher die genannten Verhältnisse bei der Erdbewegung mit C und C'' , so wird die Gleichung:

$$0 = R' \sin(\lambda' - \odot') - C R \sin(\lambda' - \odot) - C'' R'' \sin(\lambda' - \odot'')$$

oder:

$$0 = R' \sin(\lambda' - \odot') \cdot \frac{1}{C''} - R \sin(\lambda' - \odot) \cdot \frac{C}{C''} - R'' \sin(\lambda' - \odot'')$$

erfüllt sein müssen. Subtrahirt man diese Gleichung von der obigen Relation, nachdem man die letztere durch c'' dividirt hat, so findet man:

$$\begin{aligned} \sin(\lambda'' - \lambda') \cdot q'' &= R' \sin(\lambda' - \odot') \left(\frac{1}{c''} - \frac{1}{C''} \right) \\ &\quad - R \sin(\lambda' - \odot) \left(\frac{c}{c''} - \frac{C}{C''} \right) - \sin(\lambda - \lambda') \frac{c}{c''} q. \end{aligned}$$

Ferner aber ist, mit Rücksicht auf die Definition von c und c'' , sowie die Entwicklungen der 32. Vorlesung:

$$\begin{aligned} c &= \frac{n}{n'} = \frac{n}{n + n''} \cdot \frac{n + n''}{n'} = \frac{\partial}{\partial'} \cdot \frac{r'}{r_0'} = \frac{\partial}{\partial'} \left(1 + \frac{\partial \partial''}{2 r'^3} \right) \\ c'' &= \frac{n''}{n'} = \frac{n''}{n + n''} \cdot \frac{n + n''}{n'} = \frac{\partial''}{\partial'} \cdot \frac{r'}{r_0'} = \frac{\partial''}{\partial'} \left(1 + \frac{\partial \partial''}{2 r'^3} \right), \end{aligned}$$

also:

$$\frac{1}{c''} = \frac{\partial'}{\partial''} \left(1 - \frac{\partial \partial''}{2 r'^3} \right) \quad \frac{c}{c''} = \frac{\partial}{\partial''},$$

und analog für die Erde (da die Ausdrücke bei den Kegelschnitten allgemein gelten):

$$\frac{1}{C''} = \frac{\vartheta'}{\vartheta''} \left(1 - \frac{\vartheta \vartheta''}{2 R'^3} \right) \quad \frac{C}{C''} = \frac{\vartheta}{\vartheta''}.$$

Folglich erhalten wir, wenn wir von diesen Gleichungen in der obigen Relation Gebrauch machen, die Gleichung:

$$\varrho'' = \frac{\vartheta \vartheta' R'}{2} \left(\frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \frac{\sin(\lambda' - \odot')}{\sin(\lambda'' - \lambda')} - \frac{\vartheta}{\vartheta''} \cdot \frac{\sin(\lambda - \lambda')}{\sin(\lambda'' - \lambda')} \cdot \varrho \cdot \cdot \cdot \quad (1)$$

Nach dem Vorschlage von Encke für den Ausnahmefall der Olbers'schen Methode kann diese Gleichung so angewendet werden, dass man zuerst:

$$\frac{\varrho''}{\varrho} = \frac{\vartheta}{\vartheta''} \cdot \frac{\sin(\lambda' - \lambda)}{\sin(\lambda'' - \lambda')} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (2)$$

den Formeln der Olbers'schen Methode als Ausdruck für M zu Grunde legt. Der danach durch die bekannten Versuche erhaltene Werth von ϱ sei gleich (ϱ) , so wird dann nach Gleichung (1) der Ausdruck:

$$\frac{\varrho''}{\varrho} = \frac{\vartheta \vartheta' R'}{2 (\varrho)} \left(\frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \cdot \frac{\sin(\lambda' - \odot')}{\sin(\lambda'' - \lambda')} + \frac{\vartheta}{\vartheta''} \cdot \frac{\sin(\lambda' - \lambda)}{\sin(\lambda'' - \lambda')}$$

ein verbesserter Werth des Olbers'schen M sein, mit welchem die Rechnung zu wiederholen wäre. Es ist demnach der zuerst angenommene Werth:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta''} \cdot \frac{\sin(\lambda' - \lambda)}{\sin(\lambda'' - \lambda')}$$

mit dem Correctionsfactor:

$$1 + \frac{\vartheta \vartheta' R'}{2 (\varrho)} \frac{\sin(\lambda' - \odot')}{\sin(\lambda' - \lambda)} \cdot \left(\frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3} \right)$$

zu multipliciren.

In dem von uns schon mehrfach benutzten Beispiel vom zweiten Kometen des Jahres 1813, welches zwar keinen Ausnahmefall bietet, gerade deshalb aber geeignet ist, den Grad der Annäherung der vorhergehenden Formeln zu zeigen, war:

$\log \vartheta$	$= 9,08392,$	$\lambda' - \lambda$	$= - 4^{\circ} 49' 16'',$
$\log \vartheta'$	$= 9,38323,$	$\lambda'' - \lambda'$	$= - 9 \ 39 \ 14,$
$\log \vartheta''$	$= 9,08049,$	$\log \sin(\lambda' - \lambda)$	$= 8,92451_n,$
$\log (\varrho)$	$= 9,80366,$	$\log \sin(\lambda'' - \lambda')$	$= 9,22452_n,$
$\log r'$	$= 0,12399,$	$\lambda' - \odot'$	$= 241^{\circ} 48' 37'',$
$\log R'$	$= 0,00175,$	$\log \sin(\lambda' - \odot')$	$= 9,94517_n.$

Setzt man in der Formel (1) zuerst $r' = R'$, d. h. macht man von (2) Gebrauch, so erhält man:

$$\log M = 9,70342.$$

Rechnet man hingegen mit Benutzung der obigen Werthe von r' und ϱ' , auf welche man successive durch Wiederholung der Rechnungen der Olbers'schen Methode geführt werden würde, so findet man:

$$\frac{\vartheta' \vartheta''}{2 (\varrho)} \cdot \frac{\sin(\lambda' - \odot')}{\sin(\lambda' - \lambda)} \frac{R'}{\left(\frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3} \right)} = 0,13563,$$

den Correctionsfactor des obigen M demnach gleich:

$$1,13563,$$

dessen Logarithmus:

$$0,05524$$

zu dem Werthe von $\log M = 9,70342$ addirt werden muss, um diesen letzteren zu verbessern. Man erhält demnach jetzt:

$$\log M = 9,75866,$$

während nach dem gewöhnlichen Ausdruck der Olbers'schen Methode:

$$\log M = 9,75799$$

gefunden wurde.

Nicht immer, obwohl meistens, wird in dem Ausnahmefalle der Olbers'schen Methode die Bewegung in Länge die überwiegende sein; auch der Fall, dass der geocentrische Ort hauptsächlich Breitenänderungen erleidet, und also wegen der Kleinheit von $\lambda' - \lambda$ und $\lambda'' - \lambda'$ auch die vorhergehende Formel für M ihre Dienste versagen würde, hat einigen Anspruch auf unsere Berücksichtigung. Aus der Relation (4), Vorlesung 40:

$$(\cos \lambda' \operatorname{tg} \beta'' - \cos \lambda'' \operatorname{tg} \beta') \cdot \varrho'' = N' \cdot \frac{1}{c''} - N \frac{c}{c''} - N'' - (\cos \lambda' \operatorname{tg} \beta - \cos \lambda \operatorname{tg} \beta') \cdot \frac{c}{c''} \varrho,$$

worin:

$$N = R \cos \odot \operatorname{tg} \beta'$$

$$N' = R' \cos \odot' \operatorname{tg} \beta'$$

$$N'' = R'' \cos \odot'' \operatorname{tg} \beta',$$

folgt durch Betrachtungen, welche den vorhin angewendeten ganz analog sind:

$$(\cos \lambda' \operatorname{tg} \beta'' - \cos \lambda'' \operatorname{tg} \beta') \varrho'' = \frac{\vartheta \vartheta'}{2} \cdot R' \cos \odot' \operatorname{tg} \beta' \cdot \left(\frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \\ - (\cos \lambda' \operatorname{tg} \beta - \cos \lambda \operatorname{tg} \beta') \frac{\vartheta}{\vartheta''} \varrho,$$

oder:

$$\varrho'' = \frac{\vartheta}{\vartheta''} \frac{\cos \lambda \operatorname{tg} \beta' - \cos \lambda' \operatorname{tg} \beta}{\cos \lambda' \operatorname{tg} \beta'' - \cos \lambda'' \operatorname{tg} \beta'} \varrho + \frac{\vartheta \vartheta'}{2} \cdot \left(\frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \frac{R' \cos \odot' \operatorname{tg} \beta'}{\cos \lambda' \operatorname{tg} \beta'' - \cos \lambda'' \operatorname{tg} \beta'} \quad (3)$$

Es ist einleuchtend, dass es für die Relation zwischen ϱ'' und ϱ ganz gleichgültig sein muss, von welchem Punkte der Ekliptik die Längen gezählt werden, so dass man unbeschadet der Richtigkeit der vorhergehenden Gleichung die in derselben vorkommenden Grössen λ , λ' , λ'' und \odot' um den Betrag \odot' vermindern kann. Dadurch geht dieselbe über in:

$$\varrho'' = \frac{\vartheta}{\vartheta''} \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta' \cos (\lambda - \odot') - \operatorname{tg} \beta \cos (\lambda' - \odot')}{\operatorname{tg} \beta'' \cos (\lambda' - \odot') - \operatorname{tg} \beta' \cos (\lambda'' - \odot')} \varrho \\ + \frac{1}{2} \frac{\vartheta \vartheta'}{\operatorname{tg} \beta'' \cos (\lambda' - \odot') - \operatorname{tg} \beta' \cos (\lambda'' - \odot')} \cdot \left(\frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3} \right) \quad (4)$$

Der Factor von ϱ auf der rechten Seite dieser Gleichung unterscheidet sich von dem gewöhnlichen Ausdruck für das M der Olbers'schen Methode, wie man sieht, bloss dadurch, dass hier überall die Cosinus der Bögen $\lambda - \odot'$, $\lambda' - \odot'$, $\lambda'' - \odot'$ vorkommen, wo dort die Sinus stehen. In einem Ausnahmefalle der in Rede stehenden Art kann man daher so verfahren, dass man in dem gewöhnlichen Ausdrucke für das Olbers'sche M die Cosinus statt der Sinus der obigen Unterschiede einsetzt. Hat man hierdurch eine erste Näherung erhalten, so kann dann dieses M durch Multiplication mit dem Factor:

$$1 + \frac{\vartheta' \vartheta''}{2} \frac{\operatorname{tg} \beta'}{\operatorname{tg} \beta' \cos (\lambda - \odot') - \operatorname{tg} \beta \cos (\lambda' - \odot')} \frac{R'}{(\varrho)} \cdot \left(\frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3} \right)$$

verbessert werden.

Bei dem Kometen 1813 II. liefert die Cosinusformel:

$$\log M = 9,73400;$$

der Logarithmus des Verbesserungs factors aber wird, $\log(\varrho) = 9,80366$ und $\log r' = 0,12399$ gesetzt, gleich:

0,02427,

also der verbesserte Werth selbst:

$$\log M = 9,75827,$$

was mit dem nach der Carlini'schen Methode gefundenen $\log M = 9,75826$ so gut wie völlig, und auch mit dem Ergebniss der Formel (2) ziemlich gut übereinstimmt. Die Formel (4) verdiente aber hier vor jener wegen der stärkeren Breitenbewegung den Vorzug.

Der aufmerksame Leser wird vielleicht selbst schon die von uns viel gebrauchte Relation (2) (40. Vorlesung), und die daraus abgeleitete (1) dieser Vorlesung, in welchen beiden die Winkelcoordinaten des Abstandes von der Fundamentalebene, d. h. die Declination oder die Breite, explicite nicht vorkommen, als unmittelbar brauchbar auch für den Fall einer Bahnberechnung erkannt haben, welche auf zwei vollständige und eine unvollständige Beobachtung gestützt werden soll. Es ist dies ein Problem von praktischer Bedeutung, weil bei den Beobachtungsmitteln, auf deren Gebrauch sich die Astronomen bei den Kometen vorzugsweise angewiesen sehen, die Bestimmung einer Declination ziemlich leicht misslingt.

In dem Rechnungsbeispiele der 41. Vorlesung hätte es, wie man leicht erkennt, der Kenntniss der Declination der zweiten Beobachtung gar nicht bedurft; diese Declination diene dort nur dem untergeordneten Zwecke, die für die Berücksichtigung der Aberration nöthige Bestimmung von ϱ' aus r' auf eine bequemere Art auszuführen. Es hätte dies aber auch dadurch geschehen können, dass man das Formelsystem:

$$\begin{aligned}\varrho' \cos \alpha' &= cx + c'x'' + X' \\ \varrho' \sin \alpha' &= cy + c'y'' + Y' \\ \varrho' \operatorname{tg} \delta' &= cz + c'z'' + Z'\end{aligned}$$

auflöste, wodurch dann sowohl der für die Verbesserung der Beobachtungszeit zu suchende Abstand von der Erde $\varrho' \sec \delta'$ bekannt, als auch eine schätzbare Controle der Rechnung gegen gröbere Fehler gewonnen wird; denn es wird das so zu findende α' mit der gegebenen Rectascension sehr nahe übereinstimmen müssen.

Wäre die unvollständige Beobachtung immer die mittlere, so würden wir den gegebenen Vorschriften nichts weiter hinzuzufügen haben. In der Praxis aber ist es gerade die Beobachtung in der Nacht der Entdeckung, also die erste, welche mehr als andere der Gefahr, unvollständig zu werden, ausgesetzt ist. Aber auch diesem Falle können die Formeln der 40. Vorlesung durch eine leichte Modification angepasst werden, indem man den auf die unvollständige erste Beobachtung bezüglichen Daten den Accent ' giebt. Das Material der Rechnungen der 41. Vorlesung würden wir dann, nämlich unter der Voraussetzung, die Declination der ersten Beobachtung (Juni 23.) sei nicht gelungen, in folgendes Schema stellen:

t, t', t''	Juni 27,53932,	Juni 23,53950,	Juli 2,256085
$\alpha, \alpha', \alpha''$	61° 20' 48"	53° 6' 51"	77° 2' 44"
δ, δ''	+ 44 43 46		+ 48 47 4
X, X', X''	— 0,10953	— 0,04203	— 0,19350
Y, Y', Y''	0,92730	0,93183	0,91569
Z, Z', Z''	0,40235	0,40432	0,39731,

um dann darauf mit consequenter Berücksichtigung der Vorzeichen die Formeln der 40. Vorlesung anzuwenden. Es wird dabei ϑ'' negativ, desgleichen $\vartheta'' \eta''$, da die Reihe für das Verhältniss des Sectors zum Dreieck nur die geraden Potenzen von ϑ enthält. Die Vertauschung der ersten mit der zweiten Beobachtung hat also bei diesen Grössen die Folge, dass auch $\vartheta \eta$ und $\vartheta' \eta'$ sich vertauschen, während $\vartheta'' \eta''$ negatives Vorzeichen

bekommt. Bei den M, M', M'' dagegen werden in Folge der veränderten Ordnung des Materials ganz andere Zahlen zum Vorschein kommen, im vorliegenden Falle z. B.:

$$\begin{aligned} M &= - 0,64417 \\ M' &= - 0,59291 \\ M'' &= - 0,70437, \end{aligned}$$

als Relation zwischen ϱ und ϱ'' wird die Gleichung:

$$0,65889 \cdot c'' \varrho'' = - 0,59291 + 0,64417 c + 0,70437 \cdot c'' + 0,17816 c \varrho$$

oder:

$$0,65889 \varrho'' = - 0,59291 \frac{\partial' \eta'}{\partial'' \eta''} + 0,64417 \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} + 0,70437 + 0,17816 \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \varrho$$

erhalten werden. Im Uebrigen weicht der Gang der Rechnung von dem des Beispiels in der 41. Vorlesung nicht ab; es erscheint daher unnöthig, dieselbe hier von Neuem durchzuführen.

Man kann vielleicht noch wünschen, auch den Fall behandelt zu sehen, wo die Declinationen alle gegeben sind, dagegen eine der drei Rectascensionen fehlt. Derselbe kann ganz leicht zu einem praktischen werden, z. B. dann, wenn man nach Anstellung einer in beiden Coordinaten gut gelungenen Beobachtung entdeckt, dass an der Rectascension des gebrauchten Vergleichssterne eine Unsicherheit haftet. Der erfahrene Beobachter weiss, dass Unsicherheiten von mehreren Zeitsecunden, aus Zähl- oder Schreibfehlern entsprungen, gar nicht so überaus selten selbst in den besten Sternkatalogen sich vorfinden, dass darauf nicht einige Rücksicht zu nehmen wäre.

Dieser Fall kann ohne besondere Schwierigkeit auf Grundlage der Gleichung (4) (40. Vorlesung) behandelt werden; denn obwohl in derselben die als nicht genau bekannt anzusehende Rectascension α' ebenfalls vorkommt, so können wir es, da sie nur durch ihren Cosinus vertreten ist, leicht so einrichten, dass eine ganz rohe, nur bis auf etwa eine Zeitminute genaue Kenntniss derselben, wie wir sie ja immer zur Hand haben werden, zur Aufstellung der Relation zwischen ϱ und ϱ'' vollkommen hinreicht.

Offenbar ist die die Abhängigkeit des ϱ'' von ϱ ausdrückende Gleichung unabhängig von dem Nullpunkte der Zählung der Rectascensionen; man kann diesen Nullpunkt daher, anstatt in das Frühlingsäquinocetium, in einen Punkt des Aequators verlegen, dessen Rectascension nach der gewöhnlichen Zählungsweise einen gewissen Werth α'_0 hat. Die Gleichung (4) der 40. Vorlesung wird dann übergehen in:

$$\begin{aligned} [\cos(\alpha' - \alpha'_0) \operatorname{tg} \delta'' - \cos(\alpha'' - \alpha'_0) \operatorname{tg} \delta'] \varrho'' &= N' \frac{\partial' \eta'}{\partial'' \eta''} - N \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \\ &- N'' - [\cos(\alpha' - \alpha'_0) \operatorname{tg} \delta - \cos(\alpha - \alpha'_0) \operatorname{tg} \delta'] \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \varrho, \end{aligned}$$

worin dann aber für N, N', N'' der Reihe nach die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} (X \cos \alpha'_0 + Y \sin \alpha'_0) \operatorname{tg} \delta' - Z \cos(\alpha' - \alpha'_0) \\ (X' \cos \alpha'_0 + Y' \sin \alpha'_0) \operatorname{tg} \delta' - Z' \cos(\alpha' - \alpha'_0) \\ (X'' \cos \alpha'_0 + Y'' \sin \alpha'_0) \operatorname{tg} \delta' - Z'' \cos(\alpha' - \alpha'_0) \end{aligned}$$

zu setzen sind.

Es wird nun aber immer möglich sein, die willkürliche Grösse α'_0 so nahe dem α' zu wählen, dass ohne merklichen Fehler:

$$\cos(\alpha' - \alpha'_0) = 1$$

gesetzt werden kann, und die obigen Ausdrücke die Form:

$$\begin{aligned}
 [tg \delta'' - \cos(\alpha'' - \alpha'_0) tg \delta'] \varrho'' &= N' \frac{\partial' \eta'}{\partial'' \eta''} - N \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \\
 - N'' &= [tg \delta - \cos(\alpha - \alpha'_0) tg \delta'] \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \varrho, \\
 N &= (X \cos \alpha'_0 + Y \sin \alpha'_0) tg \delta' - Z \\
 N' &= (X' \cos \alpha'_0 + Y' \sin \alpha'_0) tg \delta' - Z' \\
 N'' &= (X'' \cos \alpha'_0 + Y'' \sin \alpha'_0) tg \delta' - Z''
 \end{aligned}$$

annehmen.

Aus dem Materiale des Kometen 1857 III. z. B. hätten wir, wenn wir statt der Declination der zweiten Beobachtung deren Rectascension als nicht genau bekannt voraussetzten, mit der Annahme:

$$\begin{aligned}
 \alpha'_0 &= 61^\circ 30' : \\
 N &= + 0,38703 \\
 N' &= + 0,35315 \\
 N'' &= + 0,30840 \\
 [tg \delta'' - \cos(\alpha'' - \alpha'_0) tg \delta'] &= 0,18732 \\
 [tg \delta - \cos(\alpha - \alpha'_0) tg \delta'] &= - 0,11093.
 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Relation:

$$\begin{aligned}
 0,18732 \varrho'' &= 0,35315 \frac{\partial' \eta'}{\partial'' \eta''} - 0,38703 \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \\
 &- 0,30840 + 0,11094 \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} \varrho.
 \end{aligned}$$

Substituirt man für $\frac{\partial' \eta'}{\partial'' \eta''}$ und $\frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''}$ die definitiven Werthe, wie sie sich schliesslich in der 41. Vorlesung ergaben, d. h. $\log \frac{\partial' \eta'}{\partial'' \eta''} = 0,34761$, $\log \frac{\partial \eta}{\partial'' \eta''} = 0,09737$, so erhält man den zu dem Werthe $\log \varrho = 9,96102$ gehörigen Werth von $\log \varrho''$ gleich 9,80828, während derselbe an jener Stelle gleich 9,80809 gefunden wurde. Der kleine, für praktische Zwecke meistens nicht in Betracht kommende Unterschied rührt zum grösseren Theile daher, dass die hier gebrauchte Declination der mittleren Beobachtung, und die oben zu Grunde gelegte Rectascension nicht einer und derselben Parabel entsprechen.

Da, wie wir eben gesehen, eine Schätzung der verfehlten Rectascension bis auf 15 Bogenminuten oder 40 bis 60 Zeitsecunden genau genügt, die zur Bahnberechnung erforderliche Gleichung zwischen ϱ und ϱ'' aufzustellen, so ist also das Fehlen der Rectascension bei einer Beobachtung ebenso wenig wie das der Declination ein Hinderniss für die Ausführung der Vorschriften der 40. Vorlesung.

Fünfundvierzigste Vorlesung.

Eine andere Umformung der Gleichung (4) in Vorlesung Vierzig. Bessel's Beitrag zur Kometentheorie.

Durch einen Kunstgriff, welchen wir im Vorhergehenden schon einige Male in Anwendung brachten, kann die Relation (4):

$$\begin{aligned} (\cos \lambda' \operatorname{tg} \beta'' - \cos \lambda'' \operatorname{tg} \beta') \varrho'' &= N' \frac{1}{c''} - N \frac{c}{c''} \\ &- N'' - (\cos \lambda' \operatorname{tg} \beta - \cos \lambda \operatorname{tg} \beta') \frac{c}{c''} \varrho \end{aligned}$$

so umgeformt werden, dass die Grösse $\frac{1}{c''}$, welche im Gegensatze zu $\frac{c}{c''}$ schon in der ersten Näherung den Radius vector r' in die Formeln einführt, verschwindet.

Wir machen wieder die Bemerkung, dass der Nullpunkt der Zählung für die Längen nach Belieben gewählt werden kann, und nehmen jetzt als solchen einen Punkt der Ekliptik von der Länge $90^\circ + \odot'$. Es geht dadurch $\cos \lambda$ über in $\cos(\lambda - 90^\circ - \odot')$ oder $\sin(\lambda - \odot')$, $\cos \lambda'$ in $\sin(\lambda' - \odot')$, $\cos \lambda''$ in $\sin(\lambda'' - \odot')$, N in $R \sin(\odot - \odot') \operatorname{tg} \beta'$, N' in $R' \sin(\odot' - \odot') \operatorname{tg} \beta'$ oder Null, N'' in $R'' \sin(\odot'' - \odot') \operatorname{tg} \beta'$ und die ganze obige Gleichung in:

$$\left. \begin{aligned} \varrho'' &= \frac{\operatorname{tg} \beta' \sin(\lambda - \odot') - \operatorname{tg} \beta \sin(\lambda' - \odot')}{\operatorname{tg} \beta'' \sin(\lambda' - \odot') - \operatorname{tg} \beta' \sin(\lambda'' - \odot')} \cdot \frac{c}{c''} \varrho \\ &+ \frac{R \operatorname{tg} \beta' \sin(\odot' - \odot) \frac{c}{c''} + R'' \operatorname{tg} \beta' \sin(\odot' - \odot'')}{\operatorname{tg} \beta'' \sin(\lambda' - \odot') - \operatorname{tg} \beta' \sin(\lambda'' - \odot')} \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

über.

Es ist dies wieder eine durchaus strenge Gleichung, welche speciell das Olbers'sche M ergiebt, sobald das Verhältniss $\frac{c}{c''}$ bei dem Kometen dem entsprechenden Verhältniss bei der Erde oder der Grösse:

$$\frac{R'' \sin(\odot'' - \odot')}{R \sin(\odot' - \odot)}$$

gleichgesetzt wird; man erkennt sofort, dass alsdann das Zusatzglied zu dem Olbers'schen Ausdrücke verschwindet.

Die Gleichung führt uns daher ebenfalls auf das schon bekannte Hilfsmittel, die Olbers'sche Methode von dem Fehler der Voraussetzung zu befreien, dass die Sehne der Kometenbahn von dem mittleren Radius vector in demselben Verhältniss, wie bei der Erde geschnitten werde. Es ist zu dem Zwecke nur nöthig, wenn eine erste Rechnung die Distanz $\varrho = (\varrho)$ und $\frac{c}{c''} = \left(\frac{c}{c''}\right)$ hat finden lassen, die Bestimmung mit Zugrundelegung des Ausdrucks:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\operatorname{tg} \beta' \sin(\lambda - \odot') - \operatorname{tg} \beta \sin(\lambda' - \odot')}{\operatorname{tg} \beta'' \sin(\lambda' - \odot') - \operatorname{tg} \beta' \sin(\lambda'' - \odot')} \left(\frac{c}{c''}\right) \\ &+ \frac{R \operatorname{tg} \beta' \sin(\odot' - \odot) \cdot \left(\frac{c}{c''}\right) + R'' \operatorname{tg} \beta' \sin(\odot' - \odot'')}{\operatorname{tg} \beta'' \sin(\lambda' - \odot') - \operatorname{tg} \beta' \sin(\lambda'' - \odot')} \frac{1}{(\varrho)} \end{aligned}$$

zu wiederholen. Um nun aber zu vermeiden, dass man bei der Berechnung von $\frac{c}{c''}$ jedesmal auf die Elemente selbst zurückgehen müsste, behandelt Bessel die Aufgabe: $\frac{c}{c''}$ durch die beiden äusseren Radien und die Zwischenzeiten unmittelbar zu finden¹⁾.

Wir haben für diese Aufgabe schon oben eine indirecte, praktisch sehr bequeme Auflösung kennen gelernt, indem wir bemerkten, dass für r'^2 die Gleichung:

$$\begin{aligned} r'^2 = & \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial' \eta'} \right)^2 + \frac{\partial \eta}{\partial' \eta'} \cdot \frac{\partial'' \eta''}{\partial' \eta'} \right] r^2 \\ & + \left[\left(\frac{\partial'' \eta''}{\partial' \eta'} \right)^2 + \frac{\partial \eta}{\partial' \eta'} \cdot \frac{\partial'' \eta''}{\partial' \eta'} \right] r''^2 \\ & - \frac{\partial \eta}{\partial' \eta'} \cdot \frac{\partial'' \eta''}{\partial' \eta'} \kappa^2 \end{aligned}$$

existire. Von einer Schätzung für r' ausgehend, fanden wir einen Näherungswerth für η, η', η'' , mit welchem wir dann r' genauer bestimmen konnten; dieses lieferte uns darauf genauere Werthe von η, η', η'' , dann wurde die Berechnung des r' wiederholt und so fort, bis sich nichts mehr änderte. Obgleich die rasche Convergenz dieses Verfahrens das Bedürfniss einer directen Auflösung nicht fühlen lässt, so kann doch die elegante Behandlung des Problems durch Bessel hier nicht gut übergangen werden.

Bedeutet nach unserer gewöhnlichen Bezeichnung v, v', v'' die wahren Anomalien, so wird bei der Parabel:

$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{c''} = \frac{n}{n''} = \frac{r' r'' \sin(v'' - v')}{r r' \sin(v' - v)} &= \frac{\sin(v'' - v')}{\sin(v' - v)} \cdot \frac{\cos^{1/2} v'^2}{\cos^{1/2} v''^2} \\ &= \frac{(tg^{1/2} v'' \cos^{1/2} v' - \sin^{1/2} v') (\cos^{1/2} v' + tg^{1/2} v'' \sin^{1/2} v')}{(\sin^{1/2} v' - tg^{1/2} v \cos^{1/2} v') (\cos^{1/2} v' + tg^{1/2} v \sin^{1/2} v')} \\ &= \frac{tg^{1/2} v'' - tg^{1/2} v}{tg^{1/2} v' - tg^{1/2} v} \cdot \frac{1 + tg^{1/2} v' tg^{1/2} v''}{1 + tg^{1/2} v tg^{1/2} v'} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Wir fanden nun schon in Vorlesung 35 für den doppelten parabolischen Sector Σ die Gleichung:

$$\frac{\Sigma}{2q} = q (tg^{1/2} v'' - tg^{1/2} v) (1/3 tg^{1/2} v''^2 + 1/3 tg^{1/2} v'' tg^{1/2} v + 1/3 tg^{1/2} v^2 + 1),$$

also wenn wir zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} \frac{3k}{\sqrt{2}} (t'' - t') &= T, \\ \frac{3k}{\sqrt{2}} (t'' - t) &= T', \\ \frac{3k}{\sqrt{2}} (t' - t) &= T'' \end{aligned}$$

setzen und die Gleichung auf die Intervalle $t'' - t$ und $t' - t$ anwenden:

$$\begin{aligned} T'' &= q^{3/2} (tg^{1/2} v' - tg^{1/2} v) (3 + tg^{1/2} v^2 + tg^{1/2} v tg^{1/2} v' + tg^{1/2} v'^2) \\ T &= q^{3/2} (tg^{1/2} v'' - tg^{1/2} v') (3 + tg^{1/2} v''^2 + tg^{1/2} v'' tg^{1/2} v' + tg^{1/2} v'^2) \end{aligned} \quad (3)$$

oder:

$$\begin{aligned} T'' - q^{3/2} (tg^{1/2} v' - tg^{1/2} v)^3 &= 3 q^{3/2} (tg^{1/2} v' - tg^{1/2} v) (1 + tg^{1/2} v tg^{1/2} v') \\ T - q^{3/2} (tg^{1/2} v'' - tg^{1/2} v')^3 &= 3 q^{3/2} (tg^{1/2} v'' - tg^{1/2} v') (1 + tg^{1/2} v' tg^{1/2} v''). \end{aligned}$$

¹⁾ Siche Astronomische Abhandlungen, herausgegeben von Schumacher. Zweites Heft, S. 1.

Die Bestimmung des Verhältnisses $\frac{c}{c''}$ oder $\frac{n}{n''}$ ist also von zwei cubischen Gleichungen abhängig, von denen die einfachere dem irreductiblen Falle angehört. Die Grösse z kann ihrer Natur nach nicht negativ werden; die bekannte trigonometrische Formel lässt sogleich erkennen, dass zwei positive Wurzeln existiren, von denen die kleinere zu wählen ist, wenn der Komet weniger als 180° in wahrer Anomalie zurückgelegt hat. Die Gleichung für z' hat nur eine reelle Wurzel. Für die praktischen Anwendungen wird man zuweilen mit Reihenentwickelungen, durch welche noch die Glieder zweiter Ordnung berücksichtigt werden, hinreichende Schärfe erlangen. Die Reihenentwickelungen sind nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten ganz ähnlich, wie in Vorlesung 35 leicht auszuführen und ergeben:

$$z = \frac{T + T''}{3(r'' + r)} + \dots = \frac{T'}{3(r'' + r)} + \dots$$

$$z' = \frac{T - T''}{3(r'' + r)} - \frac{2}{3} \cdot \frac{TT''}{T'} \cdot \frac{r'' - r}{(r'' + r)^2} + \dots$$

oder:

$$u'' = \frac{2T'}{3(r'' + r)} + \frac{2}{3} \cdot \frac{TT''}{T'} \cdot \frac{r'' - r}{(r'' + r)^2},$$

$$u = \frac{2T}{3(r'' + r)} - \frac{2}{3} \cdot \frac{TT''}{T'} \cdot \frac{r'' - r}{(r'' + r)^2},$$

woraus dann die Gleichung (4), und da $\frac{c}{c''} = \frac{T}{T'} \cdot \frac{\eta}{\eta'}$:

$$\eta = 1 - \frac{u^3}{T}$$

$$\eta'' = 1 - \frac{u''^3}{T''}$$

bestimmt wird.

Bei den oben gebrauchten Beobachtungen des Kometen 1857 III. haben wir:

$$\log \vartheta = 8,93648, \quad \log T = \log \frac{3\vartheta}{\sqrt{2}} = 9,26309$$

$$\log \vartheta' = 9,19092, \quad \log T' = \log \frac{3\vartheta'}{\sqrt{2}} = 9,51753$$

$$\log \vartheta'' = 8,83769, \quad \log T'' = \log \frac{3\vartheta''}{\sqrt{2}} = 9,16430$$

$$r = 0,73582,$$

$$r'' = 0,55755.$$

Es ergibt sich nach den Reihenentwickelungen:

$$\log \eta = 9,99760, \quad \log \eta'' = 9,99898.$$

Für den vorliegenden Fall zeigen sich hiernach, wenn man mit den früher erhaltenen Werthen vergleicht, die Reihenentwickelungen für u und u'' hinreichend weit fortgesetzt. Wo es auf Erlangung grösserer Schärfe abgesehen ist, dürfte meistens das oben beschriebene indirecte Verfahren zur Bestimmung von $\frac{c}{c''}$ aus r und r' den Vorzug verdienen.

Sechshundvierzigste Vorlesung.

Ueber Construction einer Tafel zum schnellen Erkennen der Identität von Kometen.

Die in den vorhergehenden Vorlesungen entwickelten Methoden nehmen auf alle Umstände Rücksicht, welche bei neu entdeckten Kometen vorzukommen pflegen, es sei denn, dass sich die Bahn schon in den ersten Rechnungen als merklich von der Parabel abweichend erweist. Letzterer Fall ist gar nicht selten, und die Geschichte der Kometen-erscheinungen hat auffallende Beispiele davon verzeichnet, dass die Astronomen durch solche Körper von kurzer Umlaufszeit überrascht wurden, wie bei dem grossen Kometen des Jahres 1770, dessen Periode sich unerwarteter Weise zu nur $5\frac{1}{2}$ Jahren herausstellte. Es fällt bei einem solchen Vorkommnisse der Berechnung der parabolischen Bahn die Rolle zu, den Beweis zu führen, dass die Beobachtungen nicht darstellbar werden, eine Aufgabe, welche bei der gebräuchlichen Anwendungsweise der Olbers'schen Methode etwas weitläufige Rechnungen verursacht; denn es ist der gesammte Einfluss aller der Vernachlässigungen, welche man sich zu erlauben pflegt, wie der Parallaxe, der Aberration, der Bewegung des Aequinoctiums u. s. w. auf die Bahnbestimmung sehr schwer zu schätzen. Die zuverlässigsten Beobachtungen vorausgesetzt, wird man daher erst, wenn die Abweichungen von der Parabel in ansehnlicher Grösse hervortreten, den Beweis ihres Vorhandenseins leicht führen können. Mit geringerer Mühe dürfte derselbe Nachweis auf überzeugende Art nach der in Vorlesung 42 gegebenen Uebersetzung der Gauss'schen Form auf den Aequator zu führen sein, weil sie der Berücksichtigung aller Correctionen in hohem Grade Vorschub leistet.

Um aber die eben empfohlene, ebenso kurze als scharfe Methode noch nützlicher zu machen, wäre es wünschenswerth, den Rechner auch noch der schliesslichen Bestimmung der Elemente für die Ekliptik zu überheben. Dies ist um so leichter thunlich, als ja vorerst die beiden Hauptzwecke der Bahnbestimmung, die Aufstellung der Ephemeride, und die Untersuchung der Identität mit früheren Kometen, ohne die Kenntniss jener Elemente erreicht werden können.

Um nun die Frage nach der Identität möglichst rasch zur Entscheidung bringen zu können, bedarf es nur einer leichten Umformung des Verzeichnisses der früher erschienenen Kometen, bei welcher an die Stelle der Elemente $\Omega, \pi - \Omega, i$ die Gauss'schen Constanten $A + \pi - \Omega$ oder $A', B + \pi - \Omega$ oder $B', C + \pi - \Omega$ oder C' mit Hinzufügung ihrer Secularänderungen gesetzt werden. Eine solche von dem Verfasser auf Grund des in der dritten Ausgabe der Olbers'schen Abhandlung enthaltenen Kometenverzeichnisses berechnete Tafel findet der Leser im Anhange als Tafel XIX gegeben. Es ist klar, dass die drei von einander unabhängigen Constanten A', B', C' , die Elemente $\Omega, \pi - \Omega$ und i vollständig ersetzen.

Soll ein neu erscheinender Komet, dessen Bahn man eben bestimmt, mit einem früheren für identisch gelten können, so müssen, unter Berücksichtigung der Secularänderungen, die A', B', C' und q der neuen Erscheinung mit denen der alten übereinstimmen.

Vierte Abtheilung.

Die Bestimmung elliptischer Bahnen.

Siebenundvierzigste Vorlesung.

Einleitende Bemerkungen.

Was in der Einleitung zu der dritten Abtheilung über das Bedürfniss nach Methoden gesagt wurde, welche die Bestimmung der Bahn aus den Beobachtungen eines kurzen Zeitraumes ermöglichen, behält auch in Bezug auf die elliptischen Bahnen der Planeten und der Kometen von kurzer Umlaufzeit seine Bedeutung, und ist dort schon grossentheils ausgesprochen. Die Aufstellung solcher Methoden ist eines der vielen unsterblichen Verdienste von Gauss um die Wissenschaft, und sie hat wesentlich dazu beigetragen, ja war fast dazu unentbehrlich, aus den zahlreichen Entdeckungen der Neuzeit dauernden Gewinn für die Astronomie zu ziehen.

Die Vorschriften zu solchen Berechnungen bilden bekanntlich den Gegenstand des hier schon oft citirten classischen Werkes: *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*, auctore Carolo Friderico Gauss. Wie aus der Geschichte dieser Untersuchungen hervorgeht und ausserdem in der Vorrede des genannten Werkes ausdrücklich gesagt wird, war die von Gauss ursprünglich namentlich auf die Ceres angewandte Form der Methode, aus drei vollständigen geocentrischen Oertern die elliptischen Elemente zu finden, von der später in der *Theoria motus* bekannt gemachten in der Form erheblich verschieden¹⁾. In neuerer Zeit ist die Encke'sche Form der Gauss'schen Methode (entwickelt im Anhang zu dem Berliner Jahrbuche von 1854) wohl häufiger von den Rechnern benutzt worden.

Das Wesentliche in dieser Methode ist die Aufstellung einer Gleichung achten Grades für die Bestimmung des mittleren Radius vectors r' . Der Weg, auf welchem dazu gelangt wird, kommt dem schon in Vorlesung 34 eingeschlagenen sehr nahe, da dieselben Principien zur Anwendung kommen, wie bei dem Lambert'schen Kriterium über den geocentrischen Lauf, und die Gleichung ebenfalls dieselbe ist, welche man durch Erweiterung jenes Kriteriums zu einer Bestimmungsmethode erhält. Nur ist hier bei den Planeten die ganze Rechnung so anzulegen, dass man von den Fehlern aller nicht vollkommen correcten Voraussetzungen sich in beliebigem Grade unabhängig machen kann. Es ist dies eine an jede Planetenbahnmethode nothwendig zu stellende Forderung, da hier die Bestimmung im Allgemeinen viel empfindlicher gegen Vernach-

¹⁾ Methodi enim ab initio adhibitae indentidem tot tantasque mutationes passae sunt, ut inter modum, quo olim orbita Cereris calculata est, institutionemque in hoc opere traditum vix ullum similitudinis vestigium remanserit.

lässigkeiten ist, als bei den Kometenbahnen, auch der grösseren Schärfe der Beobachtung wegen die Unterschiede zwischen Rechnung und Beobachtungen viel leichter die Fehler der Rechnung verrathen.

Sobald r' durch Auflösung der Gleichung achten Grades berechnet ist, folgen daraus sehr einfach auch die beiden Radienvectoren r und r'' , sowie der zwischen ihnen durchlaufene heliocentrische Bogen. Aus diesen Stücken und dem gegebenen Zeitintervall $t'' - t$ müssen dann schliesslich die Elemente selbst berechnet werden, eine Aufgabe, welche analytischen Kunstgriffen einen grossen Spielraum gestattet und mehrere numerisch bequeme Lösungen zulässt.

Die eben in ihrem Grundriss gezeichnete Methode der Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen versagt, wie schon in dem zweiten Abschnitte erwähnt wurde, ihre Dienste, sobald die Bahn sehr nahe mit der Erdbahn zusammenfällt, weil alsdann die drei geocentrischen Breiten aufhören, drei von einander unabhängige Data zu enthalten. Man erkennt dies leicht, wenn man sich den Fall denkt, dass die Neigung der Bahnebene vollkommen zu Null wird; es bleiben dann, ausser i und Ω , welches letztere beliebig gewählt werden kann, noch die vier Elemente: Länge des Perihels π , halbe grosse Axe a , Excentricität e und die mittlere Anomalie M einer bestimmten Epoche zu finden übrig, und es ist offenbar, dass hierzu vier Längen in den Daten enthalten sein müssen. Aus diesem Grunde ist es nöthig, wenn i sehr klein wird, eine andere Methode, als die obige, anzuwenden; die Vorschriften der Bestimmung einer elliptischen Bahn aus vier Beobachtungen, von denen zwei vollständig sind, wie Gauss sie gegeben hat, beruht im Uebrigen auf denselben Principien, wie die erst-erwähnte Methode. Doch erfordert die Anwendung derselben, zumeist aber die Auswahl der vier Beobachtungen, welche der Rechnung zu Grunde gelegt werden sollen, noch besondere Vorsichtsmaassregeln, ohne welche man zu ganz fehlerhaften Resultaten kommen kann. Wir werden daher später bei der Entwicklung dieser Methode auf dieselben aufmerksam machen.

Die Methode der Berechnung aus drei vollständigen Beobachtungen geben wir im Folgenden wieder in verschiedenen Formen, von denen die auf den Aequator unter Einführung der Sonnencoordinaten bezogene bei solchen Gelegenheiten, wo es sich um Berücksichtigung aller kleinen Correctionen handelt, die bequemste zu sein scheint. Bei anderen Gelegenheiten tragen die Umformungen, welche Encke und in neuerer Zeit Hansen mit den Fundamentalgleichungen der Aufgabe vorgenommen haben, erheblich zu der Vereinfachung der Rechnung bei.

Achtundvierzigste Vorlesung.

Entwicklung der Fundamentalgleichungen für die Bestimmung der Entfernung eines Himmelskörpers aus drei vollständigen Beobachtungen und Auflösung derselben für den Aequator. Erste Näherung.

Bezeichnet man wieder mit n, n', n'' beziehungsweise die doppelten Dreiecksflächen $r' r'' \sin (v'' - v')$, $r r'' \sin (v'' - v)$, $r r' \sin (v' - v)$, so bestehen zwischen den heliocentrischen Coordinaten des Planeten die schon bekannten Relationen:

$$\begin{aligned}n'x' &= nx + n''x'', \\n'y' &= ny + n''y'', \\n'z' &= nz + n''z'',\end{aligned}$$

oder, bei Einführung von $c = \frac{n}{n'}$, $c'' = \frac{n''}{n'}$,

$$\begin{aligned}x' &= cx + c'x'' \\y' &= cy + c'y'' \\z' &= cz + c'z''.\end{aligned}$$

In dem dritten Abschnitte gestalteten wir diese Relationen zu einer Gleichung zwischen den beiden curtirten Distanzen ϱ und ϱ'' um, indem wir die heliocentrischen Coordinaten, durch die Distanzen ϱ , ϱ' , ϱ'' und die Sonnencoordinaten X , Y , Z ; X' , Y' , Z' ; X'' , Y'' , Z'' ausdrückten und ϱ' eliminirten; es gab das zwei verschiedene Gleichungen.

Eliminirten wir durch einen Kunstgriff auch noch die uns unbequeme Grösse $\frac{1}{c''}$, so wurden wir auf den Ausdruck für das Olbers'sche M mit den verbessernden Zusatzgliedern geführt. Für den gegenwärtigen Zweck dagegen, wo wir uns nicht mehr nach der Lambert'schen Gleichung einzurichten haben, eliminiren wir aus den obigen Fundamentalgleichungen ϱ und ϱ'' . Denn wir erhalten durch diese lineare Elimination offenbar eine Gleichung zwischen ϱ' , c , c'' und lauter gegebenen Grössen; nun lässt sich aber ϱ' strenge, c , c'' wenigstens sehr angenähert mit Hülfe der früheren Entwicklungen durch den mittleren Radius vector r' ausdrücken; es entsteht also eine Gleichung zwischen r' und bekannten Grössen. Der daraus hervorgehende Werth von r' und der entsprechende von ϱ' geben, in die bei der Elimination zum Vorschein gekommenen Zwischen- gleichungen substituirt, auch noch ϱ und ϱ'' . Führen wir nun die eben in Gedanken durchlaufenen Operationen wirklich aus, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}\varrho' \cos \alpha' - X' &= c(\varrho \cos \alpha - X) + c''(\varrho'' \cos \alpha'' - X'') \\ \varrho' \sin \alpha' - Y' &= c(\varrho \sin \alpha - Y) + c''(\varrho'' \sin \alpha'' - Y'') \\ \varrho' \operatorname{tg} \delta' - Z' &= c(\varrho \operatorname{tg} \delta - Z) + c''(\varrho'' \operatorname{tg} \delta'' - Z''),\end{aligned}$$

oder:

$$\left. \begin{aligned}\varrho' \cos \alpha' &= X' - cX - c''X'' + c\varrho \cos \alpha + c''\varrho'' \cos \alpha'' \\ \varrho' \sin \alpha' &= Y' - cY - c''Y'' + c\varrho \sin \alpha + c''\varrho'' \sin \alpha'' \\ \varrho' \operatorname{tg} \delta' &= Z' - cZ - c''Z'' + c\varrho \operatorname{tg} \delta + c''\varrho'' \operatorname{tg} \delta''\end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (1)$$

Multiplicirt man die zweite dieser Gleichungen mit $\cos \alpha''$, die erste mit $\sin \alpha''$, und zieht die eine von der anderen ab, so wird:

$$\begin{aligned}\varrho' \sin (\alpha'' - \alpha') &= (X' \sin \alpha'' - Y' \cos \alpha'') - (X \sin \alpha'' - Y \cos \alpha'') c \\ &\quad - (X'' \sin \alpha'' - Y'' \cos \alpha'') c'' + c\varrho \sin (\alpha'' - \alpha),\end{aligned}$$

oder, wenn wieder zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}X \sin \alpha'' - Y \cos \alpha'' &= M, \\ X' \sin \alpha'' - Y' \cos \alpha'' &= M', \\ X'' \sin \alpha'' - Y'' \cos \alpha'' &= M'',\end{aligned}$$

gesetzt wird:

$$\varrho' \sin (\alpha'' - \alpha') = M', - M, c - M'', c'' + c\varrho \sin (\alpha'' - \alpha) (2)$$

Addirt man die erste der Gleichungen (1) zu der dritten, nachdem man sie beziehungsweise mit $\operatorname{tg} \delta''$ und $-\cos \alpha''$ multiplicirt hat, so erhält man:

$$\begin{aligned}\varrho' (\operatorname{tg} \delta'' \cos \alpha' - \operatorname{tg} \delta' \cos \alpha'') &= (X' \operatorname{tg} \delta'' - Z' \cos \alpha'') - (X \operatorname{tg} \delta'' - Z \cos \alpha'') c \\ &\quad - (X'' \operatorname{tg} \delta'' - Z'' \cos \alpha'') c'' + c\varrho (\operatorname{tg} \delta'' \cos \alpha - \operatorname{tg} \delta \cos \alpha''),\end{aligned}$$

und wenn:

$$\begin{aligned} X \operatorname{tg} \delta'' - Z \cos \alpha'' &= N \\ X' \operatorname{tg} \delta'' - Z' \cos \alpha'' &= N' \\ X'' \operatorname{tg} \delta'' - Z'' \cos \alpha'' &= N'' \end{aligned}$$

gesetzt wird:

$$\varrho' (\operatorname{tg} \delta'' \cos \alpha' - \operatorname{tg} \delta' \cos \alpha'') = N' - Nc - N'' c'' + c \varrho (\operatorname{tg} \delta'' \cos \alpha - \operatorname{tg} \delta \cos \alpha'') \quad (3)$$

Aus den beiden Gleichungen (2) und (3) kann nun ohne Schwierigkeit auch noch $c \varrho$ eliminirt werden; den letzteren Zweck erreicht man indessen leicht auf anderem Wege. Man kann nämlich wieder bemerken, dass der Coëfficient von $c \varrho$ in Gleichung (3) von der Zählungsweise der α abhängig ist und deshalb durch eine Drehung des Coordinatensystems um die Z -Axe, wobei die Z offenbar ungeändert bleiben, zum Verschwinden gebracht werden kann. Es sei diese Drehung oder die Rectascension der neuen X -Axe gleich A'_0 , so wird, wenn die neuen Coordinaten durch die alten ausgedrückt werden, offenbar:

$$\begin{aligned} X \cos A'_0 + Y \sin A'_0 &\text{ für } X \\ X' \cos A'_0 + Y' \sin A'_0 &\text{ für } X' \\ X'' \cos A'_0 + Y'' \sin A'_0 &\text{ für } X'', \end{aligned}$$

demnach, um N, N', N'' durch die gewöhnlichen Coordinaten auszudrücken:

$$\left. \begin{aligned} N &= (X \cos A'_0 + Y \sin A'_0) \operatorname{tg} \delta'' - Z \cos (\alpha'' - A'_0) \\ N' &= (X' \cos A'_0 + Y' \sin A'_0) \operatorname{tg} \delta'' - Z' \cos (\alpha'' - A'_0) \\ N'' &= (X'' \cos A'_0 + Y'' \sin A'_0) \operatorname{tg} \delta'' - Z'' \cos (\alpha'' - A'_0) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

zu setzen sein. Damit der Coëfficient von $c \varrho$:

$$\operatorname{tg} \delta'' \cos (\alpha - A'_0) - \operatorname{tg} \delta \cos (\alpha'' - A'_0)$$

zu Null werde, hat man:

$$\operatorname{tg} A'_0 = - \frac{\operatorname{tg} \delta'' \cos \alpha - \operatorname{tg} \delta \cos \alpha''}{\operatorname{tg} \delta'' \sin \alpha - \operatorname{tg} \delta \sin \alpha''}.$$

Die Grösse A'_0 hat eine kurz anzugebende geometrische Bedeutung: es ist die Rectascension des Poles eines durch den ersten und dritten geocentrischen Ort gelegten grössten Kreises, d. h. die Rectascension eines von den beiden Oertern um 90° abstehenden Punktes der Kugel.

Damit dieses wirklich der Fall sei, wäre nöthig, dass:

$$\sin D'_0 \sin \delta + \cos D'_0 \cos \delta \cos (\alpha - A'_0) = \cos 90^\circ = 0,$$

und desgleichen:

$$\sin D'_0 \sin \delta'' + \cos D'_0 \cos \delta'' \cos (\alpha'' - A'_0) = \cos 90^\circ = 0$$

wird, wenn D'_0 die Declination des in Rede stehenden Punktes vorstellt, also auch:

$$1 + \cotg D'_0 \cotg \delta \cos (\alpha - A'_0) = 1 + \cotg D'_0 \cotg \delta'' \cos (\alpha'' - A'_0) = 0,$$

also ist die Bedingung für A'_0 :

$$\operatorname{tg} \delta'' \cos (\alpha - A'_0) - \operatorname{tg} \delta \cos (\alpha'' - A'_0) = 0;$$

endlich ergibt sich nach dem Vorhergehenden:

$$\operatorname{tg} D'_0 = - \cotg \delta \cos (\alpha - A'_0) = - \cotg \delta'' \cos (\alpha'' - A'_0).$$

Man erhält für A'_0 zwei um 180° verschiedene Werthe, von denen derjenige, welcher $\operatorname{tg} D'_0$ positiv liefert, dem Nordpol des grössten Kreises entspricht.

Wir haben hiermit eine der Formen, in welchen die Aufgabe, die Lage eines durch zwei gegebene Punkte gelegten grössten Kreises zu finden, eine Aufgabe, die uns noch einigemal bei wichtigen Gelegenheiten aufstossen wird, gelöst werden kann.

Die Gleichung (3) geht dann, wenn man die Bedeutung der N , N' , N'' aus (4) zu Grunde legt, über in:

$$\varrho' [tg \delta'' \cos (\alpha' - A'_0) - tg \delta' \cos (\alpha'' - A'_0)] = N' - Nc - N''c'',$$

welche Gleichung wir der Kürze halber unter der Form:

$$m \varrho' = N' - Nc - N''c'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

schreiben wollen. Um daraus eine sehr genäherte Bestimmung des Radius vectors r' zu gewinnen, führen wir, wie früher, den Winkel z ein, welcher in dem ebenen Dreieck Sonne-Erde-Planet der mittleren Beobachtung an dem Planeten gebildet wird. Bezeichnen wir noch ferner in demselben Dreiecke den äusseren Winkel an der Erde mit χ' , so ist:

$$R' \cos \chi' = - X' \cos \delta' \cos \alpha' - Y' \cos \delta' \sin \alpha' - Z' \sin \delta',$$

und:

$$\varrho' \sec \delta' = \frac{R' \sin (\chi' - z)}{\sin z}.$$

Für c und c'' fanden wir früher die einschliesslich der kleinen Grössen zweiter Ordnung richtigen Ausdrücke:

$$c = \frac{\partial}{\partial r'} \left(1 + \frac{\partial \partial''}{2 r'^3} \right)$$

$$c'' = \frac{\partial''}{\partial r'} \left(1 + \frac{\partial \partial''}{2 r'^3} \right).$$

Es wird also in Folge der Gleichung (5) und weil $r' = \frac{R' \sin \chi'}{\sin z}$,

$$m R' \cos \delta' \sin (\chi' - z) = \left(N' - N \frac{\partial}{\partial r'} - N'' \frac{\partial''}{\partial r'} \right) \sin z$$

$$- \left(N \frac{\partial}{\partial r'} + N'' \frac{\partial''}{\partial r'} \right) \frac{\partial \partial'' \sin z^4}{2 R'^3 \sin \chi'^3}.$$

Löst man die Parenthese der linken Seite auf und führt zwei Hilfsgrössen a und q ein, derart, dass:

$$m R' \cos \delta' \sin \chi' = a \sin q$$

$$m R' \cos \delta' \cos \chi' + \left(N' - N \frac{\partial}{\partial r'} - N'' \frac{\partial''}{\partial r'} \right) = a \cos q,$$

so wird:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\left(N \frac{\partial}{\partial r'} + N'' \frac{\partial''}{\partial r'} \right) \cdot \partial \partial''}{2 R'^3 \sin \chi'^3} \sin z^4 = a \sin (z - q) \\ & - \frac{m R' \cos \delta' \sin \chi'}{\sin q} \cdot \sin (z - q) \end{aligned} \right\} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Zur leichten Aufsuchung der reellen Wurzeln dieser Gleichung, welche in Beziehung auf $\sin z$ von derselben Form ist, wie die Gleichung (3) der 34. Vorlesung, lässt sich nun wieder die bei derselben Gelegenheit gezeigte Waterstone'sche Construction anwenden. Wir werden dadurch einestheils einer weitläufigen Discussion über die möglichen und brauchbaren Wurzeln derselben überhoben, anderentheils erhalten wir eine höchst schätzbare Näherung, wodurch die scharfe Auflösung für jeden in der Praxis vorkommenden Fall ungemein erleichtert wird. Wir wissen, dass nach der Bedeutung des Winkels z in unserer Aufgabe die zulässigen Lösungen zwischen $z = 0$ und $z = \chi'$ liegen, dass ferner eine Lösung, welche sehr nahe $z = \chi'$ liefert, stets vorkommen muss, da sich diese Lösung auf die Erde selbst bezieht. Aus der Natur der

Construction ist auch ferner leicht zu erkennen, dass ein Schnittpunkt der geraden Linie und der Curve achten Grades, welcher eine brauchbare Lösung liefert, einer Berührung der Curve mit der Geraden sehr nahe liegen kann, in welchem Falle dann noch eine weitere brauchbare Lösung vorhanden und ein nur durch Zuziehen nicht benutzter Beobachtungen zu lösender Zweifel entsteht, welche der beiden Wurzeln gerade Gültigkeit hat.

Man kann, wie später gezeigt werden wird, die Aufstellung der wichtigen Gleichung (6) auf sehr elegante Weise von dem Durchschnitte der beiden grössten Kreise abhängig machen, welche den ersten und dritten geocentrischen Ort und den zweiten Sonnenort mit dem gleichzeitigen geocentrischen Orte verbinden. Mit noch grösserem Vortheile für die Uebersichtlichkeit werden wir später die Abstände der geocentrischen Oerter und der Sonnenörter von drei gegebenen grössten Kreisen einführen, welche Form für Aequator und Ekliptik fast gleiche Bequemlichkeit hat und daher bei der Berücksichtigung der kleinen Correctionen gute Dienste zu leisten vermag.

Neunundvierzigste Vorlesung.

Verbesserungsverfahren für eine aus den Fundamentalgleichungen der achtundvierzigsten Vorlesung hergeleitete Näherung.

Durch wiederholte Anwendung der in voriger Vorlesung gegebenen Fundamentalformeln kann jeder beliebige Grad von Annäherung erreicht werden, wenn man in den Ausdrücken von c und c'' die Factoren von $\frac{1}{2r'^3}$ als unbekannte, nach und nach zu verbessernde Grössen einführt. Setzen wir demgemäss:

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{\partial}{\partial'} \left(1 + \frac{Q}{2r'^3} \right) \\ c'' &= \frac{\partial''}{\partial'} \left(1 + \frac{Q''}{2r'^3} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

so wird, da $c = \frac{n}{n'}$, $c'' = \frac{n''}{n'}$,

$$Q = 2 \left(\frac{\partial'}{n'} \frac{n}{\partial} - 1 \right) r'^3$$

$$Q'' = 2 \left(\frac{\partial'}{n'} \frac{n''}{\partial''} - 1 \right) r'^3.$$

Bezeichnen wir auch hier, wie früher bei der Parabel, das Verhältniss $\frac{\text{Dreieck}}{\text{Sector}}$, welches n entspricht, mit η , das n' entsprechende mit η' und das für n'' mit η'' , so können wir einfacher setzen:

$$\left. \begin{aligned} Q &= 2 \left(\frac{\eta}{\eta'} - 1 \right) r'^3 \\ Q'' &= 2 \left(\frac{\eta''}{\eta'} - 1 \right) r'^3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Substituiren wir die Gleichung (1) in den Formeln der vorigen Vorlesung, so geht die Gleichung (6) über in:

$$\left(\frac{\partial}{\partial'} \cdot N Q + \frac{\partial''}{\partial'} \cdot N'' Q'' \right) \sin z^4 = \frac{2 m \cos \delta'}{\sin q} \cdot R^4 \sin \chi'^4 \sin (z - q) \quad . \quad . \quad (3)$$

In dieser Gleichung ist bei der ersten Annäherung:

$$Q = Q'' = \partial \partial''$$

zu setzen; nachher aber kommen die Ausdrücke (2) zur Anwendung. Es ist deshalb wünschenswerth, die Werthe von η , η' , η'' auf ähnliche Weise, wie wir es für die Parabel thaten, berechnen zu können, nämlich nicht aus den Elementen selbst (deren Berechnung man gern bis zum Schluss der ganzen Rechnung verschieben wird), sondern aus den Bestimmungsstücken, welche auch ausserdem schon in der Rechnung vorkommen. Mit der Entwicklung der dazu nöthigen Formeln werden wir uns daher weiter unten zu beschäftigen haben.

In Betreff der Gleichung (3) ist es noch nützlich zu bemerken, dass die zweite oder rechte Seite derselben nur in Folge der Correction der Zeiten wegen der Aberration sich ändern wird, da dieselbe von den hypothetischen Grössen Q und Q'' gänzlich unabhängig ist.

Im Folgenden stellen wir noch einmal die Formeln, welche unter einer Hypothese für Q und Q'' die Kenntniss der Entfernungen verschaffen, zusammen, um sie nachher durch ein Beispiel zu erläutern.

Es seien, wenn die im Vorhergehenden angewandte Bezeichnung gilt, α , α' , α'' die drei beobachteten Rectascensionen, wenn der Aequator als Fundamentalebene gewählt wird, oder die drei Längen, wenn die Ekliptik gewählt wird, δ , δ' , δ'' die drei Declinationen oder die drei Breiten, je nachdem auf den Aequator oder die Ekliptik bezogen werden soll, X , Y , Z , X' , Y' , Z' , X'' , Y'' , Z'' die Sonnenkoordinaten oder die mit dem entgegengesetzten Zeichen genommenen heliocentrischen Coordinaten der Beobachtungsstationen, auf die gewählte Fundamentalebene bezogen¹⁾. Man berechne nun V oder $-A_0$ nach der Formel:

$$\operatorname{tg} V = \frac{\operatorname{tg} \delta'' \cos \alpha - \operatorname{tg} \delta \cos \alpha''}{\operatorname{tg} \delta'' \sin \alpha - \operatorname{tg} \delta \sin \alpha''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

ferner:

$$m = \operatorname{tg} \delta'' \cos (\alpha' + V) - \operatorname{tg} \delta' \cos (\alpha'' + V) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

$$\left. \begin{aligned} N &= (X \cos V - Y \sin V) \operatorname{tg} \delta'' - Z \cos (\alpha'' + V) \\ N' &= (X' \cos V - Y' \sin V) \operatorname{tg} \delta'' - Z' \cos (\alpha'' + V) \\ N'' &= (X'' \cos V - Y'' \sin V) \operatorname{tg} \delta'' - Z'' \cos (\alpha'' + V) \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

$$R' \cos \chi' = - (X' \cos \delta' \cos \alpha' + Y' \cos \delta' \sin \alpha' + Z' \sin \delta') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IV)$$

wobei zu bemerken, dass $R'^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2$,

$$\left. \begin{aligned} a \sin q &= m R' \cos \delta' \sin \chi' \\ a \cos q &= m R' \cos \delta' \cos \chi' + \left(N' - N \frac{\partial}{\partial'} - N'' \frac{\partial''}{\partial'} \right) \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (V)$$

¹⁾ Wird der Aequator gewählt, so können dem astronomischen Jahrbuche die Reductionen auf das mittlere Aequinoctium entnommen werden, und sind dann an X , Y , Z u. s. w. nach der 38. Vorlesung die Correctionen $-0,0000427 \cos \varphi \cos s$, $-0,0000427 \cos \varphi \sin s$, $-0,0000427 \sin \varphi$ anzubringen; an α , δ u. s. w. die Reduction des scheinbaren Ortes auf das mittlere Aequinoctium. Verhältnissmässig bequeme Formeln für die Berücksichtigung aller kleinen Correctionen bei der Ekliptik giebt Encke im Berliner astronomischen Jahrbuche für 1854, S. 356 bis 361; diese Nebenrechnungen verursachen aber dennoch einige Mühe und ermüden den Rechner oft schon vor der Hauptarbeit, in höherem Grade wenigstens, als bei einer auf den Aequator bezogenen Rechnung der Fall ist.

dann ist die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r'} N Q + \frac{\partial''}{\partial r'} N'' Q'' \right) \sin z^4 = 2 a R'^3 \sin \chi'^3 \sin (z - q) \quad . \quad . \quad . \quad (VI)$$

aufzulösen; in der ersten Näherung ist $Q = \partial \partial''$ und $Q'' = \partial \partial''$, in den folgenden $Q = 2 r'^3 \left(\frac{\eta}{\eta'} - 1 \right)$, $Q'' = 2 r'^3 \left(\frac{\eta''}{\eta'} - 1 \right)$ zu setzen. Ist die Gleichung (VI) aufgelöst, so ist dann weiter der mittlere Radius vector:

$$r' = \frac{R' \sin \chi'}{\sin z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (VII)$$

und für ϱ' hat man:

$$\varrho' \sec \delta' = \frac{R' \sin (\chi' - z)}{\sin z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (VIII)$$

Berechnet man darauf:

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{\partial}{\partial r'} \left(1 + \frac{\varrho'}{2 r'^3} \right) \\ c'' &= \frac{\partial''}{\partial r'} \left(1 + \frac{\varrho''}{2 r'^3} \right) \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IX)$$

und:

$$\left. \begin{aligned} M &= X \sin \alpha - Y \cos \alpha \\ M' &= X' \sin \alpha - Y' \cos \alpha \\ M'' &= X'' \sin \alpha - Y'' \cos \alpha \\ M_{''} &= X \sin \alpha'' - Y \cos \alpha'' \\ M'_{''} &= X' \sin \alpha'' - Y' \cos \alpha'' \\ M''_{''} &= X'' \sin \alpha'' - Y'' \cos \alpha'' \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (X)$$

so wird dann nach Gleichung (2) der vorigen Vorlesung:

$$\left. \begin{aligned} c \varrho \sin (\alpha'' - \alpha) - \varrho' \sin (\alpha'' - \alpha') - M_{''} + M_{''} c + M_{''} c'' \\ c'' \varrho'' \sin (\alpha - \alpha'') - \varrho' \sin (\alpha - \alpha') - M' + M c + M'' c'' \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (XI)$$

Die letztere der Gleichungen (XI) folgt aus der ersteren durch Analogie, indem α mit α'' zu vertauschen ist.

Fünzigste Vorlesung.

Rechnungsbeispiel zu den Formeln der Vorlesung Neundvierzig.

Von dem durch Luther in Bilk entdeckten Planeten Arethusa veröffentlichten kurz nach der Entdeckung die „Astronomischen Nachrichten“ unter anderen die folgenden Beobachtungen:

		Mittlere Zeit	Rectascension	Declination
Bilk	1867, Nov. 23.	10 ^h 29 ^m 39 ^s	4 ^h 1 ^m 30 ^s ,40	+ 21° 30' 5'',0
Berlin	Dec. 13.	9 9 13	3 45 54,19	+ 19 2 21,3
Berlin	Dec. 30.	7 33 29	3 38 30,81	+ 17 23 43,2.

Auf diese Data wollen wir nun die Vorschriften der vorigen Vorlesung zur Anwendung bringen; wir reduciren deshalb die Zeiten auf Berliner Zeit, indem wir zu der

Bilker Zeit der ersten Beobachtung den Meridianunterschied $26^m 30^s$ addiren, verwandeln dann die Stunden, Minuten und Secunden in Decimaltheile des Tages, und setzen die Rectascension aus Zeit in Bogen um. Es ergibt uns das:

Berliner Zeit	Rectascension	Declination
1867, Nov. 23,456 551	$60^{\circ} 22' 36'',0$	$+ 21^{\circ} 30' 5'',0$
Dec. 13,381 400	$56 \ 28 \ 32,8$	$+ 19 \ 2 \ 21,3$
Dec. 30,314 920	$54 \ 37 \ 42,1$	$+ 17 \ 23 \ 43,2$

Die beobachteten Oerter sind auf das scheinbare Aequinoctium bezogen und müssen deshalb auf das mittlere von 1867,0 reducirt werden. Die astronomischen Jahrbücher geben, wie in Vorlesung 14 dargelegt, für die umgekehrte Reduction unter anderen folgende bequeme Vorschrift:

Man addire zur Rectascension α die Grösse:

$$f + g \operatorname{tg} \delta \sin (G + \alpha) + h \sec \delta \sin (H + \alpha),$$

zur Declination δ :

$$i \cos \delta + g \cos (G + \alpha) + h \cos (H + \alpha) \sin \delta,$$

wobei die numerischen Werthe von f, g, h, i, G, H aus dem Jahrbuche selbst für jede Zeit zu entnehmen sind; man erhält dadurch die Reduction in Bogensecunden. Für die obigen drei Zeiten findet sich z. B. aus dem Jahrbuche durch Interpolation:

Nov. 23: $f = 34'',82, g = 17'',66, h = 20'',07, i = 3'',84, G = 30^{\circ} 46', H = 26^{\circ} 16'$
 Dec. 13: $f = 37,73, g = 18,82, h = 20,40, i = 1,16, G = 29 \ 17, H = 7 \ 31$
 Dec. 30: $f = 40,35, g = 19,80, h = 20,40, i = -1,31, G = 27 \ 31, H = 351 \ 31,$

daher die Reductionen vom mittleren auf den scheinbaren Ort, oder $\Delta \alpha$ und $\Delta \delta$ für jene drei Zeiten:

$$\begin{array}{ll} \Delta \alpha = 63'',31, & \Delta \delta = 3'',54, \\ & 63,61, \quad 5,41, \\ & 61,92, \quad 5,68. \end{array}$$

Im gegenwärtigen Falle, d. h. bei der umgekehrten Reduction, sind diese Correctionen mit entgegengesetztem Zeichen anzubringen.

Eine weitere Vorbereitung besteht in dem Interpoliren der Sonnenkoordinaten aus dem Jahrbuche und zwar mit Einschluss der Reduction auf das mittlere Aequinoctium von 1867,0. Man findet¹⁾:

Nov. 23,456 551: $X = -0,475 \ 760 \ 2, Y = -0,793 \ 309 \ 8, Z = -0,344 \ 225 \ 2,$
 Dec. 13,381 400: $-0,147 \ 115 \ 1, -0,892 \ 663 \ 3, -0,387 \ 340 \ 2,$
 Dec. 30,314 920: $+0,147 \ 956 \ 2, -0,891 \ 743 \ 5, -0,386 \ 938 \ 8.$

Um das zu der Rechnung zu benutzende Material endlich vollends von allen fremdartigen Einflüssen zu reinigen, müssen von diesen Sonnenkoordinaten noch die nach der 38. Vorlesung zu berechnenden Coordinaten des Beobachtungsortes oder Auges abgezogen werden. Die erste Beobachtung ist um $2^h 39' 15''$ Bilker Sternzeit angestellt, folglich ist $s = 39^{\circ} 49'$; φ oder die Polhöhe von Bilk ist gleich $51^{\circ} 12'$; nach jener Vorlesung (siehe auch die Anmerkung zu Vorlesung 49) erhalten wir für die erste Beobachtung die an X, Y, Z der Reihe nach anzubringenden Verbesserungen:

$$-0,000 \ 020 \ 8, \quad -0,000 \ 017 \ 3, \quad -0,000 \ 033 \ 4.$$

Auf dieselbe Art, mittelst der Sternzeit und der Polhöhe des Beobachtungsortes Berlin werden die Correctionen für die zweite und dritte Beobachtung gefunden:

¹⁾ Bei der Berechnung von Planetenbahnen ist der Gebrauch von mehr als fünf Stellen anzurathen, weil hier meistens eine Vernachlässigung von einigen Secunden eine grössere Bedeutung hat, als bei den Rechnungen der dritten Abtheilung.

— 0,000 020 1,	— 0,000 016 9,	— 0,000 034 0,
— 0,000 022 1,	— 0,000 014 3,	— 0,000 034 0.

Hiernach stellen wir das gereinigte Material wie folgt zusammen:

Die Zeiten t, t', t'' . . .	Nov. 23,456 551,	Dec. 13,381 400,	Dec. 30,314 920,
die Rectascensionen $\alpha, \alpha', \alpha''$	60° 21' 32'',7,	56° 27' 29'',2	54° 36' 40'',2,
die Declinationen $\delta, \delta', \delta''$.	+ 21 30 1,5,	+ 19 2 15,9	+ 17 23 37,5,
die Sonnencoord. X, X', X'' .	— 0,475 781 0,	— 0,147 135 2,	+ 0,147 934 1,
„ „ Y, Y', Y'' .	— 0,793 327 1,	— 0,892 680 2,	— 0,891 757 8,
„ „ Z, Z', Z'' .	— 0,344 258 6,	— 0,387 374 2,	— 0,386 972 8.

Wir können gleich noch hinzufügen:

die $\log R, \log R', \log R''$. . .	9,994 335 2,	9,993 068 8,	9,992 682 7.
---------------------------------------	--------------	--------------	--------------

Diese letzteren drei Zahlen, oder auch die Grössen

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}, \sqrt{X''^2 + Y''^2 + Z''^2}$$

können auch noch dazu gebraucht werden, einen wesentlichen Theil der Vorbereitungsrechnungen, nämlich die corrigirten Sonnenkoordinaten auf eine leichte Weise gegen gröbere Fehler zu prüfen. Man

Fig. 56.



braucht zu diesem Zwecke nur

mit den unmittelbar den Jahr-

büchern zu entnehmenden $R,$

R', R'' zu vergleichen, deren

Werthe sich auf den Mittel-

punkt der Erde beziehen. Den

Einfluss der excentrischen Lage

des Auges auf die R erkennen

wir leicht aus Fig. 56, worin S den

Mittelpunkt der Sonne, C den der

Erde und O den

Ort des Auges vorstellt. Zieht man

noch \overline{OP} senkrecht zu SC , so ist

mit stets hinreichender Schärfe das

Stück \overline{CP} gleich dem gesuchten

Einflusse zu setzen, und man hat:

$$\overline{PC} = \overline{OC} \cos PCO = \frac{\overline{OC}}{\overline{SC}} \overline{SC} \cos PCO,$$

d. h. das R des Erdmittelpunktes übertrifft das des Beobachtungsortes um die Grösse:

$$\frac{\pi}{206264,8} \cdot \cos Z = 0,0000427 \cos Z,$$

wenn wieder π die Sonnenparallaxe, Z aber die Zenithdistanz der Sonne zur Zeit der

Beobachtung vorstellt. Die letztere Grösse lässt sich auf bekannte Weise ungemein

leicht bis auf etliche Minuten genau finden. Bei der ersten Beobachtung z. B. stand

die Sonne nahezu 144° 28' vom Bilker Zenith entfernt; es sollte das in Anwendung

kommende verbesserte R das uncorrigirte der Tafel um den Betrag 0,000 035 1 über-

treffen. Es ergibt sich die betreffende Differenz ganz befriedigend gleich 0,000 036 3.

Nach dieser Sonderung der kleinen Verbesserungen der Sonnenkoordinaten beginnen

wir die eigentliche Rechnung.

Es findet sich nun nach Gleichung (I) der 49. Vorlesung:

$$V = 56^\circ 16' 18'',74,$$

nach (II):

$$m = 0,001 961 7,$$

nach (III):

$$N = 0,001 216 4, \quad N' = 0,068 896 6, \quad N'' = 0,120 123 5;$$

nach Gleichung (IV):

$$\chi' = 22^{\circ} 54' 28'', 12;$$

da ferner aus (V):

$$q = 7^{\circ} 58' 29'', 93^1)$$

$$\log a = 7,709\,296\,8,$$

so hat man endlich für Gleichung (VI):

$$\left(0,001\,216\,4 \cdot \frac{\vartheta}{\vartheta'} Q + 0,120\,123\,5 \cdot \frac{\vartheta''}{\vartheta'} Q''\right) \sin z^4 = 0,000\,575\,728\,5 \sin (z - 7^{\circ} 58' 29'', 93).$$

Es ist nun, wenn vorläufig die uncorrigirten Zeiten zu Grunde gelegt werden:

$$\log \vartheta = 9,464\,328\,7$$

$$\log \vartheta' = 9,802\,117\,5$$

$$\log \vartheta'' = 9,535\,055\,8.$$

Setzt man ferner bei der ersten Näherung:

$$Q = Q'' = \vartheta \vartheta'',$$

so nimmt die Finalgleichung für z die Form an:

$$\sin z^4 = (8,944\,546\,2) \sin (z - 7^{\circ} 58' 29'', 93),$$

wobei die eingeklammerte Zahl schon den Logarithmus des zu gebrauchenden Factors vorstellt. Als scharfe Lösung der Gleichung, und zwar hier nach Ausschluss der für die Erde geltenden, ergiebt sich:

$$z = 8^{\circ} 15' 4'', 04.$$

Entsprechend wird:

$$\log r' = 0,426\,408\,6,$$

$$\log q' = 0,214\,917\,4,$$

der Logarithmus der Entfernung von der Erde in der zweiten Beobachtung gleich 0,239 345 9.

Nach den Gleichungen (X) erhält man ferner:

$$M = -0,021\,171\,2, \quad M_{,,} = 0,071\,557\,5,$$

$$M' = 0,313\,604\,8, \quad M'_{,,} = 0,397\,020\,5.$$

$$M'' = 0,569\,606\,7, \quad M''_{,,} = 0,637\,038\,7.$$

In der ersten Annäherung wird zufolge der Gleichungen (IX):

$$c = \frac{\vartheta}{\vartheta'} \left(1 + \frac{\vartheta \vartheta''}{2 r'^3}\right), \quad \log c = 9,663\,349\,8,$$

$$c'' = \frac{\vartheta''}{\vartheta'} \left(1 + \frac{\vartheta \vartheta''}{2 r'^3}\right), \quad \log c'' = 9,734\,076\,9.$$

Substituirt man diese Werthe in (XI), so erhält man:

$$\log \varrho = 0,190\,832\,6, \quad \log (\varrho \sec \delta) = 0,222\,156\,0,$$

$$\log \varrho'' = 0,252\,110\,9, \quad \log (\varrho'' \sec \delta'') = 0,272\,438\,3,$$

hieraus endlich auf schon hinlänglich bekannte Weise die heliocentrischen Coordinaten der Arethusa in der ersten und dritten Beobachtung:

¹⁾ Aus dem, was im dritten Abschnitte über die Construction der Wurzeln der die Grösse z bestimmenden Gleichung achten Grades gesagt wurde, lässt sich noch ohne besondere Schwierigkeit eine Grenze für $\sin q^2$ herleiten, wenn für z eine positive reelle Lösung ausser der für die Erdbahn, d. h. eine Lösung zwischen $z = 0^{\circ}$ und $z = \chi'$ vorkommen soll. Dazu ist erforderlich, dass $\sin q^2 < \frac{q}{25}$ oder q selbst vom Zeichen abgesehen $< 36^{\circ} 52', 2$ sei.

$$\begin{aligned} x &= 1,243\,237\,7, & y &= 2,142\,052\,4, & z &= 0,955\,537\,4, \\ x'' &= 0,886\,924\,9, & y'' &= 2,348\,547\,2, & z'' &= 0,946\,752\,9, \end{aligned}$$

auch $\log r$, $\log r''$ und die Sehne κ :

$$\begin{aligned} \log r &= 0,423\,997\,5, \\ \log r'' &= 0,428\,625\,5, \\ \kappa &= 0,411\,939\,9. \end{aligned}$$

Einundfünfzigste Vorlesung.

Einige Umformungen der Formeln der Vorlesung Neunundvierzig.

Sollte man es in den vorhergehenden Formeln vorziehen, statt der Sonnencoordinaten die für Parallaxe, Aberration, Präcession und Nutation vorschriftsmässig corrigirten Rectascensionen A , A' , A'' und Declinationen D , D' , D'' der Sonne einzuführen, welche sich offenbar auch aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} X &= R \cos D \cos A, & X' &= R' \cos D' \cos A', & X'' &= R'' \cos D'' \cos A'', \\ Y &= R \cos D \sin A, & Y' &= R' \cos D' \sin A', & Y'' &= R'' \cos D'' \sin A'', \\ Z &= R \sin D, & Z' &= R' \sin D', & Z'' &= R'' \sin D'' \end{aligned}$$

ergeben¹⁾, so wird nach den Formeln der 49. Vorlesung:

$$\begin{aligned} \frac{N}{R \cos D} &= \operatorname{tg} \delta'' \cos(A + V) - \operatorname{tg} D \cos(\alpha'' + V) \\ \frac{N'}{R' \cos D'} &= \operatorname{tg} \delta'' \cos(A' + V) - \operatorname{tg} D' \cos(\alpha'' + V) \\ \frac{N''}{R'' \cos D''} &= \operatorname{tg} \delta'' \cos(A'' + V) - \operatorname{tg} D'' \cos(\alpha'' + V), \end{aligned}$$

und da ferner in (X) der genannten Vorlesung:

$$\begin{aligned} M &= R \sin(\alpha - A) \cos D & M'' &= R \sin(\alpha'' - A) \cos D \\ M' &= R' \sin(\alpha - A') \cos D' & M'' &= R' \sin(\alpha'' - A') \cos D' \\ M'' &= R'' \sin(\alpha - A'') \cos D'' & M'' &= R'' \sin(\alpha'' - A'') \cos D'', \end{aligned}$$

so gehen die Formeln (XI) über in:

$$\begin{aligned} c \varrho \sin(\alpha'' - \alpha) &= \varrho' \sin(\alpha'' - \alpha') - R' \sin(\alpha'' - A') \cos D' \\ &\quad + c R \sin(\alpha'' - A) \cos D + c'' R'' \sin(\alpha'' - A'') \cos D'' \\ c'' \varrho'' \sin(\alpha - \alpha'') &= \varrho' \sin(\alpha - \alpha') - R' \sin(\alpha - A') \cos D' \\ &\quad + c R \sin(\alpha - A) \cos D + c'' R'' \sin(\alpha - A'') \cos D''. \end{aligned}$$

¹⁾ Das Interpoliren der Polarcoordinaten für eine jede der drei Beobachtungen aus den Angaben des Jahrbuches ist, da bei denselben die zweite, dritte und die weiteren Differenzreihen viel kleiner werden, als bei den rechtwinkligen Coordinaten, das Bequemere, und würde noch unbedingt der Vorzug haben, wenn die Jahrbücher die Rectascension und Declination der Sonne, auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges bezogen, angäben; denn alsdann brauchte man nach Vorlesung 48 nur die Sonnenparallaxe in Rectascension und Declination an die interpolirten Oerter anzubringen.

Zu der Einführung des Schnittpunktes der beiden grössten Kreise, desjenigen, welcher die beiden äusseren geocentrischen Oerter, und desjenigen, welcher den zweiten geocentrischen Ort mit dem entsprechenden Sonnenorte verbindet, gelangen wir durch folgende Betrachtungen, welche den bei der Olbers'schen Methode angestellten ganz nahe verwandt sind.

Wie eben dort gezeigt wurde (siehe 26. Vorlesung), ist jede in den grössten Kreis, welcher die äusseren geocentrischen Oerter verbindet, fallende Richtung als der Pol einer Fundamentalebene anzusehen, in Beziehung auf welche die geocentrischen Längen oder Rectascensionen um 180° verschieden werden. Denken wir uns die Sonnencoordinaten der drei Beobachtungen schon auf eine solche Fundamentalebene transformirt und bezeichnen dieselben durch $\xi, H, Z, \xi', H', Z', \xi'', H'', Z''$, die Coordinaten des Planeten mit den entsprechenden kleinen Buchstaben des griechischen Alphabets, so muss:

$$\frac{\eta'' + H''}{\xi'' + \xi''} = - \frac{\eta + H}{\xi + \xi}$$

werden. Es muss daher ferner, wenn ξ_0, H_0, Z_0 die Sonnencoordinaten eines Punktes bedeuten, welcher mit dem Schnittpunkte der Planetensehne durch den Radius vector verbunden, die Richtung dieser Verbindungslinie in jenen grössten Kreis fallend, d. h. nach dem Pole der Fundamentalebene zielend, ergibt, wenn ξ_0, η_0, ξ_0 die Coordinaten des Theilpunktes der Planetensehne vorstellen:

$$\begin{aligned} \xi_0 + \xi_0 &= 0 \\ \eta_0 + H_0 &= 0 \end{aligned}$$

sein. Zuzufolge der eben entwickelten Gleichungen ist also auch:

$$\frac{\eta'' - \eta_0 + H'' - H_0}{\xi'' - \xi_0 + \xi'' - \xi_0} = \frac{\eta_0 - \eta + H_0 - H}{\xi_0 - \xi + \xi_0 - \xi} \quad (1)$$

Man kann es nun aber immer durch die Wahl der ξZ -Ebene, welche zu jener Fundamentalebene gehört, so einrichten, dass die Tangenten der Quasilängen, d. h. beide Seiten der Gleichung (1), verschwinden. Nach den früher bei der Olbers'schen Methode angestellten Betrachtungen ist es zu dem Zwecke nur nöthig, die ξZ -Ebene demjenigen grössten Kreise der Sphäre entsprechen zu lassen, welcher die äusseren geocentrischen Oerter verbindet. In Beziehung auf ein solches Coordinatensystem ist dann:

$$\begin{aligned} \eta'' - \eta_0 + H'' - H_0 &= 0, \\ \eta_0 - \eta + H_0 - H &= 0, \end{aligned}$$

also auch:

$$\frac{H'' - H_0}{H_0 - H} = \frac{\eta'' - \eta_0}{\eta_0 - \eta} = \frac{n}{n''} \quad (2)$$

oder:

$$H_0 = \frac{n}{n + n''} H + \frac{n''}{n + n''} H'' \quad (3)$$

Es muss aber offenbar noch ausserdem ξ_0 der Projection des Radius vectors der Erde auf die Fundamentalebene angehören, welcher Bedingung durch die Gleichung:

$$\frac{H_0}{\xi_0} = \frac{H'}{\xi'}$$

genügt wird. Von der Bestimmung von ξ_0 und H_0 kann man sich daher folgende anschauliche Construction entwerfen. Es sei in Fig. 57 die Ebene des Papiers die Fundamentalebene, deren Pol der Durchschnittspunkt der oben genannten grössten Kreise

ist, OP die durch die Sonne gelegte Ξ -Axe, deren Richtung dem Durchschnittspunkte des durch die äusseren geocentrischen Oerter gelegten grössten Kreises mit der Fundamentalebene entspricht, OQ die darauf senkrechte H -Axe, R, R', R'' die drei auf die Fundamentalebene projecirten Erdörter. Man theile nun die projecirte Erdsehne RR'' durch den Punkt R_0 so, dass $R_0R'' : RR_0 = n : n''$ und ziehe durch R_0 eine der Axe OP parallele Linie; der Durchschnitt derselben B_0 mit OR' liefert denjenigen Punkt der Fundamentalebene, dessen Sonnenkoordinaten Ξ_0, H_0 den oben entwickelten Bedingungen genügen, und von welchem aus gesehen der Durchschnitt der Planetensehne mit dem mittleren Radius vector in der Richtung des Poles der Fundamentalebene erscheint. Der Natur der Sache nach ist Z_0 beliebig, es kann daher auch $Z_0 = 0$ gesetzt werden.

Machen wir bei der Construction die Grundvoraussetzung der Olbers'schen Methode, so erhält man einen Punkt in der Projection der Erdsehne selbst, übereinstimmend mit dem, was wir früher gefunden haben.

Nach dem Vorhergehenden werden wir auch für unser gewöhnliches Coordinatensystem die Sonnenkoordinaten X_0, Y_0, Z_0 eines Punktes angeben können, der die in Rede stehende Eigenschaft hat, sobald uns nur ausser der Rectascension α_0 und der Declination δ_0 des Durchschnittspunktes der beiden grössten Kreise, die Grössen n und n'' , von welchen in jedem Falle das Gesuchte abhängt, bekannt sind. Wir haben dann die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} x_0 + X_0 &= q_0 \cos \alpha_0 \\ y_0 + Y_0 &= q_0 \sin \alpha_0 \\ z_0 + Z_0 &= q_0 \operatorname{tg} \delta_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

worin x_0, y_0 die gewöhnlichen Coordinaten des Durchschnittes der Planetensehne mit seinem Radius vector, q_0 die projecirte Distanz der beiden mit einander verbundenen Punkte darstellt. Es ist aber offenbar:

$$\frac{n + n''}{n'} x_0 = x', \quad \frac{n + n''}{n'} y_0 = y', \quad \frac{n + n''}{n'} z_0 = z';$$

wir haben daher ferner:

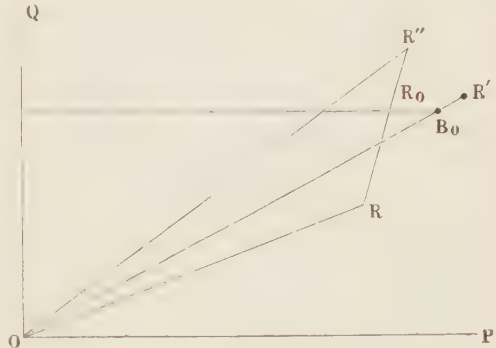
$$\left. \begin{aligned} x' + \frac{n + n''}{n'} X_0 &= \frac{n + n''}{n'} q_0 \cos \alpha_0 \\ y' + \frac{n + n''}{n'} Y_0 &= \frac{n + n''}{n'} q_0 \sin \alpha_0 \\ z' + \frac{n + n''}{n'} Z_0 &= \frac{n + n''}{n'} q_0 \operatorname{tg} \delta_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

und nach den Fundamentalgleichungen unserer Aufgabe:

$$\left. \begin{aligned} x' + X' &= q' \cos \alpha' \\ y' + Y' &= q' \sin \alpha' \\ z' + Z' &= q' \operatorname{tg} \delta' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

daher durch Elimination von x', y', z' :

Fig. 57.



$$\left. \begin{aligned} X' - \frac{n + n''}{n'} X_0 &= \varrho' \cos \alpha' - \frac{n + n''}{n'} \varrho_0 \cos \alpha_0 \\ Y' - \frac{n + n''}{n'} Y_0 &= \varrho' \sin \alpha' - \frac{n + n''}{n'} \varrho_0 \sin \alpha_0 \\ Z' - \frac{n + n''}{n'} Z_0 &= \varrho' \operatorname{tg} \delta' - \frac{n + n''}{n'} \varrho_0 \operatorname{tg} \delta_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Zweiundfünfzigste Vorlesung.

Fortsetzung der vorhergehenden Entwicklungen.

Die Gleichungen (7) der vorigen Vorlesung können auf sehr verschiedene Weise zur Herleitung des Radius vectors r' gebraucht werden: verbindet man beliebige zwei von ihnen zur Elimination von ϱ_0 , so bleibt eine Gleichung zwischen ϱ' und anderen Grössen, welche entweder, wie X' , Y' , Z' , vollständig gegeben sind, oder sich doch, wie $\frac{n + n''}{n'}$, sehr angenähert durch die Zwischenzeiten und r' ausdrücken lassen. Führt man

auch hier wieder den durch die Gleichung $\sin z = \frac{R' \sin \chi'}{r'}$ definirten Hülfswinkel ein, so wird wieder $\frac{\varrho'}{\cos \delta'} = \frac{R' \sin (\chi' - z)}{\sin z}$, und man erhält durch die Substitution dieses Werthes eine Bedingungsgleichung für den Winkel z von derselben Form, wie wir sie schon gefunden und aufgelöst haben.

Die Gleichungen (7) nehmen wieder eine einfache Form an, in welcher man die wichtigeren Verhältnisse deutlich übersehen kann, wenn sie auf die mehr genannte Fundamentalebene der ΞH bezogen werden. Bezeichnen wir nämlich mit σ den Abstand des zweiten geocentrischen Ortes vom Durchschnittspunkte der beiden grössten Kreise, mit J den Winkel, welchen diese grössten Kreise mit einander einschliessen, so wird in den Gleichungen (7):

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha' = J \\ \delta_0 &= 90^\circ \\ \delta' &= 90^\circ - \sigma \end{aligned}$$

zu setzen sein; zugleich ist aber auch nach Fig. 57:

$$\text{Winkel } \overline{POR'} = \alpha_0 = \alpha' = J,$$

daher:

$$\frac{H_0}{\Xi_0} = \frac{H'}{\Xi'} = \operatorname{tg} \alpha_0 = \operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} J,$$

und da zufolge der Natur der gewählten Fundamentalebene $\varrho_0 = 0$ wird, so gehen die Gleichungen (7) über in:

$$\begin{aligned} \Xi' - \frac{n + n''}{n'} \Xi_0 &= \varrho' \cos J \\ H' - \frac{n + n''}{n'} H_0 &= \varrho' \sin J \\ Z' - \frac{n + n''}{n'} Z_0 &= \varrho' \cotg \sigma - \frac{n + n''}{n'} \varrho_0 \operatorname{tg} 90^\circ, \end{aligned}$$

oder wenn wir die in unbestimmter Form erscheinende unbekannte Grösse $\frac{n + n''}{n'} \varrho_0 \operatorname{tg} 90^\circ$ kurz mit p bezeichnen und bemerken, dass die beiden ersten der genannten Gleichungen nach dem Vorhergehenden durch Multiplication oder durch Division mit $\operatorname{tg} J$ in einander übergehen:

$$\begin{aligned} H' - \frac{n + n''}{n'} H_0 &= \varrho' \sin J \\ Z' - \frac{n + n''}{n'} Z_0 &= \varrho' \cotg \sigma - p. \end{aligned}$$

Wenn Ξ_0 , H_0 , Z_0 einem Punkte des mittleren Radius vector der Erde angehören, also Z_0 aufhört, willkürlich zu sein, enthalten die beiden Gleichungen demnach, von n , n' , n'' abgesehen, zwei Unbekannte ϱ' und p . In der ersteren Gleichung kommt schon ϱ' allein vor; diese bietet deshalb die einfachste Form für die Anwendung dar. Weil nach dem Früheren:

$$\frac{n + n''}{n'} H_0 = \frac{n}{n'} H + \frac{n''}{n'} H'' = cH + c''H'',$$

und:

$$\varrho' = \frac{R' \cos \delta' \sin (\chi' - z)}{\sin z} = \frac{R' \sin \sigma \sin (\chi' - z)}{\sin z},$$

so kann sie auch geschrieben werden:

$$H' - cH - c''H'' = \frac{R' \sin (\chi' - z)}{\sin z} \sin \sigma \sin J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Es kommt nun darauf an, alle diese Grössen H , H' , H'' auf bequeme Weise durch die gegebenen Grössen auszudrücken. Die Axe der H fällt offenbar zusammen mit der Richtung des Poles der Fundamentalebene; wenn daher D_0 und A_0 die Declination und die Rectascension des Nordpols der Fundamentalebene vorstellen, so wird nach den bekannten Formeln für Transformation rechtwinkliger Coordinaten:

$$\begin{aligned} H &= X \cos D_0 \cos A_0 + Y \cos D_0 \sin A_0 + Z \sin D_0 \\ H' &= X' \cos D_0 \cos A_0 + Y' \cos D_0 \sin A_0 + Z' \sin D_0 \\ H'' &= X'' \cos D_0 \cos A_0 + Y'' \cos D_0 \sin A_0 + Z'' \sin D_0. \end{aligned}$$

Diese Formeln lassen sich, wenn man die leichteste Art, die Parallaxe in Rechnung zu bringen, haben will, nicht mehr wesentlich vereinfachen. D_0 ist offenbar das Complement des Winkels, welchen der durch die äusseren geocentrischen Oerter gelegte grösste Kreis mit dem Aequator bildet, A_0 die Länge des aufsteigenden Knotens jenes grössten Kreises auf dem Aequator, vermindert um 90° . Die bekannten Formeln für rechtwinklige sphärische Dreiecke liefern uns demnach die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cotg D_0 \cos (A_0 - \alpha) &= - \operatorname{tg} \delta \\ \cotg D_0 \cos (A_0 - \alpha'') &= - \operatorname{tg} \delta'', \end{aligned}$$

aus deren Addition und Subtraction dann weiter die folgenden hervorgehen:

$$\begin{aligned} \cotg D_0 \cos [A_0 - \tfrac{1}{2}(\alpha'' + \alpha)] &= \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg} \delta'' + \operatorname{tg} \delta) \sec \tfrac{1}{2}(\alpha'' - \alpha) \\ \cotg D_0 \sin [A_0 - \tfrac{1}{2}(\alpha'' + \alpha)] &= \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg} \delta'' - \operatorname{tg} \delta) \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}(\alpha'' - \alpha), \end{aligned}$$

und also auch:

$$\operatorname{tg} [A_0 - \tfrac{1}{2}(\alpha'' + \alpha)] = \frac{\sin (\delta'' - \delta)}{\sin (\delta'' + \delta)} \cdot \cotg \tfrac{1}{2}(\alpha'' - \alpha);$$

bezeichnet man noch bei dem durch die Sonne und den zweiten geocentrischen Ort gelegten grössten Kreise die Grössen, welche D_0 und A_0 analog sind, mit D'_0 und A'_0 ,

die aus X' , Y' , Z' herzuleitende verbesserte Rectascension und Declination der Sonne mit A' und D' , so hat man D'_0 und A'_0 aus den Formeln:

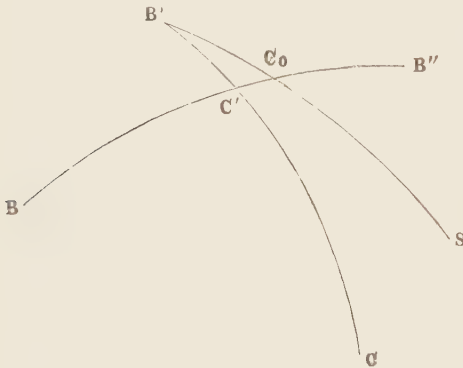
$$\begin{aligned} \cotg D'_0 \cos [A'_0 - \frac{1}{2} (\alpha' + A')] &= \frac{1}{2} (tg D' + tg \delta') \sec \frac{1}{2} (\alpha' - A') \\ \cotg D'_0 \sin [A'_0 - \frac{1}{2} (\alpha' + A')] &= \frac{1}{2} (tg D' - tg \delta') \operatorname{cosec} \frac{1}{2} (\alpha' - A'), \end{aligned}$$

also:

$$tg [A'_0 - \frac{1}{2} (A' + \alpha')] = \frac{\sin (D' - \delta')}{\sin (D' + \delta')} \cdot \cotg \frac{1}{2} (A' - \alpha').$$

Die beiden mehr genannten grössten Kreise begrenzen auf dem Aequator den Bogen $A'_0 - A_0$; diesem Bogen, als der Seite eines sphärischen Dreiecks, liegen die

Fig. 58.



Winkel $90^\circ - D_0$ und $180^\circ - (90^\circ - D'_0)$ an. J oder die Neigung der beiden Kreise gegen einander ist der dritte Winkel des Dreiecks; derselbe lässt sich nach der gewöhnlichen Fundamentalformel mit Schärfe finden. Es wird dabei:

$$\begin{aligned} \cos J &= - \sin D_0 \sin D'_0 \\ &+ \cos D_0 \cos D'_0 \cos (A'_0 - A_0). \end{aligned}$$

In der folgenden Zeichnung, Fig. 58, stellen B , B' , B'' die drei geocentrischen Oerter, S den Ort der Sonne in der zweiten Beobachtung, C den einen Pol des Bogens des grössten Kreises BB'' vor, welcher von

$B'C$ im Punkte C' geschnitten wird. Der Durchschnittspunkt von BB'' mit $B'S$ sei C_0 ; dann ist offenbar:

$$- \cos B'C = \sin B'C' = \sin J \sin B'C_0 = \sin J \sin \sigma,$$

ferner:

$$\cos B'C = \sin D_0 \sin \delta' + \cos D_0 \cos \delta' \cos (\alpha' - A_0) = - \sin \sigma \sin J.$$

Dadurch ist Alles in Gleichung (1) bekannt geworden.

Dreiundfünfzigste Vorlesung.

Folgerungen für den zu erreichenden Grad von Genauigkeit einer Bahnbestimmung.

Im Vorhergehenden haben wir den Durchschnittspunkt zweier gegebenen Kreise unter Zuziehung geometrischer Betrachtungen eingeführt, obgleich es für diesen Zweck einen kürzeren und eleganteren Weg giebt. Dieser letztere, den wir bald kennen lernen werden, ist indessen weit weniger geeignet, eine vollständige Einsicht in alle Beziehungen des genannten Durchschnittspunktes zu der zu lösenden Hauptaufgabe zu gewähren. Zu den in solcher Weise zu erörternden Fragen gehört auch die, von welchem Umstande die bei der Bestimmung des mittleren Radius vector zu erreichende Genauigkeit vorzugsweise abhängt, wenn Beobachtungen von gleicher Güte und gleicher Grösse des geocentrischen Bogens vorausgesetzt werden. Der Lambert'sche Schluss aus der Krümmung des geocentrischen Bogens auf die Entfernung von der Sonne führt nämlich

auf ein merkwürdiges Dilemma, welches in dem Falle geradliniger geocentrischer Bewegung am deutlichsten hervortritt. Es kann solche Bewegung in einem grössten Kreise nach dem Lambert'schen Kriterium sowohl daher entstanden sein, dass der Radius vector des betreffenden Himmelskörpers dem der Erde gerade gleich ist, aber auch ebensowohl darin ihren Grund haben, dass ein Urtheil über die Entfernung in dem besondern Falle überhaupt nicht möglich ist. Es ist klar, dass ein solcher Ausnahmefall, wo die der Zahl nach ausreichenden Data zur Bestimmung untauglich werden, sich auch immer dadurch auszeichnen muss, dass die geocentrische Bewegung eine geradlinige wird, da ja, wenn der Radius vector unbestimmt und unbestimmbar wird, das Lambert'sche Kriterium ebenfalls diese Eigenschaft des Radius vector wiedergeben muss. Es liegt deshalb hier die Versuchung sehr nahe, mittelst Umkehrung des Lambert'schen Satzes zu schliessen, im Falle geradliniger geocentrischer Bewegung, d. h. wenn nach unserer Bezeichnung $\sigma = 0$ wird, werde die Lösung unbestimmt, und verliere überhaupt in allen Fällen in demselben Maasse an Bestimmtheit und Genauigkeit, wo σ kleiner wird. Dass dies ein Irrthum sein würde, geht schon aus dem Vorhergehenden hervor, zeigt sich aber noch besser, wenn wir die Gleichung (1) voriger Vorlesung noch einmal genauer betrachten. Wird $\sigma = 0$, so geht dieselbe über in:

$$H' - cH - c''H'' = 0,$$

und wenn wir die Gleichungen (1) der 49. Vorlesung berücksichtigen:

$$H' - \frac{\partial}{\partial'} H - \frac{\partial''}{\partial'} H'' - \left(\frac{\partial}{\partial'} \frac{QH}{2} + \frac{\partial''}{\partial'} \frac{Q''H''}{2} \right) \cdot \frac{1}{r'^3} = 0$$

oder:

$$r'^3 = \frac{\frac{\partial}{\partial'} \frac{QH}{2} + \frac{\partial''}{\partial'} \frac{Q''H''}{2}}{H' - \frac{\partial}{\partial'} H - \frac{\partial''}{\partial'} H''} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial'} QH + \frac{\partial''}{\partial'} Q''H''}{H' - \frac{\partial}{\partial'} H - \frac{\partial''}{\partial'} H''} \dots \dots \dots (1)$$

Diese Lösung leidet an keinerlei Unbestimmtheit, so lange der Divisor $\partial'H' - \partial'H - \partial''H''$ eine ganz bestimmte Grösse bleibt, wie im Allgemeinen der Fall ist. Es wird r' dabei immer sehr nahe gleich R' der Entfernung der Erde von der Sonne werden, um so mehr, je näher wir für Q und Q'' die entsprechenden Werthe der Erdbahn setzen, während wir dagegen durch Einsetzen der genaueren Werthe bei dem Planeten die Lösung für den letzteren mit beliebiger Genauigkeit erhalten könnten. In dem Umstande, dass in diesem speciellen Falle (wenn eben der genannte Divisor nicht Null wird) die Lösung für die Erde mit der für den Planeten in der ersten Annäherung übereinstimmt, liegt auch die Erklärung dafür, dass die Finalgleichung hier nur eine reelle Wurzel liefert.

Man sieht aus derselben noch, dass das Verschwinden von σ die Bestimmbarkeit des r' keineswegs aufhebt, dass σ überhaupt nicht als Maass für die Bestimmbarkeit des r' angesehen werden darf.

Schreiben wir die Gleichung (1) unter der Form:

$$r'^3 = \frac{\frac{\partial}{\partial'} \frac{QH}{2} + \frac{\partial''}{\partial'} \frac{Q''H''}{2}}{H' - H_0} \dots \dots \dots (2)$$

wozu wir nach dem Früheren berechtigt sind, so können wir sagen, dass die Sicherheit der Bestimmung durch die Gleichungen (1) oder (2) um so geringer sein wird, je kleiner das durch $H' - H_0$ vorgestellte Stück der Projection von R' auf die Fundamentalebene ausfällt. Ein Blick auf die Fig. 57 zeigt, dass diese Grösse, unter übrigens gleichen Umständen, einestheils $\sin J$, anderentheils dem Cosinus des Winkels, welchen die Richtung von R' mit der Fundamentalebene der \mathcal{E}, H bildet, proportional ist. Der

letztere Winkel ergänzt offenbar den Abstand der Verlängerung des Radius vector vom Durchschnittspunkte der mehrfach genannten grössten Kreise der Sphäre, oder den Winkel $\chi' - \sigma$ zu 90° . Somit kommen wir zu dem bemerkenswerthen Resultate, dass die Sicherheit der Bestimmung von r' aus drei geocentrischen Oertern unter übrigens gleichen Umständen dem Producte:

$$\sin J \sin (\chi' - \sigma)$$

proportional ist.

Dieses Product ist nun aber, wie aus einer der Grundformeln für rechtwinklige sphärische Dreiecke leicht hervorgeht, gleich dem Sinus des Abstandes des mittleren Sonnenortes von dem durch die äusseren geocentrischen Oerter gelegten grössten Kreise. Das Endresultat unserer Untersuchung über die Bestimmbarkeit des mittleren Radius vector lässt sich also darin aussprechen, dass der zu erreichende Grad von Genauigkeit unter sonst gleichen Umständen dem Sinus jenes Abstandes proportional ist.

Hiernach ist es z. B. eine sehr ungünstige Lage der Beobachtungen, wenn der durch die äusseren geocentrischen Oerter gelegte grösste Kreis auch durch den mittleren Sonnenort geht. In der That haben wir ja diesen Fall schon als den Ausnahmefall der Olbers'schen Methode bei den Kometen kennen gelernt. Dass dort dessen ungeachtet unter Zuziehung anderer Formeln und einer anderen Art der Näherung eine Bestimmung möglich wurde, verdanken wir dem Umstande, dass wir dort nur fünf Unbekannte zu suchen hatten; bei den Planeten hört in gleichem Falle die Bestimmbarkeit gänzlich auf. Ein Fall, in welchem man sich solcher Ungunst nicht durch Auswahl der drei Beobachtungen zu entziehen vermag, ist der, wo die Ebene der Planetenbahn sehr nahe mit der Ekliptik zusammenfällt. In der Beziehung haben uns ja auch in Wirklichkeit schon ganz andere Betrachtungen gezeigt, dass eine Bahn mit geringer Neigung gegen die Ekliptik aus drei vollständigen geocentrischen Oertern nicht bestimmt werden kann, und dass es dazu einer besonderen Auswahl des Materials und einer besonderen Methode bedarf.

Vierundfünfzigste Vorlesung.

Einfachere Herleitung der Hauptgleichung für die Bestimmung der Entfernung der Himmelskörper.

Die Gleichungen (XI) der 49. Vorlesung, oder, wenn man für die Sonne die Polar-coordinaten einführt:

$$c \varrho \sin (\alpha'' - \alpha) = \varrho' \sin (\alpha'' - \alpha') - R' \sin (\alpha'' - A') \cos D' + c R \sin (\alpha'' - A) \cos D + c'' R'' \sin (\alpha'' - A'') \cos D''$$

$$c'' \varrho'' \sin (\alpha - \alpha'') = \varrho' \sin (\alpha - \alpha') - R' \sin (\alpha - A') \cos D' + c R \sin (\alpha - A) \cos D + c'' R'' \sin (\alpha - A'') \cos D'',$$

behalten ihre Gültigkeit auch dann noch, wenn die darin vorkommenden Coordinaten auf ein anderes System als das des Aequators bezogen werden. Wählen wir unser System der Ξ, H, Z , welches ja nach dem Vorhergehenden ein völlig bestimmtes ist, so nehmen die beiden Gleichungen eine einfache und übersichtliche Form an. Zunächst sieht man, dass $\alpha'' - \alpha = 180^\circ$, $\alpha'' - \alpha' = J$ wird, indem der Pol des Systems mit

dem Durchschnitte der grössten Kreise zusammenfällt, welche durch die beiden äusseren geocentrischen Oerter einerseits und durch den mittleren geocentrischen Ort und den Sonnenort andererseits gelegt werden. Die $\cos D$, $\cos D'$, $\cos D''$ sind dann identisch mit den Sinus der Abstände der Sonnenörter von jenem Durchschnittspunkte, die $\alpha'' - A$, $\alpha'' - A'$, $\alpha'' - A''$ sind die Winkel, welche die durch den Durchschnittspunkt und die Sonnenörter gelegten grössten Kreise mit dem durch die äusseren geocentrischen Oerter gelegten grössten Kreise einschliessen. Die Producte:

$$\begin{aligned} & \sin (\alpha'' - A) \cos D \\ & \sin (\alpha'' - A') \cos D' \\ & \sin (\alpha'' - A'') \cos D'' \end{aligned}$$

sind demnach, wenn man von den Formeln für rechtwinklige sphärische Dreiecke Gebrauch macht, nichts Anderes, als die Sinus der Abstände der Sonnenörter von dem durch die äusseren geocentrischen Oerter gelegten grössten Kreise. Führen wir auch noch die unverkürzte Distanz von der Erde in der mittleren Beobachtung ein und bezeichnen dieselbe mit Δ' , so ist offenbar:

$$q' = \Delta' \sin \sigma.$$

Die Grösse $\sin \sigma \sin (\alpha'' - \alpha')$ oder $\sin \sigma \sin J$ ist wieder nichts Anderes, als der Sinus des kürzesten Abstandes des zweiten geocentrischen Ortes von dem durch die beiden äusseren Oerter gelegten Kreise. Bezeichnen wir diesen Abstand mit ψ' , die Abstände der drei Sonnenörter der Reihe nach mit ω , ω' , ω'' , so erhalten wir daher aus den Gleichungen am Eingange dieser Vorlesung:

$$\Delta' \sin \psi' = R' \sin \omega' - c R \sin \omega - c'' R'' \sin \omega'' (1)$$

Macht man die in Vorlesung 49 gezeigte Umformung, zu welchem Behufe man hier:

$$\begin{aligned} b \sin q &= \sin \chi' \sin \psi' \\ b \cos q &= \cos \chi' \sin \psi' + \sin \omega' - \left(\frac{\partial R}{\partial' R'} \sin \omega + \frac{\partial'' R''}{\partial' R'} \sin \omega'' \right) \end{aligned}$$

setzen kann, so wird die dortige Gleichung (VI):

$$\left(\frac{\partial R}{\partial' R'} Q \sin \omega + \frac{\partial'' R''}{\partial' R'} Q'' \sin \omega'' \right) \sin z^4 = 2 b R'^3 \sin \chi'^3 \sin (z - q) . . . (2)$$

Die Winkel ψ' , ω , ω' , ω'' werden positiv oder negativ zu rechnen sein, je nachdem die Oerter auf die eine oder die andere Seite des grössten Kreises fallen. Sie lassen sich mit grosser Bequemlichkeit ausdrücken, sobald man die Pole des durch die beiden äusseren Oerter gelegten grössten Kreises auf uns schon bekannte Weise, sei es in Länge und Breite, oder in Rectascension und Declination, bestimmt hat. Die Einführung dieser Coordinaten des einen oder des anderen Poles ist es, welche uns erlauben wird, den Grundgleichungen des Problems auch in Beziehung auf die Bestimmung von q und q'' , oder den unverkürzten Abständen von der Erde Δ und Δ'' aus Δ' eine ähnliche Einfachheit, wie der Gleichung (1) zu geben.

Verbindet man nämlich denjenigen Pol, welchen man als den Nordpol ansehen will, mit den geocentrischen Oertern sowohl als mit den Sonnenörtern durch grösste Kreise, und bezeichnet die Winkel, welche von denselben mit einem beliebigen durch denselben Pol gelegten grössten Kreise gebildet werden, wie folgt:

mit G , G' , G'' die Winkel, beziehungsweise des ersten, des zweiten und des dritten Sonnenortes,

mit ε , ε' , ε'' die entsprechenden Winkel für die geocentrischen Oerter,

so werden die beiden Gleichungen am Anfange dieser Vorlesung:

$$\begin{aligned} c \varrho \sin (\varepsilon'' - \varepsilon) &= \varrho' \sin (\varepsilon'' - \varepsilon') - R' \sin (\varepsilon'' - G') \cos \omega' + c R \sin (\varepsilon'' - G) \cos \omega \\ &\quad + c'' R'' \sin (\varepsilon'' - G'') \cos \omega'', \\ c'' \varrho'' \sin (\varepsilon - \varepsilon'') &= \varrho' \sin (\varepsilon - \varepsilon') - R' \sin (\varepsilon - G') \cos \omega' + c R \sin (\varepsilon - G) \cos \omega \\ &\quad + c'' R'' \sin (\varepsilon - G'') \cos \omega''. \end{aligned}$$

Dabei wird wieder vorausgesetzt, dass, wie alle Coordinaten, so auch die ϱ , ϱ' , ϱ'' auf eine Fundamentalebene, die den bezeichneten Pol hat, bezogen werden. Führt man dagegen die \mathcal{A} , \mathcal{A}' , \mathcal{A}'' in diese Gleichungen ein, so ist offenbar in Beziehung auf diese Fundamentalebene, da die durch den ersten und dritten geocentrischen Ort repräsentirten Richtungen dieser Fundamentalebene parallel sind:

$$\begin{aligned} \varrho &= \mathcal{A}, \\ \varrho'' &= \mathcal{A}'', \end{aligned}$$

und ausserdem ist, nach den oben gemachten Bemerkungen und mit Rücksicht darauf, dass $90^\circ - \psi'$ den Abstand des zweiten geocentrischen Ortes von jenem Pole darstellt,

$$\varrho' = \mathcal{A}' \cos \psi'.$$

Wir haben mithin folgende Gleichungen, um \mathcal{A} und \mathcal{A}'' aus \mathcal{A}' zu berechnen, nachdem das letztere gefunden ist:

$$\left. \begin{aligned} c \mathcal{A} \sin (\varepsilon'' - \varepsilon) &= \mathcal{A}' \cos \psi' \sin (\varepsilon'' - \varepsilon') - R' \cos \omega' \sin (\varepsilon'' - G') \\ &\quad + c R \cos \omega \sin (\varepsilon'' - G) + c'' R'' \cos \omega'' \sin (\varepsilon'' - G'') \\ c'' \mathcal{A}'' \sin (\varepsilon - \varepsilon'') &= \mathcal{A}' \cos \psi' \sin (\varepsilon - \varepsilon') - R' \cos \omega' \sin (\varepsilon - G') \\ &\quad + c R \cos \omega \sin (\varepsilon - G) + c'' R'' \cos \omega'' \sin (\varepsilon - G''). \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

Aber auch diese Gleichungen lassen sich wieder bedeutend vereinfachen, wenn man bemerkt, dass nach den bekannten Grundformeln für sphärische Dreiecke $\cos \psi' \sin (\varepsilon'' - \varepsilon')$ gleich dem Cosinus des Abstandes des zweiten geocentrischen Ortes von einem Punkte des durch die anderen geocentrischen Oerter gelegten grössten Kreises ist, welcher letztere Punkt von dem dritten geocentrischen Orte um 90° in bestimmter Richtung entfernt ist. Desgleichen ist $\cos \omega \sin (\varepsilon'' - G)$ der Cosinus des Abstandes des ersten Sonnenortes von demselben Punkte; $\cos \omega' \sin (\varepsilon'' - G')$ und $\cos \omega'' \sin (\varepsilon'' - G'')$ sind die entsprechenden Grössen für die beiden anderen Sonnenörter. Die zweite der Gleichungen (1a) enthält die Cosinus, bezogen auf einen Punkt, welcher in dem grössten Kreise von dem ersten geocentrischen Orte 90° entfernt ist. Für die genannten Cosinus führen wir abkürzende Zeichen oder Symbole ein, der Art, dass z. B. $(\alpha_2 \mathcal{A})$ den Cosinus des Abstandes des ersten Sonnenortes von dem um 90° verschobenen zweiten geocentrischen Orte bedeutet, und schreiben dann die Gleichungen (1a) in folgender, für die Rechnung sehr übersichtlichen Form:

$$\begin{aligned} (\alpha_2 \alpha) c \mathcal{A} &= (\alpha_2 \alpha') \mathcal{A}' - (\alpha_2 \mathcal{A}') R' + (\alpha_2 \mathcal{A}) c R + (\alpha_2 \mathcal{A}'') c'' R'' \\ (\alpha_0 \alpha'') c'' \mathcal{A}'' &= (\alpha_0 \alpha') \mathcal{A}' - (\alpha_0 \mathcal{A}') R' + (\alpha_0 \mathcal{A}) c R + (\alpha_0 \mathcal{A}'') c'' R'' \end{aligned} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (3)$$

Bei dem Gebrauche dieser Symbole ist noch zu bemerken, dass derjenige Accent, welcher sich auf den in bestimmter, im Uebrigen beliebiger, Richtung auf dem grössten Kreise zu verschiebenden Ort bezieht, am Fusse des Buchstabens angehängt ist, so dass z. B. α_0 die Rectascension des Punktes bedeutet, welcher dem ersten geocentrischen Orte entspricht. Bei dieser Bezeichnung wird dann auch $(\alpha_2 \alpha) = -(\alpha_0 \alpha'')^1$.

¹⁾ Unter Anwendung der Formel: Cosinus der Hypotenuse gleich dem Producten des Cosinus der Katheten findet man auch noch leicht die bei der Prüfung zu verwendenden Relationen:

$$\begin{aligned} \arccos \frac{(\alpha_2, \alpha')}{\cos \psi'} - \arccos \frac{(\alpha_0 \alpha')}{\cos \psi'} &= \arccos \frac{(\alpha_2 \mathcal{A})}{\cos \omega} - \arccos \frac{(\alpha_0 \mathcal{A})}{\cos \omega} = \arccos \frac{(\alpha_2 \mathcal{A}')}{\cos \omega'} \\ &\quad - \arccos \frac{(\alpha_0 \mathcal{A}')}{\cos \omega'} = \arccos \frac{(\alpha_2 \mathcal{A}'')}{\cos \omega''} - \arccos \frac{(\alpha_0 \mathcal{A}'')}{\cos \omega''}. \end{aligned}$$

Wir können nun nach dem Vorhergehenden über die Gleichungen (1) und (3), welche als die Fundamentalgleichungen des ganzen Problems zu betrachten sind, eine interessante Bemerkung machen, die nämlich, dass sämtliche darin vorkommende Coefficienten von cR , $c''R''$, R' , cA , $c''A''$ und A' sich ausdrücken als die Cosinus der Abstände der Sonnenörter und der geocentrischen Oerter von drei gegebenen Punkten der Sphäre. Der eine dieser Punkte, welcher bei Aufstellung der Finalgleichung für r' durch (1) die Hauptrolle spielt, ist der Pol des durch den ersten und dritten geocentrischen Ort gelegten grössten Kreises, die beiden anderen sind Punkte dieses grössten Kreises, welche von den äusseren geocentrischen Oertern in gleicher Richtung um 90° abstehen. Die Cosinus der Abstände der Oerter von diesen drei Punkten lassen sich mit beinahe derselben Bequemlichkeit ausdrücken, sie mögen in Rectascension und Declination oder in Länge und Breite gegeben sein; auch ist es ein nicht geringer Vortheil dieser Form, dass die darin vorkommenden Grössen eine kurz anzugebende einfache geometrische Bedeutung haben. Man ist so in den Stand gesetzt, sich durch Constructionen auf dem Globus oder auf Karten gegen grobe Rechenfehler zu schützen; gegen kleinere stehen eine Reihe von Prüfungen zu Gebote.

Fünfundfünfzigste Vorlesung.

Weitere Ausführung der Gleichungen (1) und (3) in der 54. Vorlesung.

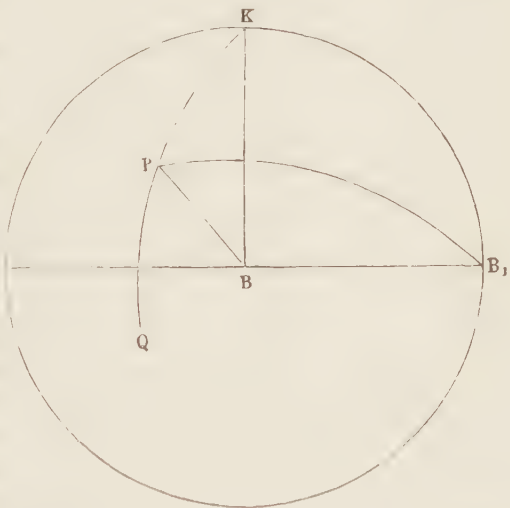
Unser erstes Geschäft, die Bestimmung der Rectascension A_0 und Declination D_0 , oder auch, wenn wir die Ekliptik vorziehen, der Länge und Breite des Poles, welcher von beiden äusseren geocentrischen Oertern um 90° entfernt ist, kann nach der 52. Vorlesung als erledigt angesehen werden. Die Rectascension und Declination, oder auch, mutatis mutandis, die Länge und Breite des Punktes, auf welchen die Cosinus $(\alpha_0 \alpha')$, $(\alpha_0 A')$ u. s. w. nach voriger Vorlesung bezogen werden sollen, seien α_0 und δ_0 . Eine leichte Berechnungsart für dieselben erkennen wir mit Hülfe der Fig. 59.

In derselben stellt B den ersten geocentrischen Ort, B_1 denjenigen Ort vor, der, mit dem ersten und dritten geocentrischen Orte in einem grössten Kreise liegend, 90° von ersterem absteht. K hingegen ist der Ort, welcher senkrecht zu jenem grössten Kreise 90° entfernt ist, d. h. der Pol desselben; P sei der Pol des Aequators, Q ein Punkt, mit K und P in einem grössten Kreise gelegen.

Hiernach ist also:

$$\begin{aligned} KPB &= A_0 - \alpha \\ \overline{KP} &= 90^\circ - D_0 \\ \overline{BP} &= 90^\circ - \delta, \end{aligned}$$

Fig. 59.



daher:

$$\sin BKP = \frac{\sin \overline{BP}}{\sin \overline{BK}} \cdot \sin KPB = \cos \delta \sin(A_0 - \alpha);$$

ferner:

$$\cos \overline{B_1P} = \cos \overline{KP} \cos \overline{KB_1} + \sin \overline{KP} \cdot \sin \overline{KB_1} \cos B_1KP,$$

oder, da:

$$\begin{aligned} \overline{B_1K} &= 90^\circ, \quad \overline{B_1P} = 90^\circ - \delta_0, \quad B_1KP = 90^\circ + BKP, \\ \sin \delta_0 &= -\cos D_0 \sin BKP = +\cos D_0 \cos \delta \sin(\alpha - A_0) \dots \dots (1) \end{aligned}$$

Auch hat man nach Fig. 59:

$$\cos \overline{B_1P} \cos \overline{KP} + \sin \overline{B_1P} \sin \overline{KP} \cos B_1PK = \cos \overline{B_1K} = 0,$$

oder, weil $B_1PK = A_0 - \alpha_0$,

$$\begin{aligned} \sin \delta_0 \sin D_0 + \cos \delta_0 \cos D_0 \cos(A_0 - \alpha_0) &= 0 \\ \cos(\alpha_0 - A_0) &= -\operatorname{tg} D_0 \operatorname{tg} \delta_0 \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Rectascension und Declination desjenigen Punktes, welcher zum dritten geocentrischen Orte in derselben Beziehung steht, wie der eben bestimmte zum geocentrischen Orte, mit α_2 und δ_2 , so haben wir nach vollständiger Analogie:

$$\sin \delta_2 = \cos D_0 \cos \delta'' \sin(\alpha'' - A_0) \dots \dots \dots (3)$$

$$\cos(\alpha_2 - A_0) = -\operatorname{tg} D_0 \operatorname{tg} \delta_2 \dots \dots \dots (4)$$

Nachdem so $A_0, D_0, \alpha_0, \delta_0, \alpha_2, \delta_2$ bestimmt worden sind, drücken sich die in den Gleichungen (1) und (3) der vorigen Vorlesung enthaltenen Factoren aus, wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} \sin \psi' &= \sin D_0 \sin \delta' + \cos D_0 \cos \delta' \cos(\alpha' - A_0) \\ \sin \varpi &= \sin D_0 \sin D + \cos D_0 \cos D \cos(A - A_0) \\ \sin \varpi' &= \sin D_0 \sin D' + \cos D_0 \cos D' \cos(A' - A_0) \\ \sin \varpi'' &= \sin D_0 \sin D'' + \cos D_0 \cos D'' \cos(A'' - A_0) \\ (\alpha_0 \alpha') &= \sin \delta_0 \sin \delta' + \cos \delta_0 \cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha_0) \\ (\alpha_0 \alpha'') &= \sin \delta_0 \sin \delta'' + \cos \delta_0 \cos \delta'' \cos(\alpha'' - \alpha_0) \\ (\alpha_0 A) &= \sin \delta_0 \sin D + \cos \delta_0 \cos D \cos(A - \alpha_0) \\ (\alpha_0 A') &= \sin \delta_0 \sin D' + \cos \delta_0 \cos D' \cos(A' - \alpha_0) \\ (\alpha_0 A'') &= \sin \delta_0 \sin D'' + \cos \delta_0 \cos D'' \cos(A'' - \alpha_0) \\ (\alpha_2 \alpha) &= \sin \delta_2 \sin \delta + \cos \delta_2 \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_2) \\ (\alpha_2 \alpha') &= \sin \delta_2 \sin \delta' + \cos \delta_2 \cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha_2) \\ (\alpha_2 A) &= \sin \delta_2 \sin D + \cos \delta_2 \cos D \cos(A - \alpha_2) \\ (\alpha_2 A') &= \sin \delta_2 \sin D' + \cos \delta_2 \cos D' \cos(A' - \alpha_2) \\ (\alpha_2 A'') &= \sin \delta_2 \sin D'' + \cos \delta_2 \cos D'' \cos(A'' - \alpha_2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Als einfachste Prüfung der meisten dieser Vorbereitungsrechnungen haben wir, dass $(\alpha_0 \alpha'') = -(\alpha_2 \alpha)$ werden muss.

Durch Reduction auf die Ekliptik kann D, D', D'' zum Verschwinden gebracht werden, und es werden dann neun von den vorübergehenden Ausdrücken eingliedrig; doch wird sehr häufig durch diesen kleinen Vortheil die Mühe jener lästigen Reduction sich nicht hinlänglich belohnt finden.

Wenn durch Auflösung der Gleichungen (1) und (3) (54. Vorlesung) die Entfernungen \mathcal{A} und \mathcal{A}'' bekannt geworden sind, so findet sich auch die Sehne κ , welche die beiden Oerter im Raume verbindet, nach der bekannten Formel:

$$\begin{aligned} x^2 &= (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2 \\ &= (A'' \cos \delta'' \cos \alpha'' - X'' - A \cos \delta \cos \alpha + X)^2 \\ &\quad + (A'' \cos \delta'' \sin \alpha'' - Y'' - A \cos \delta \sin \alpha + Y)^2 \\ &\quad + (A'' \sin \delta'' - Z'' - A \sin \delta + Z)^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{c}{c''} \end{pmatrix} r^2 + \begin{pmatrix} 1 & \frac{c''}{c} \end{pmatrix} r'^2 = \frac{r'^2}{c c''}. \end{aligned}$$

Sechsfundfzigste Vorlesung.

Rechnungsbeispiel für die Formeln der 55. Vorlesung.

Die Art der Anwendung der vorigen Formeln mag an dem in der 50. Vorlesung aufgeführten Beobachtungsmaterial für Arethusa ihre Verdeutlichung finden. Aus den X , Y , Z u. s. w. finden wir die entsprechenden Coordinaten der Sonne wie folgt:

Die Rectascension A , A' , A'' . .	239° 2' 51'',68,	260° 38' 25'',53,	279° 25' 8'',56
„ Declination D , D' , D''	— 20° 24' 45'',43,	— 23° 10' 44'',64,	— 23° 10' 31'',58
„ $\log R$, $\log R'$, $\log R''$	9,9943352,	9,9930690,	9,9926828.

Nach Vorlesung 52 haben wir dann nach den Formeln:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \{A_0 - \tfrac{1}{2}(\alpha'' + \alpha)\} &= \frac{\sin(\delta'' - \delta)}{\sin(\delta'' + \delta)} \cdot \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\alpha'' - \alpha) \\ \operatorname{tg} D_0 &= -\operatorname{cotg} \delta \cos(\alpha - A_0) = -\operatorname{cotg} \delta'' \cos(\alpha'' - A_0), \end{aligned}$$

wenn wir für die geocentrischen Oerter dieselben Werthe wie früher einsetzen:

$$\begin{aligned} A_0 &= 303^\circ 43' 41'',29, \\ D_0 &= 48^\circ 41' 26'',58. \end{aligned}$$

Die Zweideutigkeit der Lösung wird dadurch gehoben, dass D_0 positiv werden soll. Wir haben schon darauf aufmerksam gemacht, dass $360^\circ - A_0$ mit V der 49. Vorlesung, welches nach der Formel:

$$\operatorname{tg} V = \frac{\operatorname{tg} \delta'' \cos \alpha - \operatorname{tg} \delta \cos \alpha''}{\operatorname{tg} \delta'' \sin \alpha - \operatorname{tg} \delta \sin \alpha''}$$

gleich $56^\circ 16' 18'',74$ gefunden wurde, identisch ist.

Es ergibt sich ferner:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 345^\circ 21' 20'',39 \\ \delta_0 &= - 33^\circ 18' 1'',97 \\ \alpha_2 &= 337^\circ 47' 37'',43 \\ \delta_2 &= - 36^\circ 3' 16'',93, \end{aligned}$$

und darauf nach den Formeln (5) (55. Vorlesung):

$\log \sin \psi'$	$= 7,5919067$	$\log(\alpha_0 A')$	$= 9,4576851$
$\log \sin \varpi$	$= 7,4145303$	$\log(\alpha_0 A'')$	$= 9,7237550$
$\log \sin \varpi'$	$= 9,1688477$	$\log(\alpha_2 \alpha)$	$= 9,0732781_n$
$\log \sin \varpi''$	$= 9,4106642$	$\log(\alpha_2 \alpha')$	$= 8,6208351_n$
$\log(\alpha_0 \alpha')$	$= 8,8853727$	$\log(\alpha_2 A)$	$= 8,9545596$
$\log(\alpha_0 \alpha'')$	$= 9,0732787$	$\log(\alpha_2 A')$	$= 9,5986859$
$\log(\alpha_0 A)$	$= 8,4543236_n$	$\log(\alpha_2 A'')$	$= 9,7933293.$

Die Prüfungsgleichung für die Richtigkeit der Bestimmung von A_0 , D_0 , α_0 , δ_0 , α_2 , δ_2 ,

$$(\alpha_0 \alpha'') = - (\alpha_2 \alpha)$$

erweist sich hier als erfüllt, desgleichen die Controlen:

$$\begin{aligned} & \arccos \frac{(\alpha_2 \alpha')}{\cos \psi'} - \arccos \frac{(\alpha_0 \alpha')}{\cos \psi'} \\ &= \arccos \frac{(\alpha_2 A)}{\cos \omega} - \arccos \frac{(\alpha_0 A)}{\cos \omega} \\ &= \arccos \frac{(\alpha_2 A')}{\cos \omega'} - \arccos \frac{(\alpha_0 A')}{\cos \omega'} \\ &= \arccos \frac{(\alpha_2 A'')}{\cos \omega''} - \arccos \frac{(\alpha_0 A'')}{\cos \omega''} \\ &= \pm \arcsin (\alpha_0 \alpha''), \end{aligned}$$

sie bestätigen in den wichtigsten Beziehungen die Richtigkeit der bis hierher geführten Rechnungen.

Die Gleichungen (1) und (3) der Vorlesung 54 werden demnach:

$$\begin{aligned} (7,5919067) \Delta' &= (9,1688477) R' - (7,4145307) c R \\ &\quad - (9,4106642) c'' R'' \\ (9,0732781_n) c \Delta &= - (9,5986859) R' + (8,9545596) c R \\ &\quad + (9,7933293) c'' R'' + (8,6208351_n) \Delta' \\ (9,0732787) c'' \Delta'' &= - (9,4576851) R' + (8,4543236_n) c R \\ &\quad + (9,7237750) c'' R'' + (8,8853727) \Delta', \end{aligned}$$

worin die eingeklammerten Zahlen die Logarithmen der Coëfficienten bedeuten. Der Coëfficient von R' in der ersten dieser Gleichungen oder $\sin \omega'$ verdient bei jeder numerischen Anwendung eine besondere Beachtung, weil er durch seine Grösse oder seine Kleinheit ein Kriterium dafür liefert, ob das Material zu der Bahnbestimmung günstig gewählt ist. Fällt derselbe sehr klein aus, so ist ein zuverlässiges Resultat nicht zu erhalten, man ist dann genöthigt, andere Beobachtungen zu wählen, wie auch immer die anderen Coëfficienten beschaffen sein mögen.

Die Gleichung (2) der Vorlesung 54 wird nach Einführung von Q und Q'' :

$$[(7,0740077) Q + (9,1432163) Q''] \sin z^4 = 7,0908172 \sin (z - 7^\circ 58' 29'',02).$$

In der ersten Annäherung wird wieder:

$$\log Q = \log Q'' = \log \vartheta \vartheta'' = 8,9993845,$$

und die Gleichung für z :

$$\sin z^4 = (8,9445291) \sin (z - 7^\circ 58' 29'',02).$$

Die einzige hier zulässige Lösung ist:

$$z = 8^\circ 15' 3'',03.$$

Der Logarithmus des Abstandes der Arethusa von der Sonne in der zweiten Beobachtung, $\log r'$ wird:

$$\log r' = 0,4264114,$$

der des Abstandes von der Erde:

$$\log \Delta' = 0,2393502.$$

Für c oder $\frac{\vartheta}{\vartheta'} \left(1 + \frac{Q}{2r'^3}\right)$ und c'' oder $\frac{\vartheta''}{\vartheta'} \left(1 + \frac{Q''}{2r'^3}\right)$ hat man nach dem Vorhergehenden:

$$\log c = 9,6633497$$

$$\log c'' = 9,7340768,$$

ferner:

$$\log c R = 9,6576849$$

$$\log c' R'' = 9,7267596;$$

die Substitution in die zweite der obigen Gleichungen liefert:

$$\log A = 0,2221505,$$

die dritte ergibt:

$$\log A'' = 0,2724843.$$

Diese Werthe stimmen mit den in der 50. Vorlesung gefundenen so nahe überein, als die beiden so verschiedenen Formen der Berechnung nur immer erwarten lassen.

Siebenundfünfzigste Vorlesung.

Vereinfachungen und Abkürzungen für die Methode der Vorlesungen 54, 55 und 56.

Durch eine Combination verschiedener Betrachtungsweisen gelangten wir oben zu dem Ergebniss, dass die Coëfficienten von A' und dann von A und A'' , mit denen diese Grössen in den Fundamentalgleichungen multiplicirt sind, und ebenso die Coëfficienten, mit welchen die Radienvectoren R , R' , R'' multiplicirt erscheinen, als die Cosinus der Abstände der beobachteten und der Sonnenörter von den Polen dreier grösster Kreise, oder, was dasselbe ist, als die Sinus der Abstände der beobachteten Oerter und der Sonnenörter von denselben grössten Kreisen zu betrachten sind. Der eine dieser grössten Kreise wurde durch den ersten und den dritten geocentrischen Ort gelegt, in Betreff der beiden anderen scheinen wir noch an die Beschränkung gebunden, dass wir sie durch den einen und den anderen dieser Oerter, aber senkrecht zu dem erstgenannten legen müssen. Die folgende Betrachtungsweise nun führt uns nicht nur sehr schnell zu dem erhaltenen Resultate, sondern zeigt uns auch, dass wir in der Wahl des Winkels, welchen die grössten Kreise am ersten und am dritten geocentrischen Orte einschliessen sollen, völlig freie Hand haben; wir dürfen also in Betreff ihrer noch andere Bequemlichkeitsrücksichten maassgebend sein lassen.

Betrachten wir noch einmal die Relation, welche zwischen den z -Coordinationen der drei Planetenörter besteht:

$$n' z' = n z + n'' z'',$$

so ist nach Früherem einleuchtend, dass ihre Gültigkeit nicht an eine Fundamentalebene von ganz bestimmter Lage, wie z. B. an die Ekliptik oder an den Aequator, gebunden ist, sondern dass sie bestehen bleibt für jede Ebene, welche durch den Mittelpunkt der Sonne geht; um das einzusehen, braucht man ja nur zu bemerken, dass die z immer dadurch erhalten werden, dass $r \cos v$ und $r \sin v$ mit Coëfficienten multiplicirt werden, welche nur von der Lage der Bahnebene zur Fundamentalebene abhängig sind.

Ferner ist klar, dass die z , wenn sie auf drei verschiedene Fundamentalebenen nach einander bezogen werden, den heliocentrischen Ort ebenso bestimmen, wie dies durch rechtwinklige oder schiefwinklige Coordinaten geschieht.

Erinnern wir uns nun noch, dass jede heliocentrische Coordinate, also auch z , sich zusammensetzen lässt aus der geocentrischen Coordinate für dieselbe Fundamentalebene und der Erddcoordinate, dass also ein auf solche Fundamentalebene bezogenes z sich ausdrückt durch die Relation:

$$z = \Delta \sin \psi - R \sin w,$$

worin ψ und w beziehungsweise die Abstände des geocentrischen Ortes und Sonnenortes von dem der Fundamentalebene entsprechenden grössten Kreise bedeuten, so erkennen wir gleich auch ein ebenso einfaches als bequemes Mittel, aus den bekannten drei Grundgleichungen der Aufgabe beliebige zwei Abstände zu eliminiren. Denn um z. B. Δ und Δ'' zu eliminiren, brauchen wir die z nur auf eine Fundamentalebene zu beziehen, für welche die Abstände ψ des ersten geocentrischen Ortes und ψ'' des dritten geocentrischen Ortes Null werden; wir haben also den grössten Kreis durch den ersten und dritten geocentrischen Ort zu legen. Dies liefert uns dann unmittelbar die Gleichung (1) der 54. Vorlesung. Soll dagegen nachher, wenn Δ' bestimmt ist, Δ gefunden werden, so erreichen wir die dazu erforderliche Elimination von Δ'' dadurch, dass wir durch den dritten geocentrischen Ort einen grössten Kreis legen, für dessen Lage im Uebrigen, da er zur Bestimmung von Δ führen soll, nur die eine Beschränkung existirt, dass er nicht durch den ersten geocentrischen Ort gehen darf. Wir können denselben deshalb durch den ersten oder den dritten Sonnenort legen, und so ausser Δ'' auch noch R oder R'' eliminiren. Soll endlich Δ'' durch Elimination von Δ gefunden werden, so werden die Abstände von einem durch den ersten geocentrischen Ort und Sonnenort gelegten grössten Kreise in Rechnung kommen.

Bei der folgenden Bezeichnung wird man diese Betrachtungsweise leicht in der Erinnerung behalten und sich die Uebersicht bewahren können. Es bedeute das Symbol $(\Delta \Delta' \Delta'')$ den Sinus des Abstandes des zweiten geocentrischen Ortes von dem durch den ersten und dritten gelegten grössten Kreise $(\Delta R \Delta'')$, $(\Delta R' \Delta'')$, $(\Delta R'' \Delta'')$ der Reihe nach die Sinus der Abstände des ersten, zweiten und dritten Sonnenortes von demselben grössten Kreise u. s. w., bei welcher Bezeichnung jedesmal das Zeichen für den geocentrischen Radius desjenigen Ortes, für welchen der Sinus des Abstandes zu nehmen ist, zwischen die Radien derjenigen Oerter gestellt wird, durch welche der grösste Kreis gelegt werden soll. Die Gleichung (1) der 54. Vorlesung schreibt sich also:

$$(\Delta \Delta' \Delta'') \Delta' = (\Delta R' \Delta'') R' - (\Delta R \Delta'') c R - (\Delta R'' \Delta'') c' R'';$$

zur Bestimmung von Δ aus Δ' erhält man:

$$(\Delta'' \Delta' R) \Delta' - (\Delta'' R' R) R' = (\Delta'' \Delta R) c \Delta - (\Delta'' R'' R) c' R'',$$

wenn ein durch den dritten geocentrischen Ort und den ersten Sonnenort gelegter grösster Kreis angewendet wird, dagegen:

$$(\Delta'' \Delta' R'') \Delta' - (\Delta'' R' R'') R' = (\Delta'' \Delta R'') c \Delta - (\Delta'' R R'') c R,$$

wenn der grösste Kreis den dritten geocentrischen Ort und den dritten Sonnenort verbindet. Bei der letzteren Art, den grössten Kreis zu legen, wird, wie man sieht, auch c'' eliminirt; sie ist deshalb der ersteren vorzuziehen.

Für die Bestimmung von Δ'' aus Δ' hat man:

$$(\Delta \Delta' R) \Delta' - (\Delta R' R) R' = (\Delta \Delta' R) c' \Delta'' - (\Delta R'' R) c'' R''.$$

In Betreff der Vorzeichen der Abstände und ihrer Sinus kann man noch bemerken, dass es ganz gleichgültig ist, welche Seite der Fundamentalebene oder des grössten Kreises man als die für die positiven z betrachtet, wenn nur immer beachtet wird, dass Oerter, welche auf entgegengesetzten Seiten des grössten Kreises liegen, auch Abstände von entgegengesetztem Vorzeichen haben, und dass diese Abstände immer im ersten Quadranten genommen werden können.

Wenn wir die drei grössten Kreise für die Elimination so legen, wie eben vorgeschlagen wurde, so können die Formeln (5) der 55. Vorlesung zum Theil durch bequemere ersetzt werden. Zuerst werden die Rectascension (oder die Länge) A_0 und die Declination (oder die Breite) D_0 vom Pole des durch den ersten und dritten geocentrischen Ort gelegten grössten Kreises nach den dort gegebenen Formeln berechnet, also A_0 nach einer der beiden Formeln:

$$\operatorname{tg} \{A_0 - \frac{1}{2}(\alpha'' + \alpha)\} = \frac{\sin(\delta'' - \delta)}{\sin(\delta'' + \delta)} \cotg \frac{1}{2}(\alpha'' - \alpha)$$

oder:

$$\operatorname{tg} A_0 = - \frac{\operatorname{tg} \delta'' \cos \alpha - \operatorname{tg} \delta \cos \alpha''}{\operatorname{tg} \delta'' \sin \alpha - \operatorname{tg} \delta \sin \alpha''} = - \frac{\cotg \delta'' \cos \alpha'' - \cotg \delta \cos \alpha}{\cotg \delta'' \sin \alpha'' - \cotg \delta \sin \alpha} \quad (1)$$

D_0 nach der Formel:

$$\operatorname{tg} D_0 = - \cotg \delta \cos(\alpha - A_0) = - \cotg \delta'' \cos(\alpha'' - A_0) \quad (2)$$

Bezeichnen wir die Rectascension (oder die Länge), die Declination (oder die Breite) des Poles eines den ersten geocentrischen Ort und den ersten Sonnenort ver-

Fig. 60.



bindenden grössten Kreises beziehungsweise mit K und mit $90^\circ - \gamma$, die entsprechenden Grössen für den dritten geocentrischen und den dritten Sonnenort mit K'' und mit $90^\circ - \gamma''$, so haben wir:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} K &= - \frac{\operatorname{tg} \delta \cos A - \operatorname{tg} D \cos \alpha}{\operatorname{tg} \delta \sin A - \operatorname{tg} D \sin \alpha} \\ \cotg \gamma &= + \cotg \delta \cos(\alpha - K) = - \cotg D \cos(A - K) \\ \operatorname{tg} K'' &= - \frac{\operatorname{tg} \delta'' \cos A'' - \operatorname{tg} D'' \cos \alpha''}{\operatorname{tg} \delta'' \sin A'' - \operatorname{tg} D'' \sin \alpha''} \\ \cotg \gamma'' &= + \cotg \delta'' \cos(\alpha'' - K'') = - \cotg D'' \cos(A'' - K'') \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

In der Fig. 60 sei sodann EQ der Aequator (oder die Ekliptik), T, T'' seien die Erdörter in der ersten und dritten Beobachtung, P, P'' die geocentrischen Oerter des Gestirns, N und N'' die Schnittpunkte der die Oerter T und P , beziehungsweise T'' und P'' verbindenden grössten Kreise mit dem Aequator (oder der Ekliptik), C'' ihr gemeinschaftlicher Schnittpunkt.

Somit ist — $\overline{NN''} = K'' - K$, Winkel $C'NN'' = \gamma$, Winkel $C'N''Q = \gamma''$,

$$\left. \begin{aligned} \sin NT &= -\frac{\sin D}{\sin \gamma} \\ \sin N''T'' &= -\frac{\sin D''}{\sin \gamma''} \\ \sin NP &= \frac{\sin \delta}{\sin \gamma} \\ \sin N''P'' &= \frac{\sin \delta''}{\sin \gamma''} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

oder auch, zur Entscheidung des Quadranten:

$$\begin{aligned} \cos NT &= -\cos D \sin (A - K) \\ \cos N''T'' &= -\cos D'' \sin (A'' - K'') \\ \cos NP &= +\cos \delta \sin (\alpha - K) \\ \cos N''P'' &= +\cos \delta'' \sin (\alpha'' - K''). \end{aligned}$$

Der Winkel $NC'N''$ sei gleich ε' ; dann haben wir nach den Gauss'schen Dreiecksformeln:

$$\left. \begin{aligned} \sin^{1/2} \varepsilon' \sin^{1/2} (\overline{NC'} + \overline{N''C'}) &= \sin^{1/2} \overline{NN''} \sin^{1/2} (\gamma'' + \gamma) \\ &= \sin^{1/2} (K'' - K) \sin^{1/2} (\gamma'' + \gamma) \\ \sin^{1/2} \varepsilon' \cos^{1/2} (\overline{NC'} + \overline{N''C'}) &= \cos^{1/2} \overline{NN''} \sin^{1/2} (\gamma'' - \gamma) \\ &= \cos^{1/2} (K'' - K) \sin^{1/2} (\gamma'' - \gamma) \\ \cos^{1/2} \varepsilon' \sin^{1/2} (\overline{NC'} - \overline{N''C'}) &= \sin^{1/2} \overline{NN''} \cos^{1/2} (\gamma'' + \gamma) \\ &= \sin^{1/2} (K'' - K) \cos^{1/2} (\gamma'' + \gamma) \\ \cos^{1/2} \varepsilon' \cos^{1/2} (\overline{NC'} - \overline{N''C'}) &= \cos^{1/2} \overline{NN''} \cos^{1/2} (\gamma'' - \gamma) \\ &= \cos^{1/2} (K'' - K) \cos^{1/2} (\gamma'' - \gamma) \end{aligned} \right\} \dots \dots (5)$$

Es wird ferner:

$$\left. \begin{aligned} (\angle'' AR'') &= \sin \varepsilon' \sin \overline{PC'} = \sin \varepsilon' \sin (\overline{NC'} - \overline{NP}) \\ (\angle'' RR'') &= -\sin \varepsilon' \sin \overline{TC'} = -\sin \varepsilon' \sin (\overline{NC'} - \overline{NT}) \\ (\angle A'R'R) &= -\sin \varepsilon' \sin \overline{P''C'} = -\sin \varepsilon' \sin (\overline{N''C'} - \overline{N''P''}) \\ (\angle R'R'R) &= \sin \varepsilon' \sin \overline{T''C'} = \sin \varepsilon' \sin (\overline{N''C'} - \overline{N''T''}) \end{aligned} \right\} \dots \dots (6)$$

Berechnet man auch für die mittlere Beobachtung den Planetenort P' und den Erdort T' , die Grössen, welche K und γ , K'' und γ'' entsprechen und welche wir mit K' und γ' bezeichnen wollen, mit anderen Worten die Rectascension (oder die Länge), den Polabstand des den geocentrischen Ort mit dem Sonnenort verbindenden grössten Kreises, den Durchschnittspunkt N' mit Aequator oder Ekliptik, den Durchschnittspunkt C'' mit dem grössten Kreise der ersten Beobachtung, den Winkel ε'' an diesem Punkte, ferner den Durchschnittspunkt C mit dem grössten Kreise der dritten Beobachtung und den Winkel ε an diesem Punkte, so hat man:

$$\left. \begin{aligned} (\angle'' A'R'') &= \sin \varepsilon \sin (\overline{N'C} - \overline{N'P'}) \\ (\angle'' R'R'') &= -\sin \varepsilon \sin (\overline{N'C} - \overline{N'T'}) \\ (\angle A'R'R) &= -\sin \varepsilon'' \sin (\overline{N'C''} - \overline{N'P'}) \\ (\angle R'R'R) &= \sin \varepsilon'' \sin (\overline{N'C''} - \overline{N'T'}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Die Zuziehung von $K' \gamma', \varepsilon, \varepsilon''$ würde hier kaum vortheilhaft erscheinen, wenn nur verlangt würde, die vorhergehenden vier Grössen auszudrücken; denn denselben Zweck kann man noch kürzer durch die Anwendung der Formeln:

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{A}'' \mathcal{A}' R'') &= \sin \delta' \cos \gamma'' + \cos \delta' \sin \gamma'' \cos (\alpha' - K'') \\ (\mathcal{A}'' R' R'') &= \sin D' \cos \gamma'' + \cos D' \sin \gamma'' \cos (A' - K'') \\ (\mathcal{A} \mathcal{A}' R) &= \sin \delta' \cos \gamma + \cos \delta' \sin \gamma \cos (\alpha' - K) \\ (\mathcal{A} R' R) &= \sin D' \cos \gamma + \cos D' \sin \gamma \cos (A' - K) \end{aligned} \right\} \dots \dots (8)$$

erreichen. Indessen ist zu bemerken, dass später unter Anderen auch der Bogen $\overline{N'P'} - \overline{N'T'}$, derselbe Winkel, den wir früher mit χ' bezeichnet haben, gebraucht wird. Er findet sich bequem aus der Verbindung der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin \overline{N'P'} &= + \frac{\sin \delta'}{\sin \gamma'} \\ \sin \overline{N'T'} &= - \frac{\sin D'}{\sin \gamma'}. \end{aligned}$$

Für $(\mathcal{A} \mathcal{A}' \mathcal{A}'')$ und $(\mathcal{A} R' \mathcal{A}'')$ hat man:

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{A} R \mathcal{A}'') &= \sin D \sin D_0 + \cos D \cos D_0 \cos (A - A_0) \\ (\mathcal{A} \mathcal{A}' \mathcal{A}'') &= \sin \delta' \sin D_0 + \cos \delta' \cos D_0 \cos (\alpha' - A_0) \\ (\mathcal{A} R' \mathcal{A}'') &= \sin D' \sin D_0 + \cos D' \cos D_0 \cos (A' - A_0) \\ (\mathcal{A} R'' \mathcal{A}'') &= \sin D'' \sin D_0 + \cos D'' \cos D_0 \cos (A'' - A_0) \end{aligned} \right\} \dots \dots (9)$$

Hiermit sind die Vorbereitungsrechnungen im Wesentlichen beendigt. Will man Prüfungsgleichungen für ihre Richtigkeit, so kann man dazu den Umstand benutzen, dass auch die Coëfficienten $(\mathcal{A}'' \mathcal{A}' R'')$, $(\mathcal{A}'' R' R'')$, $(\mathcal{A} \mathcal{A}' R)$, $(\mathcal{A} R' R)$ sich noch auf andere als die oben angegebene Art berechnen lassen, nämlich nach den Formeln:

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{A}'' \mathcal{A}' R'') &= \sin \delta \cos \gamma'' + \cos \delta \sin \gamma'' \cos (\alpha - K'') \\ (\mathcal{A}'' R' R'') &= + \sin D \cos \gamma'' + \cos D \sin \gamma'' \cos (A - K'') \\ (\mathcal{A} \mathcal{A}' R) &= \sin \delta'' \cos \gamma + \cos \delta'' \sin \gamma \cos (\alpha'' - K) \\ (\mathcal{A} R' R) &= + \sin D'' \cos \gamma + \cos D'' \sin \gamma \cos (A'' - K) \end{aligned} \right\} \dots \dots (10)$$

Die Prüfung der Richtigkeit kann, sobald die Gleichung für r' aufgelöst ist, noch durch eine Bedingungsgleichung, welche für den mittleren heliocentrischen Ort erfüllt sein muss, vervollständigt werden, wie später gezeigt werden soll.

Die Finalgleichung für \mathcal{A}' oder den Hilfsbogen z aufzustellen, setzt man nach der 54. Vorlesung:

$$\left. \begin{aligned} b \sin q &= (\mathcal{A} \mathcal{A}' \mathcal{A}'') \sin (\overline{N'P'} - \overline{N'T'}) \\ b \cos q &= (\mathcal{A} \mathcal{A}' \mathcal{A}'') \cos (\overline{N'P'} - \overline{N'T'}) \\ &+ (\mathcal{A} R' \mathcal{A}'') - (\mathcal{A} R \mathcal{A}'') \frac{\partial R}{\partial \gamma'} \frac{R}{R'} - (\mathcal{A} R'' \mathcal{A}'') \frac{\partial R''}{\partial \gamma'} \frac{R''}{R'} \end{aligned} \right\} \dots \dots (11)$$

dadurch erhält man:

$$\left\{ (\mathcal{A} R \mathcal{A}'') Q \frac{\partial R}{\partial \gamma'} \frac{R}{R'} + (\mathcal{A} R'' \mathcal{A}'') Q'' \frac{\partial R''}{\partial \gamma'} \frac{R''}{R'} \right\} \sin z^4 = 2b R'^3 \sin \chi'^3 \sin (z - q) \dots (12)$$

wobei $\chi' = \overline{N'P'} - \overline{N'T'}$.

Die Grösse $(\mathcal{A} R' \mathcal{A}'')$, identisch mit $\sin \omega'$ der 54. Vorlesung, hat eine so besondere Wichtigkeit für die Beurtheilung der Sicherheit der Bahnbestimmung, dass sie verdiente, bei einer praktischen Rechnung jedesmal angegeben zu werden. Fällt $(\mathcal{A} R' \mathcal{A}'')$ sehr klein aus, so wird die Bestimmung stets unsicher sein, selbst bei ziemlich erheblichen Zwischenzeiten, und umgekehrt erhält dieselbe Grösse einen erheblichen Werth, so sind schon ziemlich geringe Zeiträume hinreichend, der Bahnberechnung die nöthige Zuverlässigkeit zu geben.

Wenn r' und \mathcal{A}' gefunden sind, so wird wieder:

$$c = \frac{\vartheta}{\vartheta'} \left(1 + \frac{Q}{2 r'^3} \right),$$

$$c'' = \frac{\vartheta''}{\vartheta'} \left(1 + \frac{Q''}{2 r'^3} \right)$$

berechnet und dann \mathcal{A} und \mathcal{A}'' aus den Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{A}'' \mathcal{A} R'') c \mathcal{A} &= (\mathcal{A}'' \mathcal{A}' R'') \mathcal{A}' - (\mathcal{A}'' R' R'') R' + (\mathcal{A}'' R R'') c R \\ (\mathcal{A} \mathcal{A}'' R) c'' \mathcal{A}'' &= (\mathcal{A} \mathcal{A}' R) \mathcal{A}' - (\mathcal{A} R' R) R' + (\mathcal{A} R'' R) c'' R'' \end{aligned} \right\} \quad . \quad (13)$$

Durch \mathcal{A} und \mathcal{A}'' werden r und r'' , überhaupt die heliocentrischen Oerter der äusseren Beobachtungen bekannt. Da dieselben, wie schon in der zweiten Abtheilung, Vorlesung 21, gezeigt wurde, in dem durch den entsprechenden geocentrischen und den Sonnen- oder Erdort gelegten grössten Kreise liegen, so kann der zwischen ihnen gelegene heliocentrische Bogen $(v'' - v)$, ganz wie dort bei der Kreisbahn geschehen, berechnet werden. Wir gebrauchen später die zu diesem Bogen gehörige Sehne \varkappa' , welche dann aus der bekannten Formel:

$$\varkappa'^2 = r^2 + r''^2 - 2 r r'' \cos (v'' - v)$$

bequem genug zu finden ist. Für die heliocentrischen Längen $v' - v$ und $v'' - v'$, welche man zur Verbesserung der Hypothese über die Dreiecksflächen nöthig hat, ergiebt sich:

$$\frac{n}{n'} = \frac{r' r'' \sin (v'' - v')}{r r'' \sin (v'' - v)} = c,$$

$$\frac{n''}{n'} = \frac{r r' \sin (v' - v)}{r r'' \sin (v'' - v)} = c'',$$

d. h.:

$$\sin (v' - v) = \frac{c'' r''}{r'} \sin (v'' - v)$$

$$\sin (v'' - v') = \frac{c r}{r'} \sin (v'' - v).$$

Aus den definitiven Werthen von \mathcal{A} und \mathcal{A}'' lassen sich zuletzt die Argumente der Breite in Beziehung auf die gewählte Fundamentalebene sowie Knoten und Neigung der Bahn ganz in derselben Weise berechnen, wie es in der Gauss'schen Methode für die Kreisbahn, Vorlesung 21, gezeigt wurde. Es sei der Kürze halber der sphärische Winkel $C' p p'' = \eta$ und $180^\circ - C' p'' p = \eta''$, so hat man die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \sin^{1/2} (v'' - v) \sin^{1/2} (\eta'' + \eta) &= \sin^{1/2} \varepsilon' \sin^{1/2} (\overline{p C'} + \overline{p'' C'}) \\ \sin^{1/2} (v'' - v) \cos^{1/2} (\eta'' + \eta) &= \cos^{1/2} \varepsilon' \sin^{1/2} (\overline{p C'} - \overline{p'' C'}) \\ \cos^{1/2} (v'' - v) \sin^{1/2} (\eta'' - \eta) &= \sin^{1/2} \varepsilon' \cos^{1/2} (\overline{p C'} + \overline{p'' C'}) \\ \cos^{1/2} (v'' - v) \cos^{1/2} (\eta'' - \eta) &= \cos^{1/2} \varepsilon' \cos^{1/2} (\overline{p C'} - \overline{p'' C'}) \end{aligned} \right\} \quad . \quad (14)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \sin^{1/2} i \sin^{1/2} [u + (K - 90^\circ - \delta)] &= \sin^{1/2} \overline{N p} \sin^{1/2} (\gamma + \eta) \\ \sin^{1/2} i \cos^{1/2} [u + (K - 90^\circ - \delta)] &= \cos^{1/2} \overline{N p} \sin^{1/2} (\gamma - \eta) \\ \cos^{1/2} i \sin^{1/2} [u - (K - 90^\circ - \delta)] &= \sin^{1/2} \overline{N p} \cos^{1/2} (\gamma + \eta) \\ \cos^{1/2} i \cos^{1/2} [u - (K - 90^\circ - \delta)] &= \cos^{1/2} \overline{N p} \cos^{1/2} (\gamma - \eta) \end{aligned} \right\} \quad . \quad (15)$$

Vertauscht man in diesen Gleichungen K mit K'' , γ mit γ'' , η mit η'' , so erhält man i , δ und das Argument der Breite der dritten Beobachtung.

Hier bietet sich also wieder eine Prüfung für die Richtigkeit der Rechnung, ob i und Ω mit den aus der ersten Beobachtung gefundenen Werthen übereinstimmen; auch muss $u'' - u = v'' - v$ werden ¹⁾.

Es kommen jedoch die Formeln (14) und (15) erst, wenn definitive Werthe von A und A'' und den entsprechenden Grössen durch Verbesserung der Hypothesen gefunden sind, zur Anwendung, weil die provisorischen Werthe von i und Ω für die Rechnung ohne Nutzen sind.

Achtundfünfzigste Vorlesung.

Rechnungsbeispiel für die Bestimmung von A , A' und A'' nach den Formeln der vorigen Vorlesung.

Nehmen wir zur Illustration der eben entwickelten Formeln das Material für Arethusa aus der 50. Vorlesung wieder zur Hand, so finden wir zunächst nach Formel (1) und (2):

$$\begin{aligned} A_0 &= 303^\circ 43' 41'',29 \\ D_0 &= 48 \quad 41 \quad 26,58, \end{aligned}$$

darauf aus (3):

$$\begin{aligned} K &= 307^\circ 46' 8'',08 \\ \gamma &= 45 \quad 43 \quad 13,10 \\ K'' &= 277 \quad 36 \quad 28,12 + 360^\circ \text{ } ^2) \\ \gamma'' &= 23 \quad 11 \quad 8,88. \end{aligned}$$

Ferner ergeben die Formeln (4):

$$\begin{aligned} NT &= 29^\circ 9' 15'',08 \\ NP &= 30 \quad 47 \quad 31,80 \\ N''T'' &= 91 \quad 39 \quad 54,00 \\ N''P'' &= 49 \quad 24 \quad 0,67; \end{aligned}$$

aus (5) folgt:

$$\begin{aligned} NC' &= 25^\circ 11' 45'',74 \\ N''C' &= 50 \quad 43 \quad 35,94 \\ \varepsilon' &= 27 \quad 41 \quad 18,36, \end{aligned}$$

also aus (6):

$$\begin{aligned} \log (A'' A R'') &= 8,656 \, 212 \, 6 \\ \log (A'' R R'') &= 8,506 \, 162 \, 4_n \\ \log (A A' R) &= 8,031 \, 672 \, 3 \\ \log (A R'' R) &= 9,483 \, 543 \, 1. \end{aligned}$$

¹⁾ Ferner hat man:

$$\frac{\sin \varepsilon''}{\sin \eta} = \frac{\sin (v' - v)}{\sin (N' C'' - N' P' - z)}, \quad \frac{\sin \varepsilon}{\sin \eta''} = \frac{\sin (v'' - v')}{\sin (z - N' C + N' P')},$$

die hieraus folgenden Werthe von $v' - v$ und $v'' - v'$ müssen den auf die andere Art bestimmten gleich werden.

²⁾ Durch die Addition von 360° wird ein negatives $K'' - K$ vermieden und leicht möglichen Irrthümern vorgebeugt.

Berechnet man diese Grössen zur Prüfung auch nach den Formeln (10):

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}'' \mathcal{A} R'') &= \sin \delta \cos \gamma'' + \cos \delta \sin \gamma'' \cos (\alpha - K'') \\(\mathcal{A}'' R R'') &= \sin D \cos \gamma'' + \cos D \sin \gamma'' \cos (A - K'')\end{aligned}$$

u. s. w.,

so erhält man:

$$\begin{aligned}\log (\mathcal{A}'' \mathcal{A} R'') &= 8,656\,205\,9 \\ \log (\mathcal{A}'' R R'') &= 8,506\,160\,7_n \\ \log (\mathcal{A} \mathcal{A}'' R) &= 8,031\,678\,2 \\ \log (\mathcal{A} R'' R) &= 9,483\,542\,8.\end{aligned}$$

Die Differenzen mit den obigen Werthen entsprechen kleinen Bruchtheilen der Bogensecunde, die bei einer einigermaassen complicirten Rechnung nicht mehr zu verbürgen sind. Wir nehmen aus beiden Zahlen das Mittel.

Werden die Formeln (3), (4) und (5) auch auf die zweite Beobachtung angewendet, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}K' &= 275^\circ 11' 32'',66 + 360^\circ \\ \gamma' &= 23 \quad 51 \quad 45,48 \\ N' T' &= 76 \quad 38 \quad 43,63 \\ N' P' &= 53 \quad 44 \quad 14,94 \\ N C'' &= 27 \quad 35 \quad 41,53 \\ N' C'' &= 55 \quad 3 \quad 43,57 \\ \varepsilon'' &= 28 \quad 2 \quad 56,74 \\ N' C &= 126 \quad 10 \quad 26,85 \\ N'' C &= 123 \quad 57 \quad 33,73 \\ \varepsilon &= 1 \quad 10 \quad 40,14\end{aligned}$$

und dann ferner nach (7):

$$\begin{aligned}\log (\mathcal{A}'' \mathcal{A}' R'') &= 8,292\,192\,1 \\ \log (\mathcal{A}'' R' R'') &= 8,194\,155\,4_n \\ \log (\mathcal{A} \mathcal{A}' R) &= 8,036\,238\,3 \\ \log (\mathcal{A} R' R) &= 9,237\,984\,4.\end{aligned}$$

Die Formeln (8) ergeben für dieselben Grössen der Reihe nach die Zahlen:

$$\begin{aligned}8,292\,190\,6 \\ 8,194\,160\,8_n \\ 8,036\,235\,5 \\ 9,237\,983\,8.\end{aligned}$$

und

Nach den Formeln (9) erhält man:

$$\begin{aligned}\log (\mathcal{A} R \mathcal{A}'') &= 7,414\,530\,3 \\ \log (\mathcal{A} \mathcal{A}' \mathcal{A}'') &= 7,591\,906\,7 \\ \log (\mathcal{A} R' \mathcal{A}'') &= 9,168\,847\,7 \\ \log (\mathcal{A} R'' \mathcal{A}'') &= 2,410\,664\,2.\end{aligned}$$

Die vorletzte dieser Grössen ist, wie wir gesehen haben, auch bestimmend für die Sicherheit, welche das Material der Bahnberechnung zulässt.

Es kommen jetzt die Formeln (11) und (12) an die Reihe; dabei wird:

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} R \mathcal{A}'') \frac{\vartheta}{\vartheta'} \cdot \frac{R}{R'} &= + 0,001\,196\,8 \\ (\mathcal{A} R'' \mathcal{A}'') \frac{\vartheta''}{\vartheta'} \cdot \frac{R''}{R'} &= + 0,139\,064\,5, \\ \log b &= 8,039\,931\,2 \\ q &= 7^\circ 58' 30'',10,\end{aligned}$$

demnach die Finalgleichung für den Winkel am Planeten z :

$$(0,0011968 Q + 0,1390645 Q'') \sin z^4 = 0,001232710 \sin(z - 7^\circ 58' 30'', 10).$$

In der ersten Hypothese ist bekanntlich $Q = Q'' = \vartheta \vartheta''$ zu setzen; hiermit wird die Finalgleichung, da $\log \vartheta \vartheta'' = 8,9993845$,

$$\sin z^4 = (8,9445387) \sin(z - 7^\circ 58' 30'', 10),$$

worin die eingeklammerte Zahl einen Logarithmus vorstellt. Die Lösung der Gleichung ist:

$$z = 8^\circ 15' 4'', 25.$$

Ferner erhält man:

$$\log r' = 0,4264086$$

$$\log A' = 0,2393468$$

$$\log c = 9,6633497$$

$$\log c'' = 9,7340768$$

und dann aus den Gleichungen (13):

$$\log A = 0,2221604$$

$$\log A'' = 0,2724401.$$

Nun ist offenbar:

$$r^2 = R^2 + A^2 + 2R A \cos(NP - NT)$$

$$r''^2 = R''^2 + A''^2 + 2R'' A'' \cos(N''P'' - N''T''),$$

also:

$$\log r = 0,4240050$$

$$\log r'' = 0,4286268^1).$$

Hieraus finden wir die Winkel am Planeten in der ersten und dritten Beobachtung, d. h. mit anderen Worten, den sphärischen Abstand des geocentrischen vom heliocentrischen Orte pP und $p''P''$, da:

$$r = \frac{R \sin(NP - NT)}{\sin pP}$$

$$r'' = \frac{R'' \sin(N''P'' - N''T'')}{\sin p''P''},$$

demnach:

$$pP = 0^\circ 36' 32'', 25$$

$$p''P'' = 14^\circ 16' 10'', 04,$$

ferner:

$$pC' = PC' + pP = NC' - NP + pP = -4^\circ 59' 13'', 81$$

$$p''C' = P''C' + p''P'' = N''C' - N''P'' + p''P'' = -12^\circ 56' 34'', 77$$

hieraus:

$$\sin^{1/2}(v'' - v)^2 = \sin \frac{\varepsilon'^2}{2} \sin^{1/2}(pC' + p''C')^2 + \cos \frac{\varepsilon'^2}{2} \sin^{1/2}(pC' - p''C')^2$$

oder:

$$v'' - v = 8^\circ 49' 51'', 70$$

$$\kappa = 0,4119187.$$

Endlich ergibt sich noch aus den Gleichungen:

$$\sin(v' - v) = \frac{c'' r''}{r'} \sin(v'' - v) \quad \text{und} \quad \sin(v'' - v') = \frac{c r}{r''} \sin(v'' - v)$$

$$v' - v = 4^\circ 47' 54'', 11$$

$$v'' - v' = 4^\circ 1' 57'', 69.$$

¹⁾ Die Unterschiede dieser Zahlen gegen die in Vorlesung 50 und 56 erhaltenen erscheinen als zulässig, da es nur leichter Aenderungen in der letzten Stelle der Grössen $\log(JJ'R)$, $\log(JR'R)$ bedarf, um sie zu heben, auch die schliessliche Darstellung der Beobachtungen durch sie nicht beeinträchtigt wird.

Die Prüfungsgleichung $v' - v + v'' - v' = v'' - v$ erweist sich also hier bis auf die nicht zu verbürgende Grösse von $0'',10$ befriedigt.

Die Formeln (14) und (15) der vorigen Vorlesung kommen erst später nach Verbesserung der Hypothese für Q und Q'' zur Anwendung.

Neunundfünfzigste Vorlesung.

Transformation des Lambert'schen Satzes über die Krümmung des geocentrischen Laufes ¹⁾.

Entwickelungen der letzten Vorlesungen setzen uns in den Stand, auch dem Lambert'schen Kriterium, nach welchem aus dem Sinne der Krümmung des geocentrischen Laufes eines Himmelskörpers zu erkennen ist, ob sein Radius vector r' den der Erde R' übertrifft oder nicht, eine noch weit einfachere und unmittelbarer anwendbare Form zu geben, als dies von uns früher bei Gelegenheit der Betrachtungen zur Olbers'schen Methode geschehen ist. Wir machten schon dort (Vorlesung 33) auf den grossen Nutzen aufmerksam, welchen eine geeignete Form für die Versuche bei der Berechnung von Kometenbahnen haben kann. In der Beziehung forderten wir, dass die Sondirung von r' nicht gar zu weit von dem für die Hauptrechnung zu führenden Wege ableite, hauptsächlich also durch Grössen gestützt werde, welche dieser Hauptrechnung nahe liegen oder selbst hineinfallen, und überhaupt, dass sie kurz sei. Da es aber auch schon an und für sich, ohne dass man gerade gewillt ist, die Berechnung der Bahn vorzunehmen, bei Kometen ein Interesse hat, das Kriterium zu versuchen, so wird wo möglich die anzuwendende Form so einzurichten sein, dass sie für den Gebrauch der Rectascensionen und Declinationen nicht unbequemer wird, als für den der Längen und Breiten, damit man nicht nöthig habe, die unverhältnissmässig lange Verwandlung der drei geocentrischen Oerter in Längen und Breiten vorzunehmen. Allen diesen Anforderungen können wir nun auf folgende Weise Genüge leisten.

Nach dem Lambert'schen Kriterium müssen, wenn $r' < R'$, also $r' - R'$ negativ ist, der zweite geocentrische Ort und der zweite Sonnenort auf entgegengesetzte Seiten des durch den ersten und dritten geocentrischen Ort gelegten grössten Kreises fallen; es müssen deshalb auch nach unserer Bezeichnung die Grössen $(\Delta \Delta' \Delta'')$ und $(\Delta R' \Delta'')$ entgegengesetzte Zeichen haben; demnach wird in diesem Falle der Quotient

$$\frac{(\Delta R' \Delta'')}{(\Delta \Delta' \Delta'')}$$

negativ ausfallen müssen. Im anderen Falle, wo $r' - R'$ positiv ist, werden dem genannten Kriterium zufolge die Grössen $(\Delta \Delta' \Delta'')$ und $(\Delta R' \Delta'')$ beide auf eine und dieselbe Seite des grössten Kreises fallen, also dasselbe Vorzeichen bekommen; der erwähnte Quotient wird also positiv. Es hat also dieser Quotient stets dasselbe Vorzeichen von $r' - R'$, und man kann deshalb das Kriterium für beide Fälle in dem Satze zusammenfassen, dass:

¹⁾ Es versteht sich bei Behandlung dieses Gegenstandes wohl von selbst, dass die Anwendung des Kriteriums für die Fälle aufgespart werden kann, in denen der äussere Winkel an der Erde grösser als 90° wird, wie es meist bei Kometen vorzuliegen pflegt.

$$\frac{(\Delta R' \Delta'')}{(\Delta \Delta' \Delta'')} (r' - R')$$

in jedem Falle eine positive Grösse ist.

Es wird nun aber nach den Formeln der 57. Vorlesung:

$$\begin{aligned} \frac{(\Delta \Delta' \Delta'')}{(\Delta R' \Delta'')} &= \frac{\sin \delta' \sin D_0 + \cos \delta' \cos D_0 \cos(\alpha' - A_0)}{\sin D' \sin D_0 + \cos D' \cos D_0 \cos(A' - A_0)} \\ &= \frac{\sin \delta' \operatorname{tg} D_0 + \cotg \delta' \cos(\alpha' - A_0)}{\sin D' \operatorname{tg} D_0 + \cotg D' \cos(A' - A_0)}. \end{aligned}$$

Substituirt man für $\operatorname{tg} D_0$ seinen Werth:

$$- \cotg \delta \cos(\alpha - A_0) \quad \text{oder} \quad - \cotg \delta'' \cos(\alpha'' - A_0),$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{(\Delta R' \Delta'')}{(\Delta \Delta' \Delta'')} &= \frac{\sin D' \cotg D' \cos(A' - A_0) - \cotg \delta \cos(\alpha - A_0)}{\sin \delta' \cotg \delta' \cos(\alpha' - A_0) - \cotg \delta \cos(\alpha - A_0)} \\ &= \frac{\sin D' \cotg D' \cos(A' - A_0) - \cotg \delta'' \cos(\alpha'' - A_0)}{\sin \delta' \cotg \delta' \cos(\alpha' - A_0) - \cotg \delta'' \cos(\alpha'' - A_0)}, \end{aligned}$$

oder auch, wenn man die Aehnlichkeit der Bildung dieser Grösse mit der des Olbers'schen M noch etwas mehr hervortreten lassen will:

$$\begin{aligned} \frac{(\Delta R' \Delta'')}{(\Delta \Delta' \Delta'')} &= \frac{\cos D' \cdot \operatorname{tg} D' \cos(\alpha - A_0) - \operatorname{tg} \delta \cos(A' - A_0)}{\cos \delta' \cdot \operatorname{tg} \delta' \cos(\alpha - A_0) - \operatorname{tg} \delta \cos(\alpha' - A_0)} \\ &= \frac{\cos D' \cdot \operatorname{tg} D' \cos(\alpha'' - A_0) - \operatorname{tg} \delta'' \cos(A' - A_0)}{\cos \delta' \cdot \operatorname{tg} \delta' \cos(\alpha'' - A_0) - \operatorname{tg} \delta'' \cos(\alpha' - A_0)}. \end{aligned}$$

Durch die vorhergehenden Betrachtungen gelangen wir also mit Rücksicht auf die 57. Vorlesung zu folgendem Satze:

Sind $\alpha, \delta, \alpha', \delta', \alpha'', \delta''$ die auf den Aequator oder auch auf die Ekliptik bezogenen und einander benachbarten geocentrischen Oerter eines Himmelskörpers, r' sein Radius vector in der mittleren Beobachtung, A', D', R' die Polarcoordinaten des Sonnenortes derselben Beobachtung, und A_0 eine durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha'' - \alpha) \operatorname{tg} \{A_0 - \frac{1}{2}(\alpha'' + \alpha)\} = \frac{\sin(\delta'' - \delta)}{\sin(\delta'' + \delta)}$$

definirte Grösse, so ist:

$$\frac{\cos D' \cdot \operatorname{tg} \delta \cos(A' - A_0) - \operatorname{tg} D' \cos(\alpha - A_0)}{\cos \delta' \cdot \operatorname{tg} \delta \cos(\alpha' - A_0) - \operatorname{tg} \delta' \cos(\alpha - A_0)} (r' - R')$$

immer positiv.

Denselben positiven Werth hat auch die Grösse:

$$\frac{\cos D' \cdot \operatorname{tg} \delta'' \cos(A' - A_0) - \operatorname{tg} D' \cos(\alpha'' - A_0)}{\cos \delta' \cdot \operatorname{tg} \delta'' \cos(\alpha' - A_0) - \operatorname{tg} \delta' \cos(\alpha'' - A_0)} (r' - R'),$$

welche gut zur Prüfung der Rechnung noch zugezogen werden kann.

Noch bequemer zur Anwendung ist der vorhergehende Satz in der folgenden Form:

Hat die Grösse:

$$\frac{\cotg D' \cos(A' - A_0) - \cotg \delta \cos(\alpha - A_0)}{\cotg \delta' \cos(\alpha' - A_0) - \cotg \delta \cos(\alpha - A_0)}$$

oder auch die Grösse:

$$\frac{\cotg D' \cos(A' - A_0) - \cotg \delta'' \cos(\alpha'' - A_0)}{\cotg \delta' \cos(\alpha' - A_0) - \cotg \delta'' \cos(\alpha'' - A_0)}$$

mit:

$$\frac{\cotg D'}{\cotg \delta'}$$

gleiches Vorzeichen, so ist $r' - R'$ positiv; im anderen Falle ist $r' - R'$ negativ.

Beispiel: Gehören die folgenden drei geocentrischen Oerter:

1840 Jan. 0,0	Berl. Zeit	. . .	$\alpha = 253^{\circ} 30',4$	$\delta = + 3^{\circ} 8',2$
Jan. 4,0	" "	. . .	$\alpha' = 260 20,8$	$\delta' = + 2 33,4$
Jan. 8,0	" "	. . .	$\alpha'' = 266 29,4$	$\delta'' = + 1 43,2$

einem Gestirn an, welches am 4. Januar der Sonne näher war, als die Erde, oder einem von der Sonne entfernteren? Man findet nun die Rectascension und Declination der Sonne zu dieser Epoche aus dem Berliner Jahrbuch:

$$A' = 284^{\circ} 23',2, \quad D' = - 22^{\circ} 48',2,$$

ferner:

$$A_0 = 191^{\circ} 17',24.$$

Ein einziger Blick auf die Glieder des Zählers und Nenners zeigt, dass hier obige Quotienten positiv werden, also mit $\frac{\cotg D'}{\cotg \delta'}$ entgegengesetztes Vorzeichen haben, folglich war $r' - R'$ negativ, das Gestirn der Sonne näher, als die Erde. Die obigen Oerter beziehen sich auf den Kometen 1840. I; für diesen wird $\log r' = 9,79171$, also in der That entschieden kleiner als $\log R'$, welcher sich für jene Zeit $= 9,99267$ findet.

Sechzigste Vorlesung.

Einige Bemerkungen über den Fall der Schleifenbildung im geocentrischen Laufe eines Himmelskörpers.

Es dürfte hier, ehe wir die weiteren Vorschriften zur Berechnung einer elliptischen Bahn aus drei Beobachtungen erörtern, am Orte sein, einige Bemerkungen über den Fall einzuschalten, in welchem ein Himmelskörper nach nicht zu langer Zeit zu demselben geocentrischen Orte zurückkehrt und demnach eine Schleife gebildet wird; denn dieser Fall verdient wegen einiger merkwürdiger Verhältnisse, welche dabei hervortreten, unsere Aufmerksamkeit. Die Möglichkeit eines solchen Verhaltens im geocentrischen Laufe, dass derselbe, auf einer Karte oder Globus aufgetragen, sich selbst durchschneidet, ist dem Leser wohl ohne Weiteres einleuchtend; auch hält es nicht schwer, praktische Beispiele dafür aufzufinden¹⁾. Es kann sich sogar ereignen, dass bei dem ersten Material zu einer Bahnbestimmung, welches die Beobachter dem Rechner in die Hände liefern, der erste und dritte geocentrische Ort sehr nahe in einen einzigen zusammenfallen und von dem Knotenpunkte einer Schleife wenig verschieden sind. Schon aus diesem Grunde verlohnt es sich, die Bedingungen einer Schleifenbildung etwas genauer zu untersuchen, besonders aber die Frage zu erörtern, wie ein solches

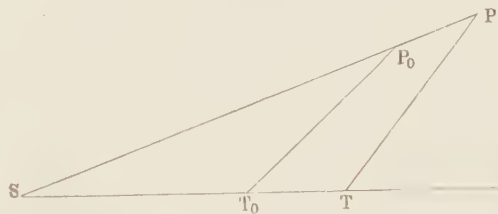
¹⁾ So stand Irene an den Tagen 1867, Januar 16 und Mai 4 an einem Orte, dessen angenäherte Rectascension gleich $9^h 5^m 45^s$, Declination gleich $+ 26^{\circ} 41'$ war.

Zusammenfallen der äusseren geocentrischen Oerter auf die Bestimmbarkeit der Bahn einwirkt.

Denn es wird dann die Lage des durch jene Oerter zu legenden grössten Kreises unbestimmt, und es liegt also nahe, zu vermuthen, dass die Bahnbestimmung selbst an solcher Unbestimmtheit leiden werde. Die folgenden Betrachtungen sollen die Richtigkeit der Vermuthung näher nachweisen; sie werden uns ferner mit einer interessanten Eigenschaft der Schleifenbildung bekannt machen.

Die Wiederkehr eines Himmelskörpers an denselben geocentrischen Ort bedeutet, dass für die zwei verschiedenen Epochen die Verbindungslinien desselben mit der Erde einander parallel werden. Die beiden Verbindungslinien begrenzen dann mit der Erdsehne und der Planetensehne zusammen ein Trapez, und es lässt sich die Ebene, in welcher dasselbe liegt, sehr leicht bestimmen. Offenbar wird dieselbe durch denjenigen grössten Kreis repräsentirt, welcher durch die Richtung oder den Zielpunkt der Erdsehne auf der Sphäre und durch den Knotenpunkt der Schleife zu legen ist, in welchem die beiden geocentrischen Oerter zusammenfallen. In denselben völlig bestimmten grössten Kreis fallen auch die Richtungen der Verbindungslinien zwischen je zwei Punkten der Planetensehne und der Erdsehne, folglich auch die Verbindungslinie zwischen denjenigen Punkten, in denen die Sehnen von ihrem mittleren Radius vector geschnitten werden. Da die letztere

Fig. 61.



nun auch in dem durch den zweiten geocentrischen und den Sonnenort gelegten grössten Kreise liegt, so findet in Betreff ihrer Richtung keinerlei Unbestimmtheit statt, und wir können daher ganz, wie in Vorlesung 34, die Gleichung achten Grades aufstellen, welche den mittleren Radius vector r' oder den Winkel am Planeten, z , in der zweiten Beobachtung ergibt. In Fig. 61 stelle wieder S die Sonne, T die Erde, P den Planeten in derselben Beobachtung vor, T_0 und P_0 seien beziehungsweise die Schnittpunkte der Sehne mit dem mittleren Radius vector bei der Erde und bei dem Planeten. Der Winkel PTS ist nach früherer Bezeichnung gleich $180^\circ - \chi'$, der Winkel, welchen \overline{PT} und $\overline{P_0T_0}$ mit einander bilden, gleich dem Abstände des zweiten geocentrischen Ortes von dem obigen Durchschnitt zweier grösster Kreise oder gleich σ . Es wird daher Winkel $P_0T_0T = \chi' - \sigma$. Bezeichnen wir noch $\overline{SP_0}$ mit r_0 , $\overline{ST_0}$ mit R_0 , so haben wir:

$$r' - r_0 = \frac{R' \sin \chi'}{\sin z} - \frac{R_0 \sin (\chi' - \sigma)}{\sin (z - \sigma)},$$

oder, wenn $\frac{r_0}{r'} = 1 - \frac{\partial \partial''}{2 r'^2}$ gesetzt wird:

$$r' \left(1 - \frac{r_0}{r'} \right) = \frac{\partial \partial''}{2 r'^2} = \frac{\partial \partial''}{2} \cdot \frac{\sin z^2}{R'^2 \sin \chi'^2} = \frac{R' \sin \chi'}{\sin z} - \frac{R_0 \sin (\chi' - \sigma)}{\sin (z - \sigma)}.$$

Wir können durch Auflösung dieser Gleichung die erste Näherung für r' und \mathcal{A}' erhalten. Versuchen wir dann aber auch noch \mathcal{A} und \mathcal{A}'' durch die früher gegebenen Formeln aus \mathcal{A}' zu berechnen, so stossen wir auf die Schwierigkeit, dass die Coëfficienten dieser Unbekannten in dem vorliegenden Falle Null werden. Bald erkennen wir aus einer leichten geometrischen Betrachtung, dass diese Schwierigkeit nicht bloss in der angewandten Form, sondern in der Natur der Sache selbst liegt; denn wir können durch den mit r' gleichzeitig bestimmten Schnittpunkt der Planetensehne mit dem Radius vector

unendlich viele Sehnen der Art legen, dass die Theile derselben in dem angenommenen Verhältnisse von $n : n''$ oder $\vartheta : \vartheta''$ stehen. Demnach sind wir auch ausser Stande, zu finden, welcher Verbesserung diese für $\frac{n}{n''}$ gemachte Annahme bedarf, und unsere Operationen werden auf die Ermittlung eines sehr angenäherten Werthes für r' beschränkt. Eine solche vorläufige Kenntniss der Entfernung eines Himmelskörpers, wenn auch ohne die Bestimmung der Bahnelemente, hat schon an und für sich Interesse und ist ausserdem nicht ohne allen praktischen Nutzen.

Ferner sehen wir uns noch zu folgenden Schlüssen berechtigt. Ist, wie wir eben gesehen, bei der ersten Annäherung für r' die Lösung eine bestimmte, so muss auch unsere Gleichung (1) der 54. Vorlesung immer dieselbe Lösung geben, wie wir den grössten Kreis durch den ersten und dritten geocentrischen Ort, d. h. durch den Knotenpunkt der Schleife, auch immer legen mögen; denn jene Gleichung kann ein fehlerhaftes Resultat nicht liefern. Dies selbst dann nicht, wenn jener grösste Kreis durch den Ort der zweiten Beobachtung gelegt wird und also ψ' verschwindet. Es muss dann in Beziehung auf die demselben entsprechende Ebene:

$$R' \sin \omega' = c R \sin \omega + c'' R'' \sin \omega''$$

sein, wobei $\omega, \omega', \omega''$ den Abstand der drei Sonnenörter von dem durch die äusseren Beobachtungen gelegten grössten Kreise vorstellen.

Dieselbe Ebene schneidet aber offenbar für die Zeit der mittleren Beobachtung die Sehne der Erdbahn und die des Planeten in gleichem Verhältnisse, und zwar in demjenigen, in welchem die Erdsehne von dem mittleren Radius vector geschnitten wird. Setzen wir diese Verhältnisse, wie bei der Olbers'schen Methode, bei beiden Körpern gleich, so folgt sogleich:

$$c R \sin \omega + c'' R'' \sin \omega'' = 0;$$

denn $R \sin \omega$ und $R'' \sin \omega''$ sind nichts Anderes, als die Projectionen der Abschnitte der Erdsehne auf eine zu der genannten Ebene senkrechte Axe und müssen demnach in demselben Verhältnisse stehen. Wir haben also auch:

$$R' \sin \omega' = 0,$$

d. h.

$$\omega' = 0,$$

in welchem Resultate folgende merkwürdige Eigenschaft des Knotenpunktes einer Schleifenbildung im geocentrischen Laufe enthalten ist:

Verbindet man jeden geocentrischen Ort in der Schleife mit dem ihm entsprechenden Sonnenorte durch einen grössten Kreis, so schneiden sich alle diese grössten Kreise im Knotenpunkte der Schleife¹⁾.

Diese Eigenschaft, welche zum Aufsuchen von Knotenpunkten benutzt werden kann, lässt sich auch, allerdings auf indirectem Wege, aus dem Lambert'schen Kriterium über die Krümmung des geocentrischen Laufes herleiten. Wir wissen, dass, wenn ein durch den ersten und dritten Ort gelegter grösster Kreis den Himmel in zwei Halbkugeln theilt, der mittlere Ort mit der Sonne auf derselben Halbkugel liegt, wenn seine räumliche Entfernung von der Sonne die der Erde übertrifft, auf entgegengesetzter, wenn das Gegentheil der Fall ist. Dieses Kriterium wird, wenn auch zuweilen ein unbestimmtes, doch niemals ein falsches Ergebniss liefern dürfen, auch in dem Falle nicht, wo die Lage des grössten Kreises willkürlich wird. Würde nun nicht irgend ein als mittlerer angesehener Ort der Schleife mit dem Knotenpunkte und der Sonne auf

¹⁾ Es ist kaum nöthig zu bemerken, dass sich dies bloss auf Schleifen von mässiger Ausdehnung erstreckt, innerhalb deren das oben gebrauchte Olbers'sche Princip nicht merklich fehlerhaft wird.

demselben grössten Kreise liegen, so würde es zugleich in unsere Willkür gelegt, den Sonnenort und den geocentrischen Ort auf entgegengesetzte oder auf gleiche Halbkugeln fallen zu lassen. Da dies aber offenbar widersinnig ist, so muss der obige Satz bestehen.

Für die Praxis der Bahnberechnungen ergibt sich aus dem Vorhergehenden, dass man bei dem Aussuchen des Materials die Annäherung an eine Schleifenbildung möglichst vermeiden muss; in den, übrigens seltenen Fällen, wo dies nicht angeht, steht wenigstens eine sehr angenäherte Bestimmung des Radius vector r' zu erreichen. Letztere zu erhalten, bedarf es keiner besonderen Methode; die Gleichung (1) der Vorlesung 54, in welcher ω' dann so günstig als möglich gemacht werden kann, reicht dazu aus.

Einundsechzigste Vorlesung.

Encke's Form der Fundamentalgleichungen.

Eine in neuerer Zeit sehr in Gebrauch gekommene Methode zur Berechnung einer elliptischen Bahn aus drei geocentrischen Oertern rührt von Encke her. Sie setzt die Oerter als in Länge und Breite gegeben voraus, daher wir zur Vermeidung von Confusion die im Vorhergehenden angewandte Bezeichnung in einzelnen Stücken ändern. Es bedeuten im Folgenden:

- $\lambda, \lambda', \lambda''$ die drei beobachteten geocentrischen Längen des Planeten,
- β, β', β'' die drei beobachteten geocentrischen Breiten,
- $\varrho, \varrho', \varrho''$ die drei curtirten Abstände des Planeten von der Erde,
- L, L', L'' die drei Längen der Erde;

im Uebrigen kann die frühere Bezeichnung beibehalten werden.

Aus den drei bekannten Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= c(\varrho \cos \lambda + R \cos L) - (\varrho' \cos \lambda' + R' \cos L') + c''(\varrho'' \cos \lambda'' + R'' \cos L'') \\ 0 &= c(\varrho \sin \lambda + R \sin L) - (\varrho' \sin \lambda' + R' \sin L') + c''(\varrho'' \sin \lambda'' + R'' \sin L'') \\ 0 &= c \varrho \operatorname{tg} \beta - \varrho' \operatorname{tg} \beta' + c'' \varrho'' \operatorname{tg} \beta'', \end{aligned}$$

welche die Lösung des Problems enthalten, eliminirt man gleichzeitig ϱ und ϱ'' dadurch, dass man die erste Gleichung mit:

$$\operatorname{tg} \beta \sin \lambda'' - \operatorname{tg} \beta'' \sin \lambda,$$

die zweite mit:

$$\operatorname{tg} \beta'' \cos \lambda - \operatorname{tg} \beta \cos \lambda'',$$

die dritte mit:

$$\sin(\lambda - \lambda'')$$

multiplcirt und dann die drei addirt. Man erhält auf diese Weise:

$$\begin{aligned} 0 &= c R [\operatorname{tg} \beta \sin(\lambda'' - L) - \operatorname{tg} \beta'' \sin(\lambda - L)] - R' [\operatorname{tg} \beta \sin(\lambda'' - L') - \operatorname{tg} \beta'' \sin(\lambda - L')] \\ &+ c'' R'' [\operatorname{tg} \beta \sin(\lambda'' - L'') - \operatorname{tg} \beta'' \sin(\lambda - L'')] - \varrho' [\operatorname{tg} \beta \sin(\lambda'' - \lambda) \\ &- \operatorname{tg} \beta' \sin(\lambda'' - \lambda) + \operatorname{tg} \beta'' \sin(\lambda' - \lambda)]. \end{aligned}$$

Um diese für die numerische Rechnung noch etwas unbequeme Gleichung zu vereinfachen, führt Encke den aufsteigenden Knoten K und die Neigung J des durch die äusseren geocentrischen Oerter gelegten Kreises in Bezug auf die Ekliptik ein. Wir haben dann nach Früherem:

$$\begin{aligned}\sin(\lambda - K) \operatorname{tg} J &= \operatorname{tg} \beta, \\ \sin(\lambda'' - K) \operatorname{tg} J &= \operatorname{tg} \beta'',\end{aligned}$$

wobei noch zu bemerken, dass J positiv und $< 90^\circ$ genommen werden kann. Substituiert man in obiger Gleichung diese Werthe von $\operatorname{tg} \beta$ und $\operatorname{tg} \beta''$ und macht von dem Lemma Gebrauch, dass für jeden beliebigen Werth von w :

$$\begin{aligned}& \sin(\lambda'' - w) \sin(\lambda - K) - \sin(\lambda - w) \sin(\lambda'' - K) \\ &= \frac{1}{2} \cos[(\lambda'' - \lambda) - w + K] - \frac{1}{2} \cos[(\lambda'' - \lambda) + w - K] \\ &= \sin(\lambda'' - \lambda) \sin(w - K),\end{aligned}$$

so geht die Gleichung über in:

$$\begin{aligned}0 &= c R \sin(\lambda'' - \lambda) \sin(L - K) \operatorname{tg} J - R' \sin(\lambda'' - \lambda) \sin(L' - K) \operatorname{tg} J \\ &+ c'' R'' \sin(\lambda'' - \lambda) \sin(L'' - K) \operatorname{tg} J \\ &- \varrho' \{ \sin(\lambda'' - \lambda) \sin(\lambda' - K) \operatorname{tg} J - \sin(\lambda'' - \lambda) \operatorname{tg} \beta' \}.\end{aligned}$$

Setzt man nun hier noch:

$$\sin(\lambda' - K) \operatorname{tg} J = \operatorname{tg} \beta^0,$$

so wird nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors $\sin(\lambda'' - \lambda)$:

$$\frac{\sin(\beta' - \beta^0)}{\cos \beta^0 \cos \beta' \operatorname{tg} J} \cdot \varrho' = R' \sin(L' - K) - c R \sin(L - K) - c'' R'' \sin(L'' - K).$$

Diese Gleichung spielt dann in der Encke'schen Methode dieselbe Rolle, wie in der Rechnung der 54. Vorlesung die Gleichung (1); sie dient, indem für c und c'' immer mehr und mehr genäherte Werthe gesetzt werden, wenn ϱ' durch r oder den bekannten Hülfswinkel z ausgedrückt wird, dazu, die Entfernungen des Planeten in der zweiten Beobachtung zu finden.

Encke bespricht bei Gelegenheit dieser Gleichung noch ausführlicher die Nothwendigkeit, schon bei der ersten Näherung in den Ausdrücken für n und n'' die kleinen Glieder dritter Ordnung, oder was dasselbe ist, in denen für c und c'' die zweiter Ordnung zu berücksichtigen. Wir wollen deshalb diesem Punkte hier auch einige Bemerkungen widmen, welche dem Leser nach dem früher Vorgetragenen leichter verständlich sein werden, und die wir aus diesem Grunde bisher unterdrückt haben. Es liegt nämlich sehr nahe, zu glauben, man könne in den drei Fundamentalgleichungen zwischen ϱ , ϱ' , ϱ'' für c und c'' einfach die Näherungen $c = \frac{\vartheta}{\vartheta'}$ und $c'' = \frac{\vartheta''}{\vartheta'}$ einsetzen und so aus diesen drei Gleichungen ersten Grades jene Abstände von der Erde herleiten. In den Irrthum, dass dabei eine brauchbare Näherung zu erhalten sei, sind vor Gauss und Olbers sogar namhafte Astronomen verfallen. Das Unzureichende eines solchen Verfahrens können wir sogleich daran erkennen, dass wir für die Unbekannten nur eine einzige reelle Lösung bekommen können, während doch im Allgemeinen zwei ganz verschiedene Lösungen, die für die Erde und die für den Planeten, existiren müssen. Erst wenn wir in den Entwicklungen für c und c'' die Glieder zweiter Ordnung mitnehmen, indem wir $c = \frac{\vartheta}{\vartheta'} \left(1 + \frac{\vartheta \vartheta''}{2r'^3} \right)$ und $c'' = \frac{\vartheta''}{\vartheta'} \left(1 + \frac{\vartheta \vartheta''}{2r'^3} \right)$ setzen, erhalten wir, wie wir gesehen, eine Gleichung, welche vom achten Grade ist und für beide obige Lösungen Raum hat. Diese Gleichung könnte man, wenn es Vorthail gewährte, durch Benutzung der einen bekannten Wurzel um einen Grad erniedrigen; das Resultat dieser unserer Ueberlegung befindet sich demnach in Uebereinstimmung mit dem von Lagrange ausgesprochenen Satze, dass die Finalgleichung für r' mindestens vom siebenten Grade sein müsse, um eine brauchbare Näherung zu liefern.

Ausserdem würde die Annahme $c = \frac{\partial}{\partial'}$, $c'' = \frac{\partial''}{\partial'}$ die Folge haben, dass $c + c'' = 1$ würde und die Ausdrücke für die Coordinaten des zweiten heliocentrischen Ortes: $x' = cx + c''x''$ u. s. w. zugleich einem Punkt auf der Sehne, in welchem diese vom mittleren Radius vector geschnitten wird, zukämen. Wir vernachlässigen also mit solcher Annahme die Krümmung der Bahn, indem wir das zwischen der Sehne und dem Bogen liegende Stück des Radius vector gleich Null setzen, also gerade dasjenige Stück, auf welches das Lambert'sche Kriterium über r' sich stützte. Wir erkennen also auch hieraus, dass das Glied mit $\frac{\partial \partial''}{2r'^3}$ in der ersten Näherung nicht entbehrt werden kann.

Der grosse Erfolg der Olbers'schen Methode im Vergleich zu anderen Vorschlägen, welche Olbers in seiner Abhandlung erörtert, gründet sich im Wesentlichen darauf, dass der Ausdruck für M oder $\frac{Q''}{Q}$ nur von $\frac{c''}{c}$ abhängig ist, aus welchem Verhältniss das berücksichtigte Glied $\frac{\partial \partial''}{2r'^3}$ wieder herausfällt.

Zweihundsechzigste Vorlesung.

Fortsetzung der Entwicklung zur Encke'schen Methode.

Um die Finalgleichung für r' in der vorigen Vorlesung für die Rechnung zurecht zu legen, führen wir mit Encke nach dem Vorgange von Gauss die Grössen:

$$P = \frac{n''}{n}, \quad Q = \left(\frac{n}{n'} + \frac{n''}{n'} - 1 \right) 2r'^3$$

ein, womit die Bedeutung von P und Q für alle Näherungen festgestellt ist. Setzt man nun der leichteren Uebersicht wegen:

$$\begin{aligned} a^0 &= \frac{\sin(\beta' - \beta^0)}{\operatorname{tg} J \cos \beta^0} \\ b &= \frac{R \sin(L - K)}{a^0} \\ c &= \frac{R' \sin(L' - K)^1)}{a^0} \\ d &= \frac{R'' \sin(L'' - K)}{a^0}, \end{aligned}$$

so geht jene Finalgleichung über in:

$$\frac{Q'}{\cos \beta'} = c - \frac{b + Pd}{1 + P} \left(1 + \frac{Q}{2r'^3} \right).$$

Es ist aber, wenn wieder χ' den Winkel, welchen die zweite Beobachtungsrichtung mit der Verlängerung des Radius vector der Erde bildet, d. h. den äusseren Winkel an der Erde vorstellt:

¹⁾ Wobei die Verwechslung mit der Grösse c unserer früheren Formeln leicht zu vermeiden ist.

$$r'^2 = R'^2 + 2 \frac{\varrho' R'}{\cos \beta'} \cos \chi' + \frac{\varrho'^2}{\cos \beta'^2}$$

oder:

$$\frac{\varrho'}{\cos \beta'} = - R' \cos \chi' \pm \sqrt{r'^2 - R'^2 \sin^2 \chi'}.$$

Setzt man noch zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} \frac{b + Pd}{1 + P} &= c^0 \\ c - c^0 &= k^0 \\ \frac{c^0 Q}{2} &= l^0, \end{aligned}$$

so hat man die Doppelgleichung:

$$\frac{\varrho'}{\cos \beta'} = k^0 - \frac{l^0}{r'^3} = - R' \cos \chi' \pm \sqrt{r'^2 - R'^2 \sin^2 \chi'},$$

welche nach Wegschaffen der Wurzelgrösse die Gleichung achten Grades:

$$r'^8 - [(k^0 + R' \cos \chi')^2 + R'^2 \sin^2 \chi'] r'^6 + 2 l^0 (k^0 + R' \cos \chi') r'^3 - l^{02} = 0,$$

ergiebt. Letztere Gleichung wird dadurch vereinfacht, dass mittelst der Gleichungen:

$$\begin{aligned} R' \sin \chi' &= \mu \sin q \\ k^0 + R' \cos \chi' &= \mu \cos q, \end{aligned}$$

die Hilfsgrössen μ und q eingeführt werden; sie wird dann:

$$r'^8 - \mu^2 r'^6 + 2 l^0 \mu \cos q r'^3 - l^{02} = 0,$$

oder:

$$r'^8 = (\mu r'^3 - l^0 \cos q)^2 + l^{02} \sin^2 q.$$

Da demnach auch erlaubt ist, einen Hülfswinkel ξ so einzuführen, dass:

$$\begin{aligned} r'^4 \sin \xi &= l^0 \sin q \\ r'^4 \cos \xi &= \mu r'^3 - l^0 \cos q, \end{aligned}$$

so hat man nach Elimination von r'^4 :

$$\mu r'^3 \sin \xi = l^0 \sin (\xi + q)$$

oder, wenn man diese Gleichung in $r'^4 \sin \xi = l^0 \sin q$ dividirt:

$$\frac{r'}{\mu} = \frac{\sin q}{\sin (\xi + q)},$$

folglich:

$$r' = \frac{\mu \sin q}{\sin (\xi + q)} = \frac{R' \sin \chi'}{\sin (\xi + q)},$$

und endlich also:

$$\sin \xi = \frac{l^0 \sin q}{r'^4} = \frac{l^0}{\mu^4 \sin^4 q} \sin (\xi + q)^4.$$

Es ist aber offenbar der Winkel $\xi + q$ nichts Anderes, als der von uns mit z bezeichnete Winkel am Planeten in der zweiten Beobachtung, da ja:

$$r' = \frac{R' \sin \chi'}{\sin (\xi + q)} = \frac{R' \sin \chi'}{\sin z}.$$

Wir gelangen somit wieder auf die uns bekannte Gleichung:

$$\sin (z - q) = m \sin z^4,$$

wobei $m = \frac{l^0}{\mu R'^3 \sin^4 \chi'^3}$ der Kürze halber gesetzt ist.

Von der ausführlichen Discussion der Wurzeln dieser Gleichung, wie sie Encke nun vornimmt, sehen wir ab, weil der Gebrauch der Curve achten Grades:

$$y = (1 + x^2)^{-3/2},$$

welche, wie wir wissen, in ihren Durchschnitten mit einer gegebenen Geraden die reellen Wurzeln der Gleichung liefert, uns dieselbe auf einfache Weise entbehrlich macht.

Deshalb gehen wir gleich zur Entwicklung der Encke'schen Formeln für die Berechnung von q und q'' aus q' über.

Dreiundsechzigste Vorlesung.

Fortsetzung der Formeln der Encke'schen Methode.

Wenn aus den beiden Gleichungen:

$$0 = \frac{n}{n'} (q \cos \lambda + R \cos L) - (q' \cos \lambda' + R' \cos L') + \frac{n''}{n'} (q'' \cos \lambda'' + R'' \cos L'')$$

$$0 = \frac{n}{n'} (q \sin \lambda + R \sin L) - (q' \sin \lambda' + R' \sin L') + \frac{n''}{n'} (q'' \sin \lambda'' + R'' \sin L'')$$

durch Elimination von q'' ein Ausdruck zwischen q und q' abgeleitet wird, so erhält man:

$$\frac{n}{n'} \cdot q = \frac{\sin(\lambda'' - \lambda')}{\sin(\lambda'' - \lambda)} \cdot q' - \frac{\frac{n}{n'} R \sin(\lambda'' - L) - R' \sin(\lambda'' - L') + \frac{n''}{n'} R'' \sin(\lambda'' - L'')}{\sin(\lambda'' - \lambda)}.$$

Nach den früheren Entwicklungen (Vorlesung 61) aber ist:

$$\frac{n}{n'} R \sin(L - K) - R' \sin(L' - K) + \frac{n''}{n'} R'' \sin(L'' - K) = -a^0 \sec \beta' q'.$$

Substituirt man den hieraus zu entwickelnden Ausdruck für c'' in die vorhergehende Gleichung, so geht der Ausdruck:

$$\frac{n}{n'} R \sin(\lambda'' - L) - R' \sin(\lambda'' - L') + \frac{n''}{n'} R'' \sin(\lambda'' - L'')$$

über in:

$$\begin{aligned} & - \frac{a^0}{\cos \beta'} \cdot \frac{\sin(\lambda'' - L'')}{\sin(L'' - K)} q' \\ & + \frac{\frac{n}{n'} R}{\sin(L'' - K)} \cdot \{\sin(\lambda'' - L) \sin(L'' - K) - \sin(\lambda'' - L'') \sin(L - K)\} \\ & - \frac{R'}{\sin(L'' - K)} \cdot \{\sin(\lambda'' - L') \sin(L'' - K) - \sin(\lambda'' - L'') \sin(L' - K)\}, \end{aligned}$$

oder, nach dem schon früher (Vorlesung 61) benutzten Lemma, in:

$$\begin{aligned} & - \frac{a^0 q'}{\cos \beta'} \cdot \frac{\sin(\lambda'' - L'')}{\sin(L'' - K)} + \frac{\frac{n}{n'} R}{\sin(L'' - K)} \cdot \sin(L'' - L) \sin(\lambda'' - K) \\ & - \frac{R'}{\sin(L'' - K)} \cdot \sin(L'' - L') \sin(\lambda'' - K), \end{aligned}$$

d. h. in:

$$- \frac{a^0 \varrho'}{\cos \beta'} \cdot \frac{\sin(\lambda'' - L'')}{\sin(L'' - K)} + \frac{\sin(\lambda'' - K)}{\sin(L'' - K)} \cdot \left\{ \frac{n}{n'} R \sin(L'' - L) - R' \sin(L'' - L') \right\}.$$

Zur Abkürzung setze man:

$$N = \frac{R' R'' \sin(L'' - L')}{R R'' \sin(L'' - L)} = \frac{R'}{R} \cdot \frac{\sin(L'' - L')}{\sin(L'' - L)}$$

$$N'' = \frac{R R' \sin(L' - L)}{R R'' \sin(L'' - L)} = \frac{R'}{R''} \cdot \frac{\sin(L' - L)}{\sin(L'' - L)},$$

so wird der Ausdruck zur Berechnung von ϱ aus ϱ' :

$$\varrho = \left\{ \frac{\sin(\lambda'' - \lambda')}{\sin(\lambda'' - \lambda)} + \frac{a^0 \sec \beta'}{\sin(\lambda'' - \lambda)} \cdot \frac{\sin(\lambda'' - L'')}{\sin(L'' - K)} \right\} \cdot \frac{n' \varrho'}{n}$$

$$+ R \frac{\sin(L'' - L)}{\sin(\lambda'' - \lambda)} \cdot \frac{\sin(\lambda'' - K)}{\sin(L'' - K)} \cdot \left\{ \frac{N n'}{n} - 1 \right\},$$

und ferner für ϱ'' , durch blosse Vertauschung der Accente zu erhalten:

$$\varrho'' = \left\{ \frac{\sin(\lambda' - \lambda)}{\sin(\lambda'' - \lambda)} - \frac{a^0 \sec \beta'}{\sin(\lambda'' - \lambda)} \cdot \frac{\sin(\lambda - L)}{\sin(L - K)} \right\} \cdot \frac{n' \varrho'}{n''}$$

$$+ R'' \frac{\sin(L'' - L)}{\sin(\lambda'' - \lambda)} \cdot \frac{\sin(\lambda - K)}{\sin(L - K)} \cdot \left\{ \frac{N'' n'}{n''} - 1 \right\}.$$

Von der Olbers'schen Methode her ist uns bekannt, dass das Verhältniss $\frac{\varrho''}{\varrho}$ bis auf sehr kleine Grössen höherer Ordnung hinauf gegeben ist, mit anderen Worten, dass das von ϱ' freie Glied dieser Ausdrücke im Vergleiche zu den anderen ausserordentlich klein wird. Der Vortheil der vorgenommenen Umformung ist hiernach sehr einleuchtend. Zu grösserer Uebersichtlichkeit setze man:

$$\frac{\sec \beta'}{\sin(\lambda'' - \lambda)} = f, \quad \frac{R R'' \sin(L'' - L)}{a^0 \sin(\lambda'' - \lambda)} = h,$$

$$M_1 = \frac{\sin(\lambda'' - \lambda')}{\sin(\lambda'' - \lambda)} + f \cdot \frac{R'' \sin(\lambda'' - L')}{d}$$

$$M_1'' = \frac{\sin(\lambda' - \lambda)}{\sin(\lambda'' - \lambda)} - f \cdot \frac{R \sin(\lambda - L)}{b}$$

$$M_2 = h \frac{\sin(\lambda'' - K)}{d}, \quad \text{wobei:} \quad d = \frac{R \sin(L - K)}{a^0}$$

$$M_2'' = h \frac{\sin(\lambda - K)}{b}, \quad d = \frac{R'' \sin(L'' - K)}{a^0}$$

ist, so wird:

$$\varrho = M_1 \frac{\varrho'}{c} + M_2 \left(\frac{N}{c} - 1 \right)$$

$$\varrho'' = M_1'' \frac{\varrho'}{c''} + M_2'' \left(\frac{N''}{c''} - 1 \right).$$

Es ist noch zu bemerken, dass die Grössen M_1 , M_2 , M_1'' , M_2'' , ebenso wie N und N'' , von jeder Hypothese unabhängig sind, daher zur reinen Vorbereitungsrechnung gehören.

Nachdem so gezeigt worden, wie die Entfernungen des Himmelskörpers von der Erde wie von der Sonne zu finden, giebt Encke die uns bekannten Formeln zur Berechnung der heliocentrischen Polarcoordinaten und der Lage der Bahnebene. Wir

können dieselbe hier übergehen. In späteren Vorlesungen haben wir uns auch noch mit der Aufgabe zu beschäftigen, wie die bei der ersten Hypothese angenommenen Werthe von c und c'' zu verbessern sind.

Vierundsechzigste Vorlesung.

Zusammenstellung der Formeln der Encke'schen Methode für die Bestimmung der Entfernungen, sammt Rechnungsbeispiel.

Encke theilt die Vorbereitungsrechnungen zur Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers in drei Abschnitte, welche durch ein Beispiel unter Zugrundelegung der folgenden Beobachtungen erläutert werden.

t, t', t''	1847 Juli 5,42671 Berl. Zeit	Juli 10,41048	Juli 16,39150
$\lambda, \lambda', \lambda''$	256° 8' 40'',9	255° 13' 28'',6	254° 20' 18'',1
β, β', β''	+ 18° 41' 5'',3	+ 18° 3' 56'',4	+ 17° 15' 35'',1
L, L', L''	283° 9' 19'',7	287° 54' 32'',4	293° 36' 59'',8
$\log R, \log R', \log R''$.	0,0071570	0,0071111	0,0069788 ¹⁾ .

Für Abschnitt I. berechne man:

$$\begin{aligned}\vartheta &= k(t'' - t') \\ \vartheta' &= k(t'' - t) \\ \vartheta'' &= k(t' - t), \\ N &= \frac{R'}{R} \cdot \frac{\sin(L'' - L')}{\sin(L'' - L)} \\ N'' &= \frac{R'}{R''} \cdot \frac{\sin(L' - L)}{\sin(L'' - L)} \\ \operatorname{tg} \gamma' &= \frac{\operatorname{tg} \beta'}{\sin(\lambda' - L')} \\ \operatorname{tg} \chi' &= \frac{\operatorname{tg}(\lambda' - L')}{\cos \gamma'},\end{aligned}$$

wobei $\chi' < 180^\circ$ und so zu nehmen ist, dass $\cos \chi'$ mit $\cos(\lambda' - L')$ einerlei Zeichen hat. Der $\log k$ ist bekanntlich 8,2355814.

Im gegenwärtigen Beispiele findet man:

$$\begin{aligned}\log \vartheta &= 9,0123567 & \log N &= 9,7385266 \\ \log \vartheta' &= 9,2755817 & \log N'' &= 9,6594867 \\ \log \vartheta'' &= 8,9331394 & \chi' &= 36^\circ 51' 14'',67,\end{aligned}$$

welchen Zahlen man noch gleich hinzufügen kann:

$$\begin{aligned}\log R' \cos \chi' &= 9,9102910 \\ \log R' \sin \chi' &= 9,7851024.\end{aligned}$$

Für den Abschnitt II., die Aufstellung der Finalgleichung für φ' , berechne man:

¹⁾ Es ist dies Material schon von dem Einflusse der Parallaxe, der Aberration u. s. w. befreit worden, die dazu dienlichen Formeln giebt Encke bei derselben Gelegenheit. Berliner Astronom. Jahrbuch für 1854.

$$\sin [1/2 (\lambda'' + \lambda) - K] \operatorname{tg} J = \frac{\sin (\beta'' + \beta)}{2 \cos \beta \cos \beta''} \sec 1/2 (\lambda'' - \lambda)$$

$$\cos [1/2 (\lambda'' + \lambda) - K] \operatorname{tg} J = \frac{\sin (\beta'' - \beta)}{2 \cos \beta \cos \beta''} \operatorname{cosec} 1/2 (\lambda'' - \lambda),$$

in welchen Formeln $J < 90^\circ$ und positiv genommen wird, ferner:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta^0 &= \sin (\lambda' - K) \operatorname{tg} J, \\ a^0 &= \frac{\sin (\beta' - \beta^0)}{\cos \beta^0 \operatorname{tg} J} \\ b &= \frac{R \sin (L - K)}{a^0} \\ c &= \frac{R' \sin (L' - K)}{a^0} \\ d &= \frac{R'' \sin (L'' - K)}{a^0} \end{aligned}$$

Die numerische Rechnung ergibt hier:

$$\begin{aligned} K &= 234^\circ 49' 53'',15 & \log b &= 2,577\,9016 \\ \log \operatorname{tg} J &= 9,968\,6905 & \log c &= 2,607\,3742 \\ \beta^0 &= 17^\circ 57' 50'',01 & \log d &= 2,636\,5339 \\ \log a^0 &= 7,302\,5279 \end{aligned}$$

Der Abschnitt III. der Vorbereitungsrechnungen enthält die Bestimmung der Coefficienten in den Gleichungen zwischen ϱ und ϱ' , sowie zwischen ϱ'' und ϱ' , nämlich von:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\sec \beta'}{\sin (\lambda'' - \lambda)} \\ h &= \frac{R R'' \sin (L'' - L)}{a^0 \sin (\lambda'' - \lambda)} \\ M_1 &= \frac{\sin (\lambda'' - \lambda')}{\sin (\lambda'' - \lambda)} + f \cdot \frac{R'' \sin (\lambda'' - L'')}{d} \\ M_1'' &= \frac{\sin (\lambda' - \lambda)}{\sin (\lambda'' - \lambda)} - f \cdot \frac{R \sin (\lambda - L)}{b} \\ M_2 &= h \frac{\sin (\lambda'' - K)}{d} \\ M_2'' &= h \frac{\sin (\lambda - K)}{b}, \end{aligned}$$

für welche man hier findet:

$$\begin{aligned} \log M_1 &= 9,732\,6119 & \log M_2 &= 0,359\,1550_n \\ \log M_1'' &= 9,670\,9014 & \log M_2'' &= 0,454\,6085_n. \end{aligned}$$

Hiermit sind denn die Vorbereitungsrechnungen der Encke'schen Methode beendigt.

Einen Abschnitt IV. nach der Encke'schen Eintheilung macht die nun folgende Bildung und Berechnung der ersten Hypothese aus; es wird darin:

¹⁾ Encke bemerkt an dieser Stelle: „der Winkel β^0 muss mit der grössten Genauigkeit bestimmt werden“, und giebt in der That denselben nachher zu $17^\circ 57' 50'' \frac{10}{717}$ an. Es kann aber, wie auch schon Hansen bemerkt hat, nichts nützen, diese Hilfsgrösse mit grösserer Genauigkeit als die übrigen zu berechnen, es sei denn, dass man beabsichtige, β' oder die Breite der mittleren Beobachtung mit um so viel grösserer Schärfe darzustellen, als die übrigen Data, was aber selbst wiederum zwecklos wäre. Dies erhellt hinreichend aus dem Umstande, dass in der obigen Formel für a^0 der Sinus der Differenz $\beta' - \beta^0$ vorkommt.

$$P = \frac{\vartheta''}{\vartheta}, \quad Q = \vartheta \vartheta''$$

gesetzt, und dann:

$$\begin{aligned} c^0 &= \frac{b + Pd}{1 + P} \\ k^0 &= c - c^0 \\ l^0 &= \frac{1}{2} c^0 Q \\ \mu \sin q &= R' \sin \chi \\ \mu \cos q &= k^0 + R' \cos \chi' \\ m &= \frac{l^0}{\mu R'^3 \sin \chi'^3} \end{aligned}$$

abgeleitet. Der Quadrant von q ist so zu wählen, dass μ mit l^0 einerlei Vorzeichen hat. Man löst darauf durch Versuche die Gleichung:

$$\sin(z - q) = m \sin z^4$$

unter der uns schon bekannten Bedingung, dass $z > 0$ und $< \chi'$ werden muss.

Die numerische Rechnung liefert uns diesmal:

$$\begin{aligned} \log P &= 9,9207827, & \log Q &= 7,9454961 \\ \log c^0 &= 2,6055360 \\ \log k^0 &= 0,2330642 \\ \log l^0 &= 0,2500021 \\ \log \mu &= 0,4143456 \\ \log m &= 0,4803493 \\ q &= 13^\circ 34' 54'',13, \end{aligned}$$

und durch Auflösung der Endgleichung:

$$z = 14^\circ 12' 38'',24,$$

welches hier die einzige mögliche Lösung ist.

Es folgt hierauf Abschnitt V. der Encke'schen Eintheilung, bestehend in der Ermittlung von r' , ϱ' , der Verhältnisse der Dreiecksflächen c und c'' und von ϱ und ϱ'' , wobei die Formeln zu gebrauchen:

$$\begin{aligned} r' &= \frac{R' \sin \chi'}{\sin z}, \\ \varrho' &= \frac{R' \sin(\chi' - z)}{\sin z} \cos \beta', \\ c &= \left(1 + \frac{\varrho'}{2r'^3}\right) \cdot \frac{1}{1 + P}^1), \\ c'' &= c P, \\ \varrho &= M_1 \frac{\varrho'}{c} + \left(\frac{N}{c} - 1\right) M_2, \\ \varrho'' &= M_1'' \frac{\varrho'}{c''} + \left(\frac{N''}{c''} - 1\right) M_2''. \end{aligned}$$

Die numerischen Werthe sind:

$$\begin{aligned} \log r' &= 0,3950737 & \log c'' &= 9,6576827 \\ \log \varrho' &= 0,1805822 & \log \varrho &= 0,1738041 \\ \log c &= 9,7369000 & \log \varrho'' &= 0,1904926. \end{aligned}$$

¹⁾ Hier ist wieder darauf aufmerksam zu machen, dass die Verwechslung mit der Hilfsgrösse c der Vorbereitungsrechnungen zu vermeiden ist.

Fünfundsechzigste Vorlesung.

Hansen's Form der Bestimmung der Distanz eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen.

Eine neuere, deshalb verhältnissmässig weniger bekannte Form der Bahnberechnung aus drei Beobachtungen rührt von Hansen her¹⁾. Da diese Arbeit zu dem Bedeutendsten gehört, was über das vorliegende Problem geschrieben worden ist, so geben wir sie hier in den Hauptzügen wieder.

Es bedeuten x, y, z die rechtwinkligen heliocentrischen Coordinaten eines Planeten (oder Kometen), r den Radius vector, u den Winkel zwischen dem Radius vector und dem aufsteigenden Knoten der Bahnebene in der Ekliptik, also das Argument der Breite, i die Neigung der Bahnebene, sowie l die heliocentrische Länge, so sind $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ die Cosinus der Winkel, welche der Radius vector mit den drei Coordinatenaxen bildet, und man hat nach einer dem Leser geläufigen Formel:

$$\begin{aligned} x &= r \cos u \cos \delta - r \sin u \cos i \sin \delta \\ y &= r \cos u \sin \delta + r \sin u \cos i \cos \delta \\ z &= r \sin u \sin i. \end{aligned}$$

Aus diesen und den analogen Gleichungen für einen zweiten und dritten Ort leitet dann Hansen die von uns schon mehrfach benutzten Relationen:

$$\begin{aligned} 0 &= nx - n'x' + n''x'' \\ 0 &= ny - n'y' + n''y'' \\ 0 &= nz - n'z' + n''z'' \end{aligned}$$

ab; diesen Theil der Hansen'schen Entwicklungen können wir übergehen.

Bedeutet wieder λ die geocentrische Länge, β die geocentrische Breite, ϱ die auf die Ekliptik projecirte Entfernung des Planeten von der Erde, L die heliocentrische Länge der Erde, R den Radius vector der Erde, so können die Ausdrücke für die rechtwinkligen Coordinaten des Planeten auf folgende Form gebracht werden:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos(\lambda - \varepsilon) + R \cos(L - \varepsilon) \\ y &= \varrho \sin(\lambda - \varepsilon) + R \sin(L - \varepsilon) \\ z &= \varrho \operatorname{tg} \beta, \end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass die Wahl der X-Axe in der Ebene der Ekliptik noch frei steht und dieselbe so getroffen wird, dass dieser Axe die Länge ε zukommt (die Längen, wie immer, von dem Frühlings-Aequinoctium an gerechnet). Es ist hiernach ε eine ganz willkürliche, später nach Bequemlichkeit zu bestimmende Grösse. Wird nun in die Fundamentalgleichungen:

$$0 = nx - n'x' + n''x'' \text{ u. s. w.}$$

substituirt, so werden dieselben:

$$\begin{aligned} 0 &= n \varrho \cos(\lambda - \varepsilon) - n' \varrho' \cos(\lambda' - \varepsilon) + n'' \varrho'' \cos(\lambda'' - \varepsilon) \\ &+ n R \cos(L - \varepsilon) - n' R' \cos(L' - \varepsilon) + n'' R'' \cos(L'' - \varepsilon) \end{aligned}$$

¹⁾ In den Berichten über die Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikalische Classe. 15. Bd. 1863.

Neigung des durch den ersten und dritten Ort gelegten grössten Kreises gegen die Ekliptik für einen Augenblick mit η , die Länge seines Durchschnittspunktes oder Knotens auf der Ekliptik mit H , so muss, damit ein solches Verhalten eintrete:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \operatorname{tg} \eta \sin (\lambda - H) \\ \operatorname{tg} \beta' &= \operatorname{tg} \eta \sin (\lambda' - H) \\ \operatorname{tg} \beta'' &= \operatorname{tg} \eta \sin (\lambda'' - H) \end{aligned}$$

sein, aus welchen drei Gleichungen die obige dadurch hervorgeht, dass man die erste mit $\sin [\lambda'' - H - (\lambda' - H)]$, die zweite mit $-\sin [\lambda'' - H - (\lambda - H)]$, die dritte mit $\sin [\lambda' - H - (\lambda - H)]$ multiplicirt und die Producte addirt. Nach dem bekannten Lemma, dass für irgend drei Winkel $\alpha, \alpha', \alpha''$:

$$\sin \alpha \sin (\alpha'' - \alpha') - \sin \alpha' \sin (\alpha'' - \alpha) + \sin \alpha'' \sin (\alpha' - \alpha) = 0,$$

ist auch die Summe der eben gebildeten Producte gleich Null, wie bewiesen werden sollte.

Im Uebrigen ist uns schon aus den früheren Vorlesungen bekannt, dass das Verschwinden von K , d. h. von ψ' , an und für sich für die Bestimmbarkeit der Bahn ohne alle Bedeutung ist, so lange nicht auch der obige Coëfficient C' , d. h. $\sin w'$, der 54. Vorlesung zu Null wird. Findet Letzteres statt, so ist das Material für die Bahnberechnung aus den drei Oertern nicht zu gebrauchen. Auch sieht man leicht ein, dass, wenn $C = 0$ wird, jedesmal bis auf Grössen höherer Ordnung genau $K = 0$ werden muss; denn entweder ist dann in der Gleichung (2):

$$\frac{n}{n'} A + \frac{n''}{n} B$$

schon für sich gleich Null, d. h. nach Vorlesung 54:

$$\frac{n}{n'} R \sin w + \frac{n''}{n'} R'' \sin w'' = 0,$$

woraus $\mathcal{A}' \sin \psi' = 0$, also $\psi' = 0$ oder $K = 0$ folgen würde; oder aber $\frac{n}{n'} A + \frac{n''}{n'} B$ ist von Null verschieden, dann muss, da jedesmal, wenn w' oder C verschwindet, die Lösung unbestimmt werden muss, $\sin \psi'$ oder K gleich Null werden, weil man sonst eine bestimmte Lösung entgegen den früheren Sätzen erhalten würde.

Hansen beweist noch in seiner Abhandlung den für diese Art von Untersuchungen so wichtigen Satz:

„Wenn sich sowohl der Planet wie die Erde in gerader Linie so bewegen, dass die Dreiecksflächen, die von den Radien beschrieben werden, den Zwischenzeiten proportional sind, so liegen alle geocentrischen Oerter des Planeten in einem grössten Kreise.“

Da wir diesen Satz, besonders im Abschnitte IX. (über Meteoritenbahnen) nothwendig gebrauchen, so seien demselben hier noch einige Bemerkungen gewidmet.

Die Voraussetzung des Satzes ist keine andere, als die, dass der Planet und die Erde gerade Linien mit constanter Geschwindigkeit durchlaufen, welche um so näher erfüllt ist, je kleiner der von beiden beschriebene heliocentrische Bogen oder die Zwischenzeiten der Beobachtungen sind; denn die Voraussetzung verlangt, dass:

$$\begin{aligned} \frac{n}{n'} &= \frac{\vartheta}{\vartheta'} \\ \frac{n'}{n''} &= \frac{\vartheta'}{\vartheta''}, \end{aligned}$$

oder:

$$n' = n \cdot \frac{\vartheta}{\vartheta'} + n''.$$

und ausserdem:

$$\frac{n}{n''} = \frac{\vartheta}{\vartheta''},$$

sowohl für den Planeten wie für die Erde; dies ist aber auf andere Weise nicht möglich, als dadurch, dass der heliocentrische Bogen mit seiner Sehne zusammenfällt und diese vom mittleren Radius vector bei beiden Körpern der Zeit proportional getheilt wird. Von der Olbers'schen Methode her ist uns aber noch bekannt, dass, wenn Punkte von solcher Beschaffenheit auf beiden Sehnen mit einander verbunden werden, die Richtung der Verbindungslinie stets auf einen Punkt des durch die äusseren geocentrischen Oerter gelegten grössten Kreises zielt. Es muss also unter der gemachten Voraussetzung der geocentrische Lauf mit einem grössten Kreise zusammenfallen.

Sechsendsechzigste Vorlesung.

Fortsetzung der Entwicklung für die Formeln der Hansen'schen Methode.

Die Betrachtungen über die Ordnung der Coëfficienten K, A, B, C der Gleichung (2) (65. Vorlesung) in verschiedenen Fällen, welche Hansen bei dieser Gelegenheit anstellt, dürfen wir hier übergehen, da wir das Wichtigste davon schon berücksichtigt haben, desgleichen die Reihenentwickelungen für $\frac{n}{n'}$ und $\frac{n''}{n'}$; uns ist hier zunächst nur an der Umformung der Grundgleichungen gelegen, durch welche dieselben für den Gebrauch bequem gemacht werden. Bei der Gleichung (2) (65. Vorlesung) hat man nichts weiter zu thun, als, nachdem man sie in der Form:

$$\mathcal{A}' = \frac{n}{n'} \frac{A}{K \cos \beta'} + \frac{n''}{n'} \frac{B}{K \cos \beta'} - \frac{C}{K \cos \beta'}$$

geschrieben, wobei \mathcal{A}' die bekannte Bedeutung hat, anstatt der Verhältnisse von n, n', n'' zwei andere Grössen P und Q einzuführen. Nach dem Vorgange von Gauss setzt man:

$$P = \frac{n''}{n}, \quad Q = 2r'^3 \left(\frac{n + n''}{n'} - 1 \right),$$

wonach dann obige Gleichung übergeht in:

$$\frac{A + PB}{K(1 + P)} \cdot \left(1 + \frac{Q}{2r'^3} \right) = \mathcal{A}' \cos \beta' + \frac{C}{K} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (1)$$

oder:

$$\frac{Q}{2r'^3} = \frac{K(1 + P)}{A + BP} \cdot \mathcal{A}' \cos \beta' + \frac{C(1 + P)}{A + BP} - 1.$$

Hier werden nun wieder die Gleichungen:

$$\mathcal{A}' = \frac{R' \sin(\chi' - z')}{\sin z'}$$

$$r' = \frac{R' \sin \chi'}{\sin z'}$$

Jene Gleichungen werden also:

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{n' R''}{n B} \{E \Delta' \cos \beta' + R' \operatorname{tg} \beta'' \sin (L'' - L')\} - \frac{\operatorname{tg} \beta''}{B} R R'' \sin (L'' - L) \\ \varrho'' &= \frac{n' R}{n'' A} \{E'' \Delta' \cos \beta' + R' \operatorname{tg} \beta \sin (L' - L)\} - \frac{\operatorname{tg} \beta}{A} R R' \sin (L' - L) \end{aligned} \quad (3)$$

wobei:

$$\begin{aligned} E &= \operatorname{tg} \beta' \sin (\lambda'' - L'') - \operatorname{tg} \beta'' \sin (\lambda' - L'') \\ E'' &= \operatorname{tg} \beta \sin (\lambda' - L) - \operatorname{tg} \beta' \sin (\lambda - L). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (3) lassen sich dadurch weiter vereinfachen, dass für Δ' der Ausdruck:

$$\frac{r' \sin (\chi' - z')}{\sin \chi'},$$

für R' :

$$\frac{r' \sin z'}{\sin \chi'}$$

eingeführt wird. Ausserdem setze man:

$$\begin{aligned} W \sin w &= E \cos \beta' \\ W \cos w &= \{E \cos \beta' \cos \chi' - \operatorname{tg} \beta'' \sin (L'' - L')\} \frac{1}{\sin \chi'} \\ W'' \sin w'' &= E'' \cos \beta' \\ W'' \cos w'' &= \{E'' \cos \beta' \cos \chi' - \operatorname{tg} \beta \sin (L' - L)\} \frac{1}{\sin \chi'}; \end{aligned}$$

es wird dann:

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{n'}{n} \frac{R'' W}{B} r' \sin (w - z') - \frac{\operatorname{tg} \beta''}{B} R R'' \sin (L'' - L), \\ \varrho'' &= \frac{n'}{n''} \frac{R W''}{A} r' \sin (w'' - z') - \frac{\operatorname{tg} \beta}{A} R R'' \sin (L' - L), \end{aligned}$$

also, wenn der Abkürzung wegen:

$$\begin{aligned} V &= \frac{n'}{n} r', & V'' &= \frac{n'}{n''} r' \\ G &= -\frac{\operatorname{tg} \beta''}{B} R R'' \sin (L'' - L), & G'' &= -\frac{\operatorname{tg} \beta}{A} R R'' \sin (L' - L) \\ U &= \frac{R'' W}{B}, & U'' &= \frac{R W''}{A} \end{aligned}$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \varrho &= U V \sin (w - z') + G \\ \varrho'' &= U'' V'' \sin (w'' - z') + G''. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen:

$$P = \frac{n''}{n}, \quad Q = 2 r'^3 \left(\frac{n + n''}{n'} - 1 \right)$$

folgt:

$$\frac{n'}{n''} = \frac{n'}{n} \frac{1}{P}, \quad \frac{n}{n'} + \frac{n''}{n'} = 1 + \frac{Q}{2 r'^3},$$

also:

$$\frac{n'}{n} = \frac{1 + \frac{P}{2 r'^3}}{1 + \frac{Q}{2 r'^3}}, \quad \frac{n'}{n''} = \frac{n'}{n} \frac{1}{P};$$

da nun nach den Entwicklungen für die Gleichung (2):

$$\frac{1 + \frac{P}{Q}}{1 + \frac{Q}{2r'^3}} = \frac{(A + BP) \sin \varepsilon'}{S \sin (\varepsilon' + \sigma)},$$

so wird, wenn man noch in den Ausdrücken für V und V'' $r' = \frac{R' \sin \chi'}{\sin \varepsilon'}$ setzt:

$$V = \frac{A + BP}{S} \cdot \frac{R \sin \chi'}{\sin (\varepsilon' + \sigma)}, \quad V'' = \frac{V}{P}.$$

Hiermit wäre der oben ausgesprochene Zweck erreicht; doch nimmt Hansen, um zu seiner definitiven Form zu gelangen, noch einige weitere Vereinfachungen vor, welche wir in der nächsten Vorlesung kennen lernen werden.

Siebenundsechzigste Vorlesung.

Einige weitere Vereinfachungen der Hansen'schen Formeln.

Substituiert man in den Gleichungen:

$$\begin{aligned} C \sin \chi' &= S \sin (\chi' + \sigma), \\ C \cos \chi' - K R' \cos \beta' &= S \cos (\chi' + \sigma), \end{aligned}$$

welche zur Bestimmung von S und σ dienen, die für C und K gegebenen Ausdrücke, so geht $C \cos \chi' - K R' \cos \beta'$ über in:

$$\begin{aligned} &R' \cos \chi' \{ \operatorname{tg} \beta \sin (\lambda'' - L') - \operatorname{tg} \beta'' \sin (\lambda - L') \} \\ &- R' \{ \cos \beta' \operatorname{tg} \beta \sin (\lambda'' - \lambda') - \sin \beta' \sin (\lambda'' - \lambda) + \cos \beta' \operatorname{tg} \beta'' \sin (\lambda' - \lambda) \}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich, wenn man den Winkel einführt, welchen der den zweiten Sonnenort mit dem zweiten geocentrischen Ort verbindende grösste Kreis mit der Ekliptik bildet. Bezeichnet man denselben mit γ' , so hat man nach bekannten Formeln für die sphärischen Dreiecke:

$$\begin{aligned} \sin \chi' \sin \gamma' &= \sin \beta' \\ \sin \chi' \cos \gamma' &= \cos \beta' \sin (\lambda' - L') \\ \cos \chi' &= \cos \beta' \cos (\lambda' - L'); \end{aligned}$$

dabei muss γ' so bestimmt werden, dass $\sin \chi'$ positiv wird. Es wird nach Einführung dieses Winkels:

$$\begin{aligned} C \cos \chi' - K R' \cos \beta' &= R' \cos \beta' \{ \operatorname{tg} \beta [\sin (\lambda'' - L') \cos (\lambda' - L') - \sin (\lambda'' - \lambda')] \\ &- \operatorname{tg} \beta'' [\sin (\lambda - L') \cos (\lambda' - L') + \sin (\lambda' - \lambda)] \} \\ &+ R' \sin \beta' \sin (\lambda'' - \lambda) \\ &= R' \{ \operatorname{tg} \beta \cos (\lambda'' - L') - \operatorname{tg} \beta'' \cos (\lambda - L') \} \cos \beta' \sin (\lambda' - L') \\ &+ R' \sin \beta' \sin (\lambda'' - \lambda) \\ &= D \sin \chi' \cos \gamma' + R' \sin \chi' \sin (\lambda'' - \lambda) \sin \gamma', \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung:

$$R' \{ \operatorname{tg} \beta \cos (\lambda'' - L') - \operatorname{tg} \beta'' \cos (\lambda - L') \} = D$$

gesetzt ist. Führt man jetzt die Grössen T und t mittelst der Gleichungen:

$$\begin{aligned} T \sin t &= D \\ T \cos t &= R' \sin (\lambda'' - \lambda) \end{aligned}$$

ein, so hat man für die Berechnung von S und σ :

$$\frac{S}{\sin \chi'} \sin(\chi' + \sigma) = C$$

$$\frac{S}{\sin \chi'} \cos(\chi' + \sigma) = T \sin(t + \gamma').$$

Auch die Ausdrücke für W , w , W'' , w'' lassen sich vorthellhaft umformen. Man hat:

$$W \sin(w - \chi') = W \sin w \cos \chi' - W \cos w \sin \chi'$$

$$= \operatorname{tg} \beta'' \sin(L'' - L'),$$

desgleichen:

$$W \cos(w - \chi') = \{E \cos \beta' - \operatorname{tg} \beta'' \sin(L'' - L') \cos \chi'\} \cdot \frac{1}{\sin \chi'}$$

$$W'' \sin(w'' - \chi') = \operatorname{tg} \beta \sin(L' - L)$$

$$W'' \cos(w'' - \chi') = \{E'' \cos \beta' - \operatorname{tg} \beta \sin(L' - L) \cos \chi'\} \frac{1}{\sin \chi'}.$$

Wenn man in diesen Gleichungen für E und E'' ihre Ausdrücke substituirt, so wird:

$$W \cos(w - \chi') = \{\sin \beta' \sin(\lambda'' - L'') - \operatorname{tg} \beta'' \sin(\lambda' - L') \cos \beta'$$

$$- \operatorname{tg} \beta'' \sin(L'' - L') \cos \chi'\} \frac{1}{\sin \chi'},$$

und da:

$$\frac{\sin \beta'}{\sin \chi'} = \sin \gamma'$$

$$\frac{\cos \beta'}{\sin \chi'} = \frac{\cos \gamma'}{\sin(\lambda' - L')}$$

$$\frac{\cos \chi'}{\sin \chi'} = \frac{\cos \gamma' \cos(\lambda' - L')}{\sin(\lambda' - L')}$$

$$W \cos(w - \chi') = \sin(\lambda'' - L'') \sin \gamma'$$

$$- \operatorname{tg} \beta'' \cos \gamma' \left\{ \frac{\sin(\lambda' - L') + \sin(L'' - L') \cos(\lambda' - L')}{\sin(\lambda' - L')} \right\},$$

also da:

$$\sin(\lambda' - L'') = \sin\{(\lambda' - L') - (L'' - L')\},$$

endlich:

$$W \cos(w - \chi') = \sin(\lambda'' - L'') \sin \gamma' - \operatorname{tg} \beta'' \cos(L'' - L') \cos \gamma',$$

desgleichen:

$$W'' \cos(w'' - \chi') = \operatorname{tg} \beta \cos(L' - L) \cos \gamma' - \sin(\lambda - L) \sin \gamma'.$$

Setzt man daher:

$$A \sin \mu = \operatorname{tg} \beta'' \cos(L'' - L'); \quad A'' \sin \mu'' = \operatorname{tg} \beta \cos(L' - L)$$

$$A \cos \mu = \sin(\lambda'' - L''); \quad A'' \cos \mu'' = \sin(\lambda - L),$$

so erhält man:

$$W \cos(w - \chi') = A \sin(\gamma' - \mu)$$

$$W'' \cos(w'' - \chi') = A'' \sin(\mu'' - \gamma'),$$

durch welche Ausdrücke die Rechnung bedeutend vereinfacht wird.

Achtundsechzigste Vorlesung.

Zusammenstellung der Formeln der Hansen'schen Methode zur Bestimmung der drei Entfernungen, nebst Rechnungsbeispiel.

Nach Hansen ist also den vorhergehenden Entwicklungen zufolge zu berechnen:

$$\begin{aligned} A &= R \{tg \beta \sin (\lambda'' - L) - tg \beta'' \sin (\lambda - L)\} \\ B &= R'' \{tg \beta \sin (\lambda'' - L'') - tg \beta'' \sin (\lambda - L'')\} \\ C &= R' \{tg \beta \sin (\lambda'' - L') - tg \beta'' \sin (\lambda - L')\} \\ D &= R' \{tg \beta \cos (\lambda'' - L') - tg \beta'' \cos (\lambda - L')\}, \end{aligned}$$

ferner:

$$\begin{aligned} \sin \chi' \sin \gamma' &= \sin \beta' \\ \sin \chi' \cos \gamma' &= \cos \beta' \sin (\lambda' - L') \\ \cos \chi' &= \cos \beta' \cos (\lambda' - L'), \end{aligned}$$

wobei γ' so bestimmt werden muss, dass $\sin \chi'$ positiv wird, dann:

$$\begin{aligned} T \sin t &= D; & S' \sin (\chi' + \sigma) &= C \\ T \cos t &= R' \sin (\lambda'' - \lambda); & S' \cos (\chi' + \sigma) &= T \sin (t + \gamma') \\ S &= S' \sin \chi'; & M' &= \frac{1}{2 (R'^3 \sin \chi'^3)}. \end{aligned}$$

Hier ist es zweckmässig, den Quadranten so zu wählen, dass $\chi' + \sigma$ stets kleiner als 180° wird, wobei dann σ die Grenzen $+ 90^\circ$ und $- 90^\circ$ nicht überschreiten kann.

Weiter sind noch zu erledigen die Vorbereitungsrechnungen:

$$\begin{aligned} A \sin \mu &= tg \beta'' \cos (L'' - L'); & A'' \sin \mu'' &= tg \beta \cos (L' - L) \\ A \cos \mu &= \sin (\lambda'' - L''); & A'' \cos \mu'' &= \sin (\lambda - L) \\ W \sin (w - \chi') &= tg \beta'' \sin (L'' - L') \\ W \cos (w - \chi') &= A \sin (\gamma' - \mu) \\ W'' \sin (w'' - \chi') &= tg \beta \sin (L' - L) \\ W'' \cos (w'' - \chi') &= A'' \sin (\mu'' - \gamma') \\ U &= \frac{R'' W}{B}; & U'' &= \frac{R W''}{A} \\ G &= - N' \frac{tg \beta''}{B}; & G'' &= - N' \frac{tg \beta}{A}, \end{aligned}$$

wobei N' die Grösse $R R'' \sin (L'' - L)$ vorstellt.

Das nächste Geschäft nach Erledigung dieser Rechnungen bildet die Bestimmung von z' . Es sei zu dem Zwecke:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{A + B P}{S} \\ \Omega \sin \omega &= \frac{1 + P}{\Sigma} \sin \sigma, \\ \Omega \cos \omega &= \frac{1 + P}{\Sigma} \cos \sigma - 1 \\ M &= M' \frac{Q}{\Omega}, \end{aligned}$$

so ist die Gleichung:

$$M \sin z'^4 = \sin (z' + \omega)$$

aufzulösen.

Bei Gelegenheit dieser Zusammenstellung macht Hansen noch folgende für die praktischen Rechner sehr beachtenswerthe Bemerkung.

„Da die Genauigkeit der Bahnbestimmung *ceteris paribus* so sehr von der Grösse des Winkels abhängt, den der durch die beiden äusseren Planetenörter gelegte grösste Kreis mit dem durch den mittleren Planetenort und den dazu gehörigen Sonnen- oder Erdort gelegten grössten Kreis macht, so wird es nützlich sein, diesen Winkel jedesmal zu berechnen. Ich füge um so mehr die Formel dafür hinzu, weil sie mit Benutzung der oben angewandten Hilfsmittel sehr einfach wird. Es findet sich leicht:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} (t + \gamma')}{\cos (\chi' + \sigma)},$$

wo x der gesuchte Winkel ist. Bei Veröffentlichungen von ersten Bahnbestimmungen findet man oft die Zeiten der angewandten Beobachtungen mit angegeben, welches sehr angemessen ist, da man dadurch zum Theil schon in den Stand gesetzt wird, sich von der zu erwartenden Genauigkeit der Bahnbestimmung einen Begriff zu machen. Man würde diese Angabe sehr vervollständigen, wenn man auch den Werth des Winkels x hinzufügen wollte, den man, um ihn auf eine kurze Weise zu bezeichnen, den maassgebenden Winkel nennen kann.“

Treffender aber noch dürfte vielleicht der Abstand des mittleren Sonnenortes von dem durch die äusseren geocentrischen Oerter gelegten grössten Kreise, der Winkel ω' der 54. Vorlesung, die Benennung des maassgebenden Winkels verdienen, weil er noch mehr Kriterien für die Sicherheit der Bestimmung vereinigt. Denn je grösser dieser Abstand ist, desto grösser ist auch, haben wir gesehen, die Sicherheit der Bahnberechnung, und in demselben Maasse, wie durch zu grosse Annäherung des dritten an den ersten geocentrischen Ort der Abstand ω' unbestimmter und willkürlicher wird, wird auch die gesuchte Bahn unbestimmter und willkürlicher. Der Winkel x verräth allerdings ebenfalls durch seine Kleinheit die Unsicherheit des zu erwartenden Resultats, nicht aber durch einen grossen, nahe 90° erreichenden Werth das Gegentheil, weil ja auch bei einem grossen Werthe desselben, wenn der Planet in der mittleren Beobachtung in Opposition und in der Ekliptik steht, die Bestimmung der Bahn unthunlich werden kann.

Hat man z' auf bekannte Weise gefunden, so wird dann:

$$\begin{aligned} r' &= \frac{R' \sin \chi'}{\sin z'}, & \Delta' &= \frac{R' \sin (\chi' - z')}{\sin z'} \\ V &= \frac{\Sigma R' \sin \chi'}{\sin (z' + \sigma)}; & V'' &= \frac{V}{P} \\ \varrho &= U V \sin (w - z') + G \\ \varrho'' &= U'' V'' \sin (w'' - z') + G''. \end{aligned}$$

Zur Verdeutlichung werden die Formeln auf die folgenden drei Beobachtungen der Euterpe angewandt:

$t, t', t'' \dots \dots \dots$	1853 Nov. 12,432133	Dec. 2,433406	Dec. 22,373477
$\lambda, \lambda', \lambda'' \dots \dots \dots$	$50^\circ 42' 43'',5$	$46^\circ 10' 48'',0$	$44^\circ 23' 19'',8$
$\beta, \beta', \beta'' \dots \dots \dots$	$— 2^\circ 9' 20'',5$	$— 1^\circ 45' 58'',6$	$— 1^\circ 16' 29'',0$
$L, L', L'' \dots \dots \dots$	$50^\circ 27' 38'',1$	$70^\circ 41' 34'',1$	$90^\circ 58' 38'',4$
$\log R, \log R', \log R''$	9,995195	9,993596	9,992739

Die in der Rechnung vorkommenden Längenunterschiede sind:

$$\begin{aligned} \lambda'' - L &= — 6^\circ 4' 18'',3 & \lambda'' - L' &= — 26^\circ 18' 14'',3 \\ \lambda'' - L'' &= — 46^\circ 35' 18'',6 & \lambda' - L' &= — 24^\circ 30' 46'',1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \lambda'' - \lambda = - 6^{\circ} 19' 23'',7 & L'' - L' = 20^{\circ} 17' 4'',3 \\ \lambda - L = + 0^{\circ} 15' 5'',4 & L' - L = 20^{\circ} 13' 56'',0 \\ \lambda - L'' = - 40^{\circ} 15' 54'',9 & L'' - L = 40^{\circ} 31' 0'',3 \\ \lambda - L' = - 19^{\circ} 58' 50'',6 \end{array}$$

Die Werthe der von P und Q unabhängigen Grössen ergaben sich wie folgt:

$$\begin{array}{ll} \log A = 7,605768 & \log B = 8,105426 \\ \log C = 9,951528 & \log D = 8,101883_n \\ \gamma' = 184^{\circ} 15' 2'',5 & \chi' = 24^{\circ} 34' 20'',7 \\ \log \sin \chi' = 9,618930 \\ t = 10^{\circ} 53' 45'',9 & \log T = 9,419529 \\ \sigma = - 1^{\circ} 9' 25'',9 & \log S = 7,971239 \\ \log M' = 0,861392 \\ \mu = 181^{\circ} 38' 44'',7 & \log A = 9,861377 \\ \mu'' = 277 \quad 5 \quad 3,9 & \log A'' = 8,551339 \\ w = 11 \quad 25 \quad 34,2 & \log W = 8,530434 \\ w'' = 4 \quad 27 \quad 34,8 & \log W'' = 8,578134 \\ \log U = 0,036677 & \log U'' = 0,586491 \\ \log G = 0,042566 & \log G'' = 0,770529 \\ \log \vartheta = 9,535308 \\ \log \vartheta' = 9,837003 \\ \log \vartheta'' = 9,536639 \end{array}$$

Hierauf wird für P und Q die erste Hypothese gebildet, wobei:

$$\begin{array}{l} \log P = \log \frac{\vartheta''}{\vartheta} = 0,001331 \\ \log Q = \log \vartheta \vartheta'' = 9,071947. \end{array}$$

Es wird dann ferner:

$$\begin{array}{l} \log \Sigma = 0,254612 \\ \omega = - 11^{\circ} 8' 31'',0, \quad \log \Omega = 9,066241 \\ \log M = 0,867098. \end{array}$$

Die Finalgleichung $M \sin z'^4 = \sin(z' + \omega)$ liefert hier:

$$z' = 11^{\circ} 54' 23'',0 \quad \log r' = 0,297999.$$

Endlich erhält man:

$$\begin{array}{ll} \log V = 0,596435 & \log V'' = 0,595104 \\ \log Q = \log \{U V \sin(w - z') + G\} = 0,007056 \\ \log Q'' = \log \{U'' V'' \sin(w'' - z') + G''\} = 0,064834. \end{array}$$

Für den eurtirten Abstand der Euterpe in der mittleren Beobachtung findet sich:

$$\log q' = \log \frac{R' \sin(\chi' - z') \cos \beta'}{\sin z'} = 0,019838.$$

Neunundsechzigste Vorlesung.

Die Verbesserung der Hypothesen für die Dreiecksflächen.

Nachdem wir eine Reihe von verschiedenen Methoden kennen gelernt haben, die Werthe der Radienvectoren und der Distanzen zu bestimmen, und da die Genauigkeit

der Rechnung davon abhängt, wie nahe die über die Verhältnisse von n , n' , n'' gemachten Annahmen der Wahrheit kommen, so werden unsere nächsten Untersuchungen sich mit den Verbesserungen zu beschäftigen haben, welche an jene Verhältnisse anzu- bringen sind. Es kann dies auf sehr verschiedene Art ausgeführt werden, z. B. einfach dadurch, dass aus den für die äusseren Radienvectoren r und r'' , dem dazwischen liegenden heliocentrischen Bogen $v'' - v$ und der entsprechenden Zeit $t'' - t$ die Elemente bestimmt und hieraus dann die Flächen n , n' , n'' genauer abgeleitet werden. Es würde dies jedoch, ganz abgesehen davon, dass wir die Berechnung der elliptischen Elemente bisher noch nicht kennen gelernt haben, ein Umweg sein, weil es für den in Rede stehenden Zweck der Kenntniss der Elemente selbst nicht bedarf. Ein kürzerer Weg zeigt sich, wenn wir an das Verfahren erinnern, welches wir bei der Parabel befolgt haben: wir suchten die Verhältnisse von n , n' , n'' zu den entsprechenden Sec- toren, die Grössen η , η' , η'' , welche sich mit wachsenden Zeitintervallen nur sehr langsam von der Einheit entfernen und von dieser nur um Glieder der zweiten Ord- nung verschieden sind. Bei der Parabel konnten wir jene Verhältnisse durch die zwei von Bessel aufgestellten kubischen Gleichungen, d. h. in vollständig algebraischer Form finden, bei der Ellipse sind wir auf Reihenentwickelungen angewiesen, denen wir übrigens auch schon bei der Parabel in praktischer Hinsicht den Vorzug vor der end- lichen geschlossenen Form gegeben haben.

Von solchen Reihenentwickelungen werden wir daher auch hier wieder vielfach Gebrauch machen, sowie auch von den so oft wiederkehrenden angenäherten Relationen:

$$c = \frac{n}{n'} = \frac{\partial}{\partial'} \left(1 + \frac{\partial \partial''}{2 r'^3} \right),$$

$$c'' = \frac{n''}{n'} = \frac{\partial''}{\partial'} \left(1 + \frac{\partial \partial''}{2 r'^3} \right),$$

die ersten Glieder einer Entwicklung der Dreiecksflächen nach Potenzen der Zeiten zu Grunde liegen. Wir haben dieses Fundament der ersten und damit aller weiteren Näherungen unter Zuziehung gewisser geometrischer Betrachtungen noch nicht so vollständig kennen gelernt, als es unsere folgenden Aufgaben erfordern; diese Lücke wollen wir daher zunächst ausfüllen.

Wir beginnen damit, aus den rechtwinkligen Coordinaten x , y , z der Zeit t die Coordinaten x' , y' , z' einer benachbarten Zeit t' abzuleiten, indem wir den bekannten Taylor'schen Lehrsatz anwenden; nach diesem haben wir:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + \frac{dx}{dt} \cdot (t' - t) + \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{(t' - t)^2}{2} + \dots \\ y' &= y + \frac{dy}{dt} \cdot (t' - t) + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{(t' - t)^2}{2} + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Die Coordinaten z und z' können wir gleich Null setzen, wenn wir die Bahnebene des Planeten zur Fundamentelebene des Systems annehmen.

Für die Coordinaten x'' , y'' , welche der Zeit t'' entsprechen sollen, haben wir ebenso:

$$\left. \begin{aligned} x'' &= x + \frac{dx}{dt} (t'' - t) + \frac{d^2x}{dt^2} \frac{(t'' - t)^2}{2} + \dots \\ y'' &= y + \frac{dy}{dt} (t'' - t) + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{(t'' - t)^2}{2} + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Man kann ferner noch die Axe der x mit der grossen Axe zusammenfallen lassen, so dass:

$$\begin{aligned} n &= r' r'' \sin(v'' - v') = r'' \sin v'' \cdot r' \cos v' - r' \sin v' \cdot r'' \cos v'' \\ &= y'' x' - y' x'' \end{aligned}$$

wird.

Substituirt man hier die aus (1) und (2) folgenden Werthe von x', x'', y', y'' und setzt zur Abkürzung $t' - t = \tau', t'' - t = \tau''$, so wird:

$$\begin{aligned} y'' x' - x'' y' &= \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) (\tau'' - \tau') + \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \cdot \frac{\tau''^2 - \tau'^2}{2} \\ &+ \left(x \frac{d^3 y}{dt^3} - y \frac{d^3 x}{dt^3} \right) \frac{\tau''^3 - \tau'^3}{6} + \left(x \frac{d^4 y}{dt^4} - y \frac{d^4 x}{dt^4} \right) \cdot \frac{\tau''^4 - \tau'^4}{24} \\ &+ \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \frac{\tau' \tau''^2 - \tau'' \tau'^2}{2} \\ &+ \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^3 x}{dt^3} \right) \frac{\tau''^3 \tau' - \tau'^3 \tau''}{6} \dots \end{aligned}$$

Es kommt jetzt darauf an, die Differentialquotienten der Coordinaten nach der Zeit, welche in den Gleichungen (1) vorkommen, auf eine für uns brauchbare Weise auszudrücken. In der Vorlesung 31 bemerkten wir, dass die Anziehung der Sonne dem Planeten zur Zeit t eine beschleunigende Kraft ertheilt, welche in den von uns gewählten Einheiten des Raumes und der Zeit durch

$$\frac{k^2}{r^2} \text{ oder } \frac{k^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

ausgedrückt wird. Multipliciren wir diese direct nach der Sonne gerichtete Beschleunigung mit dem Cosinus des Winkels, welchen ihre Richtung mit der x -Axe bildet, d. h. also mit $\frac{x}{r}$, so erhalten wir die dieser Axe parallele Beschleunigung oder die Geschwin-

digkeit, mit welcher die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ sich ändert. Diese Grösse $\frac{d}{dt} \frac{dx}{dt}$ oder $\frac{d^2 x}{dt^2}$ sucht die Coordinate algebraisch zu verkleinern, hat deswegen negatives Vorzeichen, und wir erhalten daher die Relation:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{k^2 x}{r^3}.$$

Aus denselben Gründen ist ferner:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{k^2 y}{r^3}.$$

Verbunden liefern beide Relationen die Gleichung:

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 0,$$

welche man auch erhält, wenn die Gleichung:

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \text{Constans}$$

nach t differentiirt wird.

$x dy - y dx$ ist bekanntlich der allgemeine Ausdruck für das Element des doppelten Sectors; die vorhergehende Relation enthält also das Resultat, dass die in gleichen Zeiten beschriebenen Sektoren constant sind, d. h. das **Keppler'sche Gesetz** über die vom Radius vector beschriebenen Flächen. Die Constante ist, wie wir wissen, gleich $k\sqrt{p}$, wenn p den halben Parameter der Bahn vorstellt (cf. 2. und 4. Vorlesung, Abtheilung I.

Differentiiren wir die Gleichung:

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

einigemal weiter nach t , so erhalten wir leicht:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} &= - \left(x \frac{d^3 y}{dt^3} - y \frac{d^3 x}{dt^3} \right) \\ \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^3 x}{dt^3} &= - \frac{1}{2} \left(x \frac{d^4 y}{dt^4} - y \frac{d^4 x}{dt^4} \right) \end{aligned}$$

u. s. w.

Durch Differentiation der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= - \frac{k^2 x}{r^3} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= - \frac{k^2 y}{r^3} \end{aligned}$$

bekommen wir:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 x}{dt^3} &= - \frac{k^2}{r^3} \cdot \frac{dx}{dt} + 3 \frac{k^2 x}{r^4} \cdot \frac{dr}{dt} \\ \frac{d^3 y}{dt^3} &= - \frac{k^2}{r^3} \cdot \frac{dy}{dt} + 3 \frac{k^2 y}{r^4} \cdot \frac{dr}{dt} \\ \frac{d^4 x}{dt^4} &= \frac{k^4 x}{r^6} + 6 \frac{k^2}{r^4} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} + 3 k^2 x \frac{d}{dt} \frac{dr}{r^4} \\ \frac{d^4 y}{dt^4} &= \frac{k^4 y}{r^6} + 6 \frac{k^2}{r^4} \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} + 3 k^2 y \frac{d}{dt} \frac{dr}{r^4} \end{aligned}$$

u. s. w.

also auch:

$$\begin{aligned} x \frac{d^3 y}{dt^3} - y \frac{d^3 x}{dt^3} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{k^2 x}{r^3} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{k^2 y}{r^3} = - \frac{k^3}{r^3} \sqrt{p} \\ x \frac{d^4 y}{dt^4} - y \frac{d^4 x}{dt^4} &= 2 \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^3 x}{dt^3} + 2 \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} = - 2 \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{k^2}{r^3} + 2 \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \frac{k^2}{r^3} \\ &+ 6 \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{k^2 x}{r^4} - 6 \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{k^2 y}{r^4} = \frac{6 k^3}{r^4} \frac{dr}{dt} \cdot \sqrt{p}. \end{aligned}$$

Wir haben diese Coëfficienten in den oben erhaltenen Ausdruck für $y'' x' - x'' y'$ einzusetzen. Wenden wir die so erhaltene Formel an, um unsere drei Grössen n , n' , n'' zu entwickeln, wobei wir dann die äusseren Coordinaten durch die mittleren und ihre Differentialquotienten auszudrücken haben, so wird unter Wiedereinführung von ϑ , ϑ' , ϑ'' :

$$\begin{aligned} n &= \vartheta \sqrt{p} \left\{ 1 - \frac{\vartheta^2}{6 r'^3} + \frac{\vartheta^3}{4 r'^4} \cdot \frac{dr'}{k dt} + \dots \right\} \\ n' &= \vartheta' \sqrt{p} \left\{ 1 - \frac{\vartheta'^2}{6 r'^3} + \frac{\vartheta'^2 (\vartheta - \vartheta'')}{4 r'^4} \cdot \frac{dr'}{k dt} + \dots \right\} \\ n'' &= \vartheta'' \sqrt{p} \left\{ 1 - \frac{\vartheta''^2}{6 r'^3} - \frac{\vartheta'^3}{4 r'^4} \cdot \frac{dr'}{k dt} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Durch Elimination von p ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{n}{n'} &= \frac{\vartheta}{\vartheta'} \left\{ 1 + \frac{\vartheta'^2 - \vartheta^2}{6 r'^3} + \frac{\vartheta' (\vartheta''^2 + \vartheta \vartheta' - \vartheta^2)}{4 r'^4} \frac{dr'}{k dt} + \dots \right\} \\ \frac{n''}{n'} &= \frac{\vartheta''}{\vartheta'} \left\{ 1 + \frac{\vartheta'^2 - \vartheta''^2}{6 r'^3} - \frac{\vartheta (\vartheta^2 + \vartheta \vartheta'' - \vartheta''^2)}{4 r'^4} \frac{dr'}{k dt} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Diese Entwicklungen weichen also in ihrem Schlussresultat von dem durch geometrische Betrachtungen gefundenen:

$$\frac{n}{n'} = \frac{\vartheta}{\vartheta'} \left\{ 1 + \frac{\vartheta \vartheta''}{2 r'^3} + \dots \right\}$$

$$\frac{n''}{n'} = \frac{\vartheta''}{\vartheta'} \left\{ 1 + \frac{\vartheta \vartheta''}{2 r'^3} + \dots \right\},$$

nach welchem wir bisher die erste Hypothese gebildet haben, schon in den Grössen der zweiten Ordnung ab, eine Folge gewisser Vernachlässigungen, welche bei der früheren Herleitung nicht gut zu vermeiden waren. Der betreffende Unterschied hat gewöhnlich für die Praxis keine grosse Bedeutung, weil man die Beobachtungen in den meisten Fällen so wählen kann, dass sehr nahe $\vartheta = \vartheta''$ wird, unter welcher Bedingung die Unterschiede:

$$\frac{\vartheta \vartheta''}{2} - \frac{\vartheta'^2 - \vartheta^2}{6} \text{ oder } \frac{\vartheta \vartheta''}{2} - \frac{(\vartheta'' + \vartheta + \vartheta)(\vartheta'' + \vartheta - \vartheta)}{6}$$

und

$$\frac{\vartheta \vartheta''}{2} - \frac{\vartheta'^2 - \vartheta''^2}{6} \text{ oder } \frac{\vartheta \vartheta''}{2} - \frac{(\vartheta + \vartheta'' + \vartheta'')(\vartheta + \vartheta'' - \vartheta'')}{6}$$

zu Null werden. Diese Vernachlässigungen spielen daher, den Fall sehr ungleicher Zwischenzeiten ausgenommen, kaum eine bedeutendere Rolle, als die mit Differentialquotienten von r' multiplicirten Glieder, aus welchen die Reihen für $\frac{n}{n'}$ und $\frac{n''}{n'}$ beliebig weit entwickelt bestehen, auch kann man sie ohne Unbequemlichkeit vermeiden. Eine bedeutende Steigerung in der Genauigkeit der ersten Hypothese würde dadurch erzielt werden können, dass wenigstens das nächste und grösste der folgenden Glieder mitberücksichtigt würde. Es ist aber $\frac{dr'}{k dt}$ nicht, wie der Coëfficient von $\frac{1}{r'^3}$ in dem vorhergehenden Gliede, eine reine Function der Zwischenzeiten, sondern von den noch unbekannten Elementen abhängig. Dieses Umstandes wegen wurde bei Bildung der ersten Hypothese auf das Glied dritter Ordnung verzichtet. Es hindert nun aber nichts, wie in der nächsten Vorlesung gezeigt werden soll, auch den Differentialquotienten $\frac{dr'}{dt}$, wie r' , unmittelbar durch den Winkel am Planeten in der zweiten Beobachtung, welchen wir mit z oder z' bezeichnet haben, auszudrücken und so in die Finalgleichung der ersten Hypothese einen so hohen Grad von Genauigkeit zu legen, dass es nur in den seltenen Fällen nöthig sein wird, zum Bilden und Durchrechnen der zweiten Hypothese zu schreiten, oder die anderen Verbesserungsvorschriften, welche wir unten entwickeln, zur Anwendung zu bringen, von der Verbesserung der Zeiten wegen der Aberration natürlich abgesehen.

Siebenzigste Vorlesung.

Berücksichtigung von $\frac{dr'}{dt}$ in der Finalgleichung für z' .

Stellen χ, χ', χ'' die äusseren Winkel an der Erde in den drei Beobachtungen vor, so haben wir unter Beibehaltung anderer bekannter Zeichen:

$$\begin{aligned} r^2 &= A^2 + R^2 + 2 R A \cos \chi \\ r'^2 &= A'^2 + R'^2 + 2 R A' \cos \chi'. \end{aligned}$$

Auf verschiedene Arten, z. B. nach den Entwicklungen der 54. Vorlesung, können A und A' auf die Form:

$$\begin{aligned} A &= a \frac{A'}{c} + b \\ A' &= a'' \frac{A'}{c''} + b'' \end{aligned}$$

gebracht werden, worin a und a'' vollständig gegebene Coëfficienten bedeuten, und die Grössen b und b'' wegen ihrer höheren Ordnung hier ganz zu vernachlässigen sind. Wir haben demnach:

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 + 2 R \frac{a}{c} A' \cos \chi + \frac{a^2}{c^2} A'^2 \\ r'^2 &= R'^2 + 2 R' \frac{a''}{c''} A' \cos \chi'' + \frac{a''^2}{c''^2} A'^2. \end{aligned}$$

Da nun:

$$\begin{aligned} r'^2 &= r'^2 + 2 r' \frac{dr'}{dt} (t'' - t') + \dots \\ r^2 &= r'^2 + 2 r' \frac{dr'}{dt} (t - t') + \dots, \end{aligned}$$

so wird:

$$2 r' (t'' - t) \frac{dr'}{dt} + \dots = R'^2 - R^2 + 2 \left(\frac{a''}{c''} R' \cos \chi'' - \frac{a}{c} R \cos \chi \right) A' + \left(\frac{a''^2}{c''^2} - \frac{a^2}{c^2} \right) A'^2.$$

Um in den Reihenentwicklungen für $\frac{n}{n'}$ und $\frac{n''}{n}$ das Glied dritter Ordnung, welches eben mit $\frac{dr'}{dt}$ multiplicirt ist, zu berücksichtigen, haben wir die letztere Grösse nur bis zur ersten Ordnung inclusive zu finden nöthig; wir dürfen deshalb ohne allen Schaden in der eben entwickelten Gleichung alle Grössen zweiter Ordnung weglassen und für $\frac{1}{c}$ und $\frac{1}{c''}$ ganz einfach die Werthe $\frac{\partial'}{\partial}$ und $\frac{\partial'}{\partial'}$ beziehungsweise substituiren.

Wir erhalten dann:

$$2 \partial' r' \frac{dr'}{k dt} = R'^2 - R^2 + 2 \left(\frac{\partial'}{\partial'} a'' R' \cos \chi'' - \frac{\partial'}{\partial} a R \cos \chi \right) A' + \left(\frac{\partial'^2}{\partial'^2} a''^2 - \frac{\partial'^2}{\partial^2} a^2 \right) A'^2,$$

oder wenn wir zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} A &= R'^2 - R^2 \\ B &= \frac{\partial'}{\partial'} a'' R' \cos \chi'' - \frac{\partial'}{\partial} a R \cos \chi \\ C &= \frac{\partial'^2}{\partial'^2} a''^2 - \frac{\partial'^2}{\partial^2} a^2 \end{aligned}$$

setzen,

$$2 \partial' r' \frac{dr'}{k dt} = A + 2 B A' + C A'^2.$$

Ist ferner:

$$\begin{aligned} g C &= B + \sqrt{B^2 - A C} \\ h C &= B - \sqrt{B^2 - A C}, \end{aligned}$$

so wird:

$$\frac{2 \partial' r'}{C} \cdot \frac{dr'}{k dt} = (\mathcal{A}' + g) (\mathcal{A}' + h) \dots \dots \dots (1)$$

Diese Zerlegung in Factoren wird, der absoluten Kleinheit von A wegen, fast stets auf reelle Werthe von g und h führen; in den gewiss höchst seltenen Fällen, wo $AC > B^2$ und also das Gegentheil stattfindet, wird man das Binom $A + 2B\mathcal{A}' + C\mathcal{A}'^2$ unzerlegt anwenden.

In Anbetracht des Umstandes, dass die Verbesserung wegen der Aberration ebenfalls die Kenntniss von \mathcal{A} verlangt, ist die Gleichung (1) für die praktische Rechnung schon so bequem, wie man nur wünschen kann. Substituiren wir daraus den für $\frac{dr'}{kdt}$ abzuleitenden Werth:

$$\frac{C}{2} \cdot \frac{(\mathcal{A}' + g)(\mathcal{A}' + h)}{\vartheta' r'}$$

in die Ausdrücke von $\frac{n}{n'}$ und $\frac{n''}{n'}$, so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{n}{n'} &= \frac{\vartheta}{\vartheta'} \left\{ 1 + \frac{\vartheta'^2 - \vartheta^2}{6r'^3} + \frac{\vartheta''(\vartheta''^2 + \vartheta\vartheta'' - \vartheta^2)}{8r'^5} \cdot \frac{C}{\vartheta'} (\mathcal{A}' + g)(\mathcal{A}' + h) \right\} \\ \frac{n''}{n'} &= \frac{\vartheta''}{\vartheta'} \left\{ 1 + \frac{\vartheta'^2 - \vartheta''^2}{6r'^3} - \frac{\vartheta(\vartheta^2 + \vartheta\vartheta'' - \vartheta''^2)}{8r'^5} \cdot \frac{C}{\vartheta'} (\mathcal{A}' + g)(\mathcal{A}' + h) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Um unserer Absicht gemäss die erste und zweite Hypothese mit einander zu verbinden, haben wir hiernach in den Entwicklungen der 49. Vorlesung:

$$Q = \frac{\vartheta'^2 - \vartheta^2}{3} + \frac{\vartheta''}{\vartheta'} \cdot \frac{\vartheta''^2 + \vartheta\vartheta'' - \vartheta^2}{4} \cdot \frac{C}{r'^2} \cdot (\mathcal{A}' + g)(\mathcal{A}' + h)$$

$$Q'' = \frac{\vartheta'^2 - \vartheta''^2}{3} - \frac{\vartheta}{\vartheta'} \cdot \frac{\vartheta^2 + \vartheta\vartheta'' - \vartheta''^2}{4} \cdot \frac{C}{r'^2} \cdot (\mathcal{A}' + g)(\mathcal{A}' + h)$$

zu setzen. In der Praxis wird man in der Gleichung (3) der 49. Vorlesung erst einmal $Q = \vartheta\vartheta''$ und $Q'' = \vartheta\vartheta''$ oder noch besser $Q = \frac{\vartheta'^2 - \vartheta^2}{3}$, $Q'' = \frac{\vartheta'^2 - \vartheta''^2}{3}$ setzen, aus der so erhaltenen vorläufigen Lösung für \mathcal{A}' , \mathcal{A} und \mathcal{A}'' berechnen, die Zeiten wegen Aberration verbessern, und darauf die obigen genaueren Formen in Anwendung bringen.

Noch etwas einfacher indessen gestalten sich die Ausdrücke für Q und Q'' , wenn man \mathcal{A}' und r' durch den Winkel z' selbst eliminirt. Es wird:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' + g &= \frac{R' \sin(\chi' - z') + g \sin z'}{\sin z'} \\ \mathcal{A}' + h &= \frac{R' \sin(\chi' - z') + h \sin z'}{\sin z'}; \end{aligned}$$

setzen wir also:

$$\begin{aligned} \frac{R' \sin \chi'}{R' \cos \chi' - g} &= \operatorname{tg} q \\ \frac{R' \sin \chi'}{R' \cos \chi' - h} &= \operatorname{tg} q'', \end{aligned}$$

so wird:

$$(\mathcal{A}' + g)(\mathcal{A}' + h) = \frac{R'^2 \sin \chi'^2}{\sin z'^2} \cdot \frac{\sin(z' - q) \sin(z' - q'')}{\sin q \sin q''} = r'^2 \frac{\sin(z' - q) \sin(z' - q'')}{\sin q \sin q''},$$

und die obigen Formeln für die verbesserten Werthe von Q und Q'' gehen über in:

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{\vartheta'^2 - \vartheta^2}{3} + \frac{\vartheta''}{\vartheta'} \cdot \frac{\vartheta''^2 + \vartheta\vartheta'' - \vartheta^2}{4} \cdot \frac{C \sin(z' - q) \sin(z' - q'')}{\sin q \sin q''} \\ Q'' &= \frac{\vartheta'^2 - \vartheta''^2}{3} - \frac{\vartheta}{\vartheta'} \cdot \frac{\vartheta^2 + \vartheta\vartheta'' - \vartheta''^2}{4} \cdot \frac{C \sin(z' - q) \sin(z' - q'')}{\sin q \sin q''} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Nach der Definition von Q und Q'' wird dann wieder:

$$\frac{n}{n'} = c = \frac{\vartheta}{\vartheta'} \left(1 + \frac{Q}{2r'^3} \right)$$

$$\frac{n''}{n'} = c'' = \frac{\vartheta''}{\vartheta'} \left(1 + \frac{Q''}{2r'^3} \right),$$

wonach, wenn r' bestimmt worden, c und c'' bekannt werden.

Diese Gleichungen (3) berücksichtigen in Strenge alle Grössen dritter Ordnung in den Verhältnissen $\frac{n}{n'}$ und $\frac{n''}{n'}$, oder, was dasselbe bedeutet, alle Grössen vierter Ordnung in den Flächen n, n', n'' selbst. Wird unsere Finalgleichung für die Bestimmung von z' oder r' , unter Mitnahme dieser Glieder entwickelt, so steigt sie auf den zwölften Grad; sie lässt sich jedoch ohne diese Entwicklung sehr nahe ebenso bequem auflösen, als die des achten Grades, auf welche wir die Bestimmung zurückführten.

Sollen anstatt Q und Q'' , wie sie in Vorlesung 62 definirt sind, die Gauss'schen oder Encke'schen Grössen P und Q gebraucht werden, so wird, da alsdann:

$$P = \frac{n''}{n}$$

$$Q = 2 \left(\frac{n''}{n'} + \frac{n}{n'} - 1 \right) r'^3,$$

nach den obigen Reihenentwickelungen:

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{\vartheta''}{\vartheta} \left\{ 1 + \frac{\vartheta^2 - \vartheta'^2}{6r'^3} - \frac{\vartheta^3 + \vartheta'^3}{8r'^5} \cdot \frac{A + 2B\vartheta' + C\vartheta'^2}{\vartheta'} \right\} \\ &= \frac{\vartheta''}{\vartheta} \left\{ 1 + \frac{\vartheta^2 - \vartheta'^2}{6r'^3} - \frac{\vartheta^3 + \vartheta'^3}{8r'^5} \cdot \frac{C \sin(z' - q) \sin(z' - q'')}{\vartheta' \sin q \sin q''} \right\} \\ Q &= \vartheta \vartheta'' \left\{ 1 + \frac{\vartheta'' - \vartheta}{2r'^2} \cdot \frac{A + 2B\vartheta' + C\vartheta'^2}{\vartheta'} \right\} \\ &= \vartheta \vartheta'' \left\{ 1 + \frac{\vartheta'' - \vartheta}{2\vartheta'} \cdot \frac{C \sin(z' - q) \sin(z' - q'')}{\sin q \sin q''} \right\} \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

Das eben angegebene Verbesserungsverfahren wird in fast allen praktischen Fällen der Ableitung einer weiteren Verbesserung überheben, da die übrig bleibenden Fehler fast immer nur Bruchtheilen von Bogensekunden in der Darstellung der geocentrischen Oerter entsprechen, Grössen, die kaum jemals ein Beobachter wird verbürgen wollen. Es dürfte deshalb dieses Verfahren bei seiner Kürze und Uebersichtlichkeit Empfehlung verdienen. Um dasselbe durch ein Rechnungsbeispiel zu erläutern, knüpfen wir an die von Encke für die Hebe gefundenen Zahlen an (Vorlesung 64). Wir haben:

$$q = \Delta \cos \beta = M_1 \frac{q'}{c} = M_1 \frac{\Delta' \cos \beta'}{c}$$

$$q'' = \Delta'' \cos \beta'' = M_1'' \frac{q'}{c''} = M_1'' \frac{\Delta' \cos \beta'}{c''},$$

d. h.:

$$a = \frac{\cos \beta'}{\cos \beta} M_1$$

$$a'' = \frac{\cos \beta'}{\cos \beta''} M_1''.$$

Als Zahlenwerthe erhalten wir:

$$\log a = 9,7341708$$

$$\log a'' = 9,6679562,$$

ferner mit den für Aberration¹⁾ corrigirten Werthen von ϑ , ϑ' , ϑ'' oder mit:

$$\log \vartheta = 9,0123443, \quad \log \vartheta' = 9,2755706, \quad \log \vartheta'' = 8,9331298,$$

$$\log A = 6,9283640_n$$

$$\log B = 8,9501074_n$$

$$\log C = 8,7850447$$

$$\log g = 7,6763938$$

$$\log h = 0,4667970_n$$

$$q = 37^\circ 0' 54'',5$$

$$q'' = 9^\circ 15' 6'',0$$

$$\frac{\vartheta^2 - \vartheta''^2}{6} = 0,0005392$$

$$\frac{\vartheta^3 + \vartheta''^3}{8 \vartheta'} \cdot \frac{C}{\sin q \sin q''} = 0,00071756$$

$$\frac{\vartheta'' - \vartheta}{2 \vartheta'} \cdot \frac{C}{\sin q \sin q''} = -0,0286404,$$

also:

$$P = \frac{\vartheta''}{\vartheta} \left\{ 1 + \frac{0,0005392}{r'^2} - \frac{0,00071756}{r'^2} \sin(z' - 37^\circ 0' 54'',5) \sin(z' - 9^\circ 15' 6'',0) \right\}$$

$$Q = \vartheta \vartheta'' \{ 1 - 0,0286404 \sin(z' - 37^\circ 0' 54'',5) \sin(z' - 9^\circ 15' 6'',0) \}.$$

Wird hier eingesetzt, was durch die vorläufige Rechnung der ersten Hypothese erhalten wurde, nämlich:

$$z' = 14^\circ 12' 38'',24$$

$$\log r' = 0,3950737,$$

so finden wir:

$$\log P = 9,9208015$$

$$\log Q = 7,9458051.$$

Stellen wir mit diesen Grössen wieder die Gleichung auf:

$$\sin(z' - q') = m \sin z'^4,$$

so erhalten wir:

$$\sin(z' - 13^\circ 35' 4'',50) = (0,4807492) \sin z'^4.$$

Als Lösung ergibt sich:

$$z' = 14^\circ 12' 53'',32$$

$$\log r' = 0,3949482.$$

Der Unterschied gegen die strengen Werthe:

$$z' = 14^\circ 12' 54'',20$$

$$\log r' = 0,3949410$$

ist praktisch fast ganz unmerklich, indem der zweite geocentrische Ort bis auf einen Bruchtheil einer Bogensecunde in beiden Coordinaten durch die entsprechenden Elemente dargestellt würde.

Die in der 49. Vorlesung gegebene Form der Finalgleichung unterstützt durch ihre Symmetrie die gemeinschaftliche Erledigung der ersten und zweiten Hypothese mehr als die Encke'sche Methode. Es wird unnöthig sein, noch für jene Art der Berechnung ein Beispiel beizubringen, da alles Wesentliche schon aus dem Vorhergehenden ersehen werden kann.

Die Berücksichtigung der Glieder vierter Ordnung in der Entwicklung von n , n' , n'' , oder der dritten Ordnung in deren Verhältnissen hat uns für r' auf eine

¹⁾ Siehe Bemerkung S. 297.

Gleichung des zwölften Grades geführt, die aufzulösende Finalgleichung also um vier Grade erhöht. Die Gleichung ist nicht auf einen niederen Grad reducierbar; demnach ist der zwölfte Grad der niedrigste, auf den man bei Berücksichtigung aller jener Glieder nothwendig geführt werden muss.

Einundsiebenzigste Vorlesung.

Fortsetzung der Entwicklungen zur Verbesserung der Hypothesen.

Eine andere einfache Art, die Werthe von P und Q oder von Q und Q'' zu verbessern, lässt sich aus dem in der 8. Vorlesung behandelten Lambert'schen Satze über die Bewegung in Kegelschnitten herleiten.

Nach den Gleichungen, welche P und Q unter Beibehaltung bekannter Bezeichnung definiren:

$$P = \frac{n''}{n} = \frac{n''}{\vartheta''} \cdot \frac{\vartheta}{n} \cdot \frac{\vartheta''}{\vartheta}$$

$$Q = 2 \left(\frac{n + n''}{n'} - 1 \right) r'^3 - 2 \left(\frac{n}{\vartheta} \cdot \frac{\vartheta'}{n'} \cdot \frac{\vartheta}{\vartheta'} + \frac{n''}{\vartheta''} \cdot \frac{\vartheta'}{n'} \cdot \frac{\vartheta''}{\vartheta'} - 1 \right) r'^3$$

haben wir zur Verbesserung der Hypothese das Verhältniss von je zwei der Grössen:

$$\frac{n}{\vartheta}, \frac{n'}{\vartheta'}, \frac{n''}{\vartheta''}$$

zu ermitteln.

Zu dem Ende machen wir von den Gleichungen:

$$b \sin \frac{1}{2} (E' - E) = \sqrt{r r'} \sin \frac{1}{2} (v' - v)$$

und

$$\delta - \sin \delta - (\delta' - \sin \delta') = \frac{k(t - t')}{a^{3/2}}$$

der 8. Vorlesung Gebrauch. Nach dem Inhalte derselben Vorlesung, wenn man z. B. die Gleichung (2) daselbst unter der Form:

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2} (E' - E) &= \sqrt{\frac{r' + r + \kappa}{4a} \cdot \frac{r' + r - \kappa}{4a}} \\ &+ \sqrt{\frac{4a' - r' - r + \kappa}{4a} \cdot \frac{4a - r' - r - \kappa}{4a}} \\ &= \cos \frac{1}{2} \delta \cos \frac{1}{2} \delta' + \sin \frac{1}{2} \delta \sin \frac{1}{2} \delta' \end{aligned}$$

schreibt, ist:

$$E' - E = \delta' - \delta.$$

Für das Verhältniss $\frac{\vartheta'}{n'}$ haben wir demnach, mit Rücksicht darauf, dass nach dem Vorhergehenden:

$$\begin{aligned} n' &= b \sin \frac{1}{2} (\delta'' - \delta) \cdot 4a \cdot \sin \frac{\delta}{2} \cdot \sin \frac{\delta''}{2} \\ \frac{\vartheta'}{n'} &= \frac{a^{1/2}}{4b} \cdot \frac{\delta'' - \delta - (\sin \delta'' - \sin \delta)}{\sin \frac{1}{2} (\delta'' - \delta) \sin \frac{\delta}{2} \sin \frac{\delta''}{2}}. \end{aligned}$$

Offenbar dürfen wir den Factor $\frac{a^{1/2}}{4b}$ hier ganz unterdrücken, weil bei der Ver-

besserung des P und Q die Verhältnisse $-\frac{\vartheta}{n}, \frac{\vartheta'}{n'}, \frac{\vartheta''}{n''}$ nur in einander dividirt vorkommen, wodurch der constante Factor wegfällt. Wir schreiben, um die Unterdrückung des Factors anzuzeigen, die Verhältnisse $\frac{\vartheta}{n}, \frac{\vartheta'}{n'}, \frac{\vartheta''}{n''}$ mit Klammern, also die vorhergehende Gleichung

$$\left(\frac{\vartheta'}{n'}\right) = \frac{\delta'' - \delta - (\sin \delta'' - \sin \delta)}{\sin \frac{1}{2}(\delta'' - \delta) \sin \frac{\delta}{2} \cdot \sin \frac{\delta''}{2}}.$$

Nach einer bekannten Reihenentwicklung ist:

$$\frac{1}{2}(\delta'' - \delta) = \sin \frac{1}{2}(\delta'' - \delta) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \sin \frac{1}{2}(\delta'' - \delta)^3 + \dots;$$

setzen wir also:

$$\delta'' - \delta = \{2m \sin \frac{1}{2}(\delta'' - \delta)\},$$

so wird m immer bis auf Grössen der zweiten Ordnung inclusive gleich der Einheit bleiben und man wird, da auch der Factor 2 weggelassen werden kann, haben:

$$\left(\frac{\vartheta'}{n'}\right) = \frac{m - \cos \frac{1}{2}(\delta'' + \delta)}{\sin \frac{1}{2}(\delta'' - \delta) \sin \frac{\delta}{2} \cdot \sin \frac{\delta''}{2}} \dots \dots \dots (1)$$

Um diese Formel in Anwendung bringen zu können, bedarf es der Kenntniss von δ und δ'' , da m mit grösster Schärfe aus der Differenz dieser Grössen berechnet werden kann. δ und δ'' aber würden bekannt sein, wenn a bekannt wäre; denn man hätte alsdann:

$$\sin \frac{1}{2}\delta^2 = \frac{r + r'' - x}{4a}$$

$$\sin \frac{1}{2}\delta''^2 = \frac{r + r'' + x}{4a}.$$

Hieraus ergiebt sich folgender sehr einfache Weg der Verbesserung: man bestimme durch Versuche denjenigen Werth von a , welcher die Gleichung:

$$\frac{\vartheta'}{a^{3/2}} = \delta'' - \delta - (\sin \delta'' - \sin \delta) \dots \dots \dots (2)$$

befriedigt, und berechne aus den gefundenen Werthen von δ und δ'' die Grössen der Gleichung (1).

Eine Umformung der Gleichung (2) soll in der nächsten Vorlesung behandelt werden; da diese Anwendung des Lambert'schen Satzes interessante Beziehung zu anderen Doctrinen hat, so erscheint es nützlich, etwas länger, als es unser nächstes Ziel erforderte, dabei zu verweilen.

Wir werden dann in der Folge eine noch einfachere und übersichtlichere Form der Verbesserung der Hypothese durch den Lambert'schen Satz kennen lernen.

Zweiundsiebenzigste Vorlesung.

Die zur Beschreibung eines Kegelschnittbogens gebrauchte Zeit, ausgedrückt durch ein bestimmtes Integral.

Der Unterschied zwischen einem Bogen y und seinem Sinus $\sin y$ kann, wenn

$$\sin \frac{1}{2} y^2 = x$$

gesetzt wird, unter der Form:

$$2 \operatorname{arc} \sin \sqrt{x} - 2 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}$$

geschrieben werden. Differenziert man diese Function nach x , so erhält man:

$$\frac{1}{\sqrt{x-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \text{ oder } \frac{2x}{\sqrt{x-x^2}},$$

d. h. also:

$$y - \sin y = 2 \int \frac{x dx}{\sqrt{x-x^2}}.$$

Die Grösse:

$$\delta'' - \sin \delta'' - (\delta - \sin \delta)$$

der vorigen Vorlesung ist demnach identisch mit dem bestimmten Integral:

$$2 \int \frac{\frac{r+r''+x}{4a} x dx}{\sqrt{\frac{r+r''-x}{4a} r - r^2}}$$

und die Gleichung (2) lässt sich schreiben:

$$t'' - t = \frac{2 a^{3/2}}{k} \cdot \int \frac{\frac{r+r''+x}{4a} x dx}{\sqrt{\frac{r+r''-x}{4a} r - r^2}} \dots \dots \dots (1)$$

Diesen Ausdruck wollen wir, weil es besonderes Interesse gewährt, auch aus den Elementen der Attractionslehre ableiten. Nach der 8. Vorlesung ist die in Rede stehende Zeit durch die Summe der beiden Radienvectoren $r + r''$, die Sehne x und die halbe grosse Axe a vollständig bestimmt und deshalb auf die Bewegung in einer unendlich schmalen Ellipse reducirbar, wie sie ein ohne alle seitliche Geschwindigkeit nach der Sonne fallender Körper beschreiben würde. Nennt man dabei z die Entfernung von der Sonne, so wird die auf z wirkende beschleunigende Kraft ausgedrückt durch:

$$- \frac{k^2}{z^2}$$

und nach bekannten Grundsätzen haben wir demnach:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = - \frac{k^2}{z^2}$$

oder:

$$\frac{d \frac{dz}{dt}}{dt} = - \frac{k^2}{z^2}.$$

Multiplizieren wir hier mit $\frac{dz}{dt} dt$, so wird die Gleichung integrirbar; denn man hat dann:

$$\frac{dz}{dt} \cdot d \frac{dz}{dt} = - \frac{k^2}{z^2} \cdot dz,$$

also:

$$\frac{dz^2}{dt^2} + \text{Constans} = \frac{2k^2}{z}.$$

Die Integrationsconstante bestimmt man durch folgende Betrachtung. Bei dem in Rede stehenden Grenzfall der elliptischen Bewegung fällt die Sonne bis auf unendlich Kleines mit dem einen Scheitel der Ellipse zusammen und das Perihel wird in einem Bogen von unendlich geringem Krümmungshalbmesser durchlaufen. Der Abstand von der Sonne im Aphel ist $2a$; für diesen Werth von z ist daher $\frac{dz}{dt} = 0$. Somit haben wir:

$$\frac{2k^2}{2a} - \text{Constans} = 0$$

oder:

$$\text{Constans} = \frac{k^2}{a}$$

und

$$\frac{dz}{dt} = k \sqrt{\frac{2}{z} - \frac{1}{a}}.$$

Die Zeit $t'' - t$, welche nöthig ist, um von einem Werthe von z , $z = z_0$, zu einem anderen $z = z''$ zu gelangen, drückt sich also durch das bestimmte Integral:

$$\frac{1}{k} \int_{z_0}^{z''} \frac{dz}{\sqrt{\frac{2}{z} - \frac{1}{a}}}$$

aus. Es muss nun aber, damit nach dem Lambert'schen Satze diese Zeit $t'' - t$ dieselbe sei, wie in dem Kegelschnitte mit den Radienvectoren r und r'' und der Sehne x :

$$\begin{aligned} z'' + z_0 &= r'' + r \\ z'' - z_0 &= x \end{aligned}$$

sein. Wir haben also zunächst:

$$t'' - t = \frac{1}{k} \int_{\frac{1}{2}(r+r''-x)}^{\frac{1}{2}(r+r''+x)} \frac{dz}{\sqrt{\frac{2}{z} - \frac{1}{a}}} = \frac{1}{k} \int_{\frac{1}{2}(r+r''-x)}^{\frac{1}{2}(r+r''+x)} \frac{z dz}{\sqrt{2z - \frac{z^2}{a}}}.$$

In diesem letzteren Integral brauchen wir nur eine andere Integrationsvariable x einzuführen, indem wir:

$$z = 2ax$$

setzen; die Grenzen werden dann:

$$\frac{r+r''-x}{4a} \quad \text{und} \quad \frac{r+r''+x}{4a}$$

und wir erhalten nach Aufhebung einiger Factoren im Zähler und im Nenner wieder den obigen Ausdruck:

$$t'' - t = \frac{2 a^{3/2}}{k} \int \frac{x dx}{\sqrt{x - x^2} \cdot \frac{r + r'' - x}{4a}}.$$

Diese Formel gestattet, abgesehen von ihrem theoretischen Interesse, auch manche praktische Anwendung, z. B. die Ableitung einer Näherungsformel für a . Betrachten wir der Kürze halber die rechte Seite des Ausdrucks als eine Function der kleinen Grösse $\frac{x}{4a}$, welche Function wir mit $f(x)$ bezeichnen wollen, so haben wir nach dem Taylor'schen Satze:

$$f(x) = f(x)_0 + \frac{df(x)_0}{dx} x + \dots,$$

wobei $f(x)_0$, $\frac{df(x)_0}{dx}$ u. s. w. die Werthe sind, welche die Function und ihre Derivirten nach x für den Werth $x = 0$ annehmen. Offenbar ist nun nach den Elementen der Lehre von den bestimmten Integralen:

$$\begin{aligned} f(x)_0 &= 0 \\ \frac{df(x)_0}{dx} &= \frac{x}{\sqrt{x - x^2}} \cdot \frac{2}{4a} \cdot \frac{2a^{3/2}}{k}, \end{aligned}$$

also:

$$k(t'' - t) = \vartheta' = \frac{x}{\sqrt{x - x^2}} \cdot \sqrt{\frac{a}{2}},$$

wobei für x die Grösse $\frac{r + r''}{4a}$ einzusetzen ist. Schafft man durch das Erheben ins Quadrat alle Wurzelzeichen fort, so erhält man für $\frac{1}{4a}$ folgende Annäherungsformel:

$$\frac{1}{4a} = \frac{1}{r + r''} - \frac{x^2}{4\vartheta'^2} \dots \dots \dots (2)$$

Diese Gleichung vernachlässigt nur die dritten und höheren Potenzen der kleinen Grössen x , kommt daher in den praktischen Fällen der Wahrheit recht nahe. Wenn man für denselben Zweck eine algebraische Gleichung höheren Grades ableiten will, so geht man besser von der Formel:

$$\vartheta' \sqrt{2} = \int_{\frac{1}{2}(r + r'' - x)}^{\frac{1}{2}(r + r'' + x)} \frac{u du}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{2a}}}$$

aus, welche in den obigen Entwicklungen enthalten ist. Es sei zur Abkürzung:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{2a}}} = Z,$$

so wird nach den angegebenen Principien:

$$\vartheta' \sqrt{2} = 2 \left\{ Z \frac{x}{2} + \frac{d^2 Z}{dx^2} \left(\frac{x}{2} \right)^3 + \frac{d^4 Z}{dx^4} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^5 + \dots \right\},$$

wenn in Z und seinen Derivirten $x = \frac{1}{2}(r + r'')$ gesetzt wird. Alle Coëfficienten von x in dieser Gleichung treten daher in der Form von Potenzen der zu bestimmenden Grösse:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}(r+r'')} - \frac{1}{2a}}},$$

welche wir mit ξ bezeichnen wollen, und der gegebenen Grösse z oder $r + r''$ auf. Man erhält durch Differentiation:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = -\frac{Z^3}{z^3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{Z^5}{z^4},$$

demnach, wenn die fünfte und die höheren Potenzen von z vernachlässigt werden, für die ξ die Gleichung:

$$\vartheta' \sqrt{2} = z \xi - \frac{1}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^3} \cdot \frac{z^3 \xi^3}{24} + \frac{1}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^4} \cdot \frac{z^5 \xi^5}{32} \dots \dots (3)$$

Aus ξ findet man die grosse Axe $2a$ mittelst der Relation:

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{\frac{1}{2}(r+r'')} - \frac{1}{\xi^2} \dots \dots \dots (4)$$

Die Gleichung (3) bequem aufzulösen, schreibe man sie in der Form:

$$\xi = \frac{\vartheta'}{z} \sqrt{2} + \frac{1}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^3} \cdot \frac{z^2 \xi^3}{24} - \frac{1}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^4} \cdot \frac{z^4 \xi^5}{32}.$$

Die erste Näherung, mit der oben für $\frac{1}{4a}$ gefundenen übereinstimmend, ist:

$$\xi = \frac{\vartheta'}{z} \sqrt{2},$$

welche in das mit z^2 multiplicirte Glied für ξ eingesetzt wird, um eine genauere Lösung zu erhalten. Letztere wird wiederum in ξ^3 und ξ^5 substituirt und das Verfahren so weit fortgesetzt, bis sich an den erhaltenen Werthen nichts mehr ändert. Auf solche Weise erhalten wir unter Anderem die Näherungsformel:

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{z} \left\{ \vartheta' + \frac{1}{12} \frac{\vartheta'^3}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^3} - \frac{1}{8} \frac{\vartheta'^5}{z^2 \left(\frac{r+r''}{2}\right)^4} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Diese Formel liefert in allen praktischen Fällen einen sehr angenäherten Werth von ξ und dann von a , der für den Zweck der Verbesserung von P und von Q (oder auch von Q und Q'' bei Anwendung der symmetrischen Form) meist vollkommen genügt.

Zur Erläuterung des Gebrauches der Gleichung (5) seien gegeben:

$$\begin{array}{ll} \log r &= 0,3307640 & \log z &= 9,4525659 \\ \log r'' &= 0,3222239 & t'' - t &= 21,93391, \end{array}$$

also:

$$\log \vartheta' = 9,5766974$$

und:

$$\vartheta' = 0,3773092$$

$$\frac{1}{12} \frac{\vartheta'^3}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^3} = 0,0004692$$

$$- \frac{1}{8} \frac{z^2 \vartheta'^5}{\left(\frac{r+r''}{2}\right)^4} = - 0,0005878$$

$$\log \xi = 0,2745100,$$

endlich nach Formel (4):

$$\log a = 0,4224425.$$

Der strenge Werth von $\log a$ ist 0,4224391, wie man leicht durch Substitution in die Gleichung $\vartheta' = a^{3/2} \{\delta'' - \delta - (\sin \delta'' - \sin \delta)\}$ finden kann; demnach beträgt der Fehler der Form (5) hier nur 34 Einheiten der siebenten Stelle, welche Genauigkeit für den Zweck der Verbesserung der Hypothese mittelst der Gleichung (1) der vorigen Vorlesung vollständig ausreichen würde.

Dreiundsiebenzigste Vorlesung.

Berechnung der Elemente b , c , p und der mittleren Anomalie der gewählten Epoche.

Die halbe grosse Axe ist gewissermaassen das Hauptelement des ganzen Elementensystemes, denn sie bestimmt die Umlaufszeit und es wird daher sehr häufig das Resultat, welches sich dafür ergibt, mit einer gewissen Spannung erwartet werden, die bei dem Rechner erst nach Erlangung eines hinreichend sicheren Näherungswerthes nachlässt. Mit Rücksicht hierauf ist es angenehm, gerade die Bestimmung von a an die Spitze gestellt zu sehen. Es fällt aber nachher die Berechnung der übrigen Elemente, von welchen die Bewegung in der Bahnebene selbst abhängt, so einfach aus, und es liegt dafür nach den Entwicklungen der Vorlesung Alles so bereit, dass wir die dazu kaum noch nöthige Erläuterung hier gleich anschliessen wollen.

Aus a folgt zunächst δ und δ'' mittelst der Formeln:

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} \delta^2 &= \frac{r + r''}{4a} = x \\ \sin \frac{1}{2} \delta''^2 &= \frac{r + r'' + x}{4a}. \end{aligned}$$

Die Differenz $\delta'' - \delta$ ist zugleich auch die Differenz der excentrischen Anomalien $E'' - E$; folglich haben wir sofort die halbe kleine Axe b aus der Relation:

$$b \sin \frac{1}{2} (E'' - E) = b \sin \frac{1}{2} (\delta'' - \delta) = \sqrt{r r''} \sin \frac{1}{2} (v'' - v).$$

Ferner ist:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2} = \cos \varphi (1)$$

wo φ den Excentricitätswinkel vorstellt. Letztere Formel ist vortheilhaft bei grossen Excentricitäten, wie sie bei den periodischen Kometen vorkommen. Ist dagegen φ klein, wie bei der grossen Mehrzahl der Planeten, so kann e zugleich mit der excentrischen Anomalie auf folgende Art gefunden werden. Man hat:

$$\begin{aligned} e \cos E &= 1 - \frac{r}{a} \\ e \cos E'' &= 1 - \frac{r''}{a}, \end{aligned}$$

und durch Addition und Subtraction dieser Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} 2ae \cos \frac{1}{2}(E'' + E) &= [2a - (r'' + r)] \sec \frac{1}{2}(E'' - E) \\ 2ae \sin \frac{1}{2}(E'' + E) &= (r'' - r) \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(E'' - E), \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

aus welchen Gleichungen $\frac{1}{2}(E'' + E)$ und also, da $\frac{1}{2}(E'' - E) = \frac{1}{2}(\delta'' - \delta)$, auch E und E'' selbst sich ergeben. Endlich folgen noch M und M'' die mittleren Anomalien für t und t'' . Ist nun dieser Theil der Rechnung richtig geführt, so muss:

$$M'' - M = \frac{\vartheta'}{a^{3/2}}$$

werden.

In dem Beispiel der vorigen Vorlesung würden wir, nachdem die Gleichung:

$$\frac{\vartheta'}{a^{3/2}} = \delta'' - \delta - (\sin \delta'' - \sin \delta)$$

durch den Werth $\log a = 0,4224391$ scharf berichtigt ist¹⁾:

$$\frac{1}{2}\delta = 37^\circ 42' 31'',55$$

$$\frac{1}{2}\delta'' = 40^\circ 50' 35'',64$$

finden. Die Anwendung der Formel (1) würde darauf ergeben (da nämlich $v'' - v = 7^\circ 34' 53'',73$ und also:

$$\log b = \log \frac{r r'' \sin \frac{1}{2}(v'' - v)}{\sin \frac{1}{2}(\delta'' - \delta)} = 0,4089598$$

ist),

$$\log \cos \varphi = 9,9865207$$

$$\varphi = 14^\circ 12' 5'',00.$$

Werden dagegen die Formeln (2) angenommen, so erhält man:

$$\log 2ae \sin \frac{1}{2}(E'' + E) = 9,8823552_n$$

$$\log 2ae \cos \frac{1}{2}(E'' + E) = 0,0211831,$$

d. h. unzweideutig, weil $2ae$ positiv werden muss:

$$\frac{1}{2}(E'' + E) = 324^\circ 0' 20'',09$$

$$\log 2ae = 0,1131948$$

$$\log e = \log \sin \varphi = 9,3897257$$

$$\varphi = 14^\circ 12' 1'',81,$$

ferner

$$E = 320^\circ 52' 16'',00$$

$$E'' = 327^\circ 8' 24'',18$$

$$M = E - e \sin E = 320^\circ 52' 16'',00 + 31932'',01 = 329^\circ 44' 28'',01$$

$$M'' = E'' - e \sin E'' = 327^\circ 8' 24'',18 + 27454'',94 = 334^\circ 45' 59'',12.$$

Hier ist $M'' - M = 5^\circ 1' 31'',11$, während $\frac{h(t'' - t)}{a^{3/2}} = 5^\circ 1' 31'',03$; die Differenz

der Prüfungsgleichung 0,08 deutet einen kaum merklichen Fehler der Rechnung an.

Die Berechnung von v und v'' wird nothwendig, wenn man die Lage des Perihels bestimmen will; man hat zu dem Zwecke die Formeln:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}v = \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2}E$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}v'' = \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2}E'',$$

¹⁾ Dabei leistet der Gauss'sche Kunstgriff des logarithmischen Incrementes, welcher in der 4. Vorlesung auf die Kepler'sche Gleichung angewendet wurde, die besten Dienste.

und dann die Prüfung, ob $v'' - v$ mit dem Werthe aus den früheren Rechnungen in Uebereinstimmung ist. Hier findet man:

$$v = 310^{\circ} 55' 30'', 28$$

$$v'' = 318 \ 30 \ 24,06$$

in hinreichend befriedigender Uebereinstimmung mit dem oben angenommenen Werthe $v'' - v = 7^{\circ} 34' 53'', 73$.

Für $a \cos \varphi^2$ oder p , den halben Parameter, ergibt sich:

$$\log p = 0,3954639.$$

Die eben gefundenen Zahlen stimmen bis auf äusserst kleine Unterschiede mit denjenigen überein, welche von Gauss in der Theoria motus aus denselben Daten abgeleitet werden.

Es mag noch die Bemerkung hier einen Platz finden, dass die Bequemlichkeit des Verfahrens keine Einbusse dadurch erleidet, dass $r + r''$, welches in dem Nenner der Glieder der Gleichung (5) und (6) der Vorlesung vorkommt, klein wird. Wo dies etwa bei periodischen Kometen in dem sichtbaren Theile ihrer Bahn der Fall ist, nimmt auch die Grösse ξ entsprechend ab, denn die letztere ist nach den obigen Entwicklungen der reciproke Werth der Geschwindigkeit des Körpers, d. h. eine Grösse, welche der Quadratwurzel aus dem Radius vector umgekehrt proportional ist. Die Näherung, welche die genannten Gleichungen gewähren, wird demnach auch für solche Fälle eine sehr brauchbare sein.

Vierundsiebenzigste Vorlesung.

Die Gauss'schen und die Encke'schen Formeln für die Verbesserung der Dreiecksflächen.

Aus der Kepler'schen Gleichung folgt, für die erste und dritte Beobachtung angewendet:

$$\frac{kt}{a^{3/2}} = E - e \sin E$$

$$\frac{kt''}{a^{3/2}} = E'' - e \sin E'',$$

wobei die Zeiten vom Perihel an gerechnet werden, also ferner:

$$\frac{\vartheta'}{a^{3/2}} = E'' - E - 2e \sin \frac{1}{2}(E'' - E) \cos \frac{1}{2}(E'' + E),$$

oder unter Einführung des halben Parameters p :

$$\vartheta' \sqrt{p} = a^2 \sqrt{1 - e^2} \{E'' - E - 2e \sin \frac{1}{2}(E'' - E) \cos \frac{1}{2}(E'' + E)\} \quad (1)$$

Erinnert man sich nun der Formeln:

$$\sin \frac{1}{2} E \sqrt{a(1 + e)} = \sin \frac{1}{2} v \sqrt{r}$$

$$\cos \frac{1}{2} E \sqrt{a(1 - e)} = \cos \frac{1}{2} v \sqrt{r}$$

$$\sin \frac{1}{2} E'' \sqrt{a(1 + e)} = \sin \frac{1}{2} v'' \sqrt{r''}$$

$$\cos \frac{1}{2} E'' \sqrt{a(1 - e)} = \cos \frac{1}{2} v'' \sqrt{r''},$$

so erhält man ohne Mühe:

$$\sin^{1/2}(E'' - E) \sqrt{a} = \frac{\sin^{1/2}(v'' - v) \sqrt{r r''}}{\sqrt{p}} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$e \cos^{1/2}(E'' + E) = \cos^{1/2}(E'' - E) - \frac{\cos^{1/2}(v'' - v) \sqrt{r r''}}{a} \quad . \quad . \quad (3)$$

Substituirt man diese Werthe von $\sin^{1/2}(E'' - E)$ und $\cos^{1/2}(E'' + E)$ in die obige Gleichung (1), so wird:

$$\begin{aligned} \vartheta' \sqrt{p} &= a^2 \sqrt{1 - e^2} \{E'' - E - \sin(E'' - E) \\ &\quad + 2 \sin^{1/2}(E'' - E) \{ \cos^{1/2}(E'' - E) - e \cos^{1/2}(E'' + E) \} \} \\ &= a^2 \sqrt{1 - e^2} \left\{ E'' - E - \sin(E'' - E) + \frac{2 \sin^{1/2}(v'' - v) \cos^{1/2}(v'' - v) r r''}{a^{3/2} \sqrt{p}} \right\} \\ &= a^2 \sqrt{1 - e^2} \{E'' - E - \sin(E'' - E)\} + r r'' \sin(v'' - v). \end{aligned}$$

Setzt man hier den aus (2) folgenden Werth von a ein, so ergibt sich:

$$\vartheta' \sqrt{p} = \left(\frac{(E'' - E) - \sin(E'' - E)}{\sin^{1/2}(E'' - E)^3} \right) \cdot \left\{ \frac{\sin^{1/2}(v'' - v) \sqrt{r r''}}{\sqrt{p}} \right\}^3 \sqrt{p} + r r'' \sin(v'' - v),$$

d. h., wenn wir, wie früher, unter η' das zugehörige Verhältniss $\frac{\Delta}{\text{Sector}}$ verstehen:

$$\vartheta' = \left(\frac{E'' - E - \sin(E'' - E)}{\sin^{1/2}(E'' - E)^3} \right) \cdot \left\{ \frac{\vartheta'}{2 \cos^{1/2}(v'' - v) \sqrt{r r''}} \right\}^3 \cdot \eta'^3 + \vartheta' \eta' \quad . \quad . \quad (4)$$

Aus letzterer Gleichung würde sofort der Werth von η' zu ermitteln sein, wenn nur der Factor:

$$\frac{E'' - E - \sin(E'' - E)}{\sin^{1/2}(E'' - E)^3}$$

bekannt wäre. Von der Bestimmung desselben hängt also die Verbesserung der Hypothesen vorzugsweise ab. Zieht man noch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} r &= a (1 - e \cos E) \\ r'' &= a (1 - e \cos E'') \end{aligned}$$

zu Hülfe, so erhält man zunächst:

$$r + r'' = 2a [1 - e \cos^{1/2}(E'' + E) \cos^{1/2}(E'' - E)]$$

und dann durch Einsetzung des aus (3) folgenden Werthes für $e \cos^{1/2}(E'' + E)$:

$$\begin{aligned} r + r'' &= 2a \sin^{1/2}(E'' - E)^2 + 2 \cos^{1/2}(v'' - v) \sqrt{r r''} \cos^{1/2}(E'' - E) \\ &= \frac{2 r r'' \sin^{1/2}(v'' - v)^2}{p} + 2 \cos^{1/2}(v'' - v) \sqrt{r r''} \{1 - 2 \sin^{1/4}(E'' - E)^2\} \\ &= 2 \vartheta'^2 \eta'^2 \left(\frac{1}{2 \cos^{1/2}(v'' - v) \sqrt{r r''}} \right)^2 \\ &\quad + 2 \cos^{1/2}(v'' - v) \sqrt{r r''} \{1 - 2 \sin^{1/4}(E'' - E)^2\}, \end{aligned}$$

also eine Gleichung zwischen $\sin^{1/4}(E'' - E)^2$, η'^2 und bekannten Grössen. Nach der ersteren der beiden Unbekannten aufgelöst liefern sie:

$$\sin^{1/4}(E'' - E)^2 = \vartheta'^2 \eta'^2 \left(\frac{1}{2 \cos^{1/2}(v'' - v) \sqrt{r r''}} \right)^3 \left\{ \begin{aligned} &- \frac{r + r'' - 2 \cos^{1/2}(v'' - v) \sqrt{r r''}}{4 \cos^{1/2}(v'' - v) \sqrt{r r''}} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Jetzt braucht man nur noch den in (4) vorkommenden Factor:

$$\frac{E'' - E - \sin(E'' - E)}{\sin^{1/2}(E'' - E)^3}$$

in eine nach Potenzen von $\sin^{1/4}(E'' - E)$ fortschreitende Reihe zu verwandeln, um in den Gleichungen (4) und (5) eine Lösung der uns beschäftigenden Aufgabe, Verbesserung der Dreiecksflächen ohne Zurückgehen auf die Bahnelemente selbst zu haben. Gauss führt die verlangte Reihenentwicklung in der Theoria motus etc. art. 90 in folgender Weise aus.

Es sei zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} 2g - \sin 2g &= X \\ \sin g^3 & \\ \sin^{1/2} g^2 &= x. \end{aligned}$$

Differentiirt man sowohl X als auch x nach g , so wird:

$$\begin{aligned} 3X \cos g \sin g^2 + \sin g^3 \frac{dX}{dg} &= 2 - 2 \cos 2g = 4 \sin g^2 \\ \frac{dx}{dg} &= \frac{1}{2} \sin g, \end{aligned}$$

also:

$$\frac{dX}{dx} = \frac{\frac{dX}{dg}}{\frac{dx}{dg}} = \frac{8 - 6X \cos g}{\sin g^2},$$

und da:

$$\begin{aligned} \cos g &= 1 - 2 \sin^{1/2} g^2 = 1 - 2x, \quad \sin g^2 = 1 - \cos g^2 = 4x(1 - x) \\ \frac{dX}{dx} &= \frac{4 - 3X(1 - 2x)}{2x(1 - x)} \end{aligned}$$

oder auch:

$$(2x - 2x^2) \frac{dX}{dx} = 4 - (3 - 6x)X \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Nimmt man nun an, die Reihenentwicklung von X nach x habe die Form:

$$X = \frac{4}{3} (1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \dots),$$

worin $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ constante Coëfficienten sind, und substituirt aus dieser Form in die Gleichung (6), so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \{ \alpha x + (2\beta - \alpha)x^2 + (3\gamma - 2\beta)x^3 + (4\delta - 3\gamma)x^4 + \dots \} \\ = (8 - 4\alpha)x + (8\alpha - 4\beta)x^2 + (8\beta - 4\gamma)x^3 + (8\gamma - 4\delta)x^4 + \dots, \end{aligned}$$

und nach dem bekannten Fundamentalsatz für die Methode der unbestimmten Coëfficienten:

$$\alpha = \frac{6}{5}, \quad \beta = \frac{8}{7}\alpha, \quad \gamma = \frac{10}{9}\beta, \quad \delta = \frac{12}{11}\gamma \text{ u. s. w.}$$

Wir haben also folgende Reihe:

$$\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3} = \frac{4}{3} \left\{ \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} \sin^{1/2} g^2 + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7} \sin^{1/2} g^4 + \dots \text{etc.} \right\} \quad . \quad . \quad (7)$$

Die Gleichungen (4) und (5) nehmen durch Einführung einer von der Sehne κ zwischen den beiden Radienvectoren abhängigen Hilfsgrösse eine noch etwas bequemere Gestalt an. Setzt man nämlich:

$$\frac{\kappa}{r + r''} = \sin \varphi',$$

wodurch zugleich:

$$\begin{aligned} (r + r'')^2 \sin \varphi'^2 &= \kappa^2 = r^2 + r''^2 - 2rr'' \cos(v'' - v) \\ &= (r + r'')^2 - 4rr'' \cos^{1/2}(v'' - v)^2, \end{aligned}$$

d. h.:

$$2 \cos^{1/2}(v'' - v) \sqrt{r r''} = (r + r'') \cos \varphi'$$

sich ergibt, so gehen die Gleichungen (4) und (5) in die folgenden über:

$$\sin^{1/4}(E'' - E)^2 = \vartheta'^2 \eta'^2 \left(\frac{1}{(r + r'') \cos \varphi'} \right)^3 - \frac{\sin^{1/2} \varphi'^2}{\cos \varphi'} \quad \dots \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta' - \vartheta' \eta' &= \left\{ \frac{4}{3} + \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} \sin^{1/4}(E'' - E)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7} \sin^{1/4}(E'' - E)^4 + \dots \right\} \left(\frac{\vartheta' \eta'}{(r + r'') \cos \varphi'} \right)^3 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (9)$$

Was nun die Auflösungen dieser Gleichungen betrifft, welche Gauss durch Hilfstafeln sehr erleichtert hat, so genügt hier folgende Bemerkung. Die Glieder der Gleichung (9), welche $\sin^{1/4}(E'' - E)^2$ und die höheren Potenzen dieser Grösse enthalten, bringen, da sie sämmtlich mit dem sehr kleinen Factor dritter Ordnung:

$$\left(\frac{\vartheta' \eta'}{(r + r'') \cos \varphi'} \right)^3$$

multiplicirt sind, Grössen der fünften, siebenten u. s. w. Ordnung hervor. Man wird deshalb aus der cubischen Gleichung:

$$\left(\frac{\vartheta' \eta'}{(r + r'') \cos \varphi'} \right)^3 + \frac{3}{4} (r + r'') \cos \varphi' \left(\frac{\vartheta' \eta'}{(r + r'') \cos \varphi'} \right) = \frac{3}{4} \vartheta'$$

eine brauchbare Annäherung für $\vartheta' \eta'$ gewinnen, welche dann ihrerseits in Gleichung (8) eingesetzt, einen Werth von $\sin^{1/4}(E'' - E)^2$ liefert. Letzterer kann dann wieder zu einer strengeren Lösung der Gleichung (9), indem man ihn in den vorher vernachlässigten Gliedern substituirt, benutzt werden. Dieses Verfahren begründet auch im Wesentlichen die Gauss'schen Entwicklungen und Hilfstafeln für $\log \frac{1}{\eta'}$ (oder $\log y'$ der Theoria motus corp. coel.), auf die wir am Schlusse der 77. Vorlesung zurückkommen werden.

Fünfundsiebenzigste Vorlesung.

Fortsetzung der Entwicklungen von Encke zur Bestimmung der Dreiecksflächen.

Das am Schlusse der vorigen Vorlesung erwähnte Gauss'sche Verfahren zeichnet sich dadurch aus, dass es noch für sehr grosse Zeitintervalle seine Convergenz bewährt. Da aber in den praktischen Fällen diese Eigenschaft der meist nicht grossen Zwischenzeiten wegen nicht in solchem Grade verlangt wird, so dürfte die Encke'sche Auflösungsart der Gleichungen (8) und (9) (74. Vorlesung) ihrer grösseren Einfachheit wegen in den meisten Fällen etwas grössere Bequemlichkeit besitzen.

Encke substituirt den Ausdruck für $\sin^{1/4}(E'' - E)^2$ aus (8) in (9) (74. Vorlesung) und leitet dann mittelst der Umkehrung der Reihen eine nach Potenzen der Grösse:

$$\frac{\vartheta'^2}{(r + r'')^3},$$

welche wir im Folgenden mit v'^2 bezeichnen wollen, geordnete Entwicklung von $\log \frac{1}{\eta}$ (oder $\log y'$ der Encke'schen Bezeichnung) her. Es wird auf diese Weise zunächst:

$$\vartheta' = \vartheta' \eta' + \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{4}{3} + \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} \eta'^2 \cdot \frac{v'^2}{\cos \varphi'^3} \right. \\ & - \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi'^2}{\cos \varphi'} + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7} \eta'^4 \frac{v'^4}{\cos \varphi'^6} \\ & - 2 \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7} \eta'^2 \frac{v'^2}{\cos \varphi'^3} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi'^2}{\cos \varphi'} \\ & \left. + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7} \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi'^4}{\cos \varphi'^2} + \dots \right) \frac{\vartheta' v'^2}{\cos \varphi'^3} \eta'^3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Setzt man nun:

$$\log \text{nat} \frac{1}{\eta'} = \alpha v' + \beta v'^2 + \gamma v'^3 + \delta v'^4 + \dots,$$

worin $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. die nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten zu suchenden Zahlenfactoren vorstellen, so muss, wenn e die Basis des natürlichen Systems ist:

$$\frac{1}{\eta'} = e^{\alpha v' + \beta v'^2 + \gamma v'^3 + \delta v'^4 + \dots} = 1 + (\alpha v' + \beta v'^2 + \gamma v'^3 + \delta v'^4 + \dots)$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2} (\alpha v' + \beta v'^2 + \gamma v'^3 + \delta v'^4 + \dots)^2 + \dots$$

sein. Man erhält somit, nachdem für $\frac{1}{\eta'}$ sein aus (1) folgender Ausdruck gesetzt worden ist, zwei nach Potenzen von v' fortlaufende Reihen, die einander gleich sein sollen, in denen daher die Coëfficienten gleicher Potenzen übereinstimmen müssen. Führt man die leichte, nur etwas weitläufige Entwicklung wirklich aus, wobei noch gleich $\cos \varphi' = 1 - 2 \sin \frac{1}{2} \varphi'^2$ gesetzt werden kann, so wird:

$$\alpha = 0$$

$$\beta = \frac{4}{3} + \frac{32}{5} \sin \frac{1}{2} \varphi'^2 + \frac{736}{35} \sin \frac{1}{2} \varphi'^4 + \dots$$

$$\gamma = 0$$

$$\delta = -\frac{32}{5} \cdot \frac{4}{9} - \frac{736}{35} \cdot \frac{89}{69} \sin \frac{1}{2} \varphi'^2 - \dots$$

und überhaupt:

$$\begin{aligned} \log \text{nat} \frac{1}{\eta'} &= \frac{4}{3} v'^2 + \frac{32}{5} \left(\sin \frac{1}{2} \varphi'^2 - \frac{4}{9} v'^2 \right) v'^2 \\ &+ \frac{736}{35} \left(\sin \frac{1}{2} \varphi'^4 - \frac{89}{69} \sin \frac{1}{2} \varphi'^2 v'^2 + \frac{799}{1863} v'^4 \right) v'^2 + \dots \end{aligned}$$

Da $\sin \frac{1}{2} \varphi'$ eine kleine Grösse der ersten Ordnung ist, so sind die einzelnen Glieder dieser Entwicklung der Reihe nach von der zweiten, vierten, sechsten u. s. w. Ordnung; sie werden daher auch am zweckmässigsten in derselben Reihenfolge zur Anwendung gebracht. Encke hat eine kleine Tafel berechnet, in welche man mit dem Argumente $\log \cos \varphi'$ einzugehen hat, um die Coëfficienten in der Entwicklung des $\log \text{brigg} \frac{1}{\eta'}$ in Einheiten der siebenten Decimalstelle zu finden. Der grösseren Einfachheit wegen läuft die Reihe nach Potenzen von $\frac{v'^2}{k^2}$ oder $\frac{(\ell'' - t)^2}{(r + r'')^2}$ fort¹⁾.

¹⁾ Siehe Encke's Abhandlung „Ueber die Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen“. Berliner Astronom. Jahrbuch für 1854.

Sobald η' bekannt ist, wird auch die Bestimmung der Elemente a und e , sowie der wahren Anomalie v , welche von dem Argumente der Breite abgezogen werden muss, um $\pi - \Omega$ zu finden, sehr leicht, wie hier gleich bemerkt werden mag. Denn man hat für den halben Parameter p die Gleichung:

$$p = \left(\frac{r r'' \sin(v'' - v)}{\vartheta' \eta'} \right)^2,$$

also, wenn φ den Excentricitätswinkel bedeutet:

$$a \cos \varphi^2 = \left(\frac{r r'' \sin(v'' - v)}{\vartheta' \eta'} \right)^2;$$

ausserdem ist nach den vorhergehenden Entwicklungen:

$$\sin^{1/4}(E'' - E)^2 = \frac{\eta'^2 v'^2}{\cos \varphi'^3} - \frac{\sin^{1/2} \varphi'^2}{\cos \varphi'}.$$

und auch:

$$b \sin^{1/2}(E'' - E) = \sqrt{r r''} \sin^{1/2}(v'' - v)$$

oder:

$$a \cos \varphi = \frac{\sin^{1/2}(v'' - v)}{\sin^{1/2}(E'' - E)} \sqrt{r r''}.$$

Aus der Relation:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

kann dann sofort auch v bestimmt werden, gleichwie man die Formel:

$$r = a (1 - e \cos E)$$

gebrauchen kann, um E und dann die mittlere Anomalie M zu bestimmen. Wendet man dieselbe Bestimmungsart auch noch für v'' , E'' und M'' an, so hat man die Controls der Rechnung, dass die Unterschiede $v'' - v$, $E'' - E$ den vorigen gleich werden müssen, und dass die Differenz:

$$M'' - M = \frac{k(t'' - t)}{a^{3/2}}$$

sich ergeben muss.

Die Grösse η' bildet auf diese Weise, wie man sieht, auch gleichsam den Schlüssel zur Lösung der Aufgabe, aus den beiden Radienvectoren, dem eingeschlossenen Bogen und dem Zeitintervall die Elemente der Bewegung in der Bahn zu finden. Für die Verbesserung der Hypothesen dagegen ist η' nicht nothwendig, sondern nur die dem Intervall $t'' - t'$ entsprechende Grösse η'' , da die den Hypothesen zu Grunde zu legenden P und Q in folgender Weise definiert werden:

$$P = \frac{n''}{n},$$

$$Q = \left(\frac{n + n''}{n'} - 1 \right) 2 r'^3.$$

Es ergibt sich nun aber, wenn man die Gleichungen:

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos v$$

$$\frac{p}{r'} = 1 + e \cos v'$$

$$\frac{p}{r''} = 1 + e \cos v''$$

der Reihe nach mit $\sin(v'' - v')$, $-\sin(v'' - v)$, $\sin(v' - v)$ multiplicirt, addirt und eines häufig angewandten Lemma sich erinnert:

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{\sin(v'' - v') - \sin(v'' - v) + \sin(v' - v)}{\frac{1}{r} \sin(v'' - v') - \frac{1}{r'} \sin(v'' - v) + \frac{1}{r''} \sin(v' - v)} \\
 &= \frac{2 r r' r'' \{ \sin \frac{1}{2}(v'' - v') \cos \frac{1}{2}(v'' - v') - \sin \frac{1}{2}(v'' - v') \cos(\frac{1}{2}v'' + \frac{1}{2}v' - v) \}}{r' r'' \sin(v'' - v') - r r'' \sin(v'' - v) + r r' \sin(v' - v)} \\
 &= \frac{4 \sin \frac{1}{2}(v'' - v') \sin \frac{1}{2}(v'' - v) \sin \frac{1}{2}(v' - v)}{n + n'' - n'} \cdot r r' r''
 \end{aligned}$$

und demnach ferner nach einer leichten Reduction des Ausdruckes für Q :

$$P = \frac{\partial'' \eta''}{\partial \eta'}, \text{ wobei also: } \eta = \frac{n}{\partial \sqrt{p}}, \eta'' = \frac{n''}{\partial'' \sqrt{p}} \text{ ist;}$$

$$Q = \frac{\partial \eta}{r} \cdot \frac{\partial'' \eta''}{r''} \cdot \frac{r'^2}{\cos \frac{1}{2}(v'' - v') \cos \frac{1}{2}(v'' - v) \cos \frac{1}{2}(v' - v)}.$$

Bilden wir dagegen die Hypothese, wie in Vorlesung 70, d. h. nach der Definition:

$$\frac{n}{n'} = \frac{\partial}{\partial'} \left(1 + \frac{Q}{2 r'^3} \right),$$

$$\frac{n''}{n'} = \frac{\partial''}{\partial'} \left(1 + \frac{Q''}{2 r'^3} \right),$$

so wird offenbar:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial'} Q + \frac{\partial''}{\partial'} Q'' &= \frac{\partial \eta}{r} \cdot \frac{\partial'' \eta''}{r''} \cdot \frac{r'^2}{\cos \frac{1}{2}(v'' - v') \cos \frac{1}{2}(v'' - v) \cos \frac{1}{2}(v' - v)} \\
 \frac{\partial}{\partial'} Q &= \frac{\partial}{\partial'} \cdot \frac{\eta}{\eta''} Q'' = 2 \frac{\partial}{\partial'} \left(\frac{\eta}{\eta''} - 1 \right) r'^3,
 \end{aligned}$$

und es ist folglich auch hier Alles bei der Verbesserung der Hypothesen auf die Ermittlung von η und η'' zurückgeführt.

Sechundsiebenzigste Vorlesung.

Hansen's Formeln zur Verbesserung.

Wie wir früher (Vorlesung 65 u. f.) Hansen's Formeln für die Durchrechnung der einzelnen Hypothesen kennen gelernt haben, wollen wir jetzt, im Anschluss daran, seine Verbesserungsart der Hypothesen mit unwesentlichen Modificationen in der Bezeichnung hier wiedergeben. Es ist dies um so wünschenswerther, als Hansen den auf dieses Capitel bezüglichen Reihenentwicklungen einen noch erheblich höheren Grad von Convergenz gegeben hat.

Es sei der Kürze halber:

$$\begin{aligned}
 F' &= \frac{1}{2}(v'' + v), & f' &= \frac{1}{2}(v'' - v), \\
 G' &= \frac{1}{2}(E'' + E), & g' &= \frac{1}{2}(E'' - E),
 \end{aligned}$$

so geben die bekannten Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{r} \cos \frac{1}{2} v &= \sqrt{a(1 - e)} \cdot \cos \frac{1}{2} E \\
 \sqrt{r} \sin \frac{1}{2} v &= \sqrt{a(1 + e)} \cdot \sin \frac{1}{2} E \\
 \sqrt{r''} \cos \frac{1}{2} v'' &= \sqrt{a(1 - e)} \cdot \cos \frac{1}{2} E'' \\
 \sqrt{r''} \sin \frac{1}{2} v'' &= \sqrt{a(1 + e)} \cdot \sin \frac{1}{2} E'',
 \end{aligned}$$

sogleich:

$$\begin{aligned}\sqrt{rr''} \cos F' &= a \cos G' - a e \cos g' \\ \sqrt{rr''} \cos f' &= a \cos g' - a e \cos G',\end{aligned}$$

oder:

$$e \cos F' = \frac{p}{\sqrt{rr''}} \cos g' - \cos f' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$e \cos G' = \cos g' - \frac{\sqrt{rr''}}{a} \cos f' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ferner hat man, da:

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos v$$

$$\frac{p}{r''} = 1 + e \cos v''$$

ist:

$$p \frac{r + r''}{rr''} = 2 + 2e \cos F' \cos f',$$

und wenn für $e \cos F'$ sein Werth aus Gleichung (1) gesetzt wird.

$$p = \frac{2rr'' \sin f'^2}{r + r'' - 2 \cos g' \cos f' \sqrt{rr''}}.$$

Nun ist aber:

$$\vartheta' \eta' \sqrt{p} = 2rr'' \sin f' \cos f',$$

also:

$$\frac{1}{\eta'^2} = \frac{\vartheta'^2}{2rr'' \cos f'^2 (r + r'' - 2 \cos g' \cos f' \sqrt{rr''})} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Zieht man die Gleichung:

$$\frac{\vartheta'}{a^{3/2}} = E'' - e \sin E'' - (E - e \sin E)$$

oder:

$$\frac{\vartheta'}{a^{3/2}} = 2g' - 2e \cos G' \sin g'$$

zu und eliminirt $e \cos G'$ durch Einsetzung seines Werthes aus (2), so erhält man:

$$\frac{\vartheta'}{a^{3/2}} = 2g' - \sin 2g' + \frac{2\sqrt{rr''}}{a} \sin g' \cos f'.$$

Da nun in Folge der Gleichungen:

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos E, \quad \frac{r''}{a} = 1 - e \cos E'',$$

$$\frac{r + r''}{a} = 2 - 2e \cos G' \cos g'$$

wird und ferner durch Elimination von $e \cos G'$ mittelst (2):

$$\frac{1}{a} = \frac{2 \sin g'^2}{r + r'' - 2 \cos g' \cos f' \sqrt{rr''}},$$

so hat man unter Berücksichtigung der Gleichung (3):

$$\frac{1}{a} = \frac{4rr'' \sin g'^2 \cos f'^2}{\vartheta'^2 \eta'^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Mittelst dieses Ausdruckes kann man a aus der oben für $\frac{\vartheta'}{a^{3/2}}$ gefundenen Gleichung eliminiren; wenn dabei zur Abkürzung:

in Beziehung auf η' aufzulösen. Hansen bemerkt hier, dass die Gauss'sche Reihe für $2g' - \frac{\sin 2g'}{\sin g'^3}$ durch eine andere noch weit stärker convergirende ersetzt werden könne.

Es sei:

$$2g - \sin 2g = 8Y \sin^{1/2} g^3 \cos^{1/2} g,$$

so erhält man durch Differentiation:

$$4 \sin^{1/2} g^2 \cos^{1/2} g^2 = 3Y \sin^{1/2} g^2 \cos^{1/2} g^2 - Y \sin^{1/2} g^4 + 2 \frac{dY}{dg} \sin^{1/2} g^3 \cos^{1/2} g.$$

Setzt man ferner:

$$y = tg^{1/2} g^2,$$

also:

$$\frac{dy}{dg} = \frac{\sin^{1/2} g}{\cos^{1/2} g^3},$$

und berücksichtigt, dass:

$$\frac{dY}{dy} = \frac{\frac{dY}{dg}}{\frac{dy}{dg}},$$

so erhält man die Gleichung:

$$4 - Y(3 - y) = \frac{dY}{dy} (2y + 2y^2).$$

Macht man hier wieder, wie früher, die Annahme, dass:

$$Y = \frac{4}{3} (1 + \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \delta y^4 + \dots),$$

so bestimmen sich die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc., wie folgt:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{4}{20} & \gamma &= -\frac{12}{36} \beta \\ \beta &= -\frac{4}{28} \alpha & \delta &= -\frac{20}{44} \gamma \end{aligned}$$

u. s. w.

in der Weise, dass man jedesmal den Zähler um acht Einheiten algebraisch zu vermindern, den Nenner dieser negativen Brüche um acht Einheiten zu vergrößern hat, um den des folgenden Coefficienten zu erhalten. Substituirt man die für Y angenommene Form, so wird jetzt:

$$\begin{aligned} \frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3} &= \frac{4}{3 \cos^{1/2} g^2} \left\{ 1 + \frac{1}{5} tg^{1/2} g^2 - \frac{1}{5 \cdot 7} tg^{1/2} g^4 + \frac{3}{5 \cdot 7 \cdot 9} tg^{1/2} g^6 \right. \\ &\quad \left. - \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} tg^{1/2} g^8 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Von dieser sehr stark convergirenden Reihe macht indessen Hansen hier keine Anwendung, sondern hält sich an die Gauss'sche Entwicklung. Setzt man in Gleichung (1) diese Entwicklung nach Potenzen von $\sin^{1/2} g'$ ein und für letztere Grösse den aus (6) (76. Vorlesung) folgenden Werth:

$$\sin^{1/2} g'^2 = m' \eta'^2 - l',$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta'^2} \left(\frac{1}{\eta'} - 1 \right) &= \frac{4}{3} m' + \frac{8}{5} m'^2 \eta'^2 + \frac{64}{35} m'^3 \eta'^4 \\ &\quad - \frac{8}{5} m' l' - \frac{128}{35} m'^2 l' \eta'^2 \\ &\quad + \frac{64}{35} m' l'^2. \end{aligned}$$

Diese Entwicklung ist einschliesslich der Glieder sechster Ordnung richtig, da offenbar l und m Grössen der zweiten Ordnung sind.

Nimmt man jetzt an, es bestehe eine Entwicklung von der Form:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta'} = 1 + \alpha m' + \beta m'^2 + \gamma m'^3 + \dots \\ + \beta' m' l' + \gamma' m'^2 l' + \dots \\ + \gamma'' m' l'^2 + \dots, \end{aligned}$$

substituiert in die obige Gleichung für $\frac{1}{\eta'^2} \left(\frac{1}{\eta'} - 1 \right)$ und setzt die Coëfficienten der gleichartigen Potenzen und Producte von m und l einander gleich, so findet man:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{4}{3} \\ \beta &= \frac{8}{5} - 2\alpha^2 \\ \gamma &= \frac{64}{35} - \frac{16}{5}\alpha - 4\alpha\beta - \alpha^3 \\ \beta' &= -\frac{8}{5} \\ \gamma' &= -\frac{128}{35} - 4\alpha\beta' \\ \gamma'' &= \frac{64}{35}, \end{aligned}$$

demnach

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta'} = 1 + \frac{4}{3} m' - \frac{88}{45} m'^2 + \frac{5312}{945} m'^3 \\ - \frac{8}{5} m' l' + \frac{512}{105} m'^2 l' \\ + \frac{64}{35} m' l'^2. \end{aligned}$$

Um die Glieder dieser Reihe zu grösserer Convergenz zusammenzuziehen, setze man

$$m' = \frac{5}{6} h + h l';$$

sie wird dann:

$$\frac{1}{\eta'} = 1 + \frac{10}{9} h - \frac{110}{81} h^2 + \frac{16600}{5103} h^3 + \frac{8}{63} h^2 l' - \frac{8}{105} h l'^2.$$

Es sei aber noch ferner:

$$h = \lambda + \frac{11}{9} \lambda^2,$$

so wird:

$$\frac{1}{\eta'} = 1 + \frac{10}{9} \lambda - \frac{340}{5103} \lambda^3 + \frac{8}{63} \lambda^2 l' - \frac{8}{105} \lambda l'^2.$$

Da nun auch λ offenbar eine Grösse der zweiten Ordnung ist, so ist bis auf Glieder sechster Ordnung, welche noch dazu kleine numerische Coëfficienten haben, genau:

$$\frac{1}{\eta'} = 1 + \frac{10}{9} \lambda.$$

Man hat aber ferner nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{\eta'^3}{1 - \eta'} + \frac{9}{10} \eta'^2 = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{h'}.$$

Setzen wir schliesslich noch an Stelle von η' $\left(\frac{\text{Dreieck}}{\text{Sector}}\right)$ mit Oppolzer $\eta: \left(\frac{\text{Sector}}{\text{Dreieck}}\right)$, so dass also $\eta' = \frac{1}{\eta}$, so folgt:

$$\frac{1}{\eta^3 \left(1 - \frac{1}{\eta}\right)} + \frac{9}{10 \eta^2} = \frac{9}{10} \frac{1}{h'}$$

oder:

$$\eta^3 - \eta^2 = h' \left(\frac{1}{9} + \eta\right) \quad (4)$$

Zur Auflösung dieser cubischen Gleichung hat Gauss eine Tafel construirt, welche mit dem Argumente h' die Grösse $\log \eta^2$ giebt. Wir haben dieselbe als Tafel XII im Anhange aufgenommen. Man beachte, dass:

$$\eta = \frac{1}{\eta'} \quad (5)$$

ist. In erster Annäherung kann man nun $\xi = 0$ setzen, erhält dann:

$$h' = \frac{m'}{\frac{5}{6} + l'}$$

und hieraus:

$$\eta^2 \text{ resp. } \frac{1}{\eta'^2} \text{ mittelst Tafel XII.}$$

Nach Gleichung (6) ist dann:

$$\sin \frac{1}{2} g'^2 = m' \eta'^2 - l'.$$

Mit diesem Werthe von $\sin \frac{1}{2} g'^2$ kann man sich nun nöthigenfalls einen verbesserten Werth von ξ verschaffen (während wir ja in erster Annäherung $\xi = 0$ gesetzt hatten). Strenge könnte man ξ aus der Gleichung (2) als Function von g' finden. Um aber diese Rechnung, welche übrigens durch Entwicklung nach Potenzen von g' wesentlich verkürzt werden könnte, zu vermeiden, haben wir im Anhange Tafel XIII nach Gauss aufgenommen, welche ξ in Einheiten der siebenten Decimale als Function von:

$$w = \sin \frac{1}{2} g'^2$$

giebt. Dieselbe erstreckt sich auch auf negative Werthe von w ; da für die Hyperbel $\sin \frac{1}{2} g'$ rein imaginär, und w in Folge dessen negativ wird.

Welches auch die Form der Bahn sein mag, man hat immer:

$$w = \sin \frac{1}{2} g'^2 = \frac{m'}{\eta^2} - l' = m' \eta'^2 - l'.$$

Für die Parabel ist übrigens w immer identisch gleich Null. Der Gang der Rechnung ist also einfach folgender:

Man setzt in erster Annäherung $\xi = 0$ und berechnet so:

$$h' = \frac{m'}{\frac{5}{6} + l'}.$$

Aus diesem Werthe von h' findet man mittelst Tafel XII:

$$\log \eta^2 \quad \text{oder} \quad \log \frac{1}{\eta'^2}.$$

Hieraus berechnet man:

$$w = \sin \frac{1}{2} g'^2 = \frac{m}{\eta^2} - l.$$

Mit diesem Werthe von w bestimmt man mittelst Tafel XIII einen Näherungswerth von ξ und hieraus einen verbesserten Werth von h' nach der Formel:

$$h' = \frac{m'}{\frac{5}{6} + l' + \xi} \quad \text{u. s. w.}$$

Achtundsiebenzigste Vorlesung.

Anwendung der Reihenentwickelungen für $\frac{x - \sin x}{\sin^{\frac{1}{2}} x^2}$ für Ellipsen und Hyperbeln, deren Excentricität nahe gleich der Einheit wird.

Nach Vorlesung 8 haben wir, wenn:

$$\sin \frac{1}{2} \delta^2 = \frac{r + r'' - \kappa}{4a}$$

$$\sin \frac{1}{2} \delta''^2 = \frac{r + r'' + \kappa}{4a}$$

ist:

$$\delta'' - \sin \delta'' - (\delta - \sin \delta) = \frac{k(t'' - t)}{a^{\frac{3}{2}}},$$

also, wenn ein Mal:

$$a = \frac{r + r'' + \kappa}{4 \sin \frac{1}{2} \delta''^2},$$

ein anderes Mal:

$$a = \frac{r + r'' - \kappa}{4 \sin \frac{1}{2} \delta^2}$$

gesetzt wird:

$$\frac{\delta'' - \sin \delta''}{8 \sin \frac{1}{2} \delta''^3} \cdot (r + r'' + \kappa)^{\frac{3}{2}} - \frac{\delta - \sin \delta}{8 \sin \frac{1}{2} \delta^3} (r + r'' - \kappa)^{\frac{3}{2}} = k(t'' - t)$$

oder:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{\delta'' - \sin \delta''}{\sin \frac{1}{2} \delta''^3} \cdot (r + r'' + \kappa)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4} \frac{\delta - \sin \delta}{\sin \frac{1}{2} \delta^3} (r + r'' - \kappa)^{\frac{3}{2}} = 6k(t'' - t).$$

Da nun bei sehr gestreckten Ellipsen δ und δ'' sehr klein werden, so lassen sich die Factoren von $(r + r'' + \kappa)^{\frac{3}{2}}$ und $(r + r'' - \kappa)^{\frac{3}{2}}$ sehr bequem durch die Gauss'sche und Hansen'sche Reihenentwickelung, welche wir in den vorhergehenden Vorlesungen kennen gelernt haben, ausdrücken.

Die Gauss'sche liefert uns:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{6}{5} \sin \frac{\delta''_2}{4} + \frac{6.8}{5.7} \sin \frac{\delta''_4}{4} + \frac{6.8.10}{5.7.9} \sin \frac{\delta''_6}{4} + \dots\right) (r + r'' + \kappa)^{3/2} \\ & - \left(1 + \frac{6}{5} \sin \frac{\delta^2}{4} + \frac{6.8}{5.7} \sin \frac{\delta^4}{4} + \frac{6.8.10}{5.7.9} \sin \frac{\delta^6}{4} + \dots\right) (r + r'' - \kappa)^{3/2} \\ & = 6 k (t'' - t). \end{aligned}$$

Nach Hansen's Reihenentwicklung dagegen erhalten wir mit einem wegen des Zeichenwechsels sowohl als wegen der kleineren Coefficienten noch weit höherem Grade von Convergenz:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{5} tg \frac{\delta''_2}{4} - \frac{1}{5.7} tg \frac{\delta''_4}{4} + \frac{3}{5.7.9} tg \frac{\delta''_6}{4} - \frac{3.5}{5.7.9.11} tg \frac{\delta''_8}{4} \pm \dots\right) \cdot \\ & \cdot \frac{(r + r'' + \kappa)^{3/2}}{\cos \frac{\delta''_2}{4}} - \left(1 + \frac{1}{5} tg \frac{\delta^2}{4} - \frac{1}{5.7} tg \frac{\delta^4}{4} + \frac{3}{5.7.9} tg \frac{\delta^6}{4} \right. \\ & \left. - \frac{3.5}{5.7.9.11} tg \frac{\delta^8}{4} + \dots\right) \frac{(r + r'' - \kappa)^{3/2}}{\cos \frac{\delta^2}{4}} = 6 k (t'' - t). \end{aligned}$$

Den sogenannten Uebergang von der Ellipse zur Parabel und ebenso den von der Hyperbel zur Parabel haben wir hier in der Formel:

$$\mu'' (r + r'' + \kappa)^{3/2} - \mu (r + r'' - \kappa)^{3/2} = 6 k (t'' - t),$$

worin die Factoren μ und μ'' aus $r + r''$ und κ berechnet werden können, wenn a bekannt ist. Zwar wird für die Hyperbel a negativ, also $\sin \frac{\delta}{2}$ und $\sin \frac{\delta''}{2}$ imaginär; da jedoch die vorstehenden Reihenentwickelungen für μ und μ'' nur gerade Potenzen von $\sin \frac{\delta}{4}$ und $tg \frac{\delta}{4}$ enthalten, welche sämmtlich reell bleiben, so ist die für die Ellipse zu führende Rechnung auch für die Hyperbel anwendbar. Zur Construction von Tafeln, aus denen sowohl $\log \mu$ als $\log \mu''$ zu nehmen, könnte man $\sin x^2$ unter Zulassung von negativen Werthen zum Argument und den Logarithmus der Reihe:

$$\frac{1}{\cos^{1/2} x^2} \left\{ 1 + \frac{1}{5} tg \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5.7} tg \frac{x^4}{2} + \frac{3}{5.7.9} tg \frac{x^6}{2} - \frac{3.5}{5.7.9.11} tg \frac{x^8}{2} \pm \dots \right\}$$

zur Function der Tafel zu wählen.

Wir wollen hier noch zeigen, wie eine solche Tafel im Verein mit der Barker'schen zur scharfen Bestimmung der wahren Anomalie v bei grossen Excentricitäten gebraucht werden kann.

Wenden wir die oben gefundene Gleichung auf zwei zum Perihel symmetrisch gelegte Punkte an, setzen also:

$$r'' = r, \quad v'' = -v, \quad \kappa = 2r \sin v,$$

so erhalten wir:

$$\{\mu'' (1 + \sin v)^{3/2} - \mu (1 - \sin v)^{3/2}\} 2^{3/2} \cdot r^{3/2} = 6 k (t'' - t),$$

oder wenn für die Einheit $\cos^{1/2} v^2 + \sin^{1/2} v^2$, für r sein Ausdruck durch die Perihel-
distanz q , die excentrische Anomalie E und durch v :

$$r = q \cdot \frac{\cos^{1/2} E^2}{\cos^{1/2} v^2}$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} & \mu'' (1 + 2 tg^{1/2} v + tg^{1/2} v^2)^{1/2} - \mu (1 - 2 tg^{1/2} v + tg v^2)^{3/2} \\ &= \mu'' (1 + tg^{1/2} v)^3 - \mu (1 - tg^{1/2} v)^3 \\ &= \mu'' - \mu + 3 (\mu'' + \mu) tg^{1/2} v + 3 (\mu'' - \mu) tg^{1/2} v^2 + (\mu'' + \mu) tg^{1/2} v^3 \\ &= \frac{3k}{\sqrt{2q^3}} \cdot \frac{2\tau}{\cos^{1/2} E^3} \end{aligned}$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{6} (\mu'' - \mu) + \frac{1}{2} (\mu'' + \mu) tg^{1/2} v + \frac{1}{2} (\mu'' - \mu) tg^{1/2} v^2 \\ & + \frac{1}{6} (\mu'' + \mu) tg^{1/2} v^3 = \frac{k}{(2q)^{3/2}} \cdot \frac{2\tau}{\cos^{1/2} E^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

wenn τ das dem Bogen $1/2 (v'' - v)$ entsprechende Zeitintervall bedeutet, so dass $t'' - t = 2\tau$ ist.

Für die strenge Parabel wird $\mu'' = \mu = 1$ und die Gleichung geht in die bekannte über, welche der Barker'schen Tafel zu Grunde liegt. Setzt man:

$$\begin{aligned} \frac{\mu'' - \mu}{\mu'' + \mu} &= \sin^{1/2} \psi \\ tg^{1/2} v &= - \sin^{1/2} \psi + \cos^{1/2} \psi tg^{1/2} w \\ &= \frac{\sin^{1/2} (w - \psi)}{\cos^{1/2} w}, \end{aligned}$$

so wird:

$$tg^{1/2} w + \frac{1}{3} tg^{1/2} w^3 = \frac{k}{(2q)^{3/2}} \cdot \frac{\tau}{\frac{1}{2} (\mu + \mu'')} \cdot \frac{1}{\cos^{1/2} E^3} \cdot \frac{1}{\cos^{1/2} \psi^3} + \frac{2}{3} tg^{1/2} \psi.$$

Hiernach wird man w aus der Barker'schen Tafel mit Leichtigkeit erhalten. Man berechnet die mittlere Bewegung M wie bei der strengen Parabel, multiplicirt dieselbe mit dem Factor:

$$\frac{2}{\mu + \mu''} \cdot \sec^{1/2} E^3 \cdot \sec^{1/2} \psi^3$$

und addirt wegen der bekannten Einrichtung der Barker'schen Tafel noch die Grösse:

$$75 \cdot \frac{2}{3} tg^{1/2} \psi = 50 tg^{1/2} \psi.$$

Zu dem so corrigirten M schlägt man in der Barker'schen Tafel die Anomalie auf; der aufgeschlagene Winkel wird w sein und durch die Gleichung:

$$tg^{1/2} v = \frac{\sin^{1/2} (w - \psi)}{\cos^{1/2} w}$$

die gesuchte wahre Anomalie ergeben.

Die Grössen E , μ und μ'' können als gegeben angesehen werden, da sie immer ganz leicht und hinreichend scharf aus den gewöhnlichen Methoden zu erhalten sind. Ist v annäherungsweise bekannt, so kann für E die Formel:

$$tg^{1/2} E = tg^{1/2} v \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

zur Anwendung gebracht werden; im anderen Falle findet sich E hinreichend genau aus der Keppler'schen Gleichung und dann v direct durch das obige Verfahren. Die Grössen μ und μ'' folgen auf einfache Art aus E . Das Argument für die erstere Grösse wird:

$$\frac{r + r'' - \kappa}{4a} = \frac{r + r - 2r \sin \iota}{4a} = \frac{1}{2} (1 - e \cos E) - \frac{1}{2} \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin E$$

oder, wenn der Excentricitätswinkel φ eingeführt wird:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (1 - \sin \varphi \cos E - \cos \varphi \sin E) \\ &= \sin [45^\circ - \frac{1}{2} (\varphi + E)]^2 = \sin \frac{1}{2} (90^\circ - \varphi - E)^2. \end{aligned}$$

Analog hat man:

$$\begin{aligned} \frac{r + r'' + \kappa}{4a} &= \frac{1}{2} (1 - e \cos E) + \frac{1}{2} \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin E \\ &= \frac{1}{2} (1 - \sin \varphi \cos E + \cos \varphi \sin E) \\ &= \sin [45^\circ - \frac{1}{2} (\varphi - E)]^2 = \sin \frac{1}{2} (90^\circ - \varphi + E)^2. \end{aligned}$$

Mit den Argumenten $\sin [45^\circ - \frac{1}{2} (\varphi + E)]^2$ und $\sin [45^\circ - \frac{1}{2} (\varphi - E)]^2$ könnte man dann $\log \mu$ und $\log \mu''$ aus den vorgeschlagenen Tafeln entnehmen. Fehlen dieselben, so würden wir nach den Formeln:

$$\begin{aligned} \mu &= \sec \frac{1}{4} [90^\circ - (\varphi + E)]^2 \left\{ 1 + \frac{1}{6} \operatorname{tg} \frac{1}{4} [90^\circ - (\varphi + E)]^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{5 \cdot 7} \operatorname{tg} \frac{1}{4} [90^\circ - (\varphi + E)]^4 + \dots \right\} \\ \mu'' &= \sec \frac{1}{4} [90^\circ - (\varphi - E)]^2 \left\{ 1 + \frac{1}{6} \operatorname{tg} \frac{1}{4} [90^\circ - (\varphi - E)]^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{5 \cdot 7} \operatorname{tg} \frac{1}{4} [90^\circ - (\varphi - E)]^4 \pm \dots \right\} \end{aligned}$$

rechnen.

Neunundsiebenzigste Vorlesung.

Anwendung der allgemeinen Lambert'schen Gleichung für die Verbesserung der Hypothesen.

Wenn man einen Werth der halben grossen Axe a bestimmt hat, welcher die in der vorigen Vorlesung entwickelte Gleichung:

$$\mu'' (r'' + r + \kappa)^{3/2} - \mu (r'' + r - \kappa)^{3/2} = 6k (t'' - t)$$

befriedigt, so kann daraus ganz leicht die Verbesserung der Grössen $\frac{n}{n'}$ und $\frac{n''}{n'}$ hergeleitet werden. Denn bestimmt man nach der vorstehenden Gleichung das zwischen dem ersten und zweiten Orte liegende Zeitintervall $t' - t$, indem man die Radienvectoren r und r' und die beide verbindende Sehne einsetzt, so muss man die gegebene Zeit wieder erhalten, wenn die für $\frac{n''}{n'}$ gemachte Annahme richtig war; ein Gleiches findet in Beziehung auf $t'' - t'$ statt, wenn $\frac{n}{n'}$ richtig angenommen war. Umgekehrt deutet ein Unterschied zwischen den nach der allgemeineren Lambert'schen Gleichung berechneten Intervallen, welche wir mit $[t' - t]$ und $[t'' - t']$ bezeichnen wollen, von den gegebenen an, dass die Verhältnisse $\frac{n''}{n'}$ oder c'' , $\frac{n}{n'}$ oder c , welche wir bei der Hypo-

these zu Grunde legen, der Bewegung in dem durch den ersten und dritten heliocentrischen Ort gelegten Kegelschnitte nicht entsprechen. Es ist einleuchtend, dass:

$$\frac{t' - t}{[t' - t]} \text{ und } \frac{t'' - t'}{[t'' - t']}$$

Verbesserungsfactoren für $\frac{n''}{n'}$ und $\frac{n}{n'}$ beziehungsweise sein werden, mit welchen man die angenommenen Werthe multipliciren muss, um die verlangte Uebereinstimmung zwischen $t' - t$ und $[t' - t]$, sowie zwischen $t'' - t'$ und $[t'' - t']$ zu erreichen oder wenigstens derselben um eine Ordnung näher zu kommen, da bis auf die Glieder höherer Ordnung die Sektoren zu den Dreiecksflächen bei dem nichtverbesserten Kegelschnitte in demselben Verhältnisse stehen werden, wie bei dem verbesserten.

Bei der vorstehenden Art, die Hypothesen zu verbessern, hat man nur einmal eine Grösse durch Versuche zu bestimmen, nämlich a aus dem Intervall $t'' - t$, aus r, r'' und κ . Wir fanden früher eine brauchbare Näherungsformel, von welcher wir bei den Versuchen ausgehen können.

Bei Planetenbahnen sind die aus den Formeln:

$$\sin \frac{1}{2} \delta^2 = \frac{r + r'' - \kappa}{4a}$$

$$\sin \frac{1}{2} \delta''^2 = \frac{r + r'' + \kappa}{4a}$$

hervorgehenden Werthe von δ und δ'' stets so beträchtlich, dass der Berechnung von:

$$\mu = \frac{\delta - \sin \delta}{\sin \frac{1}{2} \delta^3}$$

und:

$$\mu'' = \frac{\delta'' - \sin \delta''}{\sin \frac{1}{2} \delta''^3}$$

mit den gewöhnlichen Hilfsmitteln kein Hinderniss im Wege steht. Ferner ist nach Vorlesung 8 $E'' - E = \delta'' - \delta$, auch:

$$e (\cos E'' + \cos E) = \cos \delta'' + \cos \delta$$

$$e (\cos E'' - \cos E) = -\frac{\kappa}{a},$$

das heisst:

$$2e \cos \frac{1}{2} (E'' + E) \cos \frac{1}{2} (E'' - E) = 2 \cos \frac{1}{2} (\delta'' + \delta) \cos \frac{1}{2} (\delta'' - \delta)$$

$$2e \sin \frac{1}{2} (E'' + E) \sin \frac{1}{2} (E'' - E) = \frac{\kappa}{a}$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} e \sin \frac{1}{2} (E'' + E) &= \frac{\kappa}{2a} \operatorname{cosec} \frac{1}{2} (\delta'' - \delta) \\ e \cos \frac{1}{2} (E'' + E) &= \cos \frac{1}{2} (\delta'' + \delta) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Nach Anwendung der Gleichungen (1) kann man die obigen Verbesserungsfactoren auch noch auf anderem Wege finden. Da nämlich nach Vorlesung 8:

$$b \sin \frac{1}{2} (E'' - E) = \sqrt{r r''} \sin \frac{1}{2} (v'' - v)$$

$$b \sin \frac{1}{2} (E' - E) = \sqrt{r r'} \sin \frac{1}{2} (v' - v)$$

$$b \sin \frac{1}{2} (E'' - E') = \sqrt{r' r''} \sin \frac{1}{2} (v'' - v),$$

also auch:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} (E' - E) &= \sqrt{\frac{r'}{r''}} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (v' - v)}{\sin \frac{1}{2} (v'' - v)} \cdot \sin \frac{1}{2} (\delta'' - \delta) \\ \sin \frac{1}{2} (E'' - E') &= \sqrt{\frac{r'}{r}} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (v'' - v')}{\sin \frac{1}{2} (v'' - v)} \cdot \sin \frac{1}{2} (\delta'' - \delta) \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \quad (2)$$

so kann E' , die excentrische Anomalie der mittleren Beobachtung, auf zwei verschiedene Arten berechnet werden, das eine Mal aus E , welches aus (1) bekannt geworden ist, das andere Mal aus dem ebenfalls dorthier bekannten E'' . Beide Werthe müssen übereinstimmen, wenn die Hypothesen über $\frac{n}{n'}$ und $\frac{n''}{n'}$ genau richtig waren. Dasselbe gilt von den beiden Werthen der mittleren Anomalie M' oder den Grössen $E' - e \sin E'$. Stimmen sie nicht überein, so kann man aus beiden die entsprechenden Intervalle $[t'' - t']$ und $[t' - t]$ berechnen und mit den gegebenen Zwischenzeiten $t'' - t'$ und $t' - t$ vergleichen.

Es ist dann wieder:

$$\frac{n}{n'} \cdot \frac{t'' - t'}{[t'' - t']}$$

ein verbesserter Werth von $\frac{n}{n'}$ oder c , und

$$\frac{n''}{n'} \cdot \frac{t' - t}{[t' - t]}$$

ein verbesserter Werth von $\frac{n''}{n'}$ oder c'' .

Bei der ersteren der eben beschriebenen Verbesserungsmethoden hat man bloss das Element a zu suchen, c und M oder M'' dagegen werden nicht verlangt; bei der zweiten Verbesserungsmethode müssen auch diese letzteren Grössen abgeleitet werden, weshalb sie offenbar weniger bequem ist. Beide Methoden ermöglichen übrigens noch eine sehr einfache Schätzung des Fehlers, welcher in der Darstellung des mittleren geocentrischen Ortes bleiben würde, wenn man die Verbesserung unterlassen wollte (von der bekannten Aberration dabei abgesehen). Es würden diese Fehler annäherungsweise betragen:

$$\frac{t' - t - [t' - t]}{t'' - t} (\alpha'' - \alpha)$$

in Rectascension (beziehungsweise Länge), und:

$$\frac{t' - t - [t' - t]}{t'' - t} (\delta'' - \delta),$$

in der Declination (beziehungsweise Breite).

Achtzigste Vorlesung.

Rechnungsbeispiele für die Verbesserung der Hypothesen bei einer elliptischen Bahn.

Für $\frac{n}{n'}$ oder c , $\frac{n''}{n'}$ oder c'' wählen wir die Formen:

$$\frac{n}{n'} = \frac{\vartheta}{\vartheta'} \left(1 + \frac{Q}{2r'^3} \right)$$

$$\frac{n''}{n'} = \frac{\vartheta''}{\vartheta'} \left(1 + \frac{Q''}{2r'^3} \right),$$

welche von den bisher üblichen etwas abweichen. Wir haben früher bloss die Symmetrie als einen kleinen Vortheil dieser Formen geltend gemacht; sie besitzen aber den viel grösseren, dass sie die Berücksichtigung der kleinen Glieder vierter, sechster und sogar achter Ordnung schon in der ersten Hypothese ermöglichen. Indessen ist hier von dieser Möglichkeit bisher fast gar kein Gebrauch gemacht, mit Rücksicht auf die für Einführung des Lesers in das Wesen dieser Rechnungen einmal gewählte Darstellung; deshalb haben wir uns auch meistens erlaubt, in der ersten Hypothese:

$$Q = Q'' = \vartheta \vartheta''$$

zu setzen, welche Bildung der ersten Hypothese bei ungleichen Zeitintervallen der in der Theoria motus c. c. vorgeschlagenen an Genauigkeit nachsteht; der Fehler wird desto erheblicher, je grösser jene Ungleichheit wird. Es macht offenbar in keiner Weise die Rechnung nennenswerth complicirter, wenn wir statt obiger Näherung die folgende anwenden:

$$Q = \frac{1}{3} \vartheta'' (\vartheta' + \vartheta)$$

$$Q'' = \frac{1}{3} \vartheta (\vartheta' + \vartheta''),$$

welche sich aus den Reihenentwickelungen der Vorlesung 70 auf den ersten Blick ergibt. Die Bildung der zweiten Hypothese nach der Hansen'schen Methode soll an dem früher gewählten Beispiele (Vorlesung 68) durchgeführt werden. In diesem Beispiele wurde gefunden:

$$\log r = 0,302274$$

$$\log r'' = 0,294696$$

$$f' = \frac{1}{2} (v'' - v) = 7^\circ 31' 38'',9$$

$$2f'' = v' - v = 7^\circ 28' 22'',8$$

$$2f = v'' - v' = 7^\circ 34' 54'',8.$$

Die Bedingung, dass $2f' = 2(f + f'')$ werden muss, zeigt sich hier bis auf den sehr kleinen Unterschied von $0'',2$ erfüllt.

Die Formeln der Vorlesung 76 ergeben dann weiter:

$\log m'' = 7,272549$	$\log m = 7,281338$
$\omega'' = -0^\circ 4' 13'',8$	$\omega = -0^\circ 3' 16'',2$
$\log l'' = 7,02986$	$\log l = 7,04143$
$\log h'' = 7,351172$	$\log h = 7,359946$
$\log \eta'' = 9,998921$	$\log \eta = 9,998899$
$\log P = 0,001353$	$\log Q = 9,074430.$

Diese Werthe von $\log P$ und $\log Q$ sind nun der zweiten Näherung zu Grunde zu legen. In einer Anwendung auf die Praxis wären hier nun auch die Beobachtungszeiten

wegen der Aberration zu corrigiren; wir können uns hier, wo es nur gilt, den Gang der Verbesserung zu zeigen, von diesem Geschäft dispensiren. Die zweite Hypothese, nach den Hansen'schen Formeln berechnet, führt auf folgende Zahlen:

$\log \Sigma = 0,254628$	
$\omega = -11^{\circ} 8' 35'',0$	$\log \Omega = 9,066194$
$\log M = 0,869628$	
$z = 11^{\circ} 54' 49'',9$	$\log r' = 0,297730$
$\log V = 0,596153$	$\log V'' = 0,594800$
$\log \varrho = 0,006504$	$\log \varrho'' = 0,064308$
$a = 50^{\circ} 35' 16'',7$	$a'' = 65^{\circ} 39' 21'',3$
$b = -1^{\circ} 5' 32'',2$	$b'' = -0^{\circ} 45' 2'',1$
$\log r = 0,301994$	$\log r'' = 0,294408$
$i' = 7^{\circ} 32' 5'',8$	
$2f'' = 7^{\circ} 28' 49'',9$	$2f = 7^{\circ} 35' 21'',5$
$\log m'' = 7,273308$	$\log m = 7,282178$
$\omega'' = -0^{\circ} 4' 13'',1$	$\omega = -0^{\circ} 3' 17'',3$
$\log l'' = 7,03071$	$\log l = 7,04227$
$\log h'' = 7,352002$	$\log h = 7,360785$
$\log \eta'' = 9,998919$	$\log \eta = 9,998897$
$\log P = 0,001353$	$\log Q = 9,047467$
$\log M = 0,869695$	$z = 11^{\circ} 54' 50'',2$
$\log V = 0,596150$	$\log V'' = 0,594797$
$\log \varrho_1 = 0,006498$	$\log \varrho_1'' = 0,064300$
$a = 50^{\circ} 35' 16'',7$	$a'' = 65^{\circ} 39' 22'',1$
$b = -1^{\circ} 5' 32'',2$	$b'' = -0^{\circ} 45' 2'',1$
$\log r = 0,301991$	$\log r'' = 0,294404.$

Hiermit sind die heliocentrischen Coordinaten des Planeten, aus welchen auf verschiedene dem Leser schon beschriebene Arten die Elemente zu finden sind, definitiv bekannt geworden.

Einundachtzigste Vorlesung.

Die Gibbs'sche Vektorenmethode¹⁾ zur Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen.

Während die durch die Gauss'sche Methode erlangten Näherungsformeln für die Verhältnisse der Dreiecksflächen nur streng sind bis auf Grössen zweiter Ordnung, hat Gibbs durch seine Vektorenmethode gezeigt, dass sich die Verhältnisse der Dreiecksflächen genau bis auf Grössen vierter Ordnung inclusive darstellen lassen durch die Relationen:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_3} \frac{1 + \frac{B_1}{r_1^3}}{1 - \frac{B_2}{r_2^3}}, \quad \frac{n_3}{n_2} = \frac{\tau_3}{\tau_1 + \tau_3} \frac{1 + \frac{B_3}{r_3^3}}{1 - \frac{B_2}{r_2^3}},$$

¹⁾ Man vergleiche das in den Vorbemerkungen zur 3. Ausgabe des vorliegenden Werkes auf S. XXII, XXV und XXVI Gesagte.

wobei:

$$B_1 = \frac{1}{12} (-\tau_1^2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_3^2)$$

$$B_2 = \frac{1}{12} (\tau_1^2 + 3\tau_1 \tau_3 + \tau_3^2)$$

$$B_3 = \frac{1}{12} (\tau_1^2 + \tau_1 \tau_3 - \tau_3^2)$$

gesetzt ist. „Der Versuch Oppolzer's hingegen, — bemerkt Prof. Philipps treffend — Grössen dritter Ordnung in die Näherungsformeln für die Verhältnisse der Dreiecksflächen einzuführen, kann nicht als ein glücklicher bezeichnet werden, der Complicirtheit der Formeln wegen, zu denen Oppolzer gelangt, während dieser Vorwurf die Gibbs'sche Methode nicht trifft. Auch ist die Arbeit, welche erforderlich ist, die Fundamentalgleichung zur Lösung vorzubereiten, bei Gibbs' Methode weit geringer, als dies bei Gauss' und Oppolzer's Methoden der Fall ist. Ausserdem schliessen die Formeln zur Correction der angenommenen Werthe bei den successiven Näherungen in jeder Hypothese Glieder einer höheren Ordnung ein, als sie bei Gauss und Oppolzer mitgenommen werden, und folglich ist die Convergenz bei den Approximationen bei Gibbs eine raschere. Der hervortretende Zug der Gibbs'schen Methode aber ist die grosse Einfachheit, welche die Entwicklung der Fundamentalgleichung charakterisirt, indem die bei der Lösung des Problems angewandten eleganten Kunstgriffe die Grundzüge der Theorie keineswegs verdunkeln.“

Ehe wir die Gibbs'schen Entwicklungen selbst geben, mögen einige orientirende Worte über den Begriff und Gebrauch des „Vectors“ vorausgehen.

Denkt man sich einen Punkt mit den Coordinaten x_0, y_0, z_0 mit einem anderen Punkte, dessen Coordinaten x_1, y_1, z_1 sind, durch eine Strecke verbunden, welche somit in ihrer Länge und Richtung vollkommen bestimmt ist und deren drei Componenten:

$$x_1 - x_0 = \xi$$

$$y_1 - y_0 = \eta$$

$$z_1 - z_0 = \zeta$$

sind, so existiren offenbar zugleich noch unendlich viele andere Strecken mit denselben Coordinaten, die aus der erstgenannten sämmtlich durch Parallelverschiebung hervorgehen und alle in Länge, Richtung und Sinn mit ihr vollkommen übereinstimmen. Für den Inbegriff aller dieser Strecken hat bereits Hamilton in seiner Quaternionentheorie den Namen „Vector“ eingeführt, dessen Länge also die positive Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate seiner drei Componenten ist:

$$\Omega = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Bei einer Parallelverschiebung des Coordinatensystems ändern sich die Coordinaten eines Vectors offenbar gar nicht, während sie sich bei einer Drehung des Coordinatensystemes wie gewöhnliche Punktecoordinaten verhalten.

Zwei Vektoren, deren Componenten bezüglich ξ_1, η_1, ζ_1 und ξ_2, η_2, ζ_2 sind, kann man nun auf verschiedene Weise zu einem neuen Vector zusammensetzen. Erstens additiv:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2$$

$$\eta = \eta_1 + \eta_2$$

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2.$$

ξ, η, ζ verhalten sich dann bei Coordinatentransformationen wie die Coordinaten eines Vectors.

Man kann aber einen neuen Vector ξ, η, ζ aus den gegebenen, ξ_1, η_1, ζ_1 und ξ_2, η_2, ζ_2 auch durch folgende Operation zusammensetzen:

$$\begin{aligned}\xi &= \eta_1 \xi_2 - \xi_1 \eta_2 \\ \eta &= \xi_1 \xi_2 - \xi_1 \xi_2 \\ \xi &= \xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2.\end{aligned}$$

Diesen Vector ξ, η, ξ bezeichnet man dann als das „vectorielle Product“ der beiden ursprünglichen Vektoren ξ_1, η_1, ξ_1 und ξ_2, η_2, ξ_2 . Eigenthümlich ist diesem Product, dass es bei Vertauschung der Factoren sein Vorzeichen ändert, d. h. wenn man ξ_1, η_1, ξ_1 mit ξ_2, η_2, ξ_2 vertauscht, geht ξ, η, ξ über in $-\xi, -\eta, -\xi$.

Eine dritte Art der Zusammensetzung der beiden ursprünglichen Vektoren ist $\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \xi_1 \xi_2$, eine Grösse, die man das „scalare Product“¹⁾ nennt. In der That ändert sich diese Grösse bei Coordinatentransformation gar nicht, hat aber im Gegensatz zum vectoriellen Product die Eigenschaft, das Vorzeichen bei Vertauschung der Factoren nicht zu ändern.

Geometrisch wird der zusammengesetzte Vector höchst einfach durch die Diagonale eines Parallelogramms repräsentirt, das aus den ursprünglichen Vektoren ξ_1, η_1, ξ_1 und ξ_2, η_2, ξ_2 gebildet wird. Das scalare Product ist, wenn a und b die absoluten Längen der ursprünglichen Vektoren und α den von ihnen eingeschlossenen Winkel bezeichnet:

$$L_s = ab \cos \alpha.$$

Die Länge des durch das vectorielle Product repräsentirten Vectors hingegen ist gegeben durch:

$$\sqrt{(\eta_1 \xi_2 - \eta_2 \xi_1)^2 + (\xi_1 \xi_2 - \xi_2 \xi_1)^2 + (\xi_1 \eta_2 - \eta_1 \xi_2)^2}$$

oder:

$$\sqrt{a^2 b^2 - (\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \xi_1 \xi_2)^2} = ab \sin \alpha,$$

also:

$$L_v = ab \sin \alpha.$$

Man sieht sogleich, dass dieser durch das vectorielle Product repräsentirte Vector senkrecht auf der durch die beiden gegebenen Vektoren gelegten Ebene steht, da:

$$\begin{aligned}\xi \xi_1 + \eta \eta_1 + \xi \xi_1 &= 0 \\ \xi \xi_2 + \eta \eta_2 + \xi \xi_2 &= 0\end{aligned}$$

ist. Um den Sinn dieser Normalen festzulegen, denke man sich die xy -Coordinatenebene mit der Ebene des Papiers zusammenfallend und den Beschauer auf der Seite der positiven z -Axe. Dann heisst das Coordinatensystem ein französisches (hopfenwendiges) oder englisches (weinwendiges), je nachdem die Drehung von der positiven x -Axe zur positiven y -Axe in demselben oder im entgegengesetzten Sinne wie die Bewegung des Uhrzeigers erfolgt. Beide Coordinatensysteme lassen sich also nicht durch Drehung in einander überführen, sondern sind Spiegelbilder. Wählen wir, um den Sinn des Vectors zu entscheiden, im Folgenden in gewöhnlicher Weise das englische Coordinatensystem und suchen, um einen einfachen Fall zu nehmen das specielle vectorielle Product aus den beiden Vektoren:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= +1 & \xi_2 &= 0 \\ \eta_1 &= 0 & \eta_2 &= +1 \\ \xi_1 &= 0 & \xi_2 &= 0,\end{aligned}$$

so ist dasselbe auf Grund der vorstehenden Regeln:

¹⁾ Grassmann hat für das vectorielle Product auch die Bezeichnung „äusseres Product“, für das scalare diejenige „inneres Product“ eingeführt; Gibbs bezeichnet das erstere im Englischen als „skew Product“, das zweite als „direct Product“.

$$\begin{aligned}\xi_3 &= 0 \\ \eta_3 &= 0 \\ \zeta_3 &= +1,\end{aligned}$$

woraus erhellt, dass, wenn der erste Vector in die positive x -Axe, der zweite in die positive y -Axe fällt, das vectorielle Product in die Richtung der positiven z -Axe fällt.

In der folgenden Darstellung legen wir das englische Coordinatensystem zu Grunde und bezeichnen mit Gibbs die Vectorgrössen vorläufig allgemein mit grossen deutschen Buchstaben. Für das scalare Product der beiden Grössen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} braucht Gibbs die Bezeichnung $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ und es ist also, wenn x, y, z und x', y', z' bezüglich die Componenten von \mathfrak{A} und \mathfrak{B} sind:

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = xx' + yy' + zz'.$$

Das vectorielle Product, das also einen Vector darstellt, der das Product der absoluten Längen der Vektoren \mathfrak{A} und \mathfrak{B} in den Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels ist, dessen Richtung senkrecht auf derjenigen Seite der durch \mathfrak{A} und \mathfrak{B} gehenden Ebene steht, auf der die Drehung von \mathfrak{A} nach \mathfrak{B} dem Sinne des Uhrzeigers entgegengesetzt erscheint, bezeichnet Gibbs mit:

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \sqrt{(yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2}.$$

Die Bezeichnung $(\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C})$ gebraucht Gibbs, um das Volumen eines Parallelepipedes zu bezeichnen, dessen drei Kanten erhalten werden, indem man die Vektoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ von einem bestimmten Punkte aus zusammensetzt; dies Volumen hat man also als positiv oder negativ zu betrachten, je nachdem der Vector \mathfrak{C} auf diejenige Seite der Ebene, in der \mathfrak{A} und \mathfrak{B} liegen, fällt, auf welcher die Drehung von \mathfrak{A} nach \mathfrak{B} dem Sinne des Uhrzeigers entgegengesetzt erscheint, oder auf die andere Seite. Wenn also die rechtwinkligen Componenten von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ bezüglich $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$ sind, so ist:

$$(\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C}) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Aus den festgesetzten Definitionen ergeben sich die folgenden Beziehungen für die Vektoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und \mathfrak{C} :

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} &= \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}, & \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} &= -\mathfrak{B} \times \mathfrak{A} \\ (\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C}) &= (\mathfrak{B} \mathfrak{C} \mathfrak{A}) = (\mathfrak{C} \mathfrak{A} \mathfrak{B}) = -(\mathfrak{A} \mathfrak{C} \mathfrak{B}) = -(\mathfrak{C} \mathfrak{B} \mathfrak{A}) = -(\mathfrak{B} \mathfrak{A} \mathfrak{C})\end{aligned}$$

oder:

$$(\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C}) = \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) = \mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{C} \times \mathfrak{A}) = \mathfrak{C} \cdot (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}),$$

so dass also $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ distributive Functionen von \mathfrak{A} und \mathfrak{B} sind, während $(\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C})$ eine distributive Function von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und \mathfrak{C} ist; wenn also z. B.:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{L} + \mathfrak{M},$$

so ist:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} &= \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{B} + \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{B}; & \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} &= \mathfrak{L} \times \mathfrak{B} + \mathfrak{M} \times \mathfrak{B}; \\ (\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C}) &= (\mathfrak{L} \mathfrak{B} \mathfrak{C}) + (\mathfrak{M} \mathfrak{B} \mathfrak{C})\end{aligned}$$

und analog für \mathfrak{B} und \mathfrak{C} .

Die Bezeichnung $(\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C})$ ist identisch mit der in der *Mécanique Analytique* von Lagrange gebrauchten, nur dass sich dort der Gebrauch auf Vectoreinheiten beschränkt.

Die Bezeichnung $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ steht, wie wir sehen werden, wenn sie auch nicht völlig identisch mit ihr ist, doch in naher Beziehung zu der Bezeichnung $[r_1 r_2]$, welche gewöhnlich für die doppelte Dreiecksfläche gebraucht wird, die durch zwei Stellungen in der Bahn gegeben ist.

Ableitung der Gibbs'schen Fundamentalgleichung.

Die folgende einfache Betrachtung führt auf eine „Vectorgleichung“, die nicht complicirt und bequem für eine analytische Transformation ist, welche die Beziehung zwischen drei Positionen in einer Bahn, die nur durch kleine oder mässig grosse Intervalle von einander getrennt sind, weit genauer darstellt, als es die bisher von Gauss und Oppolzer in der Theorie der Bahnbestimmung gebrauchten Näherungsformeln thun. Wir wählen die Einheit der Zeit so, dass die Sonnenmasse einem Körper in der Entfernung Eins die Beschleunigung Eins ertheilt, bezeichnen weiter die von der Sonne nach den drei Positionen des Körpers in seiner Bahn gezogenen Vektoren mit $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ und die Längen dieser Vektoren (d. h. die heliocentrischen Distanzen) mit r_1, r_2, r_3 . Die diesen drei Positionen entsprechenden Beschleunigungen sind also durch $-\frac{\mathfrak{R}_1}{r_1^3}, -\frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3}, -\frac{\mathfrak{R}_3}{r_3^3}$ repräsentirt. Dann kann die Bewegung zwischen den betrachteten Positionen mit einem hohen Grade von Genauigkeit dargestellt werden durch eine Gleichung der Form:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{A} + t\mathfrak{B} + t^2\mathfrak{C} + t^3\mathfrak{D} + t^4\mathfrak{E},$$

in der $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ fünf Vectorconstanten repräsentiren. Die wirkliche Bewegung genügt streng folgenden sechs Bedingungen, indem wir mit τ_3 die Zwischenzeit zwischen der ersten und dritten, mit τ_2 aber diejenige zwischen der zweiten und dritten Position bezeichnen und für die zweite Position $t = 0$ setzen,

für $t = -\tau_3$:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1, \quad \frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} = -\frac{\mathfrak{R}_1}{r_1^3};$$

für $t = 0$:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_2, \quad \frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} = -\frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3};$$

für $t = \tau_1$:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_3, \quad \frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} = -\frac{\mathfrak{R}_3}{r_3^3}.$$

Man kann daher mit einem hohen Grade von Genauigkeit setzen:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{R}_1 &= \mathfrak{A} - \tau_3\mathfrak{B} + \tau_3^2\mathfrak{C} - \tau_3^3\mathfrak{D} + \tau_3^4\mathfrak{E} \\ \mathfrak{R}_2 &= \mathfrak{A} \\ \mathfrak{R}_3 &= \mathfrak{A} + \tau_1\mathfrak{B} + \tau_1^2\mathfrak{C} + \tau_1^3\mathfrak{D} + \tau_1^4\mathfrak{E} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (I)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\mathfrak{R}_1}{dt^2} &= -\frac{\mathfrak{R}_1}{r_1^3} = 2\mathfrak{C} - 6\tau_3\mathfrak{D} + 12\tau_3^2\mathfrak{E} \\ \frac{d^2\mathfrak{R}_2}{dt^2} &= -\frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3} = 2\mathfrak{C} \\ \frac{d^2\mathfrak{R}_3}{dt^2} &= -\frac{\mathfrak{R}_3}{r_3^3} = 2\mathfrak{C} + 6\tau_1\mathfrak{D} + 12\tau_1^2\mathfrak{E} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (II)$$

Wenn man aus diesen sechs Gleichungen die fünf Constanten \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{D} , \mathfrak{E} eliminirt — eine Elimination, die sogleich durchgeführt werden soll, mit der wir aber den allgemeinen Gedankengang im Augenblicke nicht unterbrechen wollen —, so resultirt eine einfache Gleichung der folgenden Form:

$$A_1 \left(1 + \frac{B_1}{r_1^3}\right) \mathfrak{R}_1 - \left(1 - \frac{B_2}{r_2^3}\right) \mathfrak{R}_2 + A_3 \left(1 + \frac{B_3}{r_3^3}\right) \mathfrak{R}_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wobei gesetzt ist:

$$A_1 = \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_3}, \quad A_3 = \frac{\tau_3}{\tau_1 + \tau_3}, \\ B_1 = 1/12 (-\tau_1^2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_3^2), \quad B_2 = 1/12 (\tau_1^2 + 3 \tau_1 \tau_3 + \tau_3^2), \quad B_3 = 1/12 (\tau_1^2 + \tau_1 \tau_3 - \tau_3^2).$$

Um die geometrische Bedeutung dieser Gibbs'schen Fundamentalgleichung (1) darzulegen, setzen wir:

$$A_1 \left(1 + \frac{B_1}{r_1^3}\right) = n_1, \quad \left(1 - \frac{B_2}{r_2^3}\right) = n_2, \quad A_3 \left(1 + \frac{B_3}{r_3^3}\right) = n_3 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und erhalten kürzer für (1):

$$n_1 \mathfrak{R}_1 - n_2 \mathfrak{R}_2 + n_3 \mathfrak{R}_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese Gleichung drückt aus, dass der Vector $n_2 \mathfrak{R}_2$ die Diagonale eines aus den Seiten $n_1 \mathfrak{R}_1$ und $n_3 \mathfrak{R}_3$ gebildeten Parallelogramms ist. Multipliciren wir sie mit \mathfrak{R}_3 und \mathfrak{R}_1 , und zwar in vectorieller Multiplication, so folgt:

$$n_1 \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_3 - n_2 \mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_3 = 0, \quad - n_2 \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 + n_3 \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_3 = 0 \quad . \quad . \quad (4)$$

also:

$$\frac{\mathfrak{R}_2 \times \mathfrak{R}_3}{n_1} = \frac{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_3}{n_2} = \frac{\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2}{n_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Die Gibbs'sche Fundamentalgleichung kann daher als Ausdruck dafür betrachtet werden, dass die drei Vektoren \mathfrak{R}_1 , \mathfrak{R}_2 , \mathfrak{R}_3 in einer Ebene liegen und dass die drei, je durch ein Paar dieser Vektoren bestimmten Dreiecke, die gewöhnlich mit $[r_2 r_3]$, $[r_1 r_3]$, $[r_1 r_2]$ bezeichnet werden, den Grössen:

$$A_1 \left(1 + \frac{B_1}{r_1^3}\right), \quad \left(1 - \frac{B_2}{r_2^3}\right), \quad A_3 \left(1 + \frac{B_3}{r_3^3}\right)$$

proportional sind. —

Da unsere Vektorgleichung drei gewöhnlichen Gleichungen äquivalent ist, so genügt es augenscheinlich, die drei Positionen des Körpers in Einklang mit der Bedingung zu bestimmen, dass die Positionen auf den Visirlinien von drei Beobachtungen liegen. Um diese Bedingung analytisch auszudrücken, wollen wir mit \mathfrak{E}_1 , \mathfrak{E}_2 , \mathfrak{E}_3 die von der Sonne nach den drei Positionen der Erde gezogenen Vektoren bezeichnen (oder, genauer, nach den Observatorien, auf denen die Beobachtungen angestellt sind); ferner mit \mathfrak{F}_1 , \mathfrak{F}_2 , \mathfrak{F}_3 die Vektoreinheiten, welche in die Richtungen, in denen der Körper beobachtet ist, fallen; schliesslich mit ϱ_1 , ϱ_2 , ϱ_3 die drei Entfernungen des Körpers von den Orten der Beobachtung. Man hat dann:

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{E}_1 + \varrho_1 \mathfrak{F}_1, \quad \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{E}_2 + \varrho_2 \mathfrak{F}_2, \quad \mathfrak{R}_3 = \mathfrak{E}_3 + \varrho_3 \mathfrak{F}_3 \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Bei Substitution dieser Werthe nimmt unsere Fundamentalgleichung folgende Form an:

$$A_1 \left(1 + \frac{B_1}{r_1^3}\right) (\mathfrak{E}_1 + \varrho_1 \mathfrak{F}_1) - \left(1 - \frac{B_2}{r_2^3}\right) (\mathfrak{E}_2 + \varrho_2 \mathfrak{F}_2) + A_3 \left(1 + \frac{B_3}{r_3^3}\right) (\mathfrak{E}_3 + \varrho_3 \mathfrak{F}_3) = 0 \quad (7)$$

in der ϱ_1 , ϱ_2 , ϱ_3 , r_1 , r_2 , r_3 (die geocentrischen und heliocentrischen Entfernungen) die

einzigsten unbekannten Grössen sind. Aus den Gleichungen (6) folgen, indem man in einer jeden beide Glieder quadriert, die Relationen:

$$\left. \begin{aligned} r_1^2 &= \mathfrak{G}_1^2 + 2(\mathfrak{G}_1 \cdot \mathfrak{F}_1) \varrho_1 + \varrho_1^2 \\ r_2^2 &= \mathfrak{G}_2^2 + 2(\mathfrak{G}_2 \cdot \mathfrak{F}_2) \varrho_2 + \varrho_2^2 \\ r_3^2 &= \mathfrak{G}_3^2 + 2(\mathfrak{G}_3 \cdot \mathfrak{F}_3) \varrho_3 + \varrho_3^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

aus denen die Werthe von r_1, r_2, r_3 mittelst der Werthe von $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ abgeleitet werden können, und umgekehrt. Die Gleichungen (7) und (8), die den ursprünglichen sechs gewöhnlichen Gleichungen äquivalent sind, reichen hin zur Bestimmung der sechs Grössen $r_1, r_2, r_3, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$. Substituiren wir die Werthe von r_1, r_2, r_3 , ausgedrückt als Functionen von $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ in Gleichung (7), so erhalten wir eine einfache Vectorgleichung, aus der die drei geocentrischen Entfernungen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ bestimmt werden können.

Es erübrigt nur noch, zu zeigen, erstens wie die numerische Lösung der Gleichung auszuführen ist und inwiefern zweitens eine solche genäherte Lösung des wirklichen Problems als Ausgangspunkt weiterer Annäherungen dienen kann.

Zuvor aber werde noch die soeben übergangene Elimination ausgeführt, d. h. die Gibbs'sche Fundamentalgleichung (1) wirklich abgeleitet. Die im Folgenden gegebene Ableitung der Fundamentalgleichung führte Prof. Schering aus, von dem sie Prof. Schur erhielt, der diese Ableitung dem Herausgeber der 2. Auflage des vorliegenden Werkes bei Bearbeitung der Gibbs'schen Methode zur Verfügung stellte. Eine andere Ableitung findet sich auf S. 1 bis 3 der, in den Vorbemerkungen zur dritten Ausgabe des vorliegenden Werkes (cf. S. XXV) erwähnten Frischauf'schen Arbeit. Zunächst erhält man aus den Gleichungen (1) bis (6) unmittelbar, wenn man $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_2$ und

$$2\mathfrak{G} = -\frac{\mathfrak{H}_2}{r_2^3} \text{ setzt:}$$

$$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2 - \tau_3 \mathfrak{D} + \tau_3^2 \mathfrak{G} - \tau_3^3 \mathfrak{D} + \tau_3^4 \mathfrak{G} \dots \dots \dots (9)$$

$$\mathfrak{H}_3 = \mathfrak{H}_2 + \tau_1 \mathfrak{D} + \tau_1^2 \mathfrak{G} - \tau_1^3 \mathfrak{D} + \tau_1^4 \mathfrak{G} \dots \dots \dots (10)$$

$$-\frac{\mathfrak{H}_1}{r_1^3} = -\frac{\mathfrak{H}_2}{r_2^3} - 6\tau_3 \mathfrak{D} + 12\tau_3^2 \mathfrak{G} \dots \dots \dots (11)$$

$$-\frac{\mathfrak{H}_3}{r_3^3} = -\frac{\mathfrak{H}_2}{r_2^3} + 6\tau_1 \mathfrak{D} + 12\tau_1^2 \mathfrak{G} \dots \dots \dots (12)$$

Durch Multiplication von Gleichung (9) mit τ_1 , von Gleichung (10) mit τ_3 und Addition folgt jetzt:

$$(\mathfrak{H}_1 \tau_1 + \mathfrak{H}_3 \tau_3) = \mathfrak{H}_2 (\tau_1 + \tau_3) + \tau_1 \tau_3 (\tau_1 + \tau_3) \mathfrak{G} + \tau_1 \tau_3 (\tau_1^2 - \tau_3^2) \mathfrak{D} + \tau_1 \tau_3 (\tau_1^3 + \tau_3^3) \mathfrak{G}$$

oder, wenn man wieder $2\mathfrak{G} = -\frac{\mathfrak{H}_2}{r_2^3}$ setzt:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{H}_1 \tau_1 + \mathfrak{H}_3 \tau_3 &= \mathfrak{H}_2 (\tau_1 + \tau_3) - \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{H}_2}{r_2^3} \tau_1 \tau_3 (\tau_1 + \tau_3) \\ &\quad + \tau_1 \tau_3 (\tau_1^2 - \tau_3^2) \mathfrak{D} + \tau_1 \tau_3 (\tau_1^3 + \tau_3^3) \mathfrak{G} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

Nun ist aber nach Gleichung (11):

$$\mathfrak{D} = \left(-\frac{\mathfrak{H}_2}{r_2^3} + \frac{\mathfrak{H}_1}{r_1^3} + 12\tau_3^2 \mathfrak{G} \right) \frac{1}{6\tau_3} \dots \dots \dots (14)$$

und nach Gleichung (12):

$$\mathfrak{D} = \left(+\frac{\mathfrak{H}_2}{r_2^3} - \frac{\mathfrak{H}_3}{r_3^3} - 12\tau_1^2 \mathfrak{G} \right) \frac{1}{6\tau_1} \dots \dots \dots (15)$$

Setzt man jetzt einmal Gleichung (14), sodann Gleichung (15) in (13) ein, so erhält man zwei Gleichungen mit \mathfrak{E} als einziger Unbekannten, nämlich:

$$(\mathfrak{R}_1 \tau_1 + \mathfrak{R}_3 \tau_3) = \mathfrak{R}_2 (\tau_1 + \tau_3) - \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3} \tau_1 \tau_3 (\tau_1 + \tau_3) \\ + \tau_1 \tau_3 (\tau_1^2 - \tau_3^2) \left(-\frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3} + \frac{\mathfrak{R}_1}{r_1^3} + 12 \tau_3^2 \mathfrak{E} \right) \frac{1}{6 \tau_3} + \tau_1 \tau_3 (\tau_1^3 + \tau_3^3) \mathfrak{E}$$

$$(\mathfrak{R}_1 \tau_1 + \mathfrak{R}_3 \tau_3) = \mathfrak{R}_2 (\tau_1 + \tau_3) - \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3} \tau_1 \tau_3 (\tau_1 + \tau_3) \\ + \tau_1 \tau_3 (\tau_1^2 - \tau_3^2) \left(\frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3} - \frac{\mathfrak{R}_3}{r_3^3} - 12 \tau_1^2 \mathfrak{E} \right) \frac{1}{6 \tau_1} + \tau_1 \tau_3 (\tau_1^3 + \tau_3^3) \mathfrak{E}$$

oder:

$$(\mathfrak{R}_1 \tau_1 + \mathfrak{R}_3 \tau_3) = \mathfrak{R}_2 (\tau_1 + \tau_3) - \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3} \tau_1 \tau_3 (\tau_1 + \tau_3) + \tau_1 \tau_3 (\tau_1^2 - \tau_3^2) \left(-\frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3} + \frac{\mathfrak{R}_1}{r_1^3} \right) \frac{1}{6 \tau_3} \\ + \mathfrak{E} [\tau_1 \tau_3 (\tau_1^2 - \tau_3^2) 2 \tau_3 + \tau_1 \tau_3 (\tau_1^3 + \tau_3^3)]$$

$$(\mathfrak{R}_1 \tau_1 + \mathfrak{R}_3 \tau_3) = \mathfrak{R}_2 (\tau_1 + \tau_3) - \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3} \tau_1 \tau_3 (\tau_1 + \tau_3) + \tau_1 \tau_3 (\tau_1^2 - \tau_3^2) \left(\frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3} - \frac{\mathfrak{R}_3}{r_3^3} \right) \frac{1}{6 \tau_1} \\ + \mathfrak{E} [-\tau_1 \tau_3 (\tau_1^2 - \tau_3^2) 2 \tau_1 + \tau_1 \tau_3 (\tau_1^3 + \tau_3^3)]$$

oder:

$$(\mathfrak{R}_1 \tau_1 + \mathfrak{R}_3 \tau_3) - \mathfrak{R}_2 (\tau_1 + \tau_3) + \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3} \tau_1 \tau_3 (\tau_1 + \tau_3) - \frac{1}{6} \tau_1 (\tau_1^2 - \tau_3^2) \left(-\frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3} + \frac{\mathfrak{R}_1}{r_1^3} \right) \\ = \tau_1 \tau_3 \mathfrak{E} [(\tau_1^2 - \tau_3^2) 2 \tau_3 + (\tau_1^3 + \tau_3^3)]$$

$$(\mathfrak{R}_1 \tau_1 + \mathfrak{R}_3 \tau_3) - \mathfrak{R}_2 (\tau_1 + \tau_3) + \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3} \tau_1 \tau_3 (\tau_1 + \tau_3) - \frac{1}{6} \tau_3 (\tau_1^2 - \tau_3^2) \left(\frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3} - \frac{\mathfrak{R}_3}{r_3^3} \right) \\ = \tau_1 \tau_3 \mathfrak{E} [-(\tau_1^2 - \tau_3^2) 2 \tau_1 + (\tau_1^3 + \tau_3^3)].$$

Durch kreuzweise ausgeführte Multiplication dieser beiden letzten Gleichungen mit den Coefficienten von \mathfrak{E} und Division durch $\tau_1 \tau_3$ ergibt sich jetzt:

$$\left[(\mathfrak{R}_1 \tau_1 + \mathfrak{R}_3 \tau_3) - \mathfrak{R}_2 (\tau_1 + \tau_3) + \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3} \tau_1 \tau_3 (\tau_1 + \tau_3) - \frac{\tau_1}{6} (\tau_1^2 - \tau_3^2) \left(-\frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3} + \frac{\mathfrak{R}_1}{r_1^3} \right) \right] \\ [-2 \tau_1 (\tau_1^2 - \tau_3^2) + (\tau_1^3 + \tau_3^3)] \\ - \left[(\mathfrak{R}_1 \tau_1 + \mathfrak{R}_3 \tau_3) - \mathfrak{R}_2 (\tau_1 + \tau_3) + \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3} \tau_1 \tau_3 (\tau_1 + \tau_3) - \frac{\tau_3}{6} (\tau_1^2 - \tau_3^2) \left(\frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3} - \frac{\mathfrak{R}_3}{r_3^3} \right) \right] \\ [2 \tau_3 (\tau_1^2 - \tau_3^2) + (\tau_1^3 + \tau_3^3)] = 0.$$

Somit sind die fünf Coefficienten \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{D} , \mathfrak{E} sämmtlich eliminirt. Dividirt man noch die ersten Glieder beider Theile letzterer Gleichung durch $\tau_1 + \tau_3$ und setzt:

$$\frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_3} = A_1, \quad \frac{\tau_3}{\tau_1 + \tau_3} = A_3,$$

so wird:

$$\left[\mathfrak{R}_1 A_1 + \mathfrak{R}_3 A_3 - \mathfrak{R}_2 + \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3} \tau_1 \tau_3 - \frac{\tau_1}{6} (\tau_1 - \tau_3) \left(-\frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3} + \frac{\mathfrak{R}_1}{r_1^3} \right) \right] [-\tau_1^3 + 2 \tau_1 \tau_3^2 + \tau_3^3] \\ - \left[\mathfrak{R}_1 A_1 + \mathfrak{R}_3 A_3 - \mathfrak{R}_2 + \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3} \tau_1 \tau_3 - \frac{\tau_3}{6} (\tau_1 - \tau_3) \left(\frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3} - \frac{\mathfrak{R}_3}{r_3^3} \right) \right] [\tau_1^3 + 2 \tau_1^2 \tau_3 - \tau_3^3] = 0,$$

oder:

$$\left[\mathfrak{R}_1 A_1 + \mathfrak{R}_3 A_3 - \mathfrak{R}_2 + \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3} \tau_1 \tau_3 \right] [-2 \tau_1^3 + 2 \tau_1 \tau_3^2 - 2 \tau_1^2 \tau_3 + 2 \tau_3^3] \\ - \frac{\tau_1 - \tau_3}{6} \left[\tau_1 \left(-\frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3} + \frac{\mathfrak{R}_1}{r_1^3} \right) (-\tau_1^3 + 2 \tau_1 \tau_3^2 + \tau_3^3) + \tau_3 \left(\frac{\mathfrak{R}_2}{r_2^3} - \frac{\mathfrak{R}_3}{r_3^3} \right) (\tau_1^3 + 2 \tau_1^2 \tau_3 - \tau_3^3) \right] = 0$$

oder nach $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ geordnet:

$$\left. \begin{aligned} & \mathfrak{R}_1 \left[A_1 (-2\tau_1^3 + 2\tau_1\tau_3^2 - 2\tau_1^2\tau_3 + 2\tau_3^3) - \frac{\tau_1 - \tau_3}{6} \tau_1 \frac{1}{r_1^3} (-\tau_1^3 + 2\tau_1\tau_3^2 + \tau_3^3) \right] \\ & + \mathfrak{R}_2 \left[-(-2\tau_1^3 + 2\tau_1\tau_3^2 - 2\tau_1^2\tau_3 + 2\tau_3^3) + \frac{1}{2} \frac{\tau_1\tau_3}{r_2^3} (-2\tau_1^3 + 2\tau_1\tau_3^2 - 2\tau_1^2\tau_3 + 2\tau_3^3) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\tau_1 - \tau_3}{6} \tau_1 \frac{1}{r_2^3} (-\tau_1^3 + 2\tau_1\tau_3^2 + \tau_3^3) + \frac{\tau_1 - \tau_3}{6} \tau_3 \frac{1}{r_2^3} (\tau_1^3 + 2\tau_1^2\tau_3 - \tau_3^3) \right] \\ & + \mathfrak{R}_3 \left[A_3 (-2\tau_1^3 + 2\tau_1\tau_3^2 - 2\tau_1^2\tau_3 + 2\tau_3^3) - \frac{\tau_1 - \tau_3}{6} \tau_3 \frac{1}{r_3^3} (\tau_1^3 + 2\tau_1^2\tau_3 - \tau_3^3) \right] = 0. \end{aligned} \right\} (16)$$

Die Coefficienten von $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ und \mathfrak{R}_3 in dieser Gleichung lassen sich nun aber bedeutend vereinfachen. Indem wir diese Coefficienten der Kürze halber mit C', C'', C''' bezeichnen, wird zunächst der Coefficient von \mathfrak{R}_1 :

$$C' = 2A_1(\tau_1 + \tau_3)(-\tau_1^2 + \tau_3^2) - \frac{1}{6r_1^3}(\tau_1 - \tau_3)\tau_1(-\tau_1^3 + 2\tau_1\tau_3^2 + \tau_3^3).$$

Setzt man jetzt:

$$B_1 = \frac{1}{12}(-\tau_1^2 + \tau_1\tau_3 + \tau_3^2),$$

also:

$$12B_1 = -\tau_1^2 + \tau_1\tau_3 + \tau_3^2,$$

so folgt:

$$12\tau_1 B_1 = -\tau_1^3 + \tau_1^2\tau_3 + \tau_1\tau_3^2$$

$$12\tau_3 B_1 = -\tau_1^2\tau_3 + \tau_1\tau_3^2 + \tau_3^3,$$

also:

$$12(\tau_1 + \tau_3)B_1 = -\tau_1^3 + 2\tau_1\tau_3^2 + \tau_3^3,$$

mithin:

$$C' = 2A_1(\tau_1 + \tau_3)(-\tau_1^2 + \tau_3^2) - \frac{1}{6r_1^3}(\tau_1 - \tau_3)\tau_1 \cdot 12B_1(\tau_1 + \tau_3)$$

$$= 2A_1(\tau_1 + \tau_3)(\tau_3 + \tau_1)(\tau_3 - \tau_1) - 2\frac{B_1}{r_1^3}\tau_1(\tau_1 - \tau_3)(\tau_1 + \tau_3)$$

oder, da:

$$A_1 = \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_3}, \quad \text{also} \quad \tau_1 + \tau_3 = \frac{\tau_1}{A_1} \quad \text{und} \quad (\tau_1 + \tau_3)^2 = \frac{\tau_1^2}{A_1^2},$$

auch:

$$\begin{aligned} C' &= 2A_1 \frac{\tau_1^2}{A_1^2}(\tau_3 - \tau_1) - 2\frac{B_1}{r_1^3}(\tau_1 - \tau_3)\frac{\tau_1^2}{A_1} - \frac{2}{A_1}(\tau_3 - \tau_1)\left(\tau_1^2 + \frac{B_1}{r_1^3}\tau_1^2\right) \\ &= \frac{2}{A_1}(\tau_3 - \tau_1)\tau_1^2\left(1 + \frac{B_1}{r_1^3}\right). \end{aligned}$$

Den Coefficienten von \mathfrak{R}_3 erhält man hieraus unmittelbar, wenn man $-\tau_3$ anstatt τ_1 und $B_3 = \frac{1}{12}(\tau_1^2 + \tau_1\tau_3 - \tau_3^2)$ setzt, nämlich:

$$C''' = \frac{2}{A_3}(\tau_3 - \tau_1)\tau_3^2\left(1 + \frac{B_3}{r_3^3}\right).$$

Etwas verwickelter ist die Ableitung des Coefficienten von \mathfrak{R}_2 . Es wird:

$$\begin{aligned} C'' &= 2(\tau_1^3 - \tau_1\tau_3^2 + \tau_1^2\tau_3 - \tau_3^3) + \frac{\tau_1\tau_3}{r_2^3}(-\tau_1^3 + \tau_1\tau_3^2 - \tau_1^2\tau_3 + \tau_3^3) \\ &+ \frac{1}{6r_2^3}(\tau_1 - \tau_3)[\tau_1(-\tau_1^3 + 2\tau_1\tau_3^2 + \tau_3^3) + \tau_3(\tau_1^3 + 2\tau_1^2\tau_3 - \tau_3^3)] \\ &= 2(\tau_1 + \tau_3)(\tau_1 + \tau_3)(\tau_1 - \tau_3) - \frac{\tau_1\tau_3}{r_2^3}(\tau_1 + \tau_3)(\tau_1 + \tau_3)(\tau_1 - \tau_3) \\ &+ \frac{1}{6r_2^3}(\tau_1 - \tau_3)[\tau_1(-\tau_1^3 + 2\tau_1\tau_3^2 + \tau_3^3) + \tau_3(\tau_1^3 + 2\tau_1^2\tau_3 - \tau_3^3)]. \end{aligned}$$

Setzt man nun:

$$B_2 = 1/12(\tau_1^2 + 3\tau_1\tau_3 + \tau_3^2)$$

oder:

$$12B_2 = \tau_1^2 + 3\tau_1\tau_3 + \tau_3^2$$

oder:

$$12B_2 - 6\tau_1\tau_3 = \tau_1^2 - 3\tau_1\tau_3 + \tau_3^2$$

oder:

$$\begin{aligned} 12(B_2 - 1/2\tau_1\tau_3)(\tau_1 + \tau_3)(\tau_1 + \tau_3) &= (\tau_1^2 - 3\tau_1\tau_3 + \tau_3^2)(\tau_1^2 + 2\tau_1\tau_3 + \tau_3^2) \\ &= \tau_1^4 - \tau_1^3\tau_3 - 4\tau_1^2\tau_3^2 - \tau_1\tau_3^3 + \tau_3^4 \end{aligned}$$

und multiplicirt den Coëfficienten von $\frac{1}{6r_2^3}(\tau_1 - \tau_3)$ im Ausdruck für den Coëfficienten von \mathfrak{H}_2 aus, so erhält man den soeben entwickelten Ausdruck mit negativem Zeichen; somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} C'' &= 2(\tau_1 + \tau_3)(\tau_1 + \tau_3)(\tau_1 - \tau_3) - \frac{\tau_1\tau_3}{r_2^3}(\tau_1 + \tau_3)(\tau_1 + \tau_3)(\tau_1 - \tau_3) \\ &\quad - \frac{1}{6r_2^3}(\tau_1 - \tau_3)(\tau_1 + \tau_3)(\tau_1 + \tau_3) \cdot 12(B_2 - 1/2\tau_1\tau_3) \\ &= (\tau_1 + \tau_3)(\tau_1 + \tau_3)(\tau_1 - \tau_3) \left[2 - \frac{\tau_1\tau_3}{r_2^3} - \frac{2}{r_2^3}(B_2 - 1/2\tau_1\tau_3) \right] \\ &= 2(\tau_1 + \tau_3)(\tau_1 + \tau_3)(\tau_1 - \tau_3) \left[1 - \frac{B_2}{r_2^3} \right] = 2\frac{\tau_1}{A_1}\frac{\tau_3}{A_3}(\tau_1 - \tau_3) \left(1 - \frac{B_2}{r_2^3} \right). \end{aligned}$$

Die Gleichung (16) wird daher:

$$\frac{2}{A_1}(\tau_3 - \tau_1)\tau_1^2 \left(1 + \frac{B_1}{r_1^3} \right) \mathfrak{H}_1 - 2\frac{\tau_1}{A_1}\frac{\tau_3}{A_3}(\tau_3 - \tau_1) \left(1 - \frac{B_2}{r_2^3} \right) \mathfrak{H}_2 + \frac{2}{A_3}(\tau_3 - \tau_1)\tau_3^2 \left(1 + \frac{B_3}{r_3^3} \right) \mathfrak{H}_3 = 0$$

oder, mit A_1A_3 multiplicirt und durch $2(\tau_3 - \tau_1)$ dividirt:

$$A_3\tau_1^2 \left(1 + \frac{B_1}{r_1^3} \right) \mathfrak{H}_1 - \tau_1\tau_3 \left(1 - \frac{B_2}{r_2^3} \right) \mathfrak{H}_2 + A_1\tau_3^2 \left(1 + \frac{B_3}{r_3^3} \right) \mathfrak{H}_3 = 0.$$

Setzt man jetzt wieder:

$$\tau_1 = A_1(\tau_1 + \tau_3), \quad \tau_3 = A_3(\tau_1 + \tau_3)$$

und dividirt durch $A_1A_3(\tau_1 + \tau_3)^2$, so folgt:

$$A_1 \left(1 + \frac{B_1}{r_1^3} \right) \mathfrak{H}_1 - \left(1 - \frac{B_2}{r_2^3} \right) \mathfrak{H}_2 + A_3 \left(1 + \frac{B_3}{r_3^3} \right) \mathfrak{H}_3 = 0.$$

Und setzt man endlich hierin noch zur Abkürzung:

$$n_1 = A_1 \left(1 + \frac{B_1}{r_1^3} \right), \quad n_2 = \left(1 - \frac{B_2}{r_2^3} \right), \quad n_3 = A_3 \left(1 + \frac{B_3}{r_3^3} \right),$$

so lautet die Fundamentalgleichung, wie wir schon gesehen, in einfachster Gestalt:

$$n_1\mathfrak{H}_1 - n_2\mathfrak{H}_2 + n_3\mathfrak{H}_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

In dieser Gleichung kann man an Stelle der Vektoren $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3$ auch ihre drei Projectionen auf die Coordinatenaxen einführen und die Coordinaten so transformiren, dass die xy -Ebene mit der durch die drei Radien gehenden Bahnebene zusammenfällt, also $z = 0$ wird; man hat demnach, wenn x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 die Coordinaten der drei Oerter sind:

$$n_1x_1 - n_2x_2 + n_3x_3 = 0$$

$$n_1y_1 - n_2y_2 + n_3y_3 = 0,$$

woraus durch Multiplication mit y_3 und x_3 und Subtraction:

$$n_1(x_1y_3 - x_3y_1) = n_2(x_2y_3 - x_3y_2)$$

und durch Multiplication mit y_1 und x_1 :

$$n_3(x_3y_1 - x_1y_3) = n_2(x_2y_1 - x_1y_2),$$

folgt, von gemeinschaftlichen constanten Coëfficienten abgesehen. Daraus ergibt sich aber, dass:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]}, \quad \frac{n_3}{n_2} = \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]},$$

d. h. die Grössen n_1, n_2, n_3 sind proportional den Dreiecksflächen zwischen den heliocentrischen Orten.

Bildet man also nach Gibbs aus den Zwischenzeiten die einfachen Ausdrücke:

$$A_1 = \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_3}, \quad A_3 = \frac{\tau_3}{\tau_1 + \tau_3},$$

$$B_1 = 1/12(-\tau_1^2 + \tau_1\tau_3 + \tau_3^2), \quad B_2 = 1/12(\tau_1^2 + 3\tau_1\tau_3 + \tau_3^2), \quad B_3 = 1/12(\tau_1^2 + \tau_1\tau_3 - \tau_3^2)$$

und setzt:

$$n_1 = A_1 \left(1 + \frac{B_1}{r_1^3}\right), \quad n_2 = \left(1 - \frac{B_2}{r_2^3}\right), \quad n_3 = A_3 \left(1 + \frac{B_3}{r_3^3}\right),$$

so erhält man bei einer Annahme über die drei heliocentrischen Distanzen sofort mit Einschluss von Grössen der vierten Ordnung in Bezug auf die Zwischenzeiten Werthe, die den drei Dreiecksflächen:

$$[r_2 r_3], \quad [r_1 r_3], \quad [r_1 r_2]$$

proportional sind.

Während, wie schon erwähnt, bei Gauss die Verhältnisse der Dreiecksflächen nur bis zu Gliedern zweiter Ordnung entwickelt sind und bei Oppolzer die Glieder dritter Ordnung nur durch verwickelte Rechnungen erhalten werden, ergibt die Anwendung des Gibbs'schen Principes sofort Ausdrücke, die bis auf Glieder vierter Ordnung richtig sind, weil bis dahin die Entwicklung des Ausdruckes für den Vector \mathfrak{R} geführt ist. —

Wir wenden uns nun wieder im Anschluss an Gibbs zur Weiterentwicklung seiner Methode und beschäftigen uns zunächst mit der:

Lösung der Fundamentalgleichung.

Die Relationen, mit denen wir es zu thun haben, gestalten sich etwas einfacher, wenn wir an Stelle jeder geocentrischen Entfernung bezüglich die Entfernung des Körpers vom Fusspunkte der von der Sonne auf die Visirlinie gezogenen Senkrechten einführen. Setzen wir:

$$q_1 = \varrho_1 + (\mathfrak{E}_1 \cdot \mathfrak{F}_1), \quad q_2 = \varrho_2 + (\mathfrak{E}_2 \cdot \mathfrak{F}_2), \quad q_3 = \varrho_3 + (\mathfrak{E}_3 \cdot \mathfrak{F}_3) \quad (18)$$

$$p_1^2 = \mathfrak{E}_1^2 - (\mathfrak{E}_1 \cdot \mathfrak{F}_1)^2, \quad p_2^2 = \mathfrak{E}_2^2 - (\mathfrak{E}_2 \cdot \mathfrak{F}_2)^2, \quad p_3^2 = \mathfrak{E}_3^2 - (\mathfrak{E}_3 \cdot \mathfrak{F}_3)^2 \quad (19)$$

so werden die Gleichungen (8):

$$r_1^2 = q_1^2 + p_1^2, \quad r_2^2 = q_2^2 + p_2^2, \quad r_3^2 = q_3^2 + p_3^2 \dots \dots \dots (20)$$

Setzen wir also der Kürze halber:

$$\left. \begin{aligned} A_1 \left(1 + \frac{B_1}{r_1^3}\right) (\mathfrak{E}_1 + \varrho_1 \mathfrak{F}_1) &= \mathfrak{E}_1 \\ - \left(1 - \frac{B_2}{r_2^3}\right) (\mathfrak{E}_2 + \varrho_2 \mathfrak{F}_2) &= \mathfrak{E}_2 \\ A_3 \left(1 + \frac{B_3}{r_3^3}\right) (\mathfrak{E}_3 + \varrho_3 \mathfrak{F}_3) &= \mathfrak{E}_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

so können $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$ als Functionen bezüglich von $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$, und daher auch von q_1, q_2, q_3 betrachtet werden. Sei also:

$$\frac{d\mathfrak{E}_1}{dq_1} = \mathfrak{E}', \quad \frac{d\mathfrak{E}_2}{dq_2} = \mathfrak{E}'', \quad \frac{d\mathfrak{E}_3}{dq_3} = \mathfrak{E}''' \dots \dots \dots (22)$$

und:

$$\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S} \dots \dots \dots (23)$$

so ist:

$$d\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' dq_1 + \mathfrak{S}'' dq_2 + \mathfrak{S}''' dq_3 \dots \dots \dots (24)$$

Der Werth von \mathfrak{S}' folgt durch Differentiation:

$$\mathfrak{S}' = A_1 \left(1 + \frac{B_1}{r_1^3}\right) \mathfrak{F}_1 - A_1 \frac{3 B_1}{r_1^4} \frac{dr_1}{dq_1} (\mathfrak{S}_1 + q_1 \mathfrak{F}_1) \dots \dots \dots (25)$$

Da aber nach (20):

$$\frac{dr_1}{dq_1} = \frac{q_1}{r_1} \dots \dots \dots (26)$$

so wird:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}' &= A_1 \left(1 + \frac{B_1}{r_1^3}\right) \mathfrak{F}_1 - \frac{3 B_1 q_1}{r_1^5 (1 + B_1 r_1^{-3})} \mathfrak{S}_1 \\ \mathfrak{S}'' &= - \left(1 - \frac{B_2}{r_2^3}\right) \mathfrak{F}_2 + \frac{3 B_2 q_2}{r_2^5 (1 - B_2 r_2^{-3})} \mathfrak{S}_2 \\ \mathfrak{S}''' &= A_3 \left(1 + \frac{B_3}{r_3^3}\right) \mathfrak{F}_3 - \frac{3 B_3 q_3}{r_3^5 (1 + B_3 r_3^{-3})} \mathfrak{S}_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

Wenn nun irgend welche Werthe von q_1, q_2, q_3 (entweder angenommene oder bereits durch eine frühere Näherung erhaltene) einen gewissen Rest \mathfrak{S} ergeben (der Null sein würde, wenn die Werthe von q_1, q_2, q_3 der Fundamentalgleichung genügen würden), und wir die Correctionen $\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3$ finden wollen, die zu q_1, q_2, q_3 hinzuzufügen sind, um den Rest auf Null zu bringen, so können wir die Gleichung (24) auch auf diese endlichen Unterschiede anwenden, und werden dann, wenn diese Unterschiede nicht sehr gross sind, genähert die Beziehung:

$$-\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' \Delta q_1 + \mathfrak{S}'' \Delta q_2 + \mathfrak{S}''' \Delta q_3 \dots \dots \dots (28)$$

erhalten.

Indem man nun die scalaren Producte der beiden Glieder dieser Gleichung in $\mathfrak{S}' \times \mathfrak{S}''$, $\mathfrak{S}'' \times \mathfrak{S}'$, und $\mathfrak{S}' \times \mathfrak{S}''$ nimmt, ergibt sich:

$$\Delta q_1 = - \frac{(\mathfrak{S} \mathfrak{S}' \mathfrak{S}''')}{(\mathfrak{S}' \mathfrak{S}'' \mathfrak{S}''')}, \quad \Delta q_2 = - \frac{(\mathfrak{S} \mathfrak{S}'' \mathfrak{S}')}{(\mathfrak{S}' \mathfrak{S}'' \mathfrak{S}''')}, \quad \Delta q_3 = - \frac{(\mathfrak{S} \mathfrak{S}' \mathfrak{S}'')}{(\mathfrak{S}' \mathfrak{S}'' \mathfrak{S}''')} \quad (29)$$

Aus den corrigirten Werthen von q_1, q_2, q_3 kann man nun einen neuen Rest \mathfrak{S} berechnen, aus dem dann eine neue Correction für jede der drei Grössen q_1, q_2, q_3 bestimmt werden kann.

Bisweilen wird es sich empfehlen, um eine raschere Annäherung zu erzielen, eine weniger einfache Form anzuwenden. An Stelle von Gleichung (28) kann man mit einem höheren Grade von Genauigkeit die folgende setzen:

$$-\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' \Delta q_1 + \mathfrak{S}'' \Delta q_2 + \mathfrak{S}''' \Delta q_3 + \frac{1}{2} \mathfrak{I}' (\Delta q_1)^2 + \frac{1}{2} \mathfrak{I}'' (\Delta q_2)^2 + \frac{1}{2} \mathfrak{I}''' (\Delta q_3)^2 \quad (30)$$

wobei $\mathfrak{I}', \mathfrak{I}'', \mathfrak{I}'''$ folgende Bedeutung haben:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{I}' &= \frac{d^2 \mathfrak{S}_1}{dq_1^2} = 2 A_1 B_1 \frac{d(r_1^{-3})}{dq_1} \mathfrak{F}_1 + \frac{B_1}{1 + B_1 r_1^{-3}} \frac{d^2(r_1^{-3})}{dq_1^2} \mathfrak{S}_1 \\ \mathfrak{I}'' &= \frac{d^2 \mathfrak{S}_2}{dq_2^2} = 2 B_2 \frac{d(r_2^{-3})}{dq_2} \mathfrak{F}_2 - \frac{B_2}{1 - B_2 r_2^{-3}} \frac{d^2(r_2^{-3})}{dq_2^2} \mathfrak{S}_2 \\ \mathfrak{I}''' &= \frac{d^2 \mathfrak{S}_3}{dq_3^2} = 2 A_3 B_3 \frac{d(r_3^{-3})}{dq_3} \mathfrak{F}_3 + \frac{B_3}{1 + B_3 r_3^{-3}} \frac{d^2(r_3^{-3})}{dq_3^2} \mathfrak{S}_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (31)$$

Es ist klar, dass \mathfrak{I}'' im Allgemeinen um viele Mal grösser als \mathfrak{I}' und \mathfrak{I}''' sein wird, da der Factor B_2 im Falle gleicher Intervalle genau zehnmal so gross als $A_1 B_1$ oder $A_3 B_3$ ist. Dies zeigt zunächst, dass die genaue Bestimmung von Δq_1 von der grössten

Wichtigkeit für die folgende Näherung ist. Es zeigt ferner, dass wir fast denselben Grad von Genauigkeit erreichen, wenn wir an Stelle der eben genannten Relation für — \mathfrak{S} die folgende setzen:

$$-\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' \Delta q_1 + \mathfrak{S}'' \Delta q_2 + \mathfrak{S}''' \Delta q_3 + \frac{1}{2} \mathfrak{T}'' \Delta q_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Oft jedoch kann man ein etwas besseres Resultat erreichen, ohne eine complicirtere Gleichung anwenden zu müssen. Denn es kann $\mathfrak{T}' + \mathfrak{T}'''$ angenähert als gleich $\frac{1}{5} \mathfrak{T}''$ geschätzt werden. Wenn daher Δq_1 und Δq_3 ungefähr so gross sind, wie Δq_2 , was oft der Fall ist, so wird es besser sein, den Coëfficienten $\frac{6}{10}$ an Stelle von $\frac{1}{2}$ im letzten Gliede zu gebrauchen.

Für Δq_2 hat man dann die Gleichung:

$$-(\mathfrak{S} \mathfrak{S}''' \mathfrak{S}') = (\mathfrak{S}' \mathfrak{S}'' \mathfrak{S}''') \Delta q_2 + \frac{6}{10} (\mathfrak{T}'' \mathfrak{S}''' \mathfrak{S}') \Delta q_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Dabei findet man $(\mathfrak{T}'' \mathfrak{S}''' \mathfrak{S}')$ aus der Formel:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{T}'' \mathfrak{S}''' \mathfrak{S}') = & \frac{1}{q^2} \left[1 - 5 \frac{q_2^2}{r_2^2} \right] [(\mathfrak{S}' \mathfrak{S}'' \mathfrak{S}''') + (\mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}''' \mathfrak{S}')] \Bigg| \\ & - \frac{B_2}{q_2 r_2^3} \left(1 + \frac{q_2^2}{r_2^2} \right) (\mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}''' \mathfrak{S}') \Bigg| \quad . \quad . \quad . \quad (34) \end{aligned}$$

die sich leicht aus den Gleichungen (27) und (31) ableiten lässt.

Die quadratische Gleichung (33) ergiebt zwei Werthe für die Correction, welche an die Position des Körpers anzubringen ist. Wenn sie nicht zu gross sind, werden sie zu zwei verschiedenen Lösungen des Problems gehören, gewöhnlich zu den zwei am wenigsten von den angenommenen Werthen entfernten. Ein sehr grosser Werth von Δq_2 muss, als Lösung des Problems betrachtet, als zweifelhaftes Resultat angesehen werden. In der Mehrzahl der Fälle kommt es nur darauf an, diejenigen Wurzeln der Gleichung zu erhalten, welche sich durch ihre Kleinheit auszeichnen und die sich am leichtesten dadurch berechnen lassen, dass man an denjenigen Werth, welchen man durch Vernachlässigung des quadratischen Gliedes erhält, eine kleine Correction anbringt.

Beindet sich der Komet der Erde ziemlich nahe, so kann man von dem Umstande Gebrauch machen, dass die Erdbahn die eine Lösung des Problems, d. h. dass — q_2 der eine Werth von Δq_2 ist, und man ist dann der allerdings nicht bedeutenden Arbeit der Berechnung des Werthes von $(\mathfrak{T}'' \mathfrak{S}''' \mathfrak{S}')$ überhoben. Aus der Theorie der Gleichungen folgt, dass wenn — q_2 und z die beiden Wurzeln sind, dann:

$$q_2 - z = \frac{(\mathfrak{S}' \mathfrak{S}'' \mathfrak{S}''')}{\frac{3}{5} (\mathfrak{T}'' \mathfrak{S}''' \mathfrak{S}')} \quad \text{---} \quad q_2 z = \frac{(\mathfrak{S} \mathfrak{S}''' \mathfrak{S}')}{\frac{3}{5} (\mathfrak{T}'' \mathfrak{S}''' \mathfrak{S}')}$$

ist. Durch Elimination von $(\mathfrak{T}'' \mathfrak{S}''' \mathfrak{S}')$ ergiebt sich:

$$(q_2 - z) (\mathfrak{S} \mathfrak{S}''' \mathfrak{S}') = - q_2 z (\mathfrak{S}' \mathfrak{S}'' \mathfrak{S}'''),$$

und folglich:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{q^2} - \frac{(\mathfrak{S}' \mathfrak{S}'' \mathfrak{S}''')}{(\mathfrak{S} \mathfrak{S}''' \mathfrak{S}')}.$$

Nun ist aber — $\frac{(\mathfrak{S} \mathfrak{S}''' \mathfrak{S}')}{(\mathfrak{S}' \mathfrak{S}'' \mathfrak{S}''')}$ derjenige Werth von Δq_2 , den man bei Vernachlässigung des quadratischen Gliedes in Gleichung (33) erhält. Bezeichnet man diesen Werth mit $[\Delta q_2]$, so ist der genauere Werth:

$$\Delta q_2 = \frac{[\Delta q_2]}{1 + \frac{[\Delta q_2]}{q_2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Die Grössen Δq_1 und Δq_2 können aus folgenden Gleichungen berechnet werden:

$$\begin{aligned} -(\mathfrak{S}\mathfrak{S}''\mathfrak{S}''') &= (\mathfrak{S}'\mathfrak{S}''\mathfrak{S}''') \Delta q_1 + \frac{6}{10} (\mathfrak{I}''\mathfrak{S}''\mathfrak{S}''') \Delta q_2^2 \} \\ -(\mathfrak{S}\mathfrak{S}'\mathfrak{S}''') &= (\mathfrak{S}'\mathfrak{S}''\mathfrak{S}''') \Delta q_3 + \frac{6}{10} (\mathfrak{I}''\mathfrak{S}'\mathfrak{S}''') \Delta q_2^2 \} \end{aligned} \quad (36)$$

Es zeigt sich nun aber, dass die Coëfficienten von Δq_2^2 in letzteren Gleichungen gewöhnlich nicht sehr verschiedene Werthe von den Coëfficienten derselben Grösse in Gleichung (33) haben werden. Deshalb können wir mit genügender Genauigkeit schreiben:

$$\begin{aligned} \Delta q_1 &= [\Delta q_1] + \Delta q_2 - [\Delta q_2] \\ \Delta q_3 &= [\Delta q_3] + \Delta q_2 - [\Delta q_2] \end{aligned} \quad (37)$$

wo $[\Delta q_1]$, $[\Delta q_2]$, $[\Delta q_3]$ die Werthe bezeichnen, welche man aus den Gleichungen (29) erhält.

Bei den successiven Correctionen der Entfernungen q_1 , q_2 , q_3 wird es nicht nöthig sein, die Werthe von \mathfrak{S}' , \mathfrak{S}'' , \mathfrak{S}''' nochmals zu berechnen, wenn sie bereits aus ziemlich guten Werthen von q_1 , q_2 , q_3 berechnet waren. Wenn jedoch die erste Annahme, wie das gewöhnlich der Fall ist, nur auf einem genäherten Errathen basirt, dann müssen die Werthe von \mathfrak{S}' , \mathfrak{S}'' , \mathfrak{S}''' nochmals nach ein oder zwei Correctionen von q_1 , q_2 , q_3 von Neuem berechnet werden. Wenn man die besten Resultate erhalten will, ohne \mathfrak{S}' , \mathfrak{S}'' , \mathfrak{S}''' wieder zu berechnen, so kann man wie folgt verfahren: Es seien \mathfrak{S}' , \mathfrak{S}'' , \mathfrak{S}''' die berechneten Werthe; Dq_1 , Dq_2 , Dq_3 bezüglich die Summen der Correctionen von jeder der drei Grössen q_1 , q_2 , q_3 , die seit der Berechnung von \mathfrak{S}' , \mathfrak{S}'' , \mathfrak{S}''' gemacht worden sind; \mathfrak{S} der Rest nach allen Correctionen, die von q_1 , q_2 , q_3 gemacht worden sind, und Δq_1 , Δq_2 , Δq_3 die noch übrigen Correctionen, die wir suchen. Dann ist sehr genähert:

$$-\mathfrak{S} = \{\mathfrak{S}' + \mathfrak{I}'(Dq_1 + \frac{1}{2}\Delta q_1)\} \Delta q_1 + \{\mathfrak{S}'' + \mathfrak{I}''(Dq_2 + \frac{1}{2}\Delta q_2)\} \Delta q_2 + \{\mathfrak{S}''' + \mathfrak{I}'''(Dq_3 + \frac{1}{2}\Delta q_3)\} \Delta q_3 \quad (38)$$

Dieselben Betrachtungen, welche wir bei Gleichung (30) angewendet haben, befähigen uns, auch diese Gleichung zu vereinfachen und mit einem ziemlich Grade von Genauigkeit wie folgt zu schreiben:

$$-(\mathfrak{S}\mathfrak{S}''\mathfrak{S}''') = \{(\mathfrak{S}'\mathfrak{S}''\mathfrak{S}''') + \frac{6}{5}(\mathfrak{I}''\mathfrak{S}''\mathfrak{S}''') (Dq_2 + \frac{1}{2}\Delta q_2)\} \Delta q_2 \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \Delta q_1 &= [\Delta q_1] + \Delta q_2 - [\Delta q_2] \\ \Delta q_3 &= [\Delta q_3] + \Delta q_2 - [\Delta q_2] \end{aligned} \quad (40)$$

wobei:

$$[\Delta q_1] = -\frac{(\mathfrak{S}\mathfrak{S}''\mathfrak{S}''')}{(\mathfrak{S}'\mathfrak{S}''\mathfrak{S}''')}, \quad [\Delta q_2] = -\frac{(\mathfrak{S}\mathfrak{S}'''\mathfrak{S}')}{(\mathfrak{S}'\mathfrak{S}''\mathfrak{S}''')}, \quad [\Delta q_3] = -\frac{(\mathfrak{S}\mathfrak{S}'\mathfrak{S}'')}{(\mathfrak{S}'\mathfrak{S}''\mathfrak{S}''')} \quad (41)$$

Correction der Fundamentalgleichung.

Wenn man auf die geschilderte Weise durch numerische Auflösung der Fundamentalgleichung genäherte Werthe für die drei Positionen des Körpers gewonnen hat, so wird es immer möglich sein, eine kleine numerische Correction an die Gleichung anzubringen, um sie genau mit den Gesetzen der elliptischen Bewegung in einem fingirten Falle, der sich nur wenig vom wirklichen unterscheidet, übereinstimmend zu machen. Nach einer solchen Correction wird die Gleichung augenscheinlich mit einem viel höheren Grade von Genauigkeit auf den wirklichen Fall anwendbar sein.

Für verschiedene Methoden bei Anwendung dieses Principes bleibt ein grosser Spielraum. Die Methode, welche nach Gibbs' Ansicht am directesten zum Ziele führt,

ist die folgende, bei der die Correction der Intervalle für Aberration verbunden ist mit der Correction, die angesichts davon nöthig ist, dass die Gleichung nur eine genäherte Gültigkeit besitzt.

Die Lösung der Fundamentalgleichung ergibt drei Punkte, die nothwendig in einer Ebene mit der Sonne und auf den Gesichtslinien der verschiedenen Beobachtungen liegen müssen. Durch diese drei Punkte kann man eine Ellipse legen und die Zeitintervalle berechnen, welche nach den strengen Gesetzen der elliptischen Bewegung für den Durchgang des Körpers zwischen diesen Punkten erforderlich ist. Wären diese berechneten Intervalle identisch mit den gegebenen, für Aberration corrigirten, so wäre die wirkliche Lösung des Problems gefunden. Gibbs nimmt nun zunächst an, dass die berechneten Intervalle etwas zu lang seien. Dann ist klar, dass, wenn man die Berechnung wiederholt und in der Fundamentalgleichung Intervalle gebraucht, die im selben Verhältniss zu kurz, wie die berechneten zu lang gewählt sind, dass dann die auf Grund der zweiten Auflösung der Fundamentalgleichung berechneten Intervalle fast genau mit den gewünschten Werthen übereinstimmen müssen. Wenn nöthig, kann dieser Process wiederholt und auf diese Weise jeder beliebige Grad von Genauigkeit erhalten werden, sobald die Lösung der uncorrigirten Gleichung nur eine Annäherung an die wahren Positionen giebt. Hierbei ist es indess nöthig, dass die Intervalle nicht zu gross sind. Aus den Resultaten des Rechenbeispielles der Ceres, die später mitgetheilt werden sollen, bei der die heliocentrische Bewegung 62° übersteigt, die berechneten Werthe der Intervalle der Zeit aber von den gegebenen Werthen um wenig mehr als einen Theil von Zweitausend abweichen, geht zur Genüge hervor, dass hier die Grenze der Anwendbarkeit der vorstehenden Formeln noch nicht erreicht ist.

Wenn wir auf das Problem die herkömmliche Bezeichnungsweise anwenden, so repräsentirt die Fundamentalgleichung bei für Aberration nicht corrigirten Intervallen die erste Hypothese; dieselbe Gleichung für Intervalle, die gewisse numerische Coefficienten, welche nur wenig von der Einheit abweichen, enthalten, die zweite Hypothese; die dritte Hypothese, falls eine solche nöthig sein sollte, wird durch eine ähnliche Gleichung mit corrigirten Intervallen repräsentirt u. s. f.

Das angeführte Verfahren bringt gewisse Ersparnisse an Arbeit mit sich, erfordert aber auch gewisse zu beobachtende Vorsichtsmaassregeln, die nicht unerwähnt bleiben dürfen, damit die bei den Rechnungen vernachlässigten Zahlen das Resultat nicht über Gebühr beeinflussen.

Es ist klar, dass man sich zunächst bei der Correction der Fundamentalgleichung nicht um die Lage der Bahn im Sonnensystem zu kümmern braucht. Die Zeitintervalle, welche diese Correctionen bestimmen, hängen nur ab von den drei heliocentrischen Entfernungen r_1, r_2, r_3 und den zwei heliocentrischen Winkeln, die durch $v_2 - v_1$ und $v_3 - v_2$ dargestellt werden, wenn man mit v_1, v_2, v_3 die drei wahren Anomalien bezeichnet. Diese Winkel $v_2 - v_1$ und $v_3 - v_2$ können aber durch r_1, r_2, r_3 und n_1, n_2, n_3 , und darum auch durch r_1, r_2, r_3 und die gegebenen Intervalle bestimmt werden. Denn die Fundamentalgleichung, die sich auch wie folgt schreiben lässt:

$$n_1 \mathfrak{R}_1 - n_2 \mathfrak{R}_2 + n_3 \mathfrak{R}_3 = \delta \dots \dots \dots (42)$$

zeigt an, dass man ein Dreieck bilden kann, dessen Seiten bezüglich $n_1 r_1, n_2 r_2$ und $n_3 r_3$ (zur Kürze setzen wir s_1, s_2, s_3) sind, deren Richtungen den drei heliocentrischen Richtungen des Körpers parallel sind. Es sind also $v_3 - v_2$ und $v_2 - v_1$ die den Seiten s_1 und s_2 gegenüberliegenden Winkel. Man hat mithin nach der bekannten Formel:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{v_3 - v_2}{2} &= \sqrt{\frac{(s_1 - s_2 + s_3)(s_1 + s_2 - s_3)}{(s_1 + s_2 + s_3)(-s_1 + s_2 + s_3)}} \\ \operatorname{tg} \frac{v_2 - v_1}{2} &= \sqrt{\frac{(-s_1 + s_2 + s_3)(s_1 - s_2 + s_3)}{(s_1 + s_2 + s_3)(s_1 + s_2 - s_3)}} \end{aligned} \quad (43)$$

Wenn daher die Lösung der Fundamentalgleichung eine genügende Näherung für die Werthe von r_1, r_2, r_3 ergeben hat (etwa fünf- oder sechstellige Werthe, wenn das Endresultat so genau sein soll, wie es siebenstellige Logarithmen ergeben), so sind n_1, n_2, n_3 mittelst siebenstelliger Logarithmen durch die Gleichungen (2) und die heliocentrischen Winkel durch die Gleichungen (43) zu berechnen.

Der diesen Werthen der heliocentrischen Entfernungen und Winkel correspondirende Semiparameter ist gegeben durch die Gleichung:

$$p = \frac{n_1 r_1 - n_2 r_2 + n_3 r_3}{n_1 - n_2 + n_3} \quad (44)$$

Die in diesem Werthe für den Semiparameter vorkommenden Ausdrücke $n_1 - n_2 + n_3$ und $n_1 r_1 - n_2 r_2 + n_3 r_3$ oder $s_1 - s_2 + s_3$, die sowohl im Semiparameterwerth, wie auch in den Formeln für die Bestimmung der heliocentrischen Winkel auftreten, sind als kleine Grössen zweiter Ordnung zu betrachten, wofern man nämlich die heliocentrischen Winkel als kleine Grössen erster Ordnung ansieht; dieselben können jedoch aus den genäherten numerischen Werthen ihrer einzelnen Glieder nicht sehr genau bestimmt werden. Die erste dieser zwei Grössen kann indess genau bestimmt werden mittelst der Formel:

$$n_1 - n_2 + n_3 = \frac{A_1 B_1}{r_1^3} + \frac{B_2}{r_2^3} + \frac{A_3 B_3}{r_3^3} \quad (45)$$

In Bezug auf die Grösse $s_1 - s_2 + s_3$ zeigt eine kleine Ueberlegung, dass, wenn man nur genau denselben Werth für sie anwendet, mag sie nun in den heliocentrischen Winkeln oder im Semiparameter auftreten, die Ungenauigkeit bei der Bestimmung dieses Werthes, deren Ursache bereits erwähnt worden ist, ohne Belang für den Process der Correction der Fundamentalgleichung ist. Denn wiewohl der Logarithmus von $s_1 - s_2 + s_3$, auf Grund siebenstelliger Logarithmen aus r_1, r_2, r_3 berechnet, nur als auf vier oder fünf Stellen genau angesehen werden kann, so kann man ihn doch als absolut streng betrachten, falls man den Werth einer der heliocentrischen Entfernungen, etwa von r_2 , um ein Geringes ändert. Indess braucht man sich gar nicht weiter um diese Veränderung zu bekümmern, da sie eine Grösse ist, die bei Rechnung mit siebenstelligen Logarithmen zu vernachlässigen ist. Dass dabei die in dieser Weise bestimmten heliocentrischen Winkel nicht so genau, als sie es könnten, mit den durch die erste Lösung der Fundamentalgleichung ergebenen Positionen auf den Visirlinien übereinstimmen, ist ohne weiteren Belang für die Correction der Fundamentalgleichung, welche nur die zwei Bedingungen vollständig erfüllen muss, dass erstens die Werthe der heliocentrischen Entfernungen und Winkel die durch die Fundamentalgleichung geforderten Beziehungen für die gegebenen Zeitintervalle erfüllen, und dass zweitens die durch die strengen Gesetze der elliptischen Bewegung geforderten Beziehungen für die berechneten Zeitintervalle gelten. Die dritte Bedingung, dass keiner dieser Werthe zu weit von den wirklichen abweicht, ist weniger wesentlich.

Nach Bestimmung der heliocentrischen Winkel und des Semiparameters können zunächst die Excentricität und die wahren Anomalien der drei Positionen bestimmt werden, und aus diesen die Zeitintervalle. Diese Processe bedürfen keiner besonderen Erklärung. Die in Betracht kommenden Formeln werden in der Formelübersicht mitgetheilt werden.

Bestimmung der Bahn aus drei Positionen und den Zeitintervallen.

Die im Vorhergehenden für den Semiparameter und die heliocentrischen Winkel gegebenen Werthe hängen von der Grösse $s_1 - s_2 + s_3$ ab, deren numerische Bestimmung aus s_1 , s_2 und s_3 bis auf Glieder zweiten Grades incl. scharf ist, wenn die heliocentrischen Winkel klein sind. Das ist indess ohne Belang für den Process, den wir als die Correction der Fundamentalgleichung bezeichneten. Für die genaue Bestimmung der Bahn aus den durch die corrigirte Gleichung gegebenen Positionen — oder auch, falls man das für genügend erachtet, aus den durch die uncorrigirte Gleichung gegebenen — wird jedoch gewöhnlich eine genauere Bestimmung der Grösse $s_1 - s_2 + s_3$ nothwendig sein. Dabei kann man auf verschiedene Art verfahren, z. B. wie folgt. Man setzt:

$$\mathfrak{S}_4 = \mathfrak{S}_3 - \mathfrak{S}_1 \dots \dots \dots (46)$$

und bezeichnet mit s_4 die Länge des Vectors \mathfrak{S}_4 , die man erhält, indem man die Wurzel aus der Summe der Quadrate der Vectorcomponenten nimmt. Dann ist klar, dass s_2 die längere, s_4 die kürzere Diagonale des aus den Seiten s_1 und s_3 gebildeten Parallelogrammes ist. Es hat daher das Dreieck mit den Seiten s_1 , s_2 , s_3 denselben Flächeninhalt, wie das Dreieck mit den Seiten s_1 , s_3 und s_4 , da jedes die Hälfte eines Parallelogrammes ist. Daraus ergibt sich:

$$\frac{(s_1 + s_2 + s_3)(-s_1 + s_2 + s_3)(s_1 - s_2 + s_3)(s_1 + s_2 - s_3)}{(s_1 + s_4 + s_3)(-s_1 + s_4 + s_3)(-s_1 - s_4 + s_3)(s_1 + s_4 - s_3)} \} \quad (47)$$

und:

$$s_1 - s_2 \dots = \frac{(s_1 + s_4 + s_3)(-s_1 + s_4 + s_3)(s_1 - s_4 + s_3)(s_1 + s_4 - s_3)}{(s_1 + s_2 + s_3)(-s_1 + s_2 + s_3)(s_1 + s_2 - s_3)} \quad (48)$$

Die numerische Bestimmung dieses Werthes von $s_1 - s_2 + s_3$ ist nur scharf bis auf Glieder ersten Grades incl.

Die Excentricität und die wahren Anomalien können in derselben Weise wie bei der Correction der Formel bestimmt werden. Die Lage der Bahn im Raume aber kann durch folgende Betrachtung gewonnen werden. Der Vector — \mathfrak{S}_2 ist von der Sonne nach der zweiten Position, der Vector \mathfrak{S}_4 von der ersten nach der dritten Position des Körpers gerichtet. Setzt man:

$$\mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}_4 - \frac{\mathfrak{S}_4 \cdot \mathfrak{S}_2}{s_2^2} \mathfrak{S}_2 \dots \dots \dots (49)$$

so wird der Vector \mathfrak{S}_3 in der Ebene der Bahn, senkrecht auf — \mathfrak{S}_2 und auf der Seite, wo die Anomalien zunehmen, liegen. Bezeichnen wir die Länge von \mathfrak{S}_3 mit s_5 , so sind:

$$- \frac{\mathfrak{S}_2}{s_2} \text{ und } \frac{\mathfrak{S}_3}{s_5}$$

die Vectoreinheiten. Seien \mathfrak{Z} und \mathfrak{Z}' die Vectoreinheiten, welche die Lage der Bahn bestimmen, \mathfrak{Z} von der Sonne nach dem Perihel gezogen, \mathfrak{Z}' rechtwinklig auf \mathfrak{Z} in der Bahnebene und auf der Seite, wo die Anomalien wachsen, dann hat man:

$$\mathfrak{Z} = - \cos v_2 \frac{\mathfrak{S}_2}{s_2} - \sin v_2 \frac{\mathfrak{S}_3}{s_5} \dots \dots \dots (50)$$

$$\mathfrak{Z}' = - \sin v_2 \frac{\mathfrak{S}_2}{s_2} + \cos v_2 \frac{\mathfrak{S}_3}{s_5} \dots \dots \dots (51)$$

Die Zeit des Periheldurchganges, T , kann aus irgend einer der Beobachtungen mittelst der Kepler'schen Gleichung:

$$\frac{k}{a^{3/2}} (t - T) = E - e \sin E. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

bestimmt werden, indem die excentrische Anomalie E aus der wahren berechnet wird. Das Intervall $t - T$ in dieser Gleichung wird in Tagen gemessen. Einen besseren Werth von T kann man erlangen, indem man das Mittel aus den drei durch die einzelnen Beobachtungen gegebenen Werthen nimmt, deren Gewichte man den Umständen gemäss nehmen muss. Irgend welche bemerkenswerthe Unterschiede in den drei Werthen von T würden die Nothwendigkeit einer zweiten Correction der Formel anzeigen und zugleich die Basis für dieselbe liefern.

Zur Berechnung einer Ephemeride hat man in Verbindung mit der vorstehenden Gleichung:

$$\mathfrak{R} = -ae\mathfrak{Z} + \cos Ea\mathfrak{Z} + \sin Eb\mathfrak{Z}' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Bisweilen wird es der Mühe lohnen, die Rechnungen für die Correction der Formel in der etwas längeren Form, die für die Bestimmung der Bahn gegeben ist, vorzunehmen. Das wird der Fall sein, wenn man gleichzeitig die Formel auf ihre theoretische Unvollkommenheit hin und die Beobachtungen durch Vergleichung mit anderen, nicht zu entfernten, zu corrigiren wünscht. Die rohe, durch die uncorrigirte Formel gegebene Annäherung an die Bahn wird für diesen Zweck genügen. In der That wird, wenn die Beobachtungen durch sehr kleine Intervalle getrennt sind, die Unvollkommenheit der uncorrigirten Formel die Bahn wahrscheinlich weniger beeinflussen, als die Fehler bei den Beobachtungen.

Der Rechner wird es vorziehen, die Bahn aus dem ersten und dritten heliocentrischen Orte mit ihren Zeiten zu bestimmen. Dieser Process, der gewisse Vortheile bietet, ist vielleicht etwas langwieriger, als der hier gegebene, und eignet sich auch nicht so für die successiven Verbesserungen der Hypothese. Wünscht man eine verbesserte Hypothese aus einer so bestimmten Bahn abzuleiten, so muss man die Formeln aus XII. der folgenden Zusammenstellung anwenden.

Zusammenstellung der Formeln mit Gebrauchsanweisung.

[Für den Fall, dass eine genäherte Bahn schon bekannt ist, s. XII.]

I. Vorläufige Rechnungen, die sich auf die Zeitintervalle beziehen.

t_1, t_2, t_3 = Zeiten der Beobachtungen in Tagen, $\log k = 8,2355814$ (nach Gauss):

$$\tau_1 = k(t_3 - t_2), \quad \tau_3 = k(t_2 - t_1),$$

$$A_1 = \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1}, \quad A_3 = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1};$$

$$B_1 = -\frac{\tau_1^2 + \tau_1\tau_3 + \tau_3^2}{12}, \quad B_2 = \frac{\tau_1^2 + 3\tau_1\tau_3 + \tau_3^2}{12}, \quad B_3 = \frac{\tau_1^2 + \tau_1\tau_3 - \tau_3^2}{12}.$$

Zur Controle:

$$A_1 B_1 + B_2 + A_3 B_3 = \frac{1}{2} \tau_1 \tau_3.$$

II. Vorläufige Rechnungen, die sich auf die erste Beobachtung beziehen.

X_1, Y_1, Z_1 (Componenten von \mathfrak{E}_1) = die heliocentrischen Coordinaten der Erde vermehrt um die geocentrischen Coordinaten des Observatoriums.

ξ_1, η_1, ζ_1 (Componenten von \mathfrak{F}_1) = die Richtungscosinus der beobachteten Position corrigirt für die Fixsternaberration.

$$\mathfrak{E}_1^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2, \quad (\mathfrak{E}_1 \cdot \mathfrak{F}_1) = X_1 \xi_1 + Y_1 \eta_1 + Z_1 \zeta_1, \quad p_1^2 = \mathfrak{E}_1^2 - (\mathfrak{E}_1 \cdot \mathfrak{F}_1)^2.$$

Vorläufige Rechnungen, die sich auf die zweite und dritte Beobachtung beziehen.

Die Formeln sind ganz analog denen, die sich auf die erste Beobachtung beziehen; die Grössen sind bloss durch die zugehörigen Indices unterschieden.

III. Gleichungen für die erste Hypothese.

Wenn die vorhergehenden Grössen berechnet sind, so werden ihre numerischen Werthe (oder, wenn dies für die Rechnung bequemer ist, ihre Logarithmen) in die folgenden Gleichungen substituiert:

Componenten von \mathfrak{S}_1 :

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \varrho_1 + (\mathfrak{E}_1 \cdot \mathfrak{F}_1) & \alpha_1 &= A_1 \xi_1 (1 + R_1) \left(q_1 + \frac{X_1}{\xi_1} - (\mathfrak{E}_1 \cdot \mathfrak{F}_1) \right) \\ r_1^2 &= q_1^2 + p_1^2 & \beta_1 &= A_1 \eta_1 (1 + R_1) \left(q_1 + \frac{Y_1}{\eta_1} - (\mathfrak{E}_1 \cdot \mathfrak{F}_1) \right) \\ R_1 &= \frac{B_1}{r_1^3} & \gamma_1 &= A_1 \zeta_1 (1 + R_1) \left(q_1 + \frac{Z_1}{\zeta_1} - (\mathfrak{E}_1 \cdot \mathfrak{F}_1) \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III}_1)$$

Zur Controle:

$$s_1^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = A_1^2 (1 + R_1)^2 r_1^2.$$

Componenten von \mathfrak{S}' :

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= A_1 \xi_1 + A_1 \xi_1 R_1 - P' \alpha_1 \\ \beta' &= A_1 \eta_1 + A_1 \eta_1 R_1 - P' \beta_1 \\ \gamma' &= A_1 \zeta_1 + A_1 \zeta_1 R_1 - P' \gamma_1 \end{aligned} \right\} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (\text{III}')$$

Componenten von \mathfrak{S}_2 :

$$\left. \begin{aligned} q_2 &= \varrho_2 + (\mathfrak{E}_2 \cdot \mathfrak{F}_2) & \alpha_2 &= -\xi_2 (1 - R_2) \left(q_2 + \frac{X_2}{\xi_2} - (\mathfrak{E}_2 \cdot \mathfrak{F}_2) \right) \\ r_2^2 &= q_2^2 + p_2^2 & \beta_2 &= -\eta_2 (1 - R_2) \left(q_2 + \frac{Y_2}{\eta_2} - (\mathfrak{E}_2 \cdot \mathfrak{F}_2) \right) \\ R_2 &= \frac{B_2}{r_2^3} & \gamma_2 &= -\zeta_2 (1 - R_2) \left(q_2 + \frac{Z_2}{\zeta_2} - (\mathfrak{E}_2 \cdot \mathfrak{F}_2) \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III}_2)$$

Zur Controle:

$$s_2^2 = \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = (1 - R_2)^2 r_2^2.$$

Componenten von \mathfrak{S}'' :

$$\left. \begin{aligned} \alpha'' &= -\xi_2 + \xi_2 R_2 + P'' \alpha_2 \\ \beta'' &= -\eta_2 + \eta_2 R_2 + P'' \beta_2 \\ \gamma'' &= -\zeta_2 + \zeta_2 R_2 + P'' \gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (\text{III}'')$$

Componenten von \mathfrak{S}_3 :

$$\left. \begin{aligned} q_3 &= \varrho_3 + (\mathfrak{E}_3 \cdot \mathfrak{F}_3) & \alpha_3 &= A_3 \xi_3 (1 + R_3) \left(q_3 + \frac{X_3}{\xi_3} - (\mathfrak{E}_3 \cdot \mathfrak{F}_3) \right) \\ r_3^2 &= q_3^2 + p_3^2 & \beta_3 &= A_3 \eta_3 (1 + R_3) \left(q_3 + \frac{Y_3}{\eta_3} - (\mathfrak{E}_3 \cdot \mathfrak{F}_3) \right) \\ R_3 &= \frac{B_3}{r_3^3} & \gamma_3 &= A_3 \zeta_3 (1 + R_3) \left(q_3 + \frac{Z_3}{\zeta_3} - (\mathfrak{E}_3 \cdot \mathfrak{F}_3) \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III}_3)$$

Zur Controle:

$$s_3^2 = \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = A_3^2 (1 + R_3)^2 r_3^2.$$

Componenten von \mathfrak{S}''' :

$$P''' = \frac{3 R_3 q_3}{(1 + R_3) r_3^2} \left. \begin{aligned} \alpha''' &= A_3 \xi_3 + A_3 \xi_3 R_3 - P''' \alpha_3 \\ \beta''' &= A_3 \eta_3 + A_3 \eta_3 R_3 - P''' \beta_3 \\ \gamma''' &= A_3 \zeta_3 + A_3 \zeta_3 R_3 - P''' \gamma_3 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (\text{III}''')$$

Der Rechner kann nun irgend welche plausible Werthe der geocentrischen Entfernungen q_1, q_2, q_3 oder der heliocentrischen Entfernungen r_1, r_2, r_3 annehmen (erstere im Falle eines Kometen, letztere im Falle eines Asteroiden) und aus diesen angenommenen Werthen die folgenden Grössen berechnen:

Durch die Gleichungen (III ₁) (III'):	Durch die Gleichungen (III ₂) (III''):	Durch die Gleichungen (III ₃) (III'''):
q_1	q_2	q_3
$\log r_1$	$\log r_2$	$\log r_3$
$\log R_1$	$\log R_2$	$\log R_3$
$\log(1 + R_1)$	$\log(1 - R_2)$	$\log(1 + R_3)$
$\log P'$	$\log P''$	$\log P'''$
α_1	α_2	α_3
β_1	β_2	β_3
γ_1	γ_2	γ_3
α'	α''	α'''
β'	β''	β'''
γ'	γ''	γ'''

IV. Rechnungen, die sich auf die Differentialcoefficienten beziehen.

Componenten von $\mathfrak{S}'' \times \mathfrak{S}'''$: Componenten von $\mathfrak{S}''' \times \mathfrak{S}'$:

$$\begin{aligned} a_1 &= \beta'' \gamma''' - \gamma'' \beta''' & a_2 &= \beta''' \gamma' - \gamma''' \beta' \\ b_1 &= \gamma'' \alpha''' - \alpha'' \gamma''' & b_2 &= \gamma''' \alpha' - \alpha''' \gamma' \\ c_1 &= \alpha'' \beta''' - \beta'' \alpha''' & c_2 &= \alpha''' \beta' - \beta''' \alpha' \end{aligned}$$

Componenten von $\mathfrak{S}' \times \mathfrak{S}''$:

$$\begin{aligned} a_3 &= \beta' \gamma'' - \gamma' \beta'' \\ b_3 &= \gamma' \alpha'' - \alpha' \gamma'' \\ c_3 &= \alpha' \beta'' - \beta' \alpha''. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= (\mathfrak{S}' \mathfrak{S}'' \mathfrak{S}''') = a_1 \alpha' + b_1 \beta' + c_1 \gamma' = a_2 \alpha'' + b_2 \beta'' + c_2 \gamma'' \\ &= a_3 \alpha''' + b_3 \beta''' + c_3 \gamma'''. \end{aligned}$$

Diese Rechnungen werden durch die Uebereinstimmung der drei Werthe von G controlirt, die folgenden sind nur nöthig, wenn die zu machenden Correctionen gross sind:

$$\begin{aligned} H &= (\mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}''' \mathfrak{S}') = a_2 \xi_2 + b_2 \eta_2 + c_2 \zeta_2 \\ L &= \frac{1}{q_2} \left(1 + \frac{H}{G} \right) \left(1 - 5 \frac{q_2^2}{r_2^2} \right) - \frac{R_2 H}{q_2 G} \left(1 + \frac{q_2^2}{r_2^2} \right). \end{aligned}$$

V. Correctionen der geocentrischen Entfernungen.

Componenten von \mathfrak{S} :

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \qquad C_1 = - \frac{a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1 \gamma}{G}$$

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \qquad C_2 = - \frac{a_2 \alpha + b_2 \beta + c_2 \gamma}{G}$$

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \qquad C_3 = - \frac{a_3 \alpha + b_3 \beta + c_3 \gamma}{G}$$

$$\Delta q_2 = C_2 - \frac{6}{10} L (\Delta q_2)^2.$$

(Diese Gleichung wird gewöhnlich sehr leicht durch wiederholte Substitutionen gelöst.)

$$\Delta q_1 = C_1 - \frac{6}{10} L (\Delta q_2)^2, \quad \Delta q_3 = C_3 - \frac{6}{10} L (\Delta q_2)^2.$$

VI. Successive Correctionen.

$\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3$ werden als Correctionen zu q_1, q_2, q_3 addirt. Mit den so erhaltenen Werthen wird die Berechnung mittelst der Gleichungen (III₁), (III₂), (III₃) von Neuem begonnen. Dabei stehen zwei Wege offen:

a) Entweder kann die Arbeit genau wie zuvor bei der Bestimmung der neuen Correctionen für q_1, q_2, q_3 durchgeführt werden.

b) Oder es können die Rechnungen mittelst der Gleichungen (III'), (III''), (III''') unter Weglassung von IV. durchgeführt werden, indem man die alten Werthe für a_1, b_1, c_1, a_2 etc., G und L mit den neuen Resten α, β, γ benutzt, um neue Correctionen für q_1, q_2, q_3 durch die Gleichungen:

$$\Delta q_2 = \frac{C_2}{1 + \frac{6}{5} L (D q_2 + \frac{1}{2} C_2)},$$

$$\Delta q_1 = C_1 + \Delta q_2 - C_2, \quad \Delta q_3 = C_3 + \Delta q_2 - C_2$$

zu bekommen, wobei $D q_2$ die frühere Correction von q_2 bezeichnet. (Allgemeiner wird in irgend einem Stadium der Arbeit $D q_2$ die Summe aller Correctionen von q_2 repräsentiren, die seit der letzten Berechnung von a_1, b_1 etc. gemacht worden sind.)

Soweit eine allgemeine Regel gegeben werden kann, ist es, ausser in dem Falle, dass die angenommenen Werthe eine gute Näherung repräsentiren, rathsam, a_1, b_1 etc. nochmals zu berechnen, G aber bloss einmal, etwa nach den zweiten Correctionen von q_1, q_2, q_3 . Ob L auch von Neuem zu berechnen ist, hängt von seiner eigenen Grösse und derjenigen der Correction von q_2 ab, die noch zu machen ist. Wenn im späteren Stadium der Arbeit die Correctionen klein sind, so können die Glieder, welche L enthalten, ganz vernachlässigt werden.

Die Correctionen von q_1, q_2, q_3 müssen wiederholt werden, bis die Gleichungen:

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0$$

erfüllt sind. Für die folgenden Rechnungen, die indess mit der grösstmöglichen Genauigkeit durchzuführen sind, werden genäherte Werthe von r_1, r_2, r_3 genügen.

VII. Probe auf die erste Hypothese.

$\log r_1, \log r_2, \log r_3$ (genäherte Werthe aus den vorbergehenden Rechnungen):

$$\begin{aligned} N &= A_1 B_1 r_1^{-3} + B_2 r_2^{-3} + A_3 B_3 r_3^{-3} \\ s_1 &= A_1 r_1 + A_1 B_1 r_1^{-2} \\ s_2 &= r_2 - B_2 r_2^{-2} \\ s_3 &= A_3 r_3 + A_3 B_3 r_3^{-2} \\ s &= \frac{1}{2}(s_1 + s_2 + s_3) \\ s &= s_1, \quad s = s_2, \quad s = s_3. \end{aligned}$$

Der Werth von $s - s_2$ kann sehr klein und in Folge dessen sein Logarithmus sehr schlecht bestimmt sein. Das schadet indess nichts, wofern nur der Rechner sorgfältig denselben Werth, natürlich so genau berechnet wie möglich, gebraucht, wo immer derselbe in den folgenden Formeln vorkommt:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\frac{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)}{s}} & \operatorname{tg} \frac{1}{2}(v_2 - v_1) &= \frac{R}{s - s_3} \\ v &= \frac{2(s - s_2)}{N} & \operatorname{tg} \frac{1}{2}(v_3 - v_2) &= \frac{R}{s - s_1} \\ & & \operatorname{tg} \frac{1}{2}(v_3 - v_1) &= \frac{s - s_2}{R} \end{aligned}$$

Zur Auffindung von Fehlern:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(v_3 - v_1) &= \frac{1}{2}(v_2 - v_1) + \frac{1}{2}(v_3 - v_2) \\ e \sin \frac{1}{2}(v_3 + v_1) &= \frac{\frac{p}{r_1} - \frac{p}{r_3}}{2 \sin \frac{1}{2}(v_3 - v_1)} \\ e \cos \frac{1}{2}(v_3 + v_1) &= \frac{\frac{p}{r_1} + \frac{p}{r_3} - 2}{2 \cos \frac{1}{2}(v_3 - v_1)} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(v_3 + v_1) &= \frac{e^2}{e^2} \end{aligned}$$

Zur Controle:

$$\begin{aligned} e \cos v_2 &= \frac{p}{r_2} - 1 \\ \varepsilon &= \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} & a &= \frac{p}{1 - e^2} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} E_1 &= \varepsilon \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1, & \operatorname{tg} \frac{1}{2} E_2 &= \varepsilon \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2, & \operatorname{tg} \frac{1}{2} E_3 &= \varepsilon \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_3 \\ \tau_{1 \text{ calc. }} &= a^{3/2}(E_3 - E_2) + e a^{3/2} \sin E_2 - e a^{3/2} \sin E_3 \\ \tau_{3 \text{ calc. }} &= a^{3/2}(E_2 - E_1) + e a^{3/2} \sin E_1 - e a^{3/2} \sin E_2. \end{aligned}$$

VIII. Zur zweiten Hypothese.

$$\begin{aligned} \delta \tau_1 &= 0,0057613k (q_2 - q_3) & (\text{Aberrationsconstante nach Struve}) \\ \delta \tau_3 &= 0,0057613k (q_1 - q_2) & \log(0,0057613k) = 5,99610. \\ \Delta \log \tau_1 &= \log \tau_1 - \log(\tau_{1 \text{ calc. }} - \delta \tau_1) & \Delta \log \frac{\tau_1}{\tau_3} &= \Delta \log \tau_1 - \Delta \log \tau_3 \\ \Delta \log \tau_3 &= \log \tau_3 - \log(\tau_{3 \text{ calc. }} - \delta \tau_3) & \Delta \log A_1 &= -A_3 \Delta \log \frac{\tau_1}{\tau_3} \\ \Delta \log(\tau_1 \tau_3) &= \Delta \log \tau_1 + \Delta \log \tau_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta \log A_3 &= -A_1 \Delta \log \frac{\tau_1}{\tau_3} \\ \Delta \log B_1 &= \Delta \log (\tau_1 \tau_3) - \frac{\tau_1^2 + \tau_3^2}{12 B_1} \Delta \log \frac{\tau_1}{\tau_3} \\ \Delta \log B_2 &= \Delta \log (\tau_1 \tau_3) + \frac{\tau_1^2 - \tau_3^2}{12 B_2} \Delta \log \frac{\tau_1}{\tau_3} \\ \Delta \log B_3 &= \Delta \log (\tau_1 \tau_3) + \frac{\tau_1^2 + \tau_3^2}{12 B_3} \Delta \log \frac{\tau_1}{\tau_3}.\end{aligned}$$

Diese Correctionen werden zu den Logarithmen von A_1, A_3, B_1, B_2, B_3 in den Gleichungen (III₁), (III₂), (III₃) addirt und die so corrigirten Gleichungen zur Correction der Werthe von q_1, q_2, q_3 gebraucht, bis die Reste α, β, γ verschwinden. Die neuen Werthe von A_1 und A_3 müssen die Bedingung:

$$A_1 + A_3 = 1$$

erfüllen und die Correctionen $\Delta \log A_1, \Delta \log A_3$ müssen, wenn nöthig, zu diesem Zwecke berichtigt werden.

Dritte Hypothese.

Eine zweite Correction der Gleichungen (III₁), (III₂), (III₃) wird auf dieselbe Weise erhalten, wie die erste, doch wird sie selten nöthig sein.

IX. Bestimmung der Ellipse.

Voraussetzung ist, dass die Werthe von:

$$\begin{array}{ccc}\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 & \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 & \alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \\ r_1, r_2, r_3 & R_1, R_2, R_3 & s_1, s_2, s_3\end{array}$$

aus den Gleichungen (III₁), (III₂), (III₃) mit der grössten Genauigkeit berechnet sind, um die Reste α, β, γ zum Verschwinden zu bringen und dass die beiden Formeln für jede der Grössen s_1, s_2, s_3 sichtlich denselben Werth ergeben.

Componenten von \mathfrak{S}_4 :

$$\alpha_4 = \alpha_3 - \alpha_1$$

$$\beta_4 = \beta_3 - \beta_1$$

$$\gamma_4 = \gamma_3 - \gamma_1$$

$$s_4^2 = \alpha_4^2 + \beta_4^2 + \gamma_4^2$$

$$s = 1/2 (s_1 + s_2 + s_3)$$

Componenten von \mathfrak{S}_5 :

$$\alpha_5 = \alpha_4 - \frac{\alpha_4 \alpha_2 + \beta_4 \beta_2 + \gamma_4 \gamma_2}{s_2^2} \alpha_2$$

$$\beta_5 = \beta_4 - \frac{\alpha_4 \alpha_2 + \beta_4 \beta_2 + \gamma_4 \gamma_2}{s_2^2} \beta_2$$

$$\gamma_5 = \gamma_4 - \frac{\alpha_4 \alpha_2 + \beta_4 \beta_2 + \gamma_4 \gamma_2}{s_2^2} \gamma_2$$

$$s_5^2 = \alpha_5^2 + \beta_5^2 + \gamma_5^2$$

$$S = 1/2 (s_1 + s_2 + s_3).$$

Zur Controle hat man:

$$s - s_2 = \frac{S (S - s_1) (S - s_4) (S - s_3)}{s (s - s_1) (s - s_3)}$$

$$R^2 = \frac{S (S - s_1) (S - s_4) (S - s_3)}{s_2^2}$$

$$N = A_1 R_1 + R_2 + A_3 R_3$$

$$p = \frac{2 R^2 s}{N (s - s_1) (s - s_3)}$$

$$tg^{1/2} (v_2 - v_1) = \frac{R}{s - s_3}$$

$$tg^{1/2} (v_3 - v_2) = \frac{R}{s - s_1}$$

$$tg^{1/2} (v_3 - v_1) = \frac{R s}{(s - s_1) (s - s_3)}$$

Der Rechner muss darauf achten, die corrigirten Werthe von A_1 und A_3 anzuwenden (siehe VIII). Störende Fehler in den Winkeln müssen auf dieselben zweckmässig vertheilt werden:

$$\begin{aligned} e \sin^{1/2}(v_3 + v_1) &= \frac{\frac{p}{r_1} - \frac{p}{r_3}}{2 \sin^{1/2}(v_3 - v_1)} \\ e \cos^{1/2}(v_3 + v_1) &= \frac{\frac{p}{r_1} + \frac{p}{r_3} - 2}{2 \cos^{1/2}(v_3 - v_1)} \\ \operatorname{tg}^{1/2}(v_3 + v_1) &= e^2. \end{aligned}$$

Zur Controle:

$$\begin{aligned} e \cos v_2 &= \frac{p}{r_2} - 1 \\ \varepsilon &= \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \quad a = \frac{p}{1-e^2} \quad b = \sqrt{ap}. \end{aligned}$$

Richtungscosinus der grossen Halbaxe:

$$\begin{aligned} l &= -\frac{\cos v_2}{s_2} \alpha_2 - \frac{\sin v_2}{s_5} \alpha_5 \\ m &= -\frac{\cos v_2}{s_2} \beta_2 - \frac{\sin v_2}{s_5} \beta_5 \\ n &= -\frac{\cos v_2}{s_2} \gamma_2 - \frac{\sin v_2}{s_5} \gamma_5. \end{aligned}$$

Richtungscosinus der kleinen Halbaxe:

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{\sin v_2}{s_2} \alpha_2 + \frac{\cos v_2}{s_5} \alpha_5 \\ \mu &= -\frac{\sin v_2}{s_2} \beta_2 + \frac{\cos v_2}{s_5} \beta_5 \\ \nu &= -\frac{\sin v_2}{s_2} \gamma_2 + \frac{\cos v_2}{s_5} \gamma_5. \end{aligned}$$

Componenten der Halbaxen:

$$\begin{aligned} a_x &= a l & a_y &= a m & a_z &= a n \\ b_x &= b \lambda & b_y &= b \mu & b_z &= b \nu. \end{aligned}$$

X. Zeit des Periheldurchganges.

Correctionen für Aberration:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^{1/2} E_1 &= \varepsilon \operatorname{tg}^{1/2} v_1 & \delta t_1 &= -0,0057613 \varrho_1 \\ \operatorname{tg}^{1/2} E_2 &= \varepsilon \operatorname{tg}^{1/2} v_2 & \delta t_2 &= -0,0057613 \varrho_2 \\ \operatorname{tg}^{1/2} E_3 &= \varepsilon \operatorname{tg}^{1/2} v_3 & \delta t_3 &= -0,0057613 \varrho_3 \\ \log 0,0057613 &= 7,76052. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_1 + \delta t_1 - T &= k^{-1} a^{3/2} (E_1 - e \sin E_1) \\ t_2 + \delta t_2 - T &= k^{-1} a^{3/2} (E_2 - e \sin E_2) \\ t_3 + \delta t_3 - T &= k^{-1} a^{3/2} (E_3 - e \sin E_3). \end{aligned}$$

Die dreifache Bestimmung von T bietet eine Controle für die Genauigkeit der Lösung des Problems dar. Wenn die Unterschiede von T derartig sind, dass sie eine

weitere Correction der Formeln erfordern (dritte Hypothese), so hat man sich auf die Gleichungen:

$$\Delta \log \tau_1 = M \frac{T_{(3)} - T_{(2)}}{t_3 - t_2} \quad \Delta \log \tau_3 = M \frac{T_{(2)} - T_{(1)}}{t_2 - t_1}$$

zu stützen, in denen $T_{(1)}$, $T_{(2)}$, $T_{(3)}$ die bezüglich aus der ersten, zweiten, dritten Beobachtung erhaltenen Werthe bezeichnen und M den Modul der gewöhnlichen Logarithmen.

XI. Für eine Ephemeride.

$$\frac{h}{a^{3/2}} (t - T) = E - e \sin E.$$

Heliocentrische Coordinaten (Componenten von \mathcal{R}):

$$\begin{aligned} x &= -e a_x + a_x \cos E + b_x \sin E \\ y &= -e a_y + a_y \cos E + b_y \sin E \\ z &= -e a_z + a_z \cos E + b_z \sin E. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen werden vollständig controlirt durch die Uebereinstimmung der berechneten und beobachteten Positionen und die folgenden Relationen zwischen den Constanten:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0, \quad a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2, \quad b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 = (1 - e^2) a^2.$$

XII.

Ist eine genäherte Bahn im Voraus bekannt, so kann man sie zur Verbesserung der Fundamentalgleichung benutzen. Die folgende Methode dürfte dabei die einfachste sein. Man suche die excentrischen Anomalien E_1 , E_2 , E_3 und die heliocentrischen Entfernungen r_1 , r_2 , r_3 , welche zu der genäherten Bahn gehören, für die Zeiten der Beobachtung, corrigirt für Aberration.

Dann berechne man B_1 und B_3 , wie in I. gezeigt, unter Anwendung der corrigirten Zeiten.

Hierauf bestimme man A_1 und A_3 durch die Gleichung:

$$\frac{A_1 \left(1 + \frac{B_1}{r_1^3}\right)}{\sin(E_3 - E_2) - e \sin E_3 + e \sin E_2} = \frac{A_3 \left(1 + \frac{B_3}{r_3^3}\right)}{\sin(E_2 - E_1) - e \sin E_2 + e \sin E_1},$$

in Verbindung mit der Gleichung $A_1 + A_3 = 1$.

Dann bestimme man B_2 so, dass:

$$\frac{A_1 \frac{B_1}{r_1^3} + \frac{B_2}{r_2^3} + A_3 \frac{B_3}{r_3^3}}{4 \sin^{1/2}(E_2 - E_1) \sin^{1/2}(E_3 - E_2) \sin^{1/2}(E_3 - E_1)}$$

jedem der beiden Glieder der letzten Gleichung gleich wird.

Es ist nicht nöthig, dass die Zeiten, für welche E_1 , E_2 , E_3 , r_1 , r_2 , r_3 berechnet sind, genau mit den für Aberration corrigirten Beobachtungszeiten übereinstimmen. Seien die ersteren durch t'_1 , t'_2 , t'_3 , die letzteren durch t''_1 , t''_2 , t''_3 repräsentirt und sei:

$$\begin{aligned} \Delta \log \tau_1 &= \log(t''_3 - t''_2) - \log(t'_3 - t'_2) \\ \Delta \log \tau_3 &= \log(t''_2 - t''_1) - \log(t'_2 - t'_1). \end{aligned}$$

Dann findet man B_1 , B_3 , A_1 , A_3 , B_2 wie oben, indem man t'_1 , t'_2 , t'_3 gebraucht und $\Delta \log \tau_1$, $\Delta \log \tau_2$, um ihre Werthe wie in VIII. zu corrigiren.

Numerisches Beispiel: Die Ceres.

Zur Illustration seiner Methode hat Gibbs selbst als Beispiel den Planeten Ceres gewählt (vergl. auch die Vorbemerkungen zur vorliegenden 3. Ausgabe, S. XXVI, Anmerkung 1), welcher eine grosse heliocentrische Bewegung besitzt und von Gauss sowohl wie von Oppolzer vordem nach anderen, von einander verschiedenen Principien, weniger glücklich später von Harzer mit einer practisch minderwertigen Methode behandelt worden ist. (Man vergleiche die Vorbemerkungen zur 3. Ausgabe des vorliegenden Werkes, S. XXII, XXIII und XXV bis XXVII.)

Die folgenden Daten sind der Theoria motus §. 159 entnommen:

Zeiten, 1805, September	5,51336	139,42711	265,39813
Längen der Ceres	95° 32' 18'',56	99° 49' 5'',87	118° 5' 28'',85
Breiten der Ceres	— 0° 59' 34'',06	+ 7° 16' 36'',80	+ 7° 38' 49'',39
Längen der Erde	342° 54' 56'',00	117° 12' 43'',25	241° 58' 50'',71
Logarithmen der Entfernung von der Sonne	0,0031514	9,9929861	0,0056974

Die Positionen der Ceres sind dabei von der Einwirkung der Parallaxe und Aberration befreit.

I.

Man erhält zunächst aus den gegebenen Zeiten die folgenden Werthe:

	Zahlen	Logarithmen
$t_2 - t_1$	133,91375	2,1268252
$t_3 - t_2$	125,97102	2,1002706
$t_3 - t_1$	259,88477	2,4147809
A_1	0,4847187	9,6854897
A_3	0,5152812	9,7120443
τ_1		0,3358520
τ_3		0,3624066
B_1		9,6692113
B_3		0,3183722
B_2		9,5623916

Controle:

$$A_1 B_1 + B_2 + A_3 B_3 = 2,495\,908\,6$$

$$^{1/2} \tau_1 \tau_3 = 2,495\,908\,1.$$

II.

Aus den gegebenen Positionen folgt:

$\log X_1 \dots$	9,9835515	+	$\log X_2 \dots$	9,6531725	—	$\log X_3 \dots$	9,6775810	—
$\log Y_1 \dots$	9,4711748	—	$\log Y_2 \dots$	9,9420444	+	$\log Y_3 \dots$	9,9515547	—
$Z_1 \dots$	0		$Z_2 \dots$	0		$Z_3 \dots$	0	
$\log \xi_1 \dots$	8,9845270	—	$\log \xi_2 \dots$	9,2282738	—	$\log \xi_3 \dots$	9,6690294	—
$\log \eta_1 \dots$	9,9979027	+	$\log \eta_2 \dots$	9,9900800	+	$\log \eta_3 \dots$	9,9416855	+
$\log \zeta_1 \dots$	8,2387150	—	$\log \zeta_2 \dots$	9,1026549	+	$\log \zeta_3 \dots$	9,1240813	+
$\mathfrak{E}_1 \cdot \mathfrak{F}_1 \dots$	0,3874081	—	$\mathfrak{E}_2 \cdot \mathfrak{F}_2 \dots$	0,9314223	+	$\mathfrak{E}_3 \cdot \mathfrak{F}_3 \dots$	0,5599304	—
$p_1^2 \dots$	0,8645336	+	$p_2^2 \dots$	0,1006681	+	$p_3^2 \dots$	0,7130624	+

III.

Die vorstehenden Rechnungen liefern die numerischen Werthe für die Gleichungen (III₁), (III'), (III₂), (III''), (III₃), (III'''), die anbei folgen. Die Klammern bedeuten, dass an Stelle der Zahlen ihre Logarithmen gesetzt sind.

Jetzt haben wir für die heliocentrischen Entfernungen r_1, r_2, r_3 Werthe anzunehmen. Als naturgemässe Annahme bietet sich hier die mittlere Proportionale zwischen den mittleren Entfernungen von Mars und Jupiter zur Sonne dar. Um jedoch die Convergenz der Rechnungen zu prüfen, wenn die Annahmen nicht glücklich gewählt sind, soll die viel weniger wahrscheinliche Annahme gemacht werden — die sich in der That viel weiter von der Wahrheit entfernt —, dass die heliocentrischen Entfernungen das arithmetische Mittel zwischen den Entfernungen von Mars und Jupiter zur Sonne sind. Das ergiebt 0,526 für den Logarithmus jeder der drei Entfernungen r_1, r_2, r_3 . Aus diesen angenommenen Werthen berechnet man die ersten Zahlencolumnen in den drei folgenden Tabellen:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= q_1 - 0,3874081 & \alpha_1 &= - [8,6700167] (q_1 - 9,5901555) (1 + R_1) \\
 r_1^2 &= q_1^2 + 0,8645336 & \beta_1 &= [9,6833924] (q_1 + 0,0900552) (1 + R_1) \\
 R_1 &= [9,6692113] r_1^{-3} & \gamma_1 &= - [7,9242047] (q_1 + 0,3874081) (1 + R_1) \\
 & & & \left. \begin{aligned} \alpha' &= - 0,046775 - [8,67002] R_1 - P' \alpha_1 \\ \beta' &= 0,482383 + [9,68339] R_1 - P' \beta_1 \\ \gamma' &= - 0,008399 - [7,92420] R_1 - P' \gamma_1 \end{aligned} \right\} \dots (III')
 \end{aligned}$$

$\Delta q_1 \dots$			— 0,66731	— 0,04558	— 0,0010434	+ 0,0000006
$q_1 \dots$	+	3,22606	2,55875	2,51317	2,5142134	2,5142140
$\log r_1 \dots$	+	0,52600	0,434960	0,4280791	0,4282376	0,4282377
$\log R_1 \dots$	+	8,09121	8,364331	8,3849740	8,3844985	
$\log (1 + R_1) \dots$	+	0,00533	0,009934	0,0104122	0,0104010	
$\log P' \dots$	+	8,01967	8,369626	8,3957468	8,3951457	
$\alpha_1 \dots$	+	0,30136	0,336506	0,3390605	0,3390018	
$\beta_1 \dots$	+	1,61938	1,307304	1,286223	1,2867056	
$\gamma_1 \dots$	—	0,03072	0,025316	0,0249518	0,0249601	
$\alpha' \dots$	—	0,050505		0,0563438		
$\beta' \dots$	+	0,47139		0,4620942		
$\gamma' \dots$	—	0,00818		0,0079821		

$$\left. \begin{aligned} q_2 &= q_2 + 0,9314223 \\ r_2^2 &= q_2^2 + 0,1006681 \\ R_2 &= [0,3183722] r_2^{-3} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \alpha_2 &= + [9,2282738] (q_2 + 1,7286820) (1 - R_2) \\ \beta_2 &= - [9,9900800] (q_2 - 0,0361309) (1 - R_2) \\ \gamma_2 &= - [9,1026549] (q_2 - 0,9314223) (1 - R_2) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} q_2 \\ r_2^2 \\ R_2 \end{aligned}} \right\} \dots (\text{III}_2)$$

$$\left. \begin{aligned} P'' &= \frac{[0,47712] R_2 q_2}{(1 - R_2) r_2^2} \\ \alpha'' &= 0,169151 - [9,22827] R_2 + P'' \alpha_2 \\ \beta'' &= - 0,977417 + [9,99008] R_2 + P'' \beta_2 \\ \gamma'' &= - 0,126664 + [9,10265] R_2 + P'' \gamma_2 \end{aligned} \right\} \dots (\text{III}'')$$

$A q_2$			- 0,77826	+ 0,005042	+ 0,0013222	+ 0,0000021
q_2	+	3,34235	2,56409	2,569132	2,5704542	2,5704563
$\log r_2$	+	0,52600	0,412233	0,4130733	0,4132934	0,4132937
$\log R_2$	+	8,74037	9,081673	9,0791524	9,0784920	
$\log (1 - R_2)$. . .	+	9,97543	9,944142	9,9444866	9,9445766	
$\log P''$	+	8,71411	9,199120	9,1954270	9,1944598	
α_2	+	0,81059	0,638489	0,6397466	0,6400760	
β_2	-	3,05379	2,172660	2,1787230	2,1803116	
γ_2	-	0,28858	0,181843	0,1825846	0,1827338	
α''	+	0,20182		0,2491854		
β''	-	1,08177		1,2018221		
γ''	-	0,13464		0,1400944		

$$\left. \begin{aligned} q_3 &= q_3 - 0,5599304 \\ r_3^2 &= q_3^2 + 0,7130624 \\ R_3 &= [9,5623916] r_3^{-3} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \alpha_3 &= - [9,3810737] (q_3 + 1,5798163) (1 + R_3) \\ \beta_3 &= [9,6537308] (q_3 - 0,4630521) (1 + R_3) \\ \gamma_3 &= [8,8361256] (q_3 + 0,5599304) (1 + R_3) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} q_3 \\ r_3^2 \\ R_3 \end{aligned}} \right\} \dots (\text{III}_3)$$

$$\left. \begin{aligned} P''' &= \frac{[0,47712] R_3 q_3}{(1 - R_3) r_3^2} \\ \alpha''' &= - 0,240477 - [9,38107] R_3 - P''' \alpha_3 \\ \beta''' &= + 0,450537 + [9,65373] R_3 - P''' \beta_3 \\ \gamma''' &= + 0,068569 + [8,83613] R_3 - P''' \gamma_3 \end{aligned} \right\} \dots (\text{III}''')$$

$A q_3$			- 0,80780	- 0,04055	+ 0,0025316	+ 0,0000031
q_3	+	3,24945	2,44165	2,40110	2,4036316	2,4036347
$\log r_3$	+	0,52600	0,412217	0,4057319	0,4061394	0,4061399
$\log R_3$	+	7,98439	8,325742	8,3451948	8,3439733	
$\log (1 + R_3)$. . .	+	0,00417	0,009099	0,0095108	0,0094843	
$\log P'''$	+	7,91715	8,357016	8,3817516	8,3801993	
α_3	-	1,17253	0,987590	0,9785152	0,9790776	
β_3	+	1,26749	0,910305	0,8924956	0,8936069	
γ_3	+	0,26373	0,210171	0,2075292	0,2076940	
α'''	-	0,22847		0,2222335		
β'''	+	0,44441		0,4390163		
γ'''	+	0,06690		0,0650888		

IV.

Die Werthe von α' , β' etc. liefern die Grundlage für die Berechnung folgender Grössen:

$$\begin{array}{lll} a_1 = - 0,01254 & a_2 = - 0,03517 & a_3 = - 0,07232 \\ b_1 = + 0,01726 & b_2 = - 0,00525 & b_3 = - 0,00845 \\ c_1 = - 0,15746 & c_2 = - 0,08526 & c_3 = - 0,04050. \end{array}$$

Für G ergeben sich drei auffallend übereinstimmende Werthe. Nehmen wir ihr Mittel, so wird:

$$G = 0,01006.$$

So erhalten wir:

$$H = - 0,00998 \qquad L = 0,02322.$$

(Von der Berechnung von H und L hätte man dabei ganz absehen können, wenn man ihre kleinen Werthe hätte voraussehen können. In der That ergibt sich, dass die Glieder, welche L enthalten, die Convergenz kaum verbessern, da sie kleiner als die vernachlässigten Grössen sind. Nichtsdestoweniger illustriert der Gebrauch dieser Glieder in unserem Beispiel einen Process, dessen Anwendung sich in anderen Fällen als vortheilhaft erweist.)

V.

Entnehmen wir die Werthe von $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ den Columnen unter (III₁), (III₂), (III₃), so folgen die Reste:

$$\alpha = - 0,06058 \qquad \beta = - 0,16692 \qquad \gamma = - 0,05557,$$

aus denen sich mittelst der zuletzt berechneten Zahlen die Werthe ergeben:

$$C_1 = - 0,65888 \qquad C_2 = - 0,76983 \qquad C_3 = - 0,79939$$

die als Correctionen für die Werthe von q_1, q_2, q_3 verwendet werden können. Um für diese Correctionen genauere Werthe zu erhalten, setzen wir:

$$\Delta q_2 = C_2 - \frac{6}{10} L (\Delta q_2)^2 \quad \text{oder} \quad \Delta q_2 = - 0,76983 - 0,01393 (\Delta q_2)^2,$$

was:

$$\Delta q_2 = - 0,77826$$

ergiebt. Die quadratischen Glieder vermindern den Werth von Δq_2 um 0,00843. Durch Subtraction der gleichen Grösse von C_1 und C_2 folgt:

$$\Delta q_1 = - 0,66731, \qquad \Delta q_3 = - 0,80780.$$

VI.

Indem man diese Correctionen an die Werthe von q_1, q_2, q_3 anbringt, erhält man die zweiten Zahlencolumnen unter den Gleichungen (III₁), (III₂), (III₃). Auf die Rechnung mittelst der Gleichungen (III') etc. gehen wir nicht ein, sondern begnügen uns mit den letzten Werthen von a_1, b_1 etc., G und L , die mit den neuen Resten:

$$\alpha = - 0,012595 \qquad \beta = 0,044949 \qquad \gamma = 0,003012$$

die Werthe:

$$C_1 = - 0,04567 \qquad C_2 = 0,004952 \qquad C_3 = - 0,04064$$

$\Delta q_2 = C_2 - L (D q_2 + \frac{1}{2} C_2) \Delta q_2 = 0,004952 - 0,02322 (- 0,77826 + 0,00247) \Delta q_2$ ergeben.

Daraus folgt:

$$\Delta q_2 = 0,005042.$$

Da das Glied, welches L enthält, den Werth von Δq_2 um 0,00009 vergrößert hat, so addiren wir diese Grösse zu C_1 und C_3 und erhalten so:

$$\Delta q_1 = - 0,04558 \qquad \Delta q_3 = - 0,04055.$$

Mittelst dieser Correctionen berechnet man die dritten Zahlencolumnen unter den Gleichungen (III₁) etc. Dabei berechnet man die Grössen α' etc. von Neuem, und wiederholt mit ihnen dann die hauptsächlichsten Rechnungen von IV., wodurch sich die neuen Werthe:

$$\begin{array}{lll} a_1 = - 0,0167215 & a_2 = - 0,0335815 & a_3 = - 0,0743299 \\ b_1 = + 0,0149145 & b_2 = - 0,0054413 & b_3 = - 0,0098825 \\ c_1 = - 0,1576886 & c_2 = - 0,0779570 & c_3 = - 0,0474318 \\ G = & 0,0090929. \end{array}$$

ergeben.

Die Grössen H und L können wir ohne Bedenken in diesem Stadium der Annäherung vernachlässigen.

Mit letzteren Werthen ergeben die neuen Reste:

$$\alpha = + 0,0002919 \quad \beta = - 0,0000044 \quad \gamma = + 0,0000288$$

die Werthe:

$$\begin{aligned} \Delta q_1 = C_1 = + 0,0010434 & \quad \Delta q_2 = C_2 = + 0,0013222 \\ \Delta q_3 = C_3 = + 0,0025316. \end{aligned}$$

Diese Correctionen liefern die Grundlage für die vierten Zahlencolumnen unter den Gleichungen (III₁) etc. Als Reste folgen:

$$\alpha = 0,0000002 \quad \beta = + 0,0000009 \quad \gamma = + 0,0000001$$

und als neue Correctionen:

$$\Delta q_1 = + 0,0000006 \quad \Delta q_2 = + 0,0000021 \quad \Delta q_3 = + 0,0000031.$$

Die corrigirten Werthe von q_1, q_2, q_3 ergaben:

$$\log r_1 = 0,4282377 \quad \log r_2 = 0,4132937 \quad \log r_3 = 0,4061399.$$

Wir haben die Annäherung weiter, als für die folgende Correction nöthig ist, getrieben, um genau zu sehen, zu welchen Resultaten die uncorrigirte Formel führt und um der Controle willen, welche durch die vierten Reste geboten wird.

VII.

Die Rechnungen zur Prüfung der uncorrigirten Formel (erste Hypothese) sind folgende:

	Zahl oder Bogen		Logarithmus
r_1			0,4282377
r_2			0,4132937
r_3			0,4061399
$A_1 B_1 r_1^{-3}$	+	0,01174865	8,0699879
$B_2 r_2^{-3}$	+	0,11980944	9,0784911
$A_3 B_3 r_3^{-3}$	+	0,01137670	8,0560162
N	+	0,14293479	9,1551380
s_1	+	1,3308476	0,1241283
s_2	+	2,2796616	0,3578704
s_3	+	1,3417404	0,1276685
s	+	2,4761248	0,3937725
$s - s_1$	+	1,1452772	0,0589106
$s - s_2$	+	0,1964632	9,2932812
$s - s_3$	+	1,1343844	0,0547602
R	+		9,5065898
p	+		0,4391732
$tg \frac{1}{2}(v_3 - v_1)$	+	15° 48' 10'',82	9,4518296
$tg \frac{1}{2}(v_3 - v_2)$	+	15° 39' 36'',38	9,4476792
$tg \frac{1}{2}(v_3 - v_1)$	+	31° 27' 47'',20	9,7866915
$e \sin \frac{1}{2}(v_3 + v_1)$	—		8,7099387
$e \cos \frac{1}{2}(v_3 + v_1)$	+		8,7872701
$tg \frac{1}{2}(v_3 + v_1)$	—	—39° 55' 32',31	9,9226686
e	+		8,9025438
ε	+		9,9652259
a	+		0,4419546

		Zahl oder Bogen	Logarithmus
$tg \frac{1}{2} v_1$	—	— 35° 41' 39'',75	9,8563809
$tg \frac{1}{2} v_2$	—	— 19° 53' 28'',93	9,5584981
$tg \frac{1}{2} v_3$	—	— 4° 13' 52'',55	8,8691380
$tg \frac{1}{2} E_1$	—	— 33° 33' 0'',17	9,8216068
$tg \frac{1}{2} E_2$	—	— 18° 28' 6'',35	9,5237240
$tg \frac{1}{2} E_3$	—	— 3° 54' 24'',21	8,8343639
$\sin E_1$	—	— 67° 6' 0'',34	9,9643473
$\sin E_2$	—	— 36° 56' 12'',70	9,7788272
$\sin E_3$	—	— 7° 48' 48'',42	9,1333734
$e a^{\frac{3}{2}} \sin E_1$	—	0,3387061	9,5298230
$e a^{\frac{3}{2}} \sin E_2$	—	0,2209515	9,3443029
$e a^{\frac{3}{2}} \sin E_3$	—	0,0499861	8,6988491
$a^{\frac{3}{2}} (E_2 - E_1)$	+	2,4226307	0,3842872
$a^{\frac{3}{2}} (E_3 - E_2)$	+	2,3391145	0,3690515
τ_3 calc.	+	2,3048791	0,3626482
τ_1 calc.	+	2,1681461	0,3360885

VIII.

Die Logarithmen der berechneten Werthe der Zeitintervalle übersteigen die für dieselben gegebenen Werthe um 0,0002416 beim ersten Intervall (τ_3) und um 0,0002365 beim zweiten Intervall (τ_1). Daher setzen wir, indem die Correction für Aberration in unseren Daten enthalten ist, als Correction der Formel (bei der zweiten Hypothese):

$$\Delta \log \tau_1 = - 0,0002365 \quad \Delta \log \tau_3 = - 0,0002416;$$

das ergibt:

$$\begin{aligned} \Delta \log A_1 &= 0,0000026 & \Delta \log A_3 &= - 0,0000025 \\ \Delta \log B_1 &= - 0,0004872 & \Delta \log B_2 &= - 0,0004782 \\ \Delta \log B_3 &= - 0,0004665. \end{aligned}$$

Die neuen Werthe der Logarithmen von A_1 und A_3 sind:

$$\log A_1 = 9,6854923 \quad \log A_3 = 9,7120418.$$

Indem man diese Correctionen an die Gleichungen (III₁), (III₂), (III₃) anbringt, ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} r_1^2 &= q_1^2 + 0,8645336 \\ R_1 &= [9,6687241] r_1^{-3} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \alpha_1 &= - [8,6700193] (q_1 - 9,5901555) (1 + R_1) \\ \beta_1 &= + [9,6833950] (q_1 + 0,0900552) (1 + R_1) \\ \gamma_1 &= - [7,9242073] (q_1 + 0,3874081) (1 + R_1) \end{aligned} \left. \begin{aligned} & \\ & \\ & \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \\ & \\ & \text{corrigirt.} \end{aligned} \quad \dots (III_1)$$

Δq_1			+ 0,0002887	— 0,0000217
q_1	+	2,5142140	2,5145027	2,5144810
$\log r_1$	+	0,4282377	0,4282816	0,4282782
$\log R_1$	+	8,3838110	8,3838793	8,3838894
$\log (1 + R_1)$	+	0,0103847	0,0103863	0,0103865
α_1	+	0,3389910	0,3389784	0,3389796
β_1	+	1,2866654	1,2868124	1,2868024
γ_1	—	0,0249593	0,0249619	0,0249617
$\log s_1$	+			0,1241571

$$\left. \begin{aligned} r_2^2 &= q_2^2 + 0,1006681 \\ R_2 &= [0,3178910] r_2^{-3} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \alpha_2 &= + [9,2282738] (q_2 + 1,7286820) (1 - R_2) \\ \beta_2 &= - [9,9900800] (q_2 - 0,0361309) (1 - R_2) \\ \gamma_2 &= - [9,1026549] (q_2 - 0,9314223) (1 - R_2) \end{aligned} \left. \begin{aligned} & \\ & \\ & \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \\ & \\ & \text{corrigirt.} \end{aligned} \quad \dots (III_2)$$

Δq_2			— 0,0000955	+ 0,0000187
q_2	+	2,5704563	2,5703608	2,5703795
$\log r_2$	+	0,4132937	0,4132778	0,4132809
$\log R_2$	+	9,0780129	9,0780605	9,0780513
$\log (1 - R_2)$	+	9,9446418	9,9446353	9,9446365
α_2	+	0,6401725	0,6401487	0,6401532
β_2	—	2,1806412	2,1805261	2,1805482
γ_2	—	0,1827615	0,1827481	0,1827507
$\log s_2$	+			0,3579174

$$\left. \begin{aligned} r_3^2 &= q_3^2 + 0,7130624 \\ R_3 &= [9,5619251] r_3^{-3} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \alpha_3 &= - [9,3810712] (q_3 + 1,5798163) (1 + R_3) \\ \beta_3 &= + [9,6537283] (q_3 - 0,4630521) (1 + R_3) \\ \gamma_3 &= + [8,8361231] (q_3 + 0,5599304) (1 + R_3) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} r_3^2 \\ R_3 \end{aligned}} \right\} \dots (III_3) \text{ corrigirt.}$$

Δq_3			+ 0,0003302	+ 0,0000424
q_3	+	2,4036347	2,4039649	2,4040073
$\log r_3$	+	0,4061399	0,4061929	0,4061998
$\log R_3$	+	8,3435055	8,3433463	8,3433257
$\log (1 + R_3)$	+	0,0094742	0,0094708	0,0094704
α_3	—	0,9790500	0,9791236	0,9791329
β_3	+	0,8935824	0,8937277	0,8937461
γ_3	+	0,2076882	0,2077097	0,2077124
$\log s_3$	+			0,1277120

Mit diesen corrigirten Gleichungen ergeben unsere letzten Werthe von q_1, q_2, q_3 die Reste:

$$\alpha = 0,0001135 \quad \beta = - 0,0003934 \quad \gamma = - 0,0000326;$$

diese liefern die Correctionen:

$$\Delta q_1 = 0,0002887 \quad \Delta q_2 = - 0,0000955 \quad \Delta q_3 = 0,0003302.$$

Die nächsten Reste sind:

$$\alpha = 0,0000035 \quad \beta = 0,0000140 \quad \gamma = - 0,0000003$$

und sie ergeben die Correctionen:

$$\Delta q_1 = - 0,0000217 \quad \Delta q_2 = 0,0000187 \quad \Delta q_3 = 0,0000424.$$

Die nächsten Reste sind:

$$\alpha = - 0,0000001 \quad \beta = 0,0000003 \quad \gamma = 0,0000000,$$

die als verschwindend klein betrachtet werden können.

IX., X.

Es bleibt nur noch die Bestimmung der Ellipse übrig, welche durch die Punkte geht, auf die sich die Zahlen in den letzten Columnen unter den corrigirten Gleichungen (III₁), (III₂), (III₃) beziehen, sowie die Bestimmung der Zeit des Periheldurchganges. Die Rechnungen sind folgende:

		Zahl oder Bogen	Logarithmus
α_4	—	1,3181125	0,1199525
β_4	—	0,3930563	9,5944547
γ_4	+	0,2326741	9,3667481
s_4^2	+	1,9460513	0,2891543
s_4	+	1,3950100	0,1445772
s_1	+	1,3309358	
s_3	+	1,3418749	
s_2	+	2,2799084	0,3579174
s	+	2,4763596	0,3938137
$s - s_1$	+	1,1454238	0,0589662
$s - s_3$	+	1,1344847	0,0547986
S	+	2,0339104	0,3083318
$S - s_1$	+	0,7029746	9,8469397
$S - s_4$	+	0,6389004	9,8054332
$S - s_3$	+	0,6920355	9,8401284
$\mathfrak{S}_4, \mathfrak{S}_2^1$	—	0,0292373	8,4659373
$\mathfrak{S}_4, \mathfrak{S}_2 s_2^{-2}$	—		7,7501025
$\mathfrak{S}_4, \mathfrak{S}_2 s_2^{-2} \alpha_2$	—	0,003600696	7,5563864
$\mathfrak{S}_4, \mathfrak{S}_2 s_2^{-2} \beta_2$	+	0,012265017	8,0886682
$\mathfrak{S}_4, \mathfrak{S}_2 s_2^{-2} \gamma_2$	+	0,001027926	7,0119616
α_3	—	1,3145118	0,1187645
β_3	—	0,4053213	9,6077994
γ_3	+	0,2316462	9,3648252
s_3^2	+	1,9458866	0,2891176
R^2	+		9,0132057
R	+		9,5066028
N	+	0,14278017	9,1546679
p	+	2,7517987	0,4396167
$tg^{1/2}(v_2 - v_1)$	+	15° 48' 7'',67	9,4518042
$tg^{1/2}(v_3 - v_2)$	+	15° 39' 31'',14	9,4476366
$tg^{1/2}(v_3 - v_1)$	+	31° 27' 38'',81	9,7866517
$e \sin^{1/2}(v_3 + v_1)$	—		8,7099732
$e \cos^{1/2}(v_3 + v_1)$	+		8,7951055
$tg^{1/2}(v_3 + v_1)$	—	39° 25' 12'',94	9,9148727
e	+	0,08076104	8,9072019
$tg^{1/2} v_1$	—	— 35° 26' 25'',87	9,8523140
$tg^{1/2} v_2$	—	— 19° 38' 18'',20	9,5524725
$tg^{1/2} v_3$	—	— 3° 58' 47'',06	8,8424313
ε	+		9,9648493
a	+		0,4424586
b	+		0,4410376
e	—	0,8139130	9,9105780
m	+	0,5564152	9,7453990
n	+	0,1671768	9,2231760
λ	—	0,5517065	9,7417081
μ	—	0,8304016	9,9192881
r	+	0,07780215	8,8909916
a_x	—		0,3530366
a_y	+		0,1878576
a_z	+		9,6656346
b_x	—		0,1827457
b_y	—		0,3603257
b_z	+		9,3320292

¹⁾ $\mathfrak{S}_4, \mathfrak{S}_2 = \alpha_4 \alpha_2 + \beta_4 \beta_2 + \gamma_4 \gamma_2$

		Zahl oder Bogen	Logarithmus
$tg \frac{1}{2} E_1$	—	— 33° 16' 50'',08	9,817 1633
$tg \frac{1}{2} E_2$	—	— 18° 12' 58'',10	9,517 3218
$tg \frac{1}{2} E_3$	—	— 3° 40' 16'',33	8,807 2306
$k^{-1} a^{3/2} e \sin E_1$	—	19,856 71	1,297 9074
$k^{-1} a^{3/2} e \sin E_2$	—	12,852 91	1,109 0014
$k^{-1} a^{3/2} e \sin E_3$	—	2,765 89	0,441 8347
$k^{-1} a^{3/2} E_1$	—	311,318 39	2,493 2048
$k^{-1} a^{3/2} E_2$	—	170,400 27	2,231 4703
$k^{-1} a^{3/2} E_3$	—	34,341 74	1,535 8223
$T_{(1)}$	+	296,975 04	
$T_{(2)}$	+	296,974 47	
$T_{(3)}$	+	296,973 98	
T	+	296,974 50	

XI.

Das ergibt folgende Gleichungen für eine Ephemeride:

$$T = 1806, \text{ Juni, } 23,97450, \text{ Paris M. Zt.}$$

$$[2,8863186] (t - T) = E_{\text{in Sekunden}} - [4,2216270] \sin E.$$

Heliocentrische Coordinaten in Bezug auf die Ekliptik.

$$x = + 0,1820700 - [0,3530366] \cos E - [0,1827457] \sin E$$

$$y = - 0,1244685 + [0,1878576] \cos E - [0,3603257] \sin E$$

$$z = - 0,0373970 + [9,6656346] \cos E + [9,3320292] \sin E.$$

Die Unterschiede der Werthe von $T_{(1)}$, $T_{(2)}$, $T_{(3)}$ von ihrem Mittelwerthe T geben die Fehlerreste dieser Hypothese an. Dieselben zeigen Unterschiede in den berechneten und beobachteten geocentrischen Positionen, welche durch die geocentrischen Winkel repräsentirt sind, die den Wegstrecken gegenüber liegen, welche vom Planeten in folgenden Tagesbruchtheilen beschrieben werden: 0,00054, 0,00003, 0,00052. Da die heliocentrische Bewegung des Planeten circa $\frac{1}{4}^{\circ}$ pro Tag beträgt und er zur Zeit der ersten und dritten Beobachtung bedeutend weiter von der Erde als von der Sonne entfernt ist, so werden die Fehler weniger als eine halbe Bogensecunde betragen.

Wenn wir eine Genauigkeit, wie sie durch siebenstellige Logarithmen erreicht wird, anstreben, können wir eine dritte Hypothese bilden, die auf folgenden Correctionen beruht:

$$\Delta \log \tau_1 = M \frac{T_{(3)} - T_{(2)}}{t_3 - t_2} = - 0,0000017,$$

$$\Delta \log \tau_3 = M \frac{T_{(2)} - T_{(1)}}{t_2 - t_1} = - 0,0000018.$$

Die Gleichungen für eine Ephemeride werden dann:

$$T = 1806, \text{ Juni, } 23,96378, \text{ Paris M. Zt.}$$

$$[2,8863140] (t - T) = E_{\text{in Sekunden}} - [4,2216530] \sin E.$$

Heliocentrische Coordinaten bezüglich der Ekliptik.

$$x = + 0,1820765 - [0,3530261] \cos E - [0,1827783] \sin E$$

$$y = - 0,1244853 + [0,1878904] \cos E - [0,3603153] \sin E$$

$$z = - 0,0373987 + [9,6656285] \cos E + [9,3320758] \sin E.$$

Die Uebereinstimmung der berechneten geocentrischen Positionen mit den Daten zeigt folgende Tabelle an:

Zeiten, 1805, September	5,51336	139,42711	265,39813
Zweite Hypothese:			
Längen	95° 32' 18'',88	99° 49' 5'',87	118° 5' 28'',52
Fehler	0'',32	0'',00	— 0'',33
Breiten	— 0° 59' 34'',01	7° 16' 36'',82	7° 38' 49'',34
Fehler	0'',05	0'',02	— 0'',05
Dritte Hypothese:			
Längen	95° 32' 18'',65	99° 49' 5'',82	118° 5' 28'',79
Fehler	0'',09	— 0'',05	— 0'',06
Breiten	— 0° 59' 34'',04	7° 16' 36'',78	7° 38' 49'',38
Fehler	0'',02	— 0'',02	— 0'',01

Das directe Resultat von jeder Hypothese giebt drei Positionen des Planeten, aus denen zusammen mit den Zwischenzeiten die Bahn auf verschiedene Weise berechnet werden kann, wobei man insofern verschiedene Resultate erhält, als die gegebenen Positionen von der Wirklichkeit in Folge der Unsicherheit der Hypothesen abweichen. Daher zeigt sich in mancher Beziehung die Richtigkeit einer Hypothese am besten durch die Werthe der geocentrischen oder heliocentrischen Entfernungen, die aus ihr direct abgeleitet sind. In beifolgender Tafel sind die Logarithmen der heliocentrischen Entfernungen zusammengestellt und die von Gauss und Oppolzer nach ihren Methoden für dasselbe Beispiel gefundenen Werthe zum Vergleich beigelegt. Es mag noch hervorgehoben werden, dass die durch die zweite Hypothese gegebenen Positionen im Wesentlichen schon correct sind und dass, wenn die Bahn aus der ersten und dritten Position mit den Zwischenzeiten berechnet worden wäre, nur wenig zu wünschen übrig geblieben wäre:

	$\log r_1$	$\log r_2$	$\log r_3$
Gibbs:			
Erste Hypothese	0,4282377	0,4132937	0,4061399
Zweite "	0,4282782	0,4132809	0,4061998
Dritte "	0,4282786	0,4132808	0,4062003
Gauss:			
Erste Hypothese	0,4323934	0,4114726	0,4094712
Zweite "	0,4291773	0,4129371	0,4071975
Dritte "	0,4284841	0,4132107	0,4064697
Vierte "	0,4282792	0,4132817	0,4062033
Oppolzer:			
Erste Hypothese	0,4281340	0,4133300	0,4061699
Zweite "	0,4282794	0,4132801	0,4061976
Dritte "	0,4282787		0,4062009

Bezüglich der drei verschiedenen Methoden mag noch bemerkt werden, dass die Bestimmung der Positionen bei einer Hypothese nach Gauss' Methode die successiven Correctionen einer einzigen unabhängigen Variablen, die entsprechende Bestimmung

bei Oppolzer's Methode die successiven Correctionen von zwei independenten Variablen verlangt, während dieselbe Bestimmung nach Gibbs' Methode die successiven Correctionen von drei unabhängigen Variablen erfordert. —

Zweiundachtzigste Vorlesung. Die Leuschner'schen Methoden.

Laplace hat bereits in der *Mécanique Céleste*, T. I., première partie livre II, chap. IV, eine Methode der Bahnbestimmung angegeben, welche vom theoretischen Standpunkte die idealste Lösung des Problems enthält. Das Grundprincip dieser Methode ist, dass zunächst aus den gegebenen Beobachtungen zur Zeit einer innerhalb der Beobachtungszeiten gewählten Epoche t_0 die sphärischen Coordinaten des Körpers, dessen Bahn zu bestimmen ist, sowie deren Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ermittelt werden, wobei diese Grössen selbstverständlich auf die Erde bezogen sind. Sodann wird die geocentrische Distanz und ihre Geschwindigkeit etc. aus den eben genannten Coordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, mit Heranziehung der bekannten Sonnen-coordinaten etc., aus den Bewegungsgleichungen abgeleitet.

Die bisher gegen die praktische Bedeutung dieses Verfahrens erhobenen Einwände werden, wie noch weiter unten klargestellt werden wird, durch die in dieser Vorlesung zur Darstellung kommenden Leuschner'schen Methoden, welche auf der Laplace'schen Methode zwar basiren, von deren Mängeln jedoch frei sind, vollständig beseitigt¹⁾.

Das Laplace'sche Verfahren ist im neunzehnten Jahrhundert verschiedentlich bearbeitet worden, aber lange nicht in so ausgiebigem Maasse wie die Gauss'sche Methode. Sonst wären die praktischen Vorzüge desselben wohl längst erkannt worden. Unter den neueren Bearbeitungen sind die von Bruns²⁾, von Poincaré³⁾ und, wie bereits in den „Vorbemerkungen zur dritten Ausgabe“ dieses Werkes erwähnt ist, von Harzer⁴⁾ zu nennen. Die folgenden Bedenken gegen die praktische Verwendbarkeit der Harzer'schen Methode gaben den ersten Anlass zu den Arbeiten Leuschner's auf diesem Gebiete:

A. Es muss ein System von fünf Gleichungen, vor und nachdem die Correctionen für Parallaxe und Aberration angebracht worden sind, für jede der beiden beobachteten Coordinaten gelöst werden. Im Ganzen sind also im Allgemeinen mindestens vier derartige Systeme zu lösen. Weitere Lösungen können nothwendig werden, wenn die aus der Lösung der beiden ersten Systeme resultirenden geocentrischen Distanzen zur definitiven Bestimmung der genannten Correctionen nicht genügend genau sind.

B. Es fehlen etwaige Anweisungen zur Erleichterung der Lösung der Gleichung siebenten Grades, aus welcher die geocentrische Distanz zur Zeit der Epoche t_0 gewonnen wird. Diese Gleichung muss mit viel Mühe mindestens zweimal durch Versuche gelöst werden.

C. Nachdem die Unterschiede, Beobachtung minus Rechnung, für die fünf gegebenen Beobachtungen auf Grund der letzten Annäherung der geocentrischen Distanzen bestimmt

¹⁾ „Short Methods of Determining Orbits“ by A. O. Leuschner; Publications of the Lick Observatory, Vol. VII. Bisher sind nur die Theile 1, 2, 3 dieses Bandes und zwar als Separatabdruck erschienen, während die übrigen Theile erst gedruckt werden.

²⁾ A. N. 2321.

³⁾ Bulletin Astronomique, t. XXIII, p. 161.

⁴⁾ A. N. 3371.

worden sind, müssen die Coëfficienten der sechs zu ermittelnden Aenderungen der rechtwinkligen heliocentrischen Coordinaten und deren Geschwindigkeiten zur Zeit der Epoche für zehn Beobachtungsgleichungen berechnet werden. Die Gesamtzahl dieser Coëfficienten ist demnach sechzig. Will man aber nur dreien der gegebenen Beobachtungen Genüge leisten, so braucht man immerhin noch sechsenddreissig Coëfficienten. Obwohl erleichternde Winke zur Berechnung der sechs Unbekannten aus den zehn Gleichungen gegeben sind, so scheint der erforderliche Arbeitsaufwand nur dann gerechtfertigt zu sein, wenn die Bahnbestimmung auf Normalörtern beruht.

Diese praktischen Einwände hat Leuschner, wie folgt, bereits in seiner ersten Arbeit¹⁾ beseitigt:

1. Durch Beschränkung der Anzahl der Beobachtungen auf drei, das Minimum, welches zur Bahnbestimmung nothwendig ist. Hierdurch wird eine bedeutende Abkürzung der Rechnung erzielt, ohne dass man viel an Genauigkeit einbüsst.

2. Durch Verminderung der bei der Lösung des Problems zu bestimmenden Fundamentalgrössen von sechs auf vier. Diese Grössen bestehen a) einerseits in den oben genannten Beobachtungsgrössen zur Zeit der Epoche, nämlich den geocentrischen Coordinaten, deren Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, b) andererseits in den entsprechenden heliocentrischen rechtwinkligen Coordinaten und deren Geschwindigkeiten.

3. Durch eine kurze Methode der Bestimmung einer ersten Annäherung der Fundamentalgrössen a), wodurch die Lösung von Gleichungssystemen vermieden wird.

4. Durch eine kurze Methode der Lösung der in B) genannten Gleichung siebenten Grades.

5. Durch eine kurze Methode der Bestimmung der definitiven Werthe der Fundamentalgrössen b), aus denen die Elemente abgeleitet werden.

Die diesen Verbesserungen zu Grunde liegenden Principien werden im Laufe der Darstellung noch zum Vorschein kommen.

Wenn nun trotzdem Bauschinger²⁾, gestützt auf die von ihm angeführte Lagrange'sche Kritik³⁾ der Laplace'schen Methode — wonach diese letztere analytisch die einfachste Lösung des Problems sei, in der Anwendung aber keinen entsprechenden Nutzen gewähre, da es nicht gelinge, die Differentialquotienten der Coordinaten mit der nöthigen Sicherheit zu bestimmen — behauptet, dass jede Anwendung von Bearbeitungen des Problems auf Grund der Laplace'schen Methode „von der Mühseligkeit der Rechnung und von der geringen Sicherheit des Resultats den Beweis erbringt“, so muss darauf hingewiesen werden, dass diese Beurtheilung der beiden einzigen bisher ausführlich veröffentlichten Beispiele⁴⁾ des Leuschner'schen Verfahrens durchaus unzutreffend ist. Hierbei mag noch erwähnt werden, dass Lagrange seine Kritik durchaus nicht erläutert hat, sondern nur als Ansicht in einem an Laplace gerichteten Briefe ausspricht. —

Was nun den Einfluss der aus drei Beobachtungen berechneten Differentialquotienten der Coordinaten auf die Genauigkeit der Bahnbestimmung anbetrifft, so zeigt Bruns und beweist Poincaré ausführlich, dass die Genauigkeit der auf dem Laplace'schen Princip beruhenden Methoden um eine Grössenordnung höher ist, als die Genauigkeit der Gauss'schen Methode, wenn die Epoche mit dem Mittel der Beobachtungszeiten zusammenfallend gewählt wird; und dass die Genauigkeit der Methoden die gleiche ist, wenn man das Datum der mittleren Beobachtung als Epoche wählt.

¹⁾ Publications of the Lick Observatory, Vol. VII, part. 1.

²⁾ Die Bahnbestimmung der Himmelskörper, Leipzig 1906. cfr. S. 394.

³⁾ Oeuvres, Vol. XIV, p. 108.

⁴⁾ Publications of the Lick Observatory, Vol. VII, parts 2 and 3.

Nun hat zwar die Leuschner'sche Methode für den Kometen *a* 1904, dessen Bahn sich später als parabolisch herausstellte, aus kurzen Zwischenzeiten elliptische Elemente ergeben¹⁾, aber der Grund dieses scheinbaren Fehlschlages bestand nicht in der Ungenauigkeit der Differentialquotienten der Coordinaten, sondern darin, dass gemäss der ursprünglichen Fassung der Leuschner'schen Methoden die Lösung eine allgemeine war, und dass die Bahn in dem gegebenen Falle mittelst irgend welcher allgemeiner Methoden überhaupt unbestimmbar war²⁾. Es ist naturgemäss auch nicht zulässig, Resultate, die sich einerseits ohne und andererseits mit Voraussetzung über die Excentricität ergeben, mit einander zu vergleichen und danach die Methoden zu beurtheilen. Vergleichbar sind nur entsprechende Methoden, also entweder nur parabolische oder nur allgemeine etc.

Bedeutete nun das Verfahren Leuschner's schon in seiner ursprünglichen Fassung, wie auch Poincaré³⁾ bestätigt, einen bedeutenden Fortschritt in der Bahnbestimmung, so lassen seine neuesten Verbesserungen und die Formulirung⁴⁾, welche hier zur Darstellung kommt, wohl kaum etwas zu wünschen übrig⁵⁾.

Die hauptsächlichsten dieser Verbesserungen sind:

1. Die Bahn kann mit oder ohne Voraussetzung über die Excentricität berechnet werden.
2. Der Einfluss der Aberration und der Parallaxe kann vollständig in der ersten Annäherung eliminirt werden.
3. Es sind Kriterien gegeben, nach denen die Richtigkeit der Annahme einer Parabel oder einer Kreisbahn bereits im Laufe der Rechnung entschieden werden kann.
4. Man kann im Laufe der Rechnung bequem von der Parabel oder Kreisbahn auf eine allgemeine Bahn übergehen.
5. Durch Einführung geschlossener Ausdrücke kann die Bahnverbesserung auf Zwischenzeiten von beliebiger Länge ausgedehnt werden.
6. Man kann bequem die Grenzen der möglichen Umlaufszeit bestimmen und somit die Sicherheit der Bahnbestimmung beurtheilen.
7. Für stark gestörte Körper kann man die Störungen in der ersten Annäherung berücksichtigen und erhält somit osculirende Elemente.
8. Die Allgemeinheit der Methoden gestattet deren Anwendung ohne Unterschied auf Kometen, Planeten oder Trabanten.

Ehe zur Ableitung der Formeln geschritten wird, mag noch daran erinnert werden, dass naturgemäss erste Bahnbestimmungen nur für kurze Zwischenzeiten in Betracht kommen. Hierzu dienen die im Folgenden im I. Abschnitte gegebenen directen Methoden. Die im II. Abschnitte entwickelten Methoden der Bahnverbesserung sind auf Zwischenzeiten beliebiger Länge angepasst.

¹⁾ Lick Observatory Bulletins, No. 54 and 55.

²⁾ Popular Astronomy, On the General Applicability of the Short Method etc., Vol. XIII, p. 302.

³⁾ Bulletin Astronomique, t. XXIII, p. 184.

⁴⁾ Publications of the Lick Observatory, Vol. VII, part 7.

⁵⁾ Die bisher auf dem Student's-Observatory in Berkeley gemachten Anwendungen, deren Resultate in den Bulletins of the Lick Observatory, No. 73 et sequ. veröffentlicht sind, haben für dieselben Zwischenzeiten genauere Elemente ergeben als andere Methoden. Man vergleiche auch die Arbeit von Prof. R. T. Crawford: „Applications of Leuschner's Short Methods of Determining Orbits, Publications of the Lick Observatory, Vol. VII, part 8“.

I. Directe Methoden.

Allgemeines.

Ableitung der Differentialquotienten der beobachteten Coordinaten.

Es seien α_0 und δ_0 die beobachtete Rectascension und Declination in Bezug auf den Erdort zur Zeit der Ausgangsepoche t_0 , welche mit der Beobachtungszeit des mittleren der drei gegebenen Oerter zusammenfallend gewählt werden soll, so daß also $t_0 = t_2$; $\alpha_0 = \alpha_2$; $\delta_0 = \delta_2$ ist. Ferner seien α', δ' und α'', δ'' die entsprechenden Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, und zwar soll als Zeiteinheit dieser und der höheren Differentialquotienten durchweg der mittlere Sonnentag, dividirt durch die Gauss'sche Constante k , eingeführt werden. Der Einfluss der Correctionen für Parallaxe und Aberration kann im Laufe der Bahnbestimmung vollständig eliminirt werden und braucht daher vorläufig nicht berücksichtigt zu werden. Jedoch sind die beobachteten Coordinaten auf den jeweiligen Jahresanfang und zwar mit Einschluss der Fixsternaberration reducirt gedacht. Dann hat man nach dem Taylor'schen Lehrsatz für die zur Beobachtungszeit t gehörige Rectascension α :

$$\alpha - \alpha_0 = \pm \tau \alpha' + \frac{\tau^2}{2} \alpha'' \pm \frac{\tau^3}{6} \alpha''' + \frac{\tau^4}{24} \alpha^{iv} \dots, \dots \dots (1)$$

und eine ähnliche Reihe für δ , wobei gemäß der angenommenen Zeiteinheit $\pm \tau$ die mit der Gauss'schen Constante multiplicirte Zwischenzeit darstellt. Die Zwischenzeit wird immer positiv angesetzt, so dass in der Gleichung (1) für Beobachtungszeiten, welche der Ausgangsepoche $t_2 = t_0$ folgen oder vorausgehen, bezüglich das obere oder untere Zeichen gilt.

Wendet man die Gleichung (1) einmal auf die Rectascensionen und dann auf die Declinationen der Beobachtungszeiten t_1 und t_3 an und setzt:

$$\tau_1 = k(t_3 - t_2), \quad \tau_3 = k(t_2 - t_1),$$

so kann man daraus mit Vernachlässigung der dritten und höheren Differentialquotienten α''', δ''' etc., angenäherte Werthe einerseits von α', α'' , andererseits von δ', δ'' berechnen. Um jedoch den dabei begangenen Fehler beurtheilen zu können, soll zunächst in α sowie δ das mit α''', δ''' multiplicirte Glied beibehalten und als bekannt vorausgesetzt werden.

Dividirt man dann noch jede Gleichung durch den zugehörigen Werth von τ , so erhält man z. B. für die Rectascensionen:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \frac{\tau_3}{2} \alpha'' &= \alpha'_3 - \frac{\tau_3^2}{6} \alpha''' \\ \alpha' + \frac{\tau_1}{2} \alpha'' &= \alpha'_1 - \frac{\tau_1^2}{6} \alpha''' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

wobei gesetzt worden ist:

$$\alpha'_3 = \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{\tau_3}, \quad \alpha'_1 = \frac{\alpha_3 - \alpha_0}{\tau_1} \dots \dots \dots (3a)$$

Hierbei soll noch die Bestimmung getroffen werden, dass die Differenzen der Rectascensionen in Bogensecunden anzusetzen sind.

Die Auflösung dieser Gleichungen nach α' und α'' , etwa mit Anwendung von Determinanten, ergibt durch Einführung von:

$$\tau_2 = k(t_3 - t_1), \quad \alpha'_0 = \frac{\tau_1 \alpha'_3 + \tau_3 \alpha'_1}{\tau_2}, \quad \alpha''_0 = 2 \frac{\alpha'_1 - \alpha'_3}{\tau_2} \dots \dots \dots (4a)$$

die folgenden Ausdrücke für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung in Rectascension zur Zeit der Ausgangsepoche $t_0 = t_2$:

$$\alpha' = \alpha'_0 - \frac{\tau_1 \tau_3}{6} \alpha''', \quad \alpha'' = \alpha''_0 + (\tau_3 - \tau_1) \frac{\alpha'''}{3} \quad (5a)$$

In ähnlicher Weise erhält man aus den Declinationen:

$$\delta'_3 = \frac{\delta_0 - \delta_1}{\tau_3}, \quad \delta'_1 = \frac{\delta_3 - \delta_0}{\tau_1} \quad (3b)$$

$$\delta'_0 = \frac{\tau_1 \delta'_3 + \tau_3 \delta'_1}{\tau_2}, \quad \delta''_0 = 2 \frac{\delta'_1 - \delta'_3}{\tau_2} \quad (4b)$$

$$\delta' = \delta'_0 - \frac{\tau_1 \tau_3}{6} \delta''', \quad \delta'' = \delta''_0 + (\tau_3 - \tau_1) \frac{\delta'''}{3} \quad (5b)$$

Diese Differentialcoëfficienten lassen sich auch bequem mit Anwendung verschiedener Formeln der Interpolation und der numerischen Differentiation ableiten.

Angenäherte Werthe der später zur Bahnbestimmung nothwendigen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in den geocentrischen Coordinaten lassen sich aus drei Beobachtungen aus den Gleichungen (4a, b) mit Heranziehung der Gleichungen (3a, b) berechnen. Vergleicht man nun die Gleichungen (4a, b) und (5a, b) mit einander, so ergibt sich, dass der dabei in den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen begangene Fehler der Hauptsache nach von der zweiten, beziehungsweise ersten Ordnung, in Bezug auf die Zwischenzeiten, multiplicirt mit dem dritten Differentialquotienten, ist. Für gleiche Zwischenzeiten verschwindet das mit $(\tau_3 - \tau_1)$ multiplicirte Glied in den Beschleunigungen (Gleichung 5a, b), und der Fehler ist dann überhaupt nur von der zweiten Ordnung in Bezug auf die Zwischenzeiten. Wenn man die Epoche mit dem Mittel der Beobachtungszeiten zusammenfallend wählt, so kann in ähnlicher Weise wie oben gezeigt werden, dass der Fehler überhaupt immer nur von der zweiten Ordnung in Bezug auf die Zwischenzeiten ist. Für gleiche Zwischenzeiten werden diese Resultate natürlich für die beiden Arten der Wahl der Epoche identisch. Wie wir später sehen werden, wird schliesslich der Fehler in der geocentrischen Distanz, und also in der Bahnbestimmung von derselben Ordnung sein, wie der Fehler in den zu Grunde gelegten Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Ausser den Zwischenzeiten hängt aber der Fehler, wie schon erwähnt, auch noch von den dritten (und höheren) Differentialquotienten ab. Wie diese Differentialquotienten von der geocentrischen Bewegung abhängen, lässt sich bequem mit Hülfe der Formeln der numerischen Differentiation, wie sie zum Theil in der fünfundneunzigsten Vorlesung, S. 533, zur Behandlung kommen, beurtheilen. Da nun aber specielle Formeln der numerischen Differentiation zur Berechnung der später zur Bahnbestimmung heranzuziehenden Geschwindigkeiten der rechtwinkligen Sonnencoordinaten erforderlich sein werden, so sollen diese Formeln hier zunächst kurz abgeleitet werden.

Nimmt man das Mittel der Formeln (3) und (4) der elften Vorlesung, so bekommt man:

$$f(a+n) = f(a) + n f'(a) + \frac{n^2}{2} f''(a) + \frac{n^3 - n}{6} f'''(a) + \frac{n^4 - n^2}{24} f^{iv}(a) \quad (6)$$

Setzt man gemäss der ersten Columnne, Fig. 15, für das Intervall statt eins seinen Werth w ein, so lässt sich das Argument $(a+n)$ allgemein schreiben:

$$l = a + [i+n]w \quad (7)$$

wobei i eine ganze und n eine gebrochene positive oder negative Zahl darstellt. Somit ist auch:

$$dl = w dn \quad (8)$$

wenn man von einem bestimmten Anfangswerthe $(a + iw)$ ausgeht. Differentiirt man nun die Formel (6) nach l , so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (7) und (8):

$$w \frac{df(l)}{dl} = f'(a + iw) + \frac{3n^2 - 1}{6} f'''(a + iw) \dots + n \left[f''(a + iw) + \frac{2n^2 - 1}{12} f^{iv}(a + iw) + \dots \right]. \quad (9)$$

Anstatt des Ausdruckes (7) kann man das Argument l auch schreiben:

$$l = a + \left[i + \frac{1}{2} + m \right] w \quad \dots \quad (7')$$

wobei

$$n = m + \frac{1}{2}$$

gesetzt ist. Führt man diesen Werth von n in die Gleichung (6) ein, so ergibt sich mit Rücksicht auf

$$f^{2d}(a + iw) = f^{2d}\left(a + \left[i + \frac{1}{2}\right]w\right) - \frac{1}{2} f^{2d+1}\left(a + \left[i + \frac{1}{2}\right]w\right),$$

wobei gemäss der üblichen Bezeichnungsweise $f^{2d}\left(a + \left[i + \frac{1}{2}\right]w\right)$ das Mittel zweier auf einander folgenden geraden Differenzen ist:

$$f(l) = f\left(a + \left[i + \frac{1}{2}\right]w\right) + m f'\left(a + \left[i + \frac{1}{2}\right]w\right) + \frac{m^2 - \left[\frac{1}{2}\right]^2}{2} f''\left(a + \left[i + \frac{1}{2}\right]w\right) + \dots + \frac{m\left(m^2 - \left[\frac{1}{2}\right]^2\right)}{6} f'''(a + \left[i + \frac{1}{2}\right]w) + \frac{\left(m^2 - \left[\frac{1}{2}\right]^2\right)\left(m^2 - \left[\frac{3}{2}\right]^2\right)}{24} f^{iv}\left(a + \left[i + \frac{1}{2}\right]w\right) + \dots \quad (10)$$

Da nun nach Gleichung (7'):

$$dl = m dw,$$

so ergibt die Differentiation der Gleichung (10) nach l :

$$w \frac{df(l)}{dl} = f'\left(a + \left[i + \frac{1}{2}\right]w\right) + \frac{3m^2 - 1}{6} f'''(a + \left[i + \frac{1}{2}\right]w) \dots + m \left[f''\left(a + \left[i + \frac{1}{2}\right]w\right) + \frac{2m^2 - 5}{12} f^{iv}\left(a + \left[i + \frac{1}{2}\right]w\right) + \dots \right] \quad (11)$$

Wendet man die Gleichung (9) bezw. (11) auf Fälle an, wo das Argument des Differentialquotienten in der Nähe eines Argumentwerthes der Tafel bezw. in der Nähe der Mitte zweier Argumentwerthe liegt, so kann man für n und m immer positive oder negative Werthe, welche numerisch kleiner als 0,25 sind, wählen. Damit erzielt man aber auch ein rasches Fallen der Coëfficienten. Nach Berechnungen von Professor F. K. Ginzel hat v. Oppolzer dem zweiten Bande seines Lehrbuches der Bahnbestimmung Tafeln einverleibt, welche die Zahlenwerthe der Coëfficienten in den Reihen für den ersten und zweiten Differentialquotienten in grosser Ausdehnung — bis zu den Coëfficienten der zehnten Differenzen — mit den Argumenten n und m enthalten. Die Coëfficiententafeln, welche für den ersten Differentialquotienten gelten, sind im vorliegenden Werke als Tafel XIV (N Tafel) und Tafel XV (M Tafel) reproducirt worden. Die in den Tafeln gewählte Bezeichnung der Coëfficienten erklärt sich aus der folgenden Schreibweise der Formeln (9) und (11), wobei auf der linken Seite gleich die Gauss'sche Constante als Factor eingeführt ist, um die Differentialquotienten auf die gewählte Zeiteinheit von $\frac{1}{k}$ mittleren Sonnentagen zu reduciren:

$$\left. \begin{aligned} kw \frac{df(l)}{dl} &= f^n(a + iw) + N_1^3(n)f'''(a + iw) + \dots n[f''(a + iw) + N_1^4(n)f^{iv}(a + iw)\dots] \\ l &= a + [i + n]w = t_0 \dots \dots \dots \\ kw \frac{df(l)}{dl} &= f\left(a + \left[i + \frac{1}{2}\right]w\right) + M_1^3(m)f'''(a + \left[i + \frac{1}{2}\right]w)\dots + \\ &\quad m\left[f''(a + \left[i + \frac{1}{2}\right]w) + M_1^4(m)f^{iv}(a + \left[i + \frac{1}{2}\right]w)\dots\right] \\ l &= a + \left[i + \frac{1}{2} + m\right]w = t_0 \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Man benutzt die n - oder m -Formel zur Berechnung der Geschwindigkeiten der rechtwinkligen Sonnencoordinaten aus den Differenzwerthen einer Sonnenephemeride, je nachdem $l = t_0$ einem tabulirten Argumente oder der Mitte zweier Argumente am nächsten liegt; m oder n sind dann immer numerisch $< 0,25$. Die $N(n)$ - und $M(m)$ -Coëfficienten sind den Tafeln XIV und XV zu entnehmen. Man kann die Differenzen für ein halb-, ein-, zwei-, oder mehrtägige Intervalle entnehmen. Für einhalb tägige Intervalle ist $w = \frac{1}{2}$ und $\log \frac{1}{kw} = 2,065\,449$. Da für die Sonnencoordinaten $f(l) = X, Y, Z$,

so hat man $X', Y', Z' = \frac{df(l)}{dl}$, wobei sich der Werth von $\frac{df(l)}{dl}$ aus einer der Gleichungen (12) ergibt. Diese Geschwindigkeiten in den Sonnencoordinaten könnten leicht bei der Herstellung der astronomischen Jahrbücher mitberechnet werden. Geschähe dies in Zukunft, so würde dies zur weiteren Bequemlichkeit dieser Methoden beitragen.

Aus den Gleichungen (9) und (11) geht hervor, dass der erste Differentialquotient einer tabulirten Function der Hauptsache nach von der Grösse der ersten Differenz, dividirt durch das Intervall, ist. Durch weitere Differentiationen nach l findet sich leicht, dass der p te Differentialquotient, $\frac{d^p l}{dl^p}$, von der Grösse der p ten Differenz, $f^p(a + [i + n]w)$ etc.,

dividirt durch w^p ist. Hieraus kann man zunächst schliessen, dass die in (4a, b) vernachlässigten Differentialquotienten α''', δ''' in Einheiten des mittleren Sonnentages der Hauptsache nach gleich den dritten Differenzen f''' der beobachteten Coordinaten, dividirt durch die dritte Potenz der Durchschnittszwischenzeit w ist. Weil nun aber die Differentialquotienten in Einheiten von $\frac{1}{k}$ mittleren Sonnentagen ausgedrückt sind, so

sind α''', δ''' von der Grösse der dritten Differenz, dividirt durch $(kw)^3 = \tau^3$. Da ferner, wie oben gezeigt worden ist, der Fehler in den Geschwindigkeiten α'_0, δ'_0 und in den Beschleunigungen α''_0, δ''_0 der Hauptsache nach von der Grösse $\tau^2 \frac{\alpha'''}{6}, \tau^2 \frac{\delta'''}{6}$, bzw. $\tau \frac{\alpha'''}{3}, \tau \frac{\delta'''}{3}$ ist, so ist also der Fehler der aus drei Beobachtungen berechneten Werthe von

$\alpha'_0, \delta'_0; \alpha''_0, \delta''_0$ der Hauptsache nach numerisch gleich $\frac{f'''}{6\tau}$, bzw. $\frac{f'''}{3\tau^2}$. Für gleiche Zwischenzeiten aber wird der Fehler in α''_0, δ''_0 , wie oben gezeigt wurde, von den f''' unabhängig und wird, wie leicht ersichtlich ist¹⁾, von der Grösse $\frac{f^{iv}}{12\tau^2}$, also im Allgemeinen

um eine Differenzenordnung niedriger als bei ungleichen Zwischenzeiten. Bedenkt man nun, dass die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in der angenommenen Zeit-

¹⁾ Indem man die α^{iv}, δ^{iv} in der Ableitung der Formeln (5a, b) einschliesst. cf. S. 458.

einheit von $\frac{1}{k}$ mittleren Sonnentagen von der Grösse $\frac{f^I}{\tau}$, bezw. $\frac{f^{II}}{\tau^2}$ sind, und vergleicht man diese Werte mit den entsprechenden Fehlern $\frac{f^{III}}{6\tau}$, bezw. $\frac{f^{III}}{3\tau^2}$ — oder statt des letzteren $\frac{f^{IV}}{12\tau^2}$ für gleiche Zwischenzeiten — so ersieht man sofort, dass im Falle von drei Beobachtungen die Genauigkeit der Geschwindigkeiten desto grösser ist, je kleiner die f^{III} im Vergleich zu den f^I sind. Ebenso ist die Genauigkeit der Beschleunigungen desto grösser, je kleiner die $\frac{f^{III}}{3}$ — oder bei gleichen Zwischenzeiten die $\frac{f^{IV}}{12}$ — im Vergleich zu den f^{II} sind. Bei gegebenen Zwischenzeiten hängt also die Genauigkeit der Bahnbestimmung, abgesehen von den Beobachtungsfehlern, ausschliesslich von dem Fallen der Differenzen ab. Welchen Einfluss die Länge der Zwischenzeit und die Beobachtungsfehler ausüben, wird auf S. 456 bezw. S. 457 erörtert werden. Da drei Beobachtungen die erste und zweite Differenz direct ergeben, so kann man nach dem Gange dieser beiden ersten (auch bei ungleichen Zwischenzeiten) den Gang, d. h. die relative Grösse der vernachlässigten Differenzen, und somit die etwaige numerische Grösse der Fehler von vornherein beurtheilen. Im Allgemeinen steht ein rasches Fallen der Differenzen nicht zu erwarten, wenn schon die f^{II} mit den f^I an Grösse vergleichbar sind. Man wählt dann, wenn möglich, kleinere Zwischenzeiten (s. unten) oder man berechnet die Bahn aus mehr als drei Beobachtungen. (Siehe Anmerkung 1, S. 456.)

Fallen also die Differenzen verhältnissmässig rasch, so hat die Vernachlässigung der dritten und höheren Differenzen oder Differentialquotienten durchaus keinen schädigenden Einfluss auf die Genauigkeit der Bahn, und diese ergibt sich direct in der ersten Annäherung aus den im Folgenden abgeleiteten Formeln. Fallen die Differenzen nur langsam, so gestatten die im II. Abschnitt (s. S. 477) gegebenen Methoden die Bahnverbesserung auf ganz bequeme Weise. Nur wenn die höheren Differenzen mit den f^I und f^{II} an Grösse vergleichbar sind, was man etwa schliessen kann, wenn schon die f^{II} die Grösse der f^I erreichen, ist selbst eine angenäherte Bahnbestimmung auf directem Wege aus den gegebenen Beobachtungen nicht möglich. Dann aber kommt Folgendes in Betracht. Unter Annahme des mittleren Sonnentages als Zeiteinheit sei w_1 die Durchschnittszwischenzeit für drei gegebene Beobachtungen, w_2 dieselbe Grösse für drei andere Beobachtungen. Dann ist nach dem Vorhergehenden in derselben Zeiteinheit:

$$\frac{df^p(l)}{dl^p} = \frac{1}{w_1^p} f^p(a + [i + n]w_1) + \dots = \frac{1}{w_2^p} f^p(a + [i + n]w_2) + \dots$$

Nun sei $w_1 < w_2$. Dann kann man schreiben:

$$f^p(a + [i + n]w_1) = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^p f^p(a + [i + n]w_2) + \dots$$

Diese Gleichung bedeutet, dass für die Zwischenzeit w_1 die dritten Differenzen $\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^3$ mal kleiner sind als die dritten Differenzen für w_2 , während die ersten Differenzen nur $\frac{w_1}{w_2}$ mal kleiner sind als die ersten Differenzen für w_2 . Daraus folgt aber, dass, wenn es für gewählte Zwischenzeiten w_2 wirklich vorkommen sollte, dass die Differenzen nicht genügend rasch fallen, in jedem Falle, zunächst wenigstens theoretisch, Beobachtungen mit kleineren Zwischenzeiten w_1 gewählt werden können, für welche der durch Vernachlässigung der dritten Differenzen begangene Fehler unmerklich ist, oder wenigstens eine Grösse nicht

erreicht, welche, wie bei den ursprünglichen Zwischenzeiten, eine Bahnbestimmung unmöglich macht. Aehnliche Betrachtungen könnte man für die vernachlässigten vierten und höheren Differenzen anstellen. Hier ist nun in Betracht zu ziehen, dass die in den Gleichungen (3a, b), (4a, b) auftretenden Differenzen directen Aufschluss darüber geben, zu wie viel Stellen die Werthe α'_0 , δ'_0 , α''_0 , δ''_0 und daher auch die Bahn auf Grund der gegebenen Beobachtungen innerhalb der Beobachtungsfehler bestimmbar ist. Da nun aber für w_1 auch die numerischen Werthe der ersten und zweiten Differenzen im Vergleich zu w_2 kleiner werden, so ist die Bahn für w_1 zu weniger Stellen genau bestimmbar als für w_2 . Die Beobachtungen werden jedoch genau repräsentirt. Die Bahn kann dann, wenn nöthig, nach den Formeln des II. Abschnittes leicht auf Grund längerer Zwischenzeiten verbessert werden. In der Praxis wird man kleinere Zwischenzeiten nur dann nicht wählen können, wenn derartige Beobachtungen nicht erhältlich sind. In diesem Falle, der wohl theoretisch denkbar ist, aber in der Praxis kaum zu erwarten steht, bestimme man α' , δ' , α'' , δ'' aus mehr als drei Beobachtungen¹⁾.

¹⁾ Die Berechnung von α' , δ' , α'' , δ'' aus mehr als drei Beobachtungen kommt nur dann in Betracht, wenn in dem oben erörterten Falle Beobachtungen mit kleineren Zwischenzeiten nicht erhältlich sind, oder wenn man eine directe Bahnbestimmung auf Grund derartiger langer Zwischenzeiten zwischen der ersten und mittleren, sowie der mittleren und letzten Beobachtung machen will, dass der durch die Vernachlässigung der höheren Differenzen entstehende Fehler von der Ordnung der entsprechenden Werthe der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ist. Für eine ungerade Zahl von Beobachtungen berechnet man dann α' , δ' , α'' , δ'' , indem man zunächst den mittleren Sonntag als Zeiteinheit wählt, wie folgt: Man hat z. B. für die Rectascensionen, ähnlich der Gleichung (1), S. 451,

$$\alpha_i = \alpha_0 + \frac{t_i - t_0}{1} \alpha' + \frac{(t_i - t_0)^2}{2} \alpha'' + \frac{(t_i - t_0)^3}{6} \alpha''' + \dots \quad (1)$$

wobei das Datum der mittleren Beobachtung als Epoche gewählt ist. Aus $(2n + 1)$ Beobachtungen können dann $2n$ Differentialquotienten bestimmt werden. Zunächst bestimme man α'_0 , α''_0 aus der ersten, mittleren und letzten Beobachtung nach den Formeln (3a), (4a). Seien dann $\alpha'_0 + \partial_1 \alpha'_0$, $\alpha''_0 + \partial_1 \alpha''_0$ die aus fünf Beobachtungen, $\alpha'_0 + \partial_1 \alpha'_0 + \partial_2 \alpha'_0$, $\alpha''_0 + \partial_1 \alpha''_0 + \partial_2 \alpha''_0$, die aus sieben Beobachtungen erhaltenen Werthe von α' , α'' , dann ist:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \alpha'_0 + \partial_1 \alpha'_0 + \partial_2 \alpha'_0 + \dots \\ \alpha'' &= \alpha''_0 + \partial_1 \alpha''_0 + \partial_2 \alpha''_0 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

und allgemein:

$$\alpha^m = \alpha^m_0 + \partial_1 \alpha^m_0 + \partial_2 \alpha^m_0 + \dots$$

Dabei werden folgende Differentialquotienten vernachlässigt: höher als der zweite bei Benutzung von drei, höher als der vierte bei Benutzung von fünf Beobachtungen u. s. w. Es ist also für drei Beobachtungen:

$$\alpha^{IV}_0 = \alpha^{IV}_0 = \alpha^{IV}_0 = \alpha^{IV}_0 = \dots = 0,$$

und für fünf Beobachtungen:

$$\partial_1 \alpha^{IV}_0 = \partial_1 \alpha^{IV}_0 = \dots = 0, \text{ u. s. w.}$$

Für fünf Beobachtungen kann man also gemäß den Formeln (1) und (2) schreiben:

$$\alpha_i = \alpha_0 + (t_i - t_0) [\alpha'_0 + \partial_1 \alpha'_0] + \frac{(t_i - t_0)^2}{2} [\alpha''_0 + \partial_1 \alpha''_0] + \frac{(t_i - t_0)^3}{6} \partial_1 \alpha'''_0 + \frac{(t_i - t_0)^4}{24} \partial_1 \alpha^{IV}_0 \dots \quad (3)$$

wobei, nach der Zeit geordnet, $i = 1, 2, 4, 5$ und $\alpha_0 = \alpha_3$ ist. Setzt man nun:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i - \left[\alpha_0 + (t_i - t_0) \alpha'_0 + \frac{(t_i - t_0)^2}{2} \alpha''_0 \right] &= \partial \alpha_i = n_{i,\alpha}, \\ w_\alpha &= \partial_1 \alpha^{IV}_0, \quad x_\alpha = \partial_1 \alpha'''_0, \quad y_\alpha = \partial_1 \alpha''_0, \quad z_\alpha = \partial_1 \alpha'_0, \\ \alpha_i &= \frac{(t_i - t_0)^3}{24}, \quad b_i = \frac{(t_i - t_0)^2}{6}, \quad c_i = \frac{t_i - t_0}{2}, \quad d_i = 1, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

so ergeben sich aus Gleichung (3) die folgenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} a_1 w_\alpha + b_1 x_\alpha + c_1 y_\alpha + z_\alpha &= 0 \dots \dots (a) \\ a_2 w_\alpha + b_2 x_\alpha + c_2 y_\alpha + z_\alpha &= n_{2,\alpha} \dots \dots (b) \\ a_4 w_\alpha + b_4 x_\alpha + c_4 y_\alpha + z_\alpha &= n_{4,\alpha} \dots \dots (c) \\ a_5 w_\alpha + b_5 x_\alpha + c_5 y_\alpha + z_\alpha &= 0 \dots \dots (d) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Jetzt soll nun noch der in $\alpha'_0, \delta'_0, \alpha''_0, \delta''_0$ durch Vernachlässigung der höheren Differenzen verursachte Fehler mit den in denselben Grössen durch die Beobachtungsfehler verursachten Fehlern verglichen werden. Zu diesem Zwecke kann z. B. folgendes Differenzschema, in welchem der Einfachheit halber das Intervall w constant gewählt ist, für 5 gegebene Rectascensionen $\alpha_1 + e_1, \alpha_2 + e_2$ etc., wo e_1, e_2 etc. die Beobachtungsfehler darstellen und die α durch Functionswerthe ausgedrückt sind, dienen:

$$\begin{array}{llll} f(a + [i - 2]w) + e_1 & f'(a + [i - \frac{3}{2}]w) + e_2 - e_1 & f''(a + [i - 1]w) + e_3 - 2e_2 + e_1 & \\ f(a + [i - 1]w) + e_2 & f'(a + [i - \frac{1}{2}]w) + e_3 - e_2 & f''(a + iw) + e_4 - 2e_3 + e_2 & \\ f(a + iw) + e_3 & f'(a + [\frac{1}{2}]w) + e_4 - e_3 & f''(a + [i + 1]w) + e_5 - 2e_4 + e_3 & \\ f(a + [i + 1]w) + e_4 & f'(a + [i + \frac{3}{2}]w) + e_5 - e_4 & & \\ f(a + [i + 2]w) + e_5 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} f'''(a + [i - \frac{1}{2}]w) + e_4 - 3e_3 + 3e_2 - e_1 & f^{IV}(a + iw) + e_5 - 4e_4 + 6e_3 - 4e_2 + e_1 \\ f'''(a + [i + \frac{1}{2}]w) + e_5 - 3e_4 + 3e_3 - e_2 & \end{array}$$

Bestimmt man nun $w^2 \frac{d^2 f(l)}{dl^2}$ durch Differentiation der Gleichung (9) und setzt dann in

Da nur die Unbekannten y und z schliesslich erforderlich sind, so braucht man x und w nicht zu berechnen. Aehnlich wie bei der Gauss'schen Methode der Elimination erhält man mit Weglassung des Subscriptes α aus der ersten der Gleichungen (5):

$$w = -\frac{b_1}{a_1}x - \frac{c_1}{a_1}y - \frac{1}{a_1}z \dots \dots \dots (6)$$

Eliminirt man mit Hülfe von Gleichung (6) w aus den drei letzten der Gleichungen (5) und setzt:

$$p_i - \frac{a_i}{a_1}p_1 = [p_i.1]; \quad p_i = b_i, c_i, 1; \quad i = 2, 4, 5 \dots \dots \dots (7)$$

so ergiebt sich:

$$\left. \begin{array}{l} [b_2.1]x + [c_2.1]y + [1_2.1]z = n_2 \dots \dots (e) \\ [b_4.1]x + [c_4.1]y + [1_4.1]z = n_4 \dots \dots (f) \\ [b_5.1]x + [c_5.1]y + [1_5.1]z = 0 \dots \dots (g) \end{array} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Eliminirt man weiter die Unbekannte x aus den ersten beiden dieser Gleichungen mit Hülfe der letzten und setzt:

$$[p_i.1] - \frac{[b_i.1]}{[b_5.1]}[p_5.1] = [p_i.2]; \quad p_i = c_i, 1; \quad i = 2, 4 \dots \dots \dots (9)$$

so erhält man die folgenden Gleichungen für y und z :

$$[c_2.2]y + [1_2.2]z = n_2; \quad [c_4.2]y + [1_4.2]z = n_4 \dots \dots \dots (10)$$

und aus diesen:

$$y = \frac{n_2[1_4.2] - n_4[1_2.2]}{[c_2.2][1_4.2] - [c_4.2][1_2.2]}; \quad z = \frac{n_4[c_2.2] - n_2[c_4.2]}{[c_2.2][1_4.2] - [c_4.2][1_2.2]} \dots \dots \dots (11)$$

In der Anwendung ist diese Art der Lösung ausserordentlich einfach. Ganz ähnlich vollzieht sich die Lösung für die Declinationen. Der Hauptvorzug dieser Lösung besteht darin, dass alle Coëfficienten der Gleichungen (5) etc., für die Rectascensionen numerisch identisch sind mit den entsprechenden für die Declinationen. Nach Berechnung der $[p_i.2]$ Coëfficienten aus dem Formelsystem (9) ergeben die Gleichungen (11) und (4) die Correctionen $\delta_1\alpha'_0, \delta_1\alpha''_0, \delta_1\delta'_0, \delta_1\delta''_0$ und die Gleichungen (2) die Werthe von $\alpha', \alpha'', \delta', \delta''$ wie folgt:

$$\alpha' = \alpha'_0 + \delta_{\alpha}; \quad \alpha'' = \alpha''_0 + \delta_{\alpha}; \quad \delta' = \delta'_0 + \delta_{\delta}; \quad \delta'' = \delta''_0 + \delta_{\delta} \dots \dots \dots (12)$$

wobei in Gleichung (11) für n_2, n_4 nach der ersten der Gleichungen (4), $n_{2,\alpha}, n_{4,\alpha}$ bzw. $n_{2,\delta}, n_{4,\delta}$ einzusetzen ist. Für fünf Beobachtungen stellt sich die ganze Rechnung wie folgt: Man rechne zunächst $\alpha'_0, \alpha''_0, \delta'_0, \delta''_0$ aus den Formeln (3a, b) und (4a, b), S. 451 u. 452; dann die a_i, b_i, c_i -Coëfficienten, sowie $n_{2,\alpha}, n_{4,\alpha}, n_{2,\delta}, n_{4,\delta}$ aus (4); dann die $[p_i.1]$ aus (7); dann die $[p_i.2]$ aus (9); dann $y_{\alpha}, z_{\alpha}, y_{\delta}, z_{\delta}$ aus (11) und $\alpha', \alpha'', \delta', \delta''$ aus (12).

In ähnlicher Weise kann man mit 7 oder einer grösseren ungeraden Zahl, oder auch mit einer geraden Zahl von Beobachtungen verfahren. Es erübrigt noch, die oben berechneten Werthe der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen durch Division von k , bzw. k^2 , auf die gewählte Zeiteinheit von $\frac{1}{k}$ mittleren Sonnentagen zu reduciren.

der Gleichung (9) und in dem soeben erhaltenen zweiten Differentialquotienten n gleich Null, so dass $l = a + iw$, so erhält man für die, der Rectascension α_3 entsprechende Epoche $(a + iw)$, wenn man noch $\frac{1}{k}$ mittlere Sonnentage als Zeiteinheit einführt:

$$\tau \frac{df(a+iw)}{d(a+iw)} = \tau \alpha' = f'(a+iw) - \frac{1}{6} f'''(a+iw) \dots$$

$$\tau^2 \frac{d^2 f(a+iw)}{d(a+iw)^2} = \tau^2 \alpha'' = f''(a+iw) - \frac{1}{12} f^{IV}(a+iw) \dots$$

Wendet man diese Formeln der numerischen Differentiation auf die im obigen Differenzschema enthaltenen fehlerhaften Differenzen an, so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \tau \alpha' &= f'(a+iw) - \frac{1}{6} f'''(a+iw) \dots + \frac{2}{3} (e_4 - e_2) - \frac{1}{12} (e_5 - e_1) \dots \dots \dots, \\ \tau^2 \alpha'' &= f''(a+iw) - \frac{1}{12} f^{IV}(a+iw) \dots + \frac{4}{3} (e_4 + e_2) - \frac{5}{2} e_3 - \frac{1}{12} (e_5 + e_1) \dots, \end{aligned} \right\} \dots \dots (13)$$

wo die Summe der Glieder, welche die e enthalten, die durch die Beobachtungsfehler in $\tau \alpha'$, $\tau^2 \alpha''$ verursachten Fehler darstellen. Es ist offenbar, dass, wenn diese Fehlersummen an Grösse mit den f''' oder f^{IV} vergleichbar sind, dann der Einschluss dieser Differenzen durch Heranziehung von 4 oder 5 Beobachtungen durchaus nutzlos sein würde. Im günstigsten Falle, wenn die Fehler constant sind, verschwinden die Fehlersummen, und dann gelten einfach die weiter oben angestellten Betrachtungen über die Genauigkeit der ersten und zweiten Differentialquotienten. Um den ungünstigsten Fall zu beurtheilen, sei angenommen, dass die e numerisch einander gleich, ihre Vorzeichen aber derartig sind, dass jeder Fehler in der einen oder anderen Summe vollauf zählt. Dann sind die Maximalfehler in $\tau \alpha'$ und $\tau^2 \alpha''$, die jedoch, wie aus den Fehlersummen in Gleichung (13) ersichtlich ist, nicht gleichzeitig bestehen können, $\frac{3}{2} e$ und $\frac{32}{6} e$. Benutzt man aber nur 3 Beobachtungen, so dass man $e_1 = e_5 = 0$ setzen kann, so sind die Maximalfehler $\frac{4}{3} e$ und $\frac{31}{6} e$. Für gleiche Zwischenzeiten sind diese Fehler nun mit den durch Vernachlässigung der höheren Differenzen verursachten Fehlern zu vergleichen. Vergleicht man also:

$$\text{in } \tau \alpha': \frac{1}{6} f'''(a+iw) \text{ mit } \frac{4}{3} e; \quad \text{in } \tau^2 \alpha'': \frac{1}{12} f^{IV}(a+iw) \text{ mit } \frac{31}{6} e,$$

so folgt, dass die Heranziehung von mehr als 3 Beobachtungen nutzlos ist, wenn:

$$f'''(a+iw) \leq 8 e; \quad f^{IV}(a+iw) < 62 e$$

ist. Wie zu erwarten stand, wird die Genauigkeit der Beschleunigungen am meisten durch die Beobachtungsfehler geschädigt, und kann die weitere Discussion der Geschwindigkeiten daher unterlassen werden. Um die Genauigkeit der Bahnbestimmung durch Einschluss von 5 Beobachtungen erhöhen zu können, müsste also für jede Bogensecunde in e die Differenz f^{IV} beträchtlich grösser als $62''$, also beträchtlich grösser als $1'$ sein. Bei Kometen vorzüglich sind indess die Beobachtungsfehler bedeutend grösser als $1''$. Für $e = 5''$ müsste f^{IV} beträchtlich grösser als $5'$ sein. Daher ist die Benutzung von 5 (oder mehr) Beobachtungen für directe Bahnbestimmungen nur bei längeren Intervallen, für welche die Differenzwerthe grösser sind, von Vortheil. Für ungleiche Zwischenzeiten wurde oben (S. 455) $\frac{f''''}{3 \tau^2}$ als Grösse des Fehlers in den Beschleunigungen α''_0 , δ''_0 gefunden. Also ist der Fehler in $\tau^2 \alpha''_0$, $\tau^2 \delta''_0$ etwa $\frac{f''''}{3}$. Vergleicht man diesen Fehler

mit dem durch die Beobachtungsfehler verursachten Maximalfehler $\frac{31}{6}e$, so ergibt sich, dass f''' beträchtlich grösser als $15.5e$ sein muss, um aus dem Einschluss der dritten Differenzen Vortheil ziehen zu können. Man könnte also in diesem Falle schon eher Nutzen aus dem Gebrauch von vier Beobachtungen ziehen; allein es ist vortheilhafter, auch bei ungleichen Zwischenzeiten, sich mit der aus der directen Lösung aus drei Beobachtungen ergebenden Bahn zu begnügen, und dieselbe, wenn nöthig, nach den Formeln des II. Abschnittes zu verbessern.

Fasst man die vorangehenden Betrachtungen zusammen, so ergibt sich, dass genügend genaue Werthe der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen für eine directe Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen sich aus den Formeln (4a, b) gewinnen lassen, solange für ungleiche Zwischenzeiten $\frac{f'''}{6}$ nicht die Grösse von f' und $\frac{f''}{3}$, oder für un-

gleiche Zwischenzeiten $\frac{f'''}{12}$, nicht die Grösse von f'' erreichen, was man aus der relativen

Grösse der f' und f'' beurtheilen kann. Anderenfalls lassen sich aber genügend genaue Anfangswerthe aus kleineren Zwischenzeiten bestimmen. Tritt aber eine Ausnahme für die kleinsten erhältlichen Zwischenzeiten ein, so zieht man am besten mehr als drei Beobachtungen zur Bahnbestimmung heran¹⁾. Ausserdem ist die Benutzung von fünf Beobachtungen zur directen Bahnbestimmung nur für längere Zwischenzeiten von Vortheil. Die ganze Tendenz dieser Methoden ist aber, die Zwischenzeiten, wenn möglich gleiche, so zu wählen, dass die Bahn direct bestimmt werden kann und dieselbe dann mit Benutzung der im II. Abschnitt gegebenen Methoden zu verbessern.

Bestimmung der geocentrischen Distanz und ihrer Geschwindigkeit.

Die Bestimmung der geocentrischen Distanz und ihrer Geschwindigkeit soll in der Weise vorgenommen werden, dass die Aberration und Parallaxe im Laufe der Rechnung eliminirt werden kann. Die erstere kann ohne weiteres berücksichtigt werden, die letztere durch Berechnung von Correctionsgliedern. Will man aber die Parallaxe vernachlässigen, so fallen die von ihr abhängigen Glieder fort. Das Princip der Elimination ist, dass die hier für die reducirte Epochenzeit abzuleitenden heliocentrischen rechtwinkligen Coordinaten x, y, z und deren Geschwindigkeiten x', y', z' , aus denen die Elemente abzuleiten sind, von dem Einfluss der Aberration und Parallaxe vollständig befreit sein sollen.

Zunächst seien die beobachteten Rectascensionen und Declinationen in der üblichen Weise mit Einschluss der Aberrationsglieder auf den Jahresanfang reducirt. Seien ferner X, Y, Z und X', Y', Z' die für den Jahresanfang interpolirten Sonnencoordinaten und deren Geschwindigkeiten zur Zeit der Epoche t_0 , d. h. zur Zeit t_2 der mittleren Beobachtung, dann hat man nach den in der dreizehnten Vorlesung aus einander gesetzten Principien der Aberration:

$$\xi = \varrho \cos \delta \cos \alpha = x + X, \dots \dots \dots (14)$$

wobei die heliocentrische Coordinate x der reducirten Epoche angehört. Dies Verfahren, die Aberration vollständig zu berücksichtigen, ist also dasselbe, welches gewöhnlich bei ersten Bahnbestimmungen angewandt wird. Nach Ermittlung der geocentrischen Distanz ist dann noch die beobachtete Epoche von der Aberrationszeit zu befreien.

Damit die Gleichung (14) streng richtig sei, müssen die darin enthaltenen Coordinaten des Körpers und der Sonne auf denselben Punkt der Erde bezogen sein, also z. B.

¹⁾ Vergleiche hierzu die Anmerkung 1, S. 456.

entweder auf den Beobachtungsort oder auf den Mittelpunkt der Erde. Differentiirt man nun aber die Gleichung (14) zwei Mal nach der in Einheiten von $\frac{1}{k}$ mittleren Sonnentagen ausgedrückten Zeit, so dass:

$$\xi'' = (\varrho \cos \delta \cos \alpha)'' = x'' + X'' \dots \dots \dots (15)$$

und eliminirt dann X'' auf Grund der Bewegungsgleichung der Sonne um die Erde, nämlich:

$$X'' = -\frac{X}{R^3} \dots \dots \dots (16)$$

wobei, da eine erste Bahnbestimmung höchstens sechsstellig ausgeführt wird, die (Erd + Mond)-Masse der Null gleichgesetzt worden ist, so ist, wie Bruns besonders in seiner oben citirten Abhandlung betont hat, zu bedenken, daß die Gleichung (16) sich auf die scheinbare Bewegung der Sonne um den Schwerpunkt des Erde-Mond-Systems bezieht. Daher müssen auch die auf die Erde bezogenen Coordinaten des Körpers in der Gleichung (15) auf denselben Schwerpunkt bezogen werden. Die in Betracht kommende Parallaxe ist also der Winkel, welchen die vom Körper nach dem Beobachtungsort und dem Schwerpunkt gezogenen Linien mit einander bilden. Alle auf den Schwerpunkt bezogenen Coordinaten sollen durchweg durch das Subscript m unterschieden werden. Die an die beobachteten Coordinaten α und δ anzubringenden Parallaxencorrectionen können dann als die Summe der Componenten zweier Verschiebungen aufgefasst werden, von denen die eine die gewöhnliche Parallaxe, die hier mit geocentrischer Parallaxe bezeichnet werden soll, ist, und von denen die andere durch den Winkel, welchen die vom Körper nach dem Erdcentrum und nach dem Schwerpunkt gezogenen Linien mit einander bilden, bestimmt ist. Bruns bezeichnet die auf den Schwerpunkt bezogenen Coordinaten als barycentrische Coordinaten, und danach soll die zweite der eben definirten Verschiebungen als barycentrische Parallaxe bezeichnet werden. Die Parallaxen in α und δ werden gewöhnlich mit p_α und p_δ bezeichnet¹⁾. Zur Unterscheidung der in Betracht kommenden Parallaxen sollen hier die Bezeichnungen $p_\alpha^g, p_\delta^g, p_\alpha^m, p_\delta^m$ für die geocentrische, beziehungsweise barycentrische Parallaxe gewählt werden; ϱ stellt, wie in der Gleichung (15), die geocentrische Distanz des Körpers dar. $p_\alpha \varrho, p_\delta \varrho$ nennt man gewöhnlich die Parallaxenfactoren.

Sind also α und δ die auf den Jahresanfang bezogenen Coordinaten in Bezug auf den Beobachtungsort und denkt man sich die Coordinaten des Körpers und der Sonne auf den Schwerpunkt bezogen, so hat man gemäss der Gleichungen (15) und (16) zu setzen:

$$\xi_m = \varrho_m \cos(\delta + p_\delta^g + p_\delta^m) \cos(\alpha + p_\alpha^g + p_\alpha^m) = x + X_m \dots \dots \dots (17)$$

Es sollen nun vorerst die Formeln zur Berechnung von p_α^m, p_δ^m abgeleitet werden. Seien dazu α_ζ und δ_ζ die einer Mondephemeride zu entnehmenden geocentrischen Coordinaten des Mondes und d_1 die Distanz des Schwerpunktes vom Erdcentrum, dann sind die rechtwinkligen Coordinaten des Erdcentrums in Bezug auf den Schwerpunkt:

$$\mathcal{A}_1 X = -d_1 \cos \delta_\zeta \cos \alpha_\zeta, \quad \mathcal{A}_1 Y = -d_1 \cos \delta_\zeta \sin \alpha_\zeta, \quad \mathcal{A}_1 Z = -d_1 \sin \delta_\zeta \dots \dots (18)$$

und folglich:

$$X_m = X + \mathcal{A}_1 X, \quad Y_m = Y + \mathcal{A}_1 Y, \quad Z_m = Z + \mathcal{A}_1 Z \dots \dots \dots (19)$$

wobei X, Y, Z wieder die geocentrischen Coordinaten der Sonne sind. Weiter erhält man für den Körper, ganz in derselben Weise wie die Gleichungen (8) der zwölften Vorlesung abgeleitet worden sind, wenn man die auf das Erdcentrum bezogenen Coordinaten durch das Subscript g unterscheidet:

¹⁾ Die Formeln für p_α und p_δ , die geocentrische Parallaxe in α und δ darstellend, finden sich in der zwölften Vorlesung, S. 107, Formeln II Ab.

$$\left. \begin{aligned} \varrho_m \cos(\delta_g + p_\delta^m) \cos(\alpha_g + p_\alpha^m) &= \varrho_g \cos \delta_g \cos \alpha_g + \mathcal{A}_1 X \\ \varrho_m \cos(\delta_g + p_\delta^m) \sin(\alpha_g + p_\alpha^m) &= \varrho_g \cos \delta_g \sin \alpha_g + \mathcal{A}_1 Y \\ \varrho_m \sin(\delta_g + p_\delta^m) &= \varrho_g \sin \delta_g + \mathcal{A}_1 Z \end{aligned} \right\} \dots \dots (20)$$

wobei $\mathcal{A}_1 X$, $\mathcal{A}_1 Y$, $\mathcal{A}_1 Z$ durch die Gleichungen (18) bestimmt sind. Aus diesen Gleichungen leitet man $p_\alpha^m = \alpha_m - \alpha_g$, $p_\delta^m = \delta_m - \delta_g$ in der üblichen Weise, wie folgt, ab: Addirt man die beiden ersten Gleichungen, einerseits nachdem die erste mit $-\sin \alpha_g$, die zweite mit $+\cos \alpha_g$, anderseits nachdem die erste mit $+\cos \alpha_g$, die zweite mit $+\sin \alpha_g$ multiplicirt worden ist, so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_m \cos(\delta_g + p_\delta^m) \sin p_\alpha^m &= -\sin \alpha_g \mathcal{A}_1 X + \cos \alpha_g \mathcal{A}_1 Y = d_1 \cos \delta_\odot \sin(\alpha_g - \alpha_\odot) \\ \varrho_m \cos(\delta_g + p_\delta^m) \cos p_\alpha^m &= \varrho_g \cos \delta_g + \cos \alpha_g \mathcal{A}_1 X + \sin \alpha_g \mathcal{A}_1 Y = \varrho_g \cos \delta_g - d_1 \cos \delta_\odot \cos(\alpha_g - \alpha_\odot) \end{aligned} \right\} (21)$$

oder auch, mit Vernachlässigung von Grössen zweiter Ordnung in Bezug auf die Parallaxen:

$$\varrho_m p_\alpha^m = \frac{d_1}{\sin 1''} \frac{\cos \delta_\odot}{\cos \delta_g} \sin(\alpha_g - \alpha_\odot) \dots \dots \dots (22)$$

$$\varrho_m \cos(\delta_g + p_\delta^m) = \varrho_g \cos \delta_g - d_1 \cos \delta_\odot \cos(\alpha_g - \alpha_\odot) \dots \dots \dots (23)$$

Aus dieser letzteren Gleichung ergibt sich in Verbindung mit der letzten der Gleichungen (20) in ähnlicher Weise wie oben:

$$\varrho_m p_\delta^m = \frac{d_1}{\sin 1''} \left\{ -\sin \delta_\odot \cos \delta_g + \cos \delta_\odot \sin \delta_g \cos(\alpha_g - \alpha_\odot) \right\} \dots \dots \dots (24)$$

Zur Bestimmung der Constante $\frac{d_1}{\sin 1''}$ hat man zunächst, wenn d die Distanz des Mondes von Erdcentrum in Einheiten der mittleren Entfernung der Sonne, π und π_1 die Aequatorialhorizontalparallaxen der Sonne und des Mondes, m und m_1 die Massen der Erde und des Mondes darstellen:

$$d_1 = d \frac{m_1}{m + m_1} = \frac{\pi}{\pi_1} \frac{\mu}{1 + \mu},$$

wobei μ das Verhältniss der Mondmasse zur Erdmasse ist. Setzt man mit Newcomb¹⁾ $\pi_1 = 57' 2''.68$, $\mu = \frac{1}{81.45}$, und mit Hinks²⁾ $\pi = 8''.807$, so findet man:

$$\frac{d_1}{\sin 1''} = 6''.4372.$$

Man begeht natürlich keinen merklichen Fehler, wenn man bei der Berechnung der barycentrischen Parallaxenfactors in den Gleichungen (22) und (24) die beobachteten Coordinaten α und δ anstatt der unbekannten geocentrischen α_g , δ_g einsetzt.

Bildet man jetzt folgende Summen der Parallaxenfactors und bezeichnet die allgemeine Parallaxe mit p , so dass

$$\varrho_m p_\alpha = \varrho_m p_\alpha^g + \varrho_m p_\alpha^m, \quad \varrho_m p_\delta = \varrho_m p_\delta^g + \varrho_m p_\delta^m, \dots \dots \dots (25)$$

so kann man ohne merklichen Fehler setzen:

$$\varrho_m p_\alpha^g = \varrho_g p_\alpha^g, \quad \varrho_m p_\delta^g = \varrho_g p_\delta^g \dots \dots \dots (26)$$

Somit sind also die allgemeinen Parallaxenfactors, welche die geocentrische, sowie die barycentrische Parallaxe einschliessen, ermittelt.

¹⁾ The Elements of the Four Inner Planets and the Fundamental Constants of Astronomy. Supplement to the American Ephemeris and Nautical Almanac for 1897. — ²⁾ Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, volume LXIX, p. 567.

Die Gleichung (17) lässt sich jetzt schreiben:

$$\text{und ebenso: } \left. \begin{aligned} q_m \cos(\delta + p_\delta) \cos(\alpha + p_\alpha) &= x + X_m \\ q_m \cos(\delta + p_\delta) \sin(\alpha + p_\alpha) &= y + Y_m \\ q_m \sin(\delta + p_\delta) &= z + Z_m \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

oder auch, nach Auflösung der Sinus und Cosinus der Winkelsummen und mit Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung als der ersten in Bezug auf die Parallaxen:

$$\begin{aligned} q_m \cos \delta \cos \alpha - q_m \cos \delta \sin \alpha p_\alpha - q_m \sin \delta \cos \alpha p_\delta &= x + X_m, \\ q_m \cos \delta \sin \alpha + q_m \cos \delta \cos \alpha p_\alpha - q_m \sin \delta \sin \alpha p_\delta &= y + Y_m, \\ q_m \sin \delta + q_m \cos \delta p_\delta &= z + Z_m. \end{aligned}$$

Setzt man nun:

$$\begin{aligned} \Delta_2 X &= \cos \delta \sin \alpha p_\alpha q_m + \sin \delta \cos \alpha p_\delta q_m; \quad \Delta_2 Y = -\cos \delta \cos \alpha p_\alpha q_m + \sin \delta \sin \alpha p_\delta q_m; \\ \Delta_2 Z &= -\cos \delta p_\delta q_m \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Delta_2 X \\ \Delta_2 Y \\ \Delta_2 Z \end{aligned}} \right\} (28)$$

und weiter:

$$\Delta X = \Delta_1 X + \Delta_2 X, \quad \Delta Y = \Delta_1 Y + \Delta_2 Y, \quad \Delta Z = \Delta_1 Z + \Delta_2 Z, \dots \dots (29)$$

so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} (\xi) &= q_m \cos \delta \cos \alpha = x + X + \Delta X, \quad (\eta) = q_m \cos \delta \sin \alpha = y + Y + \Delta Y, \\ (\xi) &= q_m \sin \delta = z + Z + \Delta Z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30)$$

wo (ξ) etc. zur Unterscheidung von ξ_m etc. gesetzt ist. Differentiirt man jetzt die Gleichung (30) und bedenkt, dass

$$x'' = -\frac{x}{r^3}, \quad y'' = -\frac{y}{r^3}, \quad z'' = -\frac{z}{r^3}, \quad X_m'' = -\frac{X_m}{R_m^3}, \quad Y_m'' = -\frac{Y_m}{R_m^3}, \quad Z_m'' = -\frac{Z_m}{R_m^3} \quad (31)$$

ist, so erhält man zunächst, wenn vorläufig die Resultate in nur einer Coordinate ausgeschrieben werden:

$$(\xi)' = (q_m \cos \delta \cos \alpha)' = x' + X' + (\Delta X)' \dots \dots \dots (32)$$

$$(\xi)'' = (q_m \cos \delta \cos \alpha)'' = -\frac{x}{r^3} + (X + \Delta X)'' \dots \dots \dots (33)$$

In der Gleichung (33) soll nun nach (31) angenommen werden:

$$(X + \Delta X)'' = -\frac{X + \Delta X}{(R + \Delta R)^3} \dots \dots \dots (34)$$

wobei:

$$(R + \Delta R)^2 = (X + \Delta X)^2 + (Y + \Delta Y)^2 + (Z + \Delta Z)^2 \dots \dots \dots (35)$$

Die Gleichung (33) lässt sich aber mit Rücksicht auf die Gleichungen (29), (19) und (31) genau schreiben:

$$(\xi)'' = (q_m \cos \delta \cos \alpha)'' = -\frac{x}{r^3} - \frac{X_m}{R_m^3} + (\Delta_2 X)'' \dots \dots \dots (36)$$

Führt man daher den Ausdruck (34) in die Gleichung (33) ein, begnügt sich in Gleichung (34) mit Gliedern erster Ordnung in Bezug auf die Parallaxe, so dass:

$$\frac{X + \Delta X}{(R + \Delta R)^3} = \frac{X_m + \Delta_2 X}{(R_m + \Delta_2 R)^3} = \frac{X_m}{R_m^3} - 3 \frac{X_m}{R_m^4} \Delta_2 R + \frac{\Delta_2 X}{R_m^3}$$

und vergleicht dann die Gleichung (33) mit der strengen Gleichung (36), so findet sich für die an der rechten Seite der Gleichung (33) anzubringende Correction:

$$(\Delta_2 X)'' - 3 \frac{X_m}{R_m^4} \Delta_2 R + \frac{\Delta_2 X}{R_m^3} \dots \dots \dots (37)$$

Führt man also jetzt den Werth von $(X + \Delta X)''$ aus der Gleichung (34) in die Gleichung (33) ein und addirt den Ausdruck (37) als Correction zur rechten Seite, so ist genau:

$$(\xi)'' = (\varrho_m \cos \delta \cos \alpha) = -\frac{x}{r^3} - \frac{X + \mathcal{A}X}{(R + \mathcal{A}R)^3} + (\mathcal{A}_2 X)'' - 3 \frac{X_m}{R_m^4} \mathcal{A}_2 R + \frac{\mathcal{A}_2 X}{R_m^3} \quad (38)$$

Eliminirt man weiter die heliocentrische Coordinate x aus dieser Gleichung mit Hülfe von Gleichung (30) und setzt vorläufig die rechtwinkligen Coordinaten an, so ergibt sich:

$$(\xi)'' + \frac{(\xi)}{r^3} = (X + \mathcal{A}X) \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{(R + \mathcal{A}R)^3} \right) - 3 \frac{X_m}{R_m^4} \mathcal{A}_2 R + (\mathcal{A}_2 X)'' + \frac{\mathcal{A}_2 X}{R_m^3} \quad (39)$$

Setzt man nun in den mit $\mathcal{A}_2 R$ und $\mathcal{A}_2 X$ multiplicirten Gliedern:

$$X_m = (X + \mathcal{A}X), \quad R_m = (R + \mathcal{A}R),$$

so ist der dadurch verursachte Fehler von der zweiten Ordnung in Bezug auf die Parallaxen und kann also vernachlässigt werden. Man erhält dann:

$$(\xi)'' + \frac{(\xi)}{r^3} = (X) \left\{ \frac{1}{r^3} - \frac{1}{(R)^3} \left[1 + 3 \frac{\mathcal{A}_2 R}{(R)} \right] \right\} + (\mathcal{A}_2 X)'' + \frac{\mathcal{A}_2 X}{(R)^3} \quad (40)$$

wobei noch gesetzt worden ist:

$$(X) = X + \mathcal{A}X = X + \mathcal{A}_1 X + \mathcal{A}_2 X, \quad (R) = R + \mathcal{A}R = R + \mathcal{A}_1 R + \mathcal{A}_2 R \quad (41)$$

Nun lassen sich bequeme Formeln zur Berechnung der Summe der beiden letzten Glieder rechter Hand der Gleichung (40) aufstellen. Der zweite Differentialquotient $(\mathcal{A}_2 X)''$ ergibt sich zunächst aus den drei Werthen von $\mathcal{A}_2 X$, welche den drei Beobachtungen entsprechen, in derselben Weise aus den Formeln (4a, b), wie α''_0, δ''_0 sich aus den drei Werthen von α, δ ergeben. Man erhält also für die Summe der beiden Glieder, wenn man noch, wegen $t_2 = t_0$, das Subscript 2 mit dem Subscript 0 identificirt:

$$\frac{\mathcal{A}_2 X_2 - \mathcal{A}_2 X_0}{t_3 - t_0} - \frac{\mathcal{A}_2 X_0 - \mathcal{A}_2 X_1}{t_0 - t_1} \cdot \frac{2}{k^2} \frac{1}{t_3 - t_1} + \frac{\mathcal{A}_2 X_0}{(R)^3} \quad (42)$$

Setzt man jetzt:

$$\mathcal{A}_2 X_3(t_0 - t_1) + \mathcal{A}_2 X_1(t_3 - t_0) = \mathcal{A}_2 X_0(t_3 - t_1)(1 + d_x) \quad (43)$$

so erhält man nach einigen leichten Reductionen anstatt (42):

$$\left[\frac{2d_x}{\tau_1 \tau_3} + \frac{1}{(R)^3} \right] \mathcal{A}_2 X_0 \quad (44)$$

In ganz derselben Weise ergeben sich aus der Formel (43) d_y und d_z aus den Correctionsgrößen $\mathcal{A}_2 Y$ und $\mathcal{A}_2 Z$ für die drei Beobachtungsdaten.

Setzt man, wie in Gleichung (33), statt $(\xi), (\eta), (\zeta)$, die polaren Coordinaten in die Gleichung (40) und in den entsprechenden Gleichungen für die beiden anderen Coordinaten bezw. ein, und führt dann die angedeutete zweifache Differentiation durch, so erhält man, wenn alle sich auf die hier allein geltende Epoche $t_2 = t_0$ beziehenden Subscripte 0 oder 2 fortgelassen werden, nach Einsetzung von:

$$\left. \begin{aligned} S &= (R) \cos D, & \sigma &= \varrho_m \cos \delta, \\ (X) &= S \cos A, & (\xi) &= \sigma \cos \alpha, & j \cos \alpha &= \left[\frac{1}{(R)^3} + \frac{2d_x}{\tau_1 \tau_3} \right] \mathcal{A}_2 X \\ (Y) &= S \sin A, & (\eta) &= \sigma \sin \alpha, & j \sin \alpha &= \left[\frac{1}{(R)^3} + \frac{2d_y}{\tau_1 \tau_3} \right] \mathcal{A}_2 Y \\ (Z) &= S \operatorname{tg} D, & (\zeta) &= \sigma \operatorname{tg} \delta, & j \operatorname{tg} \delta &= \left[\frac{1}{(R)^3} + \frac{2d_z}{\tau_1 \tau_3} \right] \mathcal{A}_2 Z \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

[wobei noch zu beachten ist, dass z. B. $\mathcal{A}_2 X$ sich auf die zweite Correction (Gleichungen (28)) zur Zeit der Epoche bezieht], die folgenden Fundamental-

gleichungen, in denen der Einfluss der Parallaxe und der Aberration einschliesslich Grössen erster Ordnung dieser Correctionen vollständig berücksichtigt ist:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'' \cos \alpha - 2 \sigma' \sin \alpha \alpha' - \sigma \sin \alpha \alpha'' - \sigma \cos \alpha \left[\alpha'^2 - \frac{1}{r^3} \right] &= S \cos A \left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{(R)^3} \left(1 + 3 \frac{\mathcal{A}_2 R}{(R)} \right) \right] + j \cos a \quad (a) \\ \sigma'' \sin \alpha + 2 \sigma' \cos \alpha \alpha' + \sigma \cos \alpha \alpha'' - \sigma \sin \alpha \left[\alpha'^2 - \frac{1}{r^3} \right] &= S \sin A \left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{(R)^3} \left(1 + 3 \frac{\mathcal{A}_2 R}{(R)} \right) \right] + j \sin a \quad (b) \\ \sigma'' tg \delta + 2 \sigma' (tg \delta)' + \sigma \left[(tg \delta)'' + \frac{tg \delta}{r^3} \right] &= S tg D \left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{(R)^3} \left(1 + 3 \frac{\mathcal{A}_2 R}{(R)} \right) \right] + j tg d \quad (c) \end{aligned} \right\} (46)$$

Verfährt man jetzt nach dem Vorgange Harzer's und addirt die Gleichungen (46 a) und (46 b), einerseits nachdem die erste mit $\cos \alpha$, die zweite mit $\sin \alpha$, andererseits nachdem die erste mit $-\sin \alpha$, die zweite mit $\cos \alpha$ multiplicirt worden ist, und behält die Gleichung (46 c) unverändert bei, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'' + \sigma \left[\frac{1}{r^3} - \alpha'^2 \right] &= S \cos (A - \alpha) \left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{(R)^3} \left(1 + 3 \frac{\mathcal{A}_2 R}{(R)} \right) \right] + j \cos (a - \alpha) \\ 2 \sigma' \alpha' + \sigma \alpha'' &= S \sin (A - \alpha) \left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{(R)^3} \left(1 + 3 \frac{\mathcal{A}_2 R}{(R)} \right) \right] + j \sin (a - \alpha) \\ \sigma'' tg \delta + 2 \sigma' (tg \delta)' + \sigma \left[\frac{tg \delta}{r^3} + (tg \delta)'' \right] &= S tg D \left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{(R)^3} \left(1 + 3 \frac{\mathcal{A}_2 R}{(R)} \right) \right] + j tg d \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Da man die Differentialquotienten $(tg \delta)'$ und $(tg \delta)''$ aus:

$$(tg \delta)' = \sec^2 \delta \delta'; \quad (tg \delta)'' = \sec^2 \delta [2 tg \delta \delta'^2 + \delta''] \quad (48)$$

berechnen kann, so sind in den Gleichungen (47) alle Grössen bis auf σ , σ' , σ'' und r bekannt. Zur Lösung des Problems ist daher noch eine vierte Gleichung nothwendig. Diese Gleichung erhält man aus dem von der Sonne, dem Beziehungspunkt¹⁾ im Erde-Mond-System und dem Körper gebildeten Dreieck. Denn es ist:

$$r^2 = \varrho_m^2 + (R)^2 - 2 \varrho_m (R) \cos \psi \quad (49)$$

wo $\cos \psi$ bestimmt ist durch:

$$\cos \psi = \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos (A - \alpha) \quad (50)$$

In den Gleichungen (47) und (49) ist also nach dem Vorhergehenden der Aberration dadurch Rechnung getragen worden, dass der scheinbare Ort zur Zeit der Beobachtung mit dem wahren Ort der reducirten Beobachtungszeit identificirt worden ist. Die Elimination der allgemeinen (geocentrischen und barycentrischen) Parallaxe vollzieht sich durch die Anbringung der Correctionen $\mathcal{A}X = \mathcal{A}_1 X + \mathcal{A}_2 X$ etc. an die geocentrischen Sonnen-coordinaten. Vernachlässigt man, was bei ganz kleinen Zwischenzeiten gewöhnlich der Fall ist, die Parallaxe, so sind auch alle Correctionsglieder fortzulassen, d. h. $\mathcal{A}X = \mathcal{A}Y = \mathcal{A}Z = 0$ für alle drei Beobachtungen, und für die Epoche werden (X) , (Y) , (Z) gleich den direct aus einer Sonnenephemeride interpolirten Werthen X , Y , Z und (R) wird R . In den Gleichungen (47) sind dann die von j , a , d abhängigen Glieder fortzulassen, ebenso in den nun folgenden Entwicklungen alle Glieder, die diese Grössen enthalten.

Durch Auflösung der Gleichungen (47) lassen sich σ , σ' und σ'' als Functionen der Unbekannten r und bekannter Grössen darstellen. In der ersten und dritten der Gleichungen (47) enthalten die Coëfficienten von σ zwar die Unbekannte r , aber die Determinante der Coëfficienten von σ , σ' und σ'' ist von derselben unabhängig. Diese Determinante, die also nur bekannte Grössen enthält, soll mit $2N$ bezeichnet werden. Substituirt man nun die Ausdrücke rechter Hand der Gleichungen (47) an Stelle der

¹⁾ Der Punkt, auf den sich (ξ) , (η) , (ζ) , (X) , (Y) , (Z) beziehen. Dieser Punkt liegt auf der Gesichtslinie und hat die Distanz ϱ_m vom Körper.

Coëfficienten von σ in $2N$, so erkennt man sofort, dass die so entstehende neue Determinante sich als die Summe von zwei Determinanten schreiben lässt, von denen die erste den Factor $S \left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{(R)^3} \left(1 + 3 \frac{\mathcal{A}_2 R}{(R)} \right) \right]$ und die zweite den Factor j enthält.

Setzt man also, weil:

$$N = \alpha'^3 tg \delta - \alpha'' (tg \delta)' + \alpha' (tg \delta)'' \quad (51)$$

noch:

$$\left. \begin{aligned} n &= \alpha'^2 tg \delta + (tg \delta)'' \\ C_1 &= tg \delta \cos(A - \alpha) - tg D, \quad C_2 = \sin(A - \alpha), \quad C_3 = S \cos(A - \alpha) \\ c_1 &= tg \delta \cos(a - \alpha) - tg d, \quad c_2 = \sin(a - \alpha), \quad c_3 = j \cos(a - \alpha) \\ \kappa &= -\frac{S}{N} [C_1 \alpha' + C_2 (tg \delta)']; \quad \lambda = \frac{S}{2N} [C_1 \alpha'' + C_2 n] \\ \mathcal{A}\kappa &= -\frac{j}{N} [c_1 \alpha' + c_2 (tg \delta)']; \quad \mathcal{A}\lambda = \frac{j}{2N} [c_1 \alpha'' + c_2 n] \end{aligned} \right\} \quad . (52)$$

so ergibt die Lösung der Gleichungen (47):

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \kappa \left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{(R)^3} \left(1 + 3 \frac{\mathcal{A}_2 R}{(R)} \right) \right] + \mathcal{A}\kappa \\ \sigma' &= \lambda \left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{(R)^3} \left(1 + 3 \frac{\mathcal{A}_2 R}{(R)} \right) \right] + \mathcal{A}\lambda \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Die erste dieser beiden Gleichungen ist der sogenannte Lambert'sche Satz über die Krümmung des geocentrischen Laufes¹⁾. Die weitere Bestimmung der Bahn kann nun in verschiedener Weise vorgenommen werden, je nachdem man dieselbe mit oder ohne Voraussetzung über die Excentricität durchführen will. Will man eine allgemeine Bahn bestimmen, so leitet man σ und r aus der Gleichung (49) und aus der ersten der Gleichungen (53) ab. Will man aber eine Parabel berechnen, so dass der Gleichung:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{2}{r} \quad (54)$$

genügt werden muss, so leitet man die Bahn am bequemsten aus dieser Gleichung und dem Verhältniss von $\frac{\sigma'}{\sigma}$ ab. In ähnlicher Weise wird man im Falle einer Kreisbahn verfahren, nur dass dann das Glied rechter Hand der Gleichung (54) $\frac{1}{r}$ anstatt $\frac{2}{r}$ ist. Es sollen nun zunächst Formeln für $\frac{\sigma'}{\sigma}$ und für die in Gleichung (54) auftretenden Geschwindigkeiten der heliocentrischen Coordinaten aufgestellt werden.

Die Elimination von $\left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{(R)^3} \left(1 + 3 \frac{\mathcal{A}_2 R}{(R)} \right) \right]$ aus den beiden Gleichungen (53) ergibt leicht:

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{\lambda}{\kappa} - \frac{\beta}{\sigma} \quad (55)$$

wo gesetzt worden ist:

$$\beta = \frac{\lambda}{\kappa} \mathcal{A}\kappa - \mathcal{A}\lambda \quad (56)$$

Es lässt sich aber auch direct ein bequemer Ausdruck für $\frac{\sigma'}{\sigma}$ aufstellen, wenn man

$$\left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{(R)^3} \left(1 + 3 \frac{\mathcal{A}_2 R}{(R)} \right) \right]$$

¹⁾ Siehe die zweiunddreissigste Vorlesung.

aus der zweiten der Gleichungen (47) mittelst der ersten der Gleichungen (53) eliminirt. Man erhält dann:

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = -\frac{\alpha''}{2\alpha'} + \frac{S}{2\alpha'} \sin(A - \alpha) + \frac{j}{2\alpha'\sigma} \sin(a - \alpha) - \frac{S}{2\alpha'} \sin(A - \alpha) \frac{\Delta \kappa}{\kappa \sigma} \quad (57)$$

oder mit Rücksicht auf die Formeln (52):

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = -\frac{1}{2\alpha'} \frac{NC_2}{C_1\alpha' + C_2(tg\delta)'} - \frac{\alpha''}{2\alpha'} + \frac{jc_2}{2\alpha'\sigma} - \frac{jC_2}{2\alpha'\sigma} \frac{c_1\alpha' + c_2(tg\delta)'}{C_1\alpha' + C_2(tg\delta)'},$$

oder auch:

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = -\frac{1}{2} \frac{C_1\alpha' + C_2n}{C_1\alpha' + C_2(tg\delta)'} + \frac{j}{2\sigma} \frac{c_2C_1 - c_1C_2}{C_1\alpha' + C_2(tg\delta)'} \quad (58)$$

Definirt man nun noch folgende Hilfsgrößen:

$$\Gamma = \frac{C_2}{C_1}; \gamma = \frac{c_2}{c_1}; \Phi = \alpha' + \Gamma(tg\delta)' \quad (59)$$

und dividirt Zähler und Nenner der beiden Glieder der rechten Seite der Gleichung (58) durch C_1 , so ergibt sich:

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = -\frac{1}{2} \frac{\alpha'' + \Gamma n}{\Phi} + \frac{j c_2}{2\sigma} \frac{1 - \frac{\Gamma}{\gamma}}{\Phi},$$

oder endlich, wenn man noch setzt:

$$\beta = -\frac{j c_2}{2} \frac{1 - \frac{\Gamma}{\gamma}}{\Phi} \quad (60)$$

auch:

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = -\frac{1}{2} \frac{\alpha'' + \Gamma n}{\Phi} - \frac{\beta}{\sigma} \quad (61)$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung (55), so ersieht man, dass das erste Glied rechter Hand der Ausdruck für $\frac{\lambda}{\kappa}$ ist und dass die beiden Ausdrücke (56) und (60) für β identisch sind. Die Gleichung (61) hätte auch aus den Gleichungen (55) und (56) abgeleitet werden können, allein für die Rechnung sind die Formeln (59) und (60) bequemer, weil dadurch die Berechnung von κ und $\Delta \kappa$ bei der Bestimmung von $\frac{\sigma'}{\sigma}$ ganz umgangen werden kann.

Die Ausdrücke für die Geschwindigkeiten der heliocentrischen Coordinaten sollen aus der Gleichung (32) abgeleitet werden. Danach ist für die erste Coordinate:

$$x' = (\xi)' - X' - (\Delta X)' = \sigma' \cos \alpha - \sigma \sin \alpha \alpha' - X' - (\Delta X)' \quad (62)$$

Wenn man nun den Factor σ aus den beiden ersten Gliedern rechts heraushebt und $\frac{\sigma'}{\sigma}$ mit Hülfe der Gleichung (55) eliminirt, wobei natürlich $\frac{\lambda}{\kappa}$ gemäß der Formel (61) zu berechnen ist, so ergibt sich, indem man in derselben Weise mit den beiden anderen Coordinaten verfährt:

$$\begin{aligned} x' &= \sigma \left[\frac{\lambda}{\kappa} \cos \alpha - \sin \alpha \alpha' \right] - \beta \cos \alpha - X' - (\Delta X)', \\ y' &= \sigma \left[\frac{\lambda}{\kappa} \sin \alpha + \cos \alpha \alpha' \right] - \beta \sin \alpha - Y' - (\Delta Y)', \\ z' &= \sigma \left[\frac{\lambda}{\kappa} tg \delta + (tg \delta)' \right] - \beta tg \delta - Z' - (\Delta Z)'. \end{aligned}$$

Setzt man jetzt:

$$\left. \begin{aligned} [X]' &= X' + (\mathcal{A}X)' + \beta \cos \alpha \\ [Y]' &= Y' + (\mathcal{A}Y)' + \beta \sin \alpha \\ [Z]' &= Z' + (\mathcal{A}Z)' + \beta \operatorname{tg} \delta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (63)$$

und weiter:

$$a_x = \frac{\lambda}{\kappa} \cos \alpha - \sin \alpha \alpha'; \quad a_y = \frac{\lambda}{\kappa} \sin \alpha + \cos \alpha \alpha'; \quad a_z = \frac{\lambda}{\kappa} \operatorname{tg} \delta + (\operatorname{tg} \delta)' \dots \dots (64)$$

so erhält man schliesslich folgende Ausdrücke für die Geschwindigkeiten:

$$x' = a_x \sigma - [X]'; \quad y' = a_y \sigma - [Y]'; \quad z' = a_z \sigma - [Z]' \dots \dots \dots (65)$$

An der Hand der bisher entwickelten Formeln soll nun die weitere Bestimmung der geocentrischen Distanz verschiedentlich vorgenommen werden, und zwar zuerst für die Parabel, dann für den Kreis, und schliesslich für eine allgemeine Bahn.

Parabel.

Für die Parabel sollen die Gleichungen (49) und (54) in Verbindung mit (65) herangezogen werden. Man ersieht also sofort, dass das Princip dieser Methode einer parabolischen Bahnbestimmung darin besteht, dass einerseits dem für die Parabel geltenden Geschwindigkeitsgesetz (54) von vornherein genügt werden soll, und andererseits, dass das Verhältniss $\frac{\sigma'}{\sigma}$, gemäss seiner Ableitung aus den allgemeinen Gleichungen (47), denselben Werth haben soll, als ob die Lösung ohne Voraussetzung über die Excentricität vorgenommen würde.

Damit ist aber gleich, wie später noch ausführlich gezeigt werden wird, ein Mittel gegeben, ohne Schwierigkeit von der Parabel auf eine allgemeine Bahn überzugehen.

Der Lambert'schen Gleichung (erste Gleichung 53) wird also nicht von vornherein Genüge geleistet. Dieselbe wird daher nur dann für die parabolische Lösung gelten, wenn die letztere auch mit der allgemeinen übereinstimmt. Dadurch ist aber bereits während der Rechnung ein Criterium gegeben, die Richtigkeit der Annahme einer Parabel zu prüfen, sowie im Falle von mehr als einer parabolischen Lösung die physisch richtige zu bestimmen.

Eliminirt man also r aus den Gleichungen (49) und (54), nachdem die Geschwindigkeiten in der letzteren durch ihre Werthe aus (65) ersetzt worden sind, so ergibt sich:

$$[\varrho_m^2 - 2 \varrho_m(R) \cos \psi + (R)^2]^{1/2} \{ (a_x \sigma - [X]')^2 + (a_y \sigma - [Y]')^2 + (a_z \sigma - [Z]')^2 \} = 2 \quad (66)$$

oder, wenn man schreibt:

$$a^2 = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) \cos^2 \delta; \quad b = (a_x [X]' + a_y [Y]' + a_z [Z]') \cos \delta; \quad G^2 = [X]'^2 + [Y]'^2 + [Z]'^2 \quad (67)$$

und σ durch $\varrho_m \cos \delta$ ersetzt:

$$a^2 \varrho_m^2 - 2 b \varrho_m + G^2 = \frac{2}{[\varrho_m^2 - 2 \varrho_m(R) \cos \psi + (R)^2]^{1/2}} \dots \dots \dots (68)$$

Dividirt man beide Seiten dieser Gleichung durch $a^2(R)^2$ und Zähler und Nenner der rechten Seite durch (R) , und schreibt:

$$z = \frac{\varrho_m}{(R)} \dots \dots \dots (69)$$

dann ist:

$$z^2 - 2z \frac{b}{a^2(R)} + \frac{G^2}{a^2(R)^2} = \frac{2}{[z^2 - 2z \cos \psi + 1]^{1/2}}$$

oder auch:

$$\left[z - \frac{b}{a^2(R)} \right]^2 + \frac{a^2 G^2 - b^2}{a^4(R)^2} = \frac{2}{a^2(R)^3} \cdot \frac{1}{[(z - \cos \psi)^2 + \sin^2 \psi]^{1/2}}.$$

Das zweite Glied linker Hand ist immer positiv, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man für a^2 und b^2 ihre Werthe aus (67) substituirt und die Quadratsummen auflöst. Setzt man daher:

$$p' = \frac{b}{a^2(R)}; \quad q'^2 = \frac{a^2 G^2 - b^2}{a^4(R)^2} = \frac{G^2}{a^2(R)^2} - p'^2; \quad h = \frac{2}{a^2(R)^3}; \quad c = \cos \psi; \quad s = \sin \psi \quad (70)$$

so erhält man z aus der Lösung der folgenden Gleichung:

$$f(z) = (z - p')^2 + q'^2 - \frac{h}{[(z - c)^2 + s^2]^{1/2}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung können als die Schnittpunkte einer Parabel und einer asymptotischen Curve aufgefasst werden, deren Gleichungen sind:

$$y = (z - p')^2; \quad y = \frac{h}{[(z - c)^2 + s^2]^{1/2}} - q'^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

Leuschner hat gezeigt¹⁾, dass diese Curven entweder einen oder drei Schnittpunkte haben können, für welche z reell und positiv ist, und danach Kriterien für die Anzahl der Lösungen aufgestellt¹⁾.

Dass immer wenigstens eine Lösung auf Grund der ursprünglichen Werthe von $\alpha, \delta, \alpha', \delta', \alpha'', \delta''$ besteht, ist leicht zu beweisen, indem man die Gleichung (68) quadriert und nach abnehmenden Potenzen von q_m ordnet. Betrachtet man dann nur das von q_m unabhängige Glied $G^4(R)^2 - 4$, so erkennt man, dass dasselbe stets negativ ist, denn bis auf die Parallaxenglieder ist $G^2 = \frac{2}{R} - 1$, und weiter, mit Vernachlässigung der Excentricität der Erdbahn, sind $R = 1$ und $G^2 = 1$, so dass angenähert $G^4(R)^2 - 4 = -3$ ist. Hieraus folgt aber nach der Theorie der Gleichungen, dass immer mindestens eine Wurzel q_m , und daher z positiv und reell ist. Dies bedeutet aber natürlich nicht, dass nach vollendeter Bahnbestimmung die erste und letzte Beobachtung dargestellt sein werden, denn das hängt, wie weiter oben aus einander gesetzt wurde, davon ab, ob die in $\alpha', \delta', \alpha'', \delta''$ vernachlässigten höheren Differenzen in Wirklichkeit innerhalb der Sicherheit der Rechnung und der Beobachtungsfehler unmerklich waren.

Die Bestimmung von z aus der Gleichung (71), welche Gleichung vom sechsten Grade ist, erfolgt am bequemsten auf graphischem Wege, mit Benutzung der Eigenschaften der Parabel und der Curve (72). Die Gleichungen der Achsen der Parabel und der symmetrisch verlaufenden Curve sind beziehungsweise $z = p'$ und $z = c$. Die

¹⁾ Cfr. Publications of the Lick Observatory, Vol. VII, part 7. (Aber noch nicht erschienen.) Drei Schnittpunkte sind möglich, wenn entweder:

$$p' > 0; \quad c > 0;$$

$$\text{oder: } p' > 0; \quad c < 0; \quad 90^\circ < \psi < 125^\circ 16'; \quad \text{oder: } p' < 0; \quad c > 0; \quad 0^\circ < \psi < 54^\circ 44',$$

und wenn zugleich:

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^3 < 0,$$

wo gesetzt ist:

$$\frac{p}{3} = \frac{1}{81} [9(2s^2 + q'^2) - 7c'^2]; \quad \frac{q}{2} = \frac{5c'}{9} \left[\frac{p}{3} + \frac{1}{9} (m^2 - \frac{11}{5} q'^2) \right]$$

$$m^2 = c'^2 + s^2; \quad c' = c - p'.$$

Von diesen drei parabolischen Lösungen ist aber nur **eine gültig**, nämlich diejenige, welche dem Lambert'schen Satz, Gleichung (53), genügt. Cfr. auch S. 471, wo höchstens **eine** parabolische mit der **allgemeinen** Lösung übereinstimmen kann. (Den ausführlichen Beweis vergl. Publ. of the Lick Observatory, Vol. VII, part. 7.) —

Parabel liegt ganz auf der positiven Hälfte der durch die Hauptachse $y = 0$ getheilten yz -Ebene, während die Curve von der Hauptachse $y = 0$ durchschnitten wird, und die unter der Hauptachse liegende Linie $y = -q'^2$ eine Asymptote zur Curve ist. Für die Schnittpunkte der Parabel und Curve kommt also nur der Theil der Curve in Betracht, welcher in der eben beschriebenen positiven Hälfte der yz -Ebene liegt. Ausserdem ist aber noch zu bedenken, dass, da für die gesuchten Lösungen z immer positiv sein muss, nur diejenigen Theile der Parabel und der Curve in Betracht kommen, welche rechts von $z = 0$ liegen. Des Weiteren sollen nun die von der Achse der Parabel und die von der Achse der Curve ab gezählten Abscissen beziehungsweise mit z' und ξ bezeichnet werden, so dass

$$z' = z - p'; \quad \xi = z - c \quad (73)$$

ist. Oder, wenn man noch

$$c' = c - p' \quad (74)$$

setzt, auch:

$$\xi = z' + c' \quad (75)$$

Die Grösse c' ist dann die Distanz zwischen den beiden Achsen von der Achse der Parabel ab gerechnet. Zählt man vorläufig noch die Ordinaten der Curve von der Linie $y = -q'^2$ und bezeichnet diese Ordinaten mit η , so dass

$$\eta = y + q'^2, \quad (76)$$

so kann man die Gleichung der Curve schreiben:

$$\eta = \frac{h}{[\xi^2 + s^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad (77)$$

oder, wenn man setzt:

$$tg \vartheta = \frac{\xi}{s} \quad (78)$$

auch:

$$\eta = \frac{h}{s} \cos \vartheta \quad (79)$$

Der für $y = 0$ oder $\eta = q'^2$ in Betracht kommende Maximalwerth von ξ soll nun mit ξ_m und der nach Gleichung (78) dem Werthe ξ_m entsprechende Werth von ϑ soll mit ϑ_m bezeichnet werden. Dann ist nach Gleichung (79), wenn man noch nach Gleichung (70) in h für (R) den angenäherten Werth von $(R) = 1$ setzt:

$$\cos \vartheta_m = \frac{a^2 q'^2 s}{2} \quad (80)$$

Ebenso findet man aus den Gleichungen (78) und (73) für den dem Werthe $z = 0$ entsprechenden Werth ξ_0 von ξ :

$$\frac{\xi_0}{s} = \frac{c'}{s} = -\cotg \psi = tg \vartheta_0,$$

und daher:

$$\vartheta_0 = \psi - 90^\circ. \quad (81)$$

Man kann also zunächst die Grenzen ϑ_m und ϑ_0 bestimmen, um den Theil der Curve zu finden, auf dem die Schnittpunkte liegen müssen. Man könnte also diesen Theil der Curve graphisch darstellen und ihre Schnittpunkte mit der für alle Bahnen constanten Parabel $y = z'^2$ dadurch aufsuchen, dass man diese letztere in der Weise in die ξy -Ebene legt, dass c' gleich der Distanz zwischen den Achsen der Parabel und der Curve wird. Man kann aber diese Art der graphischen Lösung noch sehr vereinfachen und die graphische Darstellung der Curve und Parabel selbst vermeiden. Zu diesem Zwecke

soll zunächst die Gleichung (72) der Parabel auf das Achsensystem $\eta = 0$, $\xi = 0$ bezogen werden. Es wird dann mit Rücksicht auf die Formeln (76), (73) und (74):

$$y = \eta - q'^2 = (\xi + c')^2,$$

wobei η und ξ nach den Formeln (78) und (79) als Functionen von ϑ durch die Gleichungen der Curve bestimmt sind. Schreibt man daher

$$y' = f(\vartheta) = (\xi + c')^2 - (\eta - q'^2) = 0 \dots \dots \dots (82)$$

so ergibt diese Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen (78) und (79) die den Schnittpunkten entsprechenden Werthe von ϑ . Nach den Gleichungen (73) und (78) ergeben sich dann die gesuchten Abscissen z der Schnittpunkte aus:

$$z = \xi + c = stg \vartheta + c \dots \dots \dots (83)$$

In der Praxis bestimmt man zuerst nach den Formeln (80) und (81) die Grenzen ϑ_0 und ϑ_m , zwischen denen die den Schnittpunkten der Parabel und der Curve entsprechenden Werthe von ϑ liegen müssen. Sodann entnimmt man einer Tafel von natürlichen trigonometrischen Functionen angenäherte Werthe (etwa auf drei Stellen) der Cosinus und der Tangenten von ϑ etwa von 10 zu 10^0 oder 5 zu 5^0 zwischen $\vartheta_0 < \vartheta < \vartheta_m$, multiplicirt sodann die Cosinus und Tangenten, z. B. mit Hülfe von Crelle's Rechentafeln, mit den auf ein Blatt geschriebenen Constanten $\frac{h}{s}$ und s und bildet somit zu einander gehörige Werthe von η und ξ . Ehe man diese hinschreibt, addirt man noch die auf ein Blatt geschriebenen Constanten $-q'^2$ und c' beziehungsweise zu η und ξ . Auf diese Weise erhält man Werthe von $y = \eta - q'^2$ und $z' = \xi + c'$ für einige äquidistante Werthe von ϑ zwischen den Grenzen ϑ_0 und ϑ_m . Die Subtraction $z'^2 - y$ ergibt dann die entsprechenden Werthe von $y' = f(\vartheta)$. Man bildet nun eine kleine Tafel, etwa wie folgt:

ϑ	z'^2	y	$f(\vartheta) = z'^2 - y$
..			
10^0			
20			
40			
..			

und entnimmt derselben den (oder im Falle von drei Lösungen) die, einem Zeichenwechsel von $f(\vartheta)$ entsprechenden Werthe von ϑ . Nun berechnet man ganz wie vorher und zwar genau bis zu derjenigen Anzahl von Stellen, bis zu denen man $f(\vartheta)$ graphisch darstellen will, zwei oder drei Werthe von $y' = f(\vartheta)$ für möglichst enge und äquidistante Werthe von ϑ in der Nähe des Zeichenwechsels und zeichnet sodann die Curve $y' = f(\vartheta)$ mit y' als Ordinate und ϑ als Abscisse. Der Schnittpunkt der Abscisse und der Curve ergibt den gesuchten Werth von ϑ , welchen man auf diese Weise direct und mit wenig Mühe genügend genau bestimmen kann, um z aus der Gleichung (83) bis auf vier oder fünf Stellen genau zu erhalten. Es sei z_1 der so erhaltene Werth von z . Substituirt man nun den Werth z_1 in das Glied $f(z)$ der Gleichung (71) und bezeichnet $f(z_1)$ mit M_1 , dann ist eine Correction Δz_1 so zu bestimmen, dass $f(z_1 + \Delta z_1) = 0$ wird. Um eine Formel für Δz_1 zu gewinnen, differentiiren wir die Formel (71) und erhalten so:

$$\frac{df(z)}{dz} = 2(z - p') + \frac{h(z - c)}{[(z - c)^2 + s^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Da nun Δz_1 so bestimmt werden muss, dass:

$$\Delta f(z_1) = \left[\frac{df(z)}{dz} \right]_{z=z_1} \Delta z_1 = -M_1$$

ist, so wird:

$$\Delta z_1 = \frac{-M_1}{2(z_1 - p') + \frac{h}{[(z_1 - c)^2 + s^2]^{\frac{1}{2}}} \frac{(z_1 - c)}{[(z_1 - c)^2 + s^2]}} \quad \dots \quad (84)$$

Diese Formel ist so angesetzt, dass Δz_1 sehr bequem mit Benutzung der Logarithmen von lauter bekannten Ausdrücken berechnet werden kann. Aus $z_2 = z_1 + \Delta z_1$ berechnet man dann M_2 gemäss der Gleichung (71) in derselben Weise wie M_1 aus z_1 gefunden wurde und setzt die Annäherungen fort, bis man einen Werth von z erhält, für welchen $f(z) = 0$ wird. Eine einmalige Anwendung der Differentialformel ist aber gewöhnlich genügend, um, wenn das nöthig sein sollte, den auf graphischem Wege erhaltenen Werth z_1 endgültig zu corrigiren.

Aus z berechnet man nun $q_m = (R)z$ und $\sigma = q_m \cos \delta$. Dann ergeben die Gleichungen (30) und (65), nachdem in der ersteren wegen $\sigma = q_m \cos \delta$ geschrieben worden ist:

$$(\xi) = \sigma \cos \alpha, \quad (\eta) = \sigma \sin \alpha, \quad (\zeta) = \sigma \operatorname{tg} \delta \quad \dots \quad (85)$$

die Werthe x, y, z, x', y', z' der heliocentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten.

Als Controle der parabolischen Lösung muss die Gleichung (54) genau (innerhalb der Unsicherheit der Rechnung) stimmen, nachdem noch r aus der Gleichung:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \dots \quad (86)$$

berechnet worden ist.

Um nun die Richtigkeit der Annahme einer Parabel zu prüfen, berechnet man σ_L mit dem eben erhaltenen Werthe r aus der Lambert'schen Gleichung (53) und dann

$$z_L = \frac{\sigma_L}{(R) \cos \delta}.$$

Stimmt dann dieser Werth z_L innerhalb der Unsicherheit der Lösung

mit dem aus der parabolischen Lösung erhaltenen Werth von z nicht überein, so kann man sofort schliessen, dass eine Parabel unmöglich ist, wenn nicht etwa eine sehr unregelmässige geocentrische Bewegung Ursache giebt, die Genauigkeit der anfänglich bestimmten Werthe von $\alpha', \delta', \alpha'', \delta''$ zu bezweifeln. Da man aber stets, wie weiter oben ausführlich auseinander gesetzt worden ist, die Genauigkeit dieser Grössen beurtheilen kann, so kann man leicht entscheiden, ob die parabolische Lösung fortgesetzt werden soll oder ob man zu einer allgemeinen Lösung übergehen will. Die Zulässigkeit der parabolischen Lösung lässt sich nun aber unter der Annahme, dass die Werthe von $\alpha', \delta', \alpha'', \delta''$ genügend genau waren, sehr leicht aus Tafel XVI bestimmen. Aus dieser Tafel entnimmt man nämlich bei der allgemeinen Lösung den Werth von z mit den

Argumenten ψ und $\frac{1}{m}$, wie sich sogleich weiter unten zeigen wird, wo $\frac{1}{m}$ eine von $\alpha', \delta', \alpha'', \delta''$ abhängige Grösse ist. Aus der Anzahl von Stellen, mit denen $\alpha', \delta', \alpha'', \delta''$ aus den Differenzen der geocentrischen Bewegung bestimmt werden kann, ergibt sich nun sofort bei einem Ueberblick über die Rechnung die Anzahl von Stellen, die in $\frac{1}{m}$ genau bekannt sind. Die übrigen Stellen repräsentiren eine Region von Lösungen von z , deren Grenze man sofort aus der Tafel ansehen kann. Fällt der unter Annahme einer Parabel gefundene Werth von z weit ausserhalb dieser Grenzen, so kann man mit Sicherheit auf eine allgemeine Bahnbestimmung übergehen. Im Falle von drei Lösungen kann nur einer der entsprechenden Werthe von z innerhalb dieser Grenzen fallen.

Die weitere Behandlung der Parabel vollzieht sich fast ganz so, wie bei anderen Bahnen und wird später mit diesen durchgeführt werden.

Kreisbahn.

Die Lösung der Kreisbahn kann ganz in derselben Weise vorgenommen werden, wie diejenige der Parabel. Nur ist in der Ableitung der Formeln zu beachten, dass in der Gleichung (54) das Glied rechter Hand $\frac{1}{r}$ anstatt $\frac{2}{r}$ ist. Dadurch werden aber nur, wie man leicht übersehen kann, einige der constanten Hilfsgrößen geändert. Die Werthe der geänderten Constanten für die Kreisbahn sind:

$$h = \frac{1}{a^2(R)^3}; \quad \cos \vartheta_m = sa^2 q'^2 \dots \dots \dots (87)$$

Die Formeln für die Kreisbahn sind sonst ganz dieselben wie für die Parabel. Diese Methode, eine Kreisbahn zu bestimmen, ist in der Anwendung vielleicht nicht ganz so bequem wie die üblichen Methoden. Da sie aber auf drei Beobachtungen, anstatt der nur nothwendigen Anzahl von zwei Beobachtungen, gegründet ist, so hat sie, ebenso wie die vorangehende parabolische Methode, den Vortheil, dass man bequem, ohne Neu-rechnung, auf eine allgemeine Bahn übergehen kann, wenn die Lambert'sche Gleichung die Unzulänglichkeit der Annahme einer Kreisbahn zu Tage fördert.

Was die Anzahl der Lösungen anbetrifft, so ist hervorzuheben, dass entweder nur eine oder keine Lösung möglich ist, und dass sich gleich am Anfang der Rechnung die Existenz der einen Lösung aus den Hilfsgrößen entscheiden lässt¹⁾.

Ist aber keine Lösung möglich, so geht man sofort mit denselben Hilfsgrößen auf eine allgemeine Bahn über.

Allgemeine Bahnbestimmung.

Die Bestimmung der geocentrischen Distanz ohne Voraussetzung über die Excentricität vollzieht sich, wie schon weiter oben angedeutet wurde, durch die Elimination von r aus der Lambert'schen Gleichung [erste Gleichung (53)] und der Gleichung (49).

¹⁾ Leitet man die Gleichung (68) für den Kreis ab, vernachlässigt dann, der Einfachheit halber, die auf die Parallaxenelimination bezüglichen Bezeichnungen, setzt wieder $G^2 = R = 1$ und ordnet die Glieder wieder nach abnehmenden Potenzen von q , so fällt das von q unabhängige Glied fort, und die Gleichung wird fünften Grades. Sind dann c sowie p' , oder b , (cfr. Gleichungen 70) negativ, so existirt kein Zeichenwechsel und daher auch keine positive Wurzel q . Da weiter kleine Planeten meist in der Nähe der Opposition entdeckt werden, so wird $c = \cos \psi$ immer negativ sein. Die einzige Möglichkeit einer dreifachen Lösung bestände dann gemäss der Anmerkung 1), S. 468, darin, dass

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0, \quad p' > 0, \quad c < 0, \quad 90^\circ < \psi < 125^\circ 16'.$$

Im Allgemeinen wird aber ein kleiner Planet näher als 55° von der Opposition entdeckt werden und daher werden drei Lösungen kaum möglich sein. Ist aber $c < 0$, $p' > 0$, dann werden alle Coëfficienten der Gleichung fünften Grades positiv, so dass selbst eine Lösung unmöglich ist, wenn noch:

$$c < -2p'; \quad c < -\frac{\left(1 + \frac{1}{a^2}\right)p'}{k}; \quad c < -2p'a^2;$$

$$c > -\frac{1+2k}{8p'}; \quad c > -\frac{\frac{1}{a^4} + 2k}{8p'}a^2; \quad \text{wo } k = 2p'^2 + \frac{1}{a^2},$$

das heisst, wenn c kleiner als der kleinste der Ausdrücke der ersten und grösser als der grösste der Ausdrücke der zweiten Zeile ist, was sich leicht aus den Hilfsgrößen entscheiden lässt.

Setzt man wie bei der Parabel in beiden Gleichungen $z = \frac{Q_m}{(R)}$ und dann noch in dem Lambert'schen Satz:

$$m = -\frac{x}{(R)^4 \cos \delta}; (m) = -\frac{x}{(R)^4 \cos \delta} \left(1 + 3 \frac{A_2 R}{(R)}\right) + \frac{A x}{(R) \cos \delta} = m \left(1 + 3 \frac{A_2 R}{(R)}\right) + A m \quad (88)$$

so können dieselben geschrieben werden:

$$z - (m) = (v) = -\frac{m(R)^3}{r^3}$$

$$r^2 = (R)^2 (z^2 - 2z \cos \psi + 1) = \mu(R)^2,$$

wo die Bedeutung von (v) und μ ohne Weiteres ersichtlich ist. Die Elimination ergibt:

$$r^6 = \mu^3(R)^6 = \frac{m^2(R)^6}{(v)^2},$$

oder auch:

$$\mu^3(v)^2 = m^2 \quad \dots \dots \dots (89)$$

und endlich, wenn man die Ausdrücke für μ und (v) wieder einsetzt:

$$(z^2 - 2z \cos \psi + 1)^3 [z - (m)]^2 - m^2 = 0 \quad \dots \dots \dots (90)$$

Lässt man die durch die Parallaxenelimination bedingten Bezeichnungen fort, so schreibt sich diese Gleichung:

$$(z^2 - 2z \cos \psi + 1)^3 [z - m]^2 - m^2 = 0 \quad \dots \dots \dots (91)$$

Die Werthe von z , welche diese Gleichung befriedigen, können aus der Tafel XVI mit den Argumenten ψ und $\frac{1}{m}$ im Allgemeinen zu sechs Stellen interpoliert werden¹⁾.

Die Tafel ist eine Erweiterung der Tafel XIIIa im I. Bande des v. Oppolzer'schen Lehrbuches zur Bahnbestimmung, und ist von Studenten der Universität von Kalifornien nach Vorschriften Leuschner's berechnet worden. Die Tafel ist siebenstellig berechnet, jedoch empfiehlt Leuschner den interpolirten Werth von z durch Substitution in die Gleichung (90), bzw. (91), zu controlliren. Durch die Tafel ist die bisher in der Bahnbestimmung nothwendige versuchsweise Bestimmung der geocentrischen Distanz abgeschafft.

Unter Umständen kann es vorkommen, dass sich kein Werth von z in der Tafel für berechnete Argumente ψ und $\frac{1}{m}$ findet. Dies deutet entweder auf einen Rechenfehler oder darauf hin, speciell wenn die Lösung der Tafel nach nicht weit verfehlt ist, dass die Anfangswerthe α' , δ' , α'' , δ'' durch Vernachlässigung der höheren Differenzen gelitten haben. In solchen Fällen interpoliert man aus der Tafel mit dem Argumente ψ und einem, dem berechneten Werthe von $\frac{1}{m}$ so nahe als möglich liegenden Tafelwerthe $\frac{1}{m}$ den zugehörigen Werth von z . Diese Bahn wird dann freilich naturgemäss die erste und dritte Beobachtung nicht genau repräsentiren und eine Verbesserung erfordern, die indess bequem nach den Methoden des II. Abschnittes auszuführen ist.

Liegt der Bahnbestimmung die mit vollständiger Elimination der Parallaxe abgeleitete Gleichung (90) zu Grunde, wo der Unterschied von (m) und m von der Ordnung der Parallaxe ist, oder zeigt die oben angedeutete Controlle, dass der aus Tafel XVI

¹⁾ Die Anzahl der Lösungen ergibt sich sofort aus der Tafel. Es existiren entweder eine oder zwei Lösungen. Die Kriterien für die Anzahl der Lösungen einer Gleichung von der Art der hier in Betracht kommenden sind eingehend von Mrs. Young (Grace Chisholm) in den Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. LVII, p. 379, erörtert worden.

entnommene Werth von z_1 noch einer kleinen Verbesserung, Δz_1 bedarf, so erhält man diese z. B. im ersteren Falle durch Differentiation von (90), aus der sich, wenn man diese Gleichung in der Form $f(z) = 0$ schreibt, und genau so verfährt wie bei der Ableitung der Gleichung (84), der Werth ergibt:

$$\Delta z_1 = \frac{-M_1}{2\mu_1^3(\nu)_1[\mu_1 + 3(\nu)_1(z_1 - \cos \psi)]} \dots \dots \dots (92)$$

wo μ_1 und $(\nu)_1$ dieselben Ausdrücke wie in (89) darstellen und M_1 der Werth von $f(z_1)$ ist, den man erhält, indem man den Tafelwerth z_1 in $f(z)$ einsetzt.

Im Weiteren verläuft die Berechnung der heliocentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten genau wie im Falle der Parabel oder der Kreisbahn.

Die Darstellung der beiden äusseren Oerter und die Berechnung der Elemente.

Aus x, y, z, x', y', z' kann man die Elemente der Bahn mittelst der Formeln (33) und (36) der vierten Vorlesung berechnen. Indess ist es rathsam, vorher die äusseren Oerter zu berechnen, und die Berechnung der Elemente aufzuschieben, bis man sich vergewissert hat, dass die heliocentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten keiner weiteren Verbesserung bedürftig sind. Man berechnet daher zuerst die auf den Aequator bezogenen Gauss'schen Constanten und nachher die Oerter in der üblichen Weise, oder man bedient sich der Harzer'schen¹⁾ Reihen, welche die heliocentrischen Coordinaten zur Zeit t als Functionen von x, y, z, x', y', z' darstellen, die in ähnlicher Weise, wie die Verhältnisse der Dreiecksflächen der neunundsechzigsten Vorlesung abgeleitet werden. Differentiirt man die Gleichung (86) verschiedene Male, so ergibt sich leicht:

$$rr' = xx' + yy' + zz'; \quad rr'' = -\frac{1}{r} + x'^2 + y'^2 + z'^2 - r'^2; \quad rr''' = -\frac{r'}{r^2} - 3r'r'' \dots (93)$$

Differentiirt man weiter die Gleichung $x'' = -\frac{x}{r^3}$ fortgesetzt, indem man jedes Mal r''' , wo es auftritt, durch die letzte Gleichung eliminirt, so erhält man:

$$\frac{1}{1.2.3\dots n} x^{(n)} = f(n)x + g(n)x' \dots \dots \dots (94)$$

wobei die $f(n), g(n)$ allein von r, r', r'' abhängige Functionen bedeuten, die den recurrirenden Gleichungen:

$$f(n+1) = \frac{1}{n+1} \left[-\frac{g(n)}{r^3} + f'(n) \right]; \quad g(n+1) = \frac{1}{n+1} [f(n) + g'(n)]$$

genügen. Aus den evidenten Formeln $f(0) = 1, g(0) = 0$ ergibt sich dadurch:

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 0, \quad f'(2) = -\frac{1}{2r^3}, \quad f(3) = +\frac{r'}{2r^4}, \quad f(4) = +\frac{1}{24r^6} - \frac{r'^2}{2r^5} + \frac{r''}{8r^4} \\ f(5) &= -\frac{r'}{8r^7} + \frac{r'^3}{2r^6} - \frac{3r'r''}{8r^5}, \quad f(6) = -\frac{1}{720r^9} + \frac{31r'^2}{120r^8} - \frac{r''}{30r^7} - \frac{r'^4}{2r^7} + \frac{3r'^2r''}{4r^6} - \frac{r''^2}{16r^5} \\ g(1) &= 1, \quad g(2) = 0, \quad g(3) = -\frac{1}{6r^3}, \quad g(4) = +\frac{r'}{4r^4}, \\ g(5) &= +\frac{1}{120r^6} - \frac{3r'^2}{10r^5} + \frac{3r''}{40r^4}, \quad g(6) = -\frac{r'}{24r^7} + \frac{r'^3}{3r^6} - \frac{r'r''}{4r^5} \end{aligned} \right\} \dots (95)$$

Multiplcirt man die Gleichung (94) beiderseits mit τ^n , so repräsentirt die linke Seite das allgemeine Glied der Taylor'schen Reihe für x_t , d. h. für x zur Zeit t , da x und

¹⁾ A. N. 3371.

x' der Ausgangsepoche t_0 angehören. Führt man daher die Ausdrücke für $f(n)$ und $g(n)$ in (94) ein, so erhält man für die Taylor'sche Reihe, wenn man die Coëfficienten von x und x' nach Potenzen der Zwischenzeit τ ordnet und zugleich die Ausdrücke für y und z ansetzt:

$$\left. \begin{aligned} f_t &= 1 - \tau^2 \frac{1}{2r^3} + \tau^3 \frac{r'}{2r^4} + \tau^4 \left(\frac{1}{24r^6} - \frac{r'^2}{2r^5} + \frac{r''}{8r^4} \right) - \tau^5 \left(\frac{r'}{8r^7} - \frac{r'^3}{2r^6} + \frac{3r'r''}{8r^5} \right) \dots \\ g_t &= \tau - \tau^3 \frac{1}{6r^3} + \tau^4 \frac{r'}{4r^4} + \tau^5 \left(\frac{1}{120r^6} - \frac{3r'^2}{10r^5} + \frac{3r''}{40r^4} \right) - \tau^6 \left(\frac{r'}{24r^7} - \frac{r'^3}{3r^6} + \frac{r'r''}{4r^5} \right) \dots \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

$$x_t = f_t x + g_t x'; \quad y_t = f_t y + g_t y'; \quad z_t = f_t z + g_t z'$$

Da nun aber:

$$rr'' = -\frac{1}{r} + g^2 - r'^2, \quad g^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}, \quad rr'' = \frac{1}{r} - r'^2 - \frac{1}{a} \quad \dots \quad (97)$$

so kann man zunächst die halbe grosse Axe a berechnen und erhält dann an Stelle der Harzer'schen Coëfficienten:

$$\left. \begin{aligned} f'(2) &= -\frac{1}{2r^3}, f(3) = \frac{r'}{2r^4}, f(4) = \frac{1}{6r^6} \left[1 - \left(\frac{15}{4} \frac{rr'}{r} + \frac{3r}{4a} \right) \right], f(5) = -\frac{r'}{2r^7} \left[1 - \left(\frac{7}{4} \frac{rr'}{r} + \frac{3r}{4a} \right) \right] \\ g(3) &= -\frac{1}{6r^3}, g(4) = \frac{r'}{4r^4}, g(5) = \frac{1}{12r^6} \left[1 - \left(\frac{9}{2} \frac{rr'}{r} + \frac{9r}{10a} \right) \right], g(6) = -\frac{7}{24r^7} \left[1 - \left(2 \frac{rr'}{r} + \frac{6r}{7a} \right) \right] \\ f_t &= 1 + \tau^2 f(2) + \tau^3 f(3) + \tau^4 f(4) + \tau^5 f(5) + \dots; \quad g_t = \tau + \tau^3 g(3) + \tau^4 g(4) + \tau^5 g(5) + \tau^6 g(6) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (97')$$

Für die Parabel fallen dann die durch a dividirten Glieder fort. Für den Kreis ist $r = a$, und $r' = 0$, wodurch die Coëfficienten eine sehr einfache Form annehmen.

Diese Reihen sind bei kleinen Zwischenzeiten äusserst bequem zur Berechnung der äusseren Oerter sowohl, als der gewöhnlichen 12tägigen Ephemeride. Da alle Grössen bekannt sind, kann man gleich zu Anfang abschätzen, wo die Reihen innerhalb der Genauigkeit der Rechnung abgebrochen werden können. Wenn die Glieder $f(5)$ und $g(6)$ sehr merklich sind, dann ist es vortheilhafter, anstatt der Reihen geschlossene Ausdrücke zur Berechnung der Oerter zu benutzen. Man kann dazu entweder die weiter unten folgenden geschlossenen Ausdrücke für f_t und g_t benutzen, oder man bedient sich der Gauss'schen Constanten für den Aequator, welche aus x, y, z, x', y', z' mit Benutzung der Formeln der vierten und zehnten Vorlesung abgeleitet werden können.

Es ist überhaupt immer vortheilhaft, diese Constanten zuerst zu berechnen, um die Umrechnung der Elemente auf die Ekliptik zu vermeiden, da die ekliptikalen Elemente leicht aus den Constanten für den Aequator hervorgehen.

Auf S. 40 der vierten Vorlesung finden sich folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \{ \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i \}; \quad y = r \{ \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i \} \\ z &= r \sin u \sin i \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (98)$$

wo x, y, z, Ω und i auf den Aequator bezogen sind und wo $u = \omega + v$ ist. Setzt man nun in den Gleichungen (4) der zehnten Vorlesung $\varepsilon = 0$, so gelten diese letzteren Gleichungen auch für den Aequator. Führt man diese Constanten für den Aequator also in die Gleichung (98) ein und setzt, wie gewöhnlich: $A' + v = A + u$, dann erhält man:

$$\sin a \cos(A' + v) = \sin a \cos A \cos u - \sin a \sin A \sin u \quad \dots \quad (99)$$

oder, mit Benutzung der Gleichung (4) der zehnten Vorlesung:

$$\sin a \cos(A' + v) = -\sin \Omega \cos i \cos u - \cos \Omega \sin u.$$

Eliminirt man aus dieser Gleichung $\sin \Omega \cos u$ mit Hülfe der zweiten, und dann $\sin u \sin i$ mit Hülfe der dritten der Gleichungen (98), so ergiebt sich nach einigen leichten Transformationen:

$$\sin a \cos(A' + v) = -\frac{z}{r} \sin i \cos \Omega - \frac{y}{r} \cos i,$$

oder, wenn man $\sin i \cos \Omega$ und $\cos i$ nach den Gleichungen (33) der vierten Vorlesung durch die Coordinaten und die in $\frac{1}{k}$ mittleren Sonnentagen ausgedrückten Geschwindigkeiten ersetzt:

$$\sin a \cos(A' + v) = \frac{1}{r\sqrt{p}} [x'(y^2 + z^2) - x(yy' + zz')] \quad (100)$$

Da aber:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad xx' + yy' + zz' = rr' \quad (101)$$

ist, so erhält man endlich, nach einigen weiteren leichten Reductionen, wenn man zugleich die entsprechenden Gleichungen in den beiden anderen Coordinaten ansetzt:

$$\sin a \cos(A' + v) = \frac{rx' - xr'}{\sqrt{p}}, \quad \sin b \cos(B' + v) = \frac{ry' - yr'}{\sqrt{p}}, \quad \sin c \cos(C' + v) = \frac{rz' - zr'}{\sqrt{p}} \quad (102)$$

Aus diesen Gleichungen und den Gleichungen (10) der zehnten Vorlesung (wobei jetzt jedoch x anstatt x'' gesetzt ist), kann man die Gauss'schen Constanten für den Aequator aus den heliocentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten r, r', p und v bestimmen, wobei die letzteren Grössen, wie auf S. 40 der vierten Vorlesung berechnet werden können. Durch Differentiation der Gleichung $p = r(1 + e \cos v)$ erhält man aber auch noch $e \sin v = r' \sqrt{p}$, und hat somit zur Berechnung von e und v :

$$e \cos v = \frac{p}{r} - 1, \quad e \sin v = r' \sqrt{p} \quad (103)$$

Für die Parabel ist $e \sin v = 2e \sin \frac{v}{2} \cos \frac{v}{2} = r' \sqrt{p} = r' \sqrt{2q}$, oder, wenn man $\cos \frac{v}{2}$ mit Hülfe von $q = r \cos^2 \frac{v}{2}$ eliminirt und bedenkt, dass $g^2 = \frac{2}{r}$ ist.

$$\sin \frac{v}{2} = \frac{r'}{g} \quad (104)$$

Es sollen nun auch gleich die Formeln abgeleitet werden, nach welchen man die ekliptikalen Elemente aus den Constanten für den Aequator berechnen kann. Analog den Gleichungen (99) kann man schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \sin b \cos(B' + v) &= \sin b \cos B \cos u - \sin b \sin B \sin u \\ \sin c \cos(C' + v) &= \sin c \cos C \cos u - \sin c \sin C \sin u \\ \sin b \sin(B' + v) &= \sin b \sin B \cos u + \sin b \cos B \sin u \\ \sin c \sin(C' + v) &= \sin c \sin C \cos u + \sin c \cos C \sin u \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

Die Gleichungen (4) der zehnten Vorlesung enthalten aber die Relationen, welche zwischen den ekliptikalen Elementen i und Ω und den Constanten für den Aequator bestehen. Führt man daher auf der rechten Seite der Gleichungen (105) die ekliptikalen Elemente und die Schiefe der Ekliptik ε nach den Formeln (4) der zehnten Vorlesung ein, so erhält man die gewünschten Formeln. Multiplicirt man also die erste und die dritte der Formeln (105) mit $\tan \varepsilon$ und subtrahirt die Producte bezw. von der zweiten und vierten, so folgt bei Einführung von Ω, i, ε nach einigen leichten Reductionen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin i}{\cos \varepsilon} \cos u &= \sin c \cos(C' + v) - \sin b \cos(B' + v) \tan \varepsilon \\ \frac{\sin i}{\cos \varepsilon} \sin u &= \sin c \sin(C' + v) - \sin b \sin(B' + v) \tan \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

Ω erhält man aus der ersten und dritten oder fünften der Gleichungen (4) der zehnten Vorlesung, und $\cos i$ aus der zweiten.

Ausserdem ist:

$$\omega = u - v; \quad A = A' - \omega; \quad B = B' - \omega; \quad C = C' - \omega \dots (107)$$

Als Controlle benutzt man die letzte der Gleichungen (11) der zehnten Vorlesung. Die übrigen Elemente werden wie im Vorhergehenden bestimmt.

Die oben erwähnten geschlossenen Ausdrücke für f_t und g_t finden hauptsächlich bei der Bahnverbesserung auf Grund längerer Zwischenzeiten Verwendung und werden im II. Abschnitte abgeleitet werden.

II. Methoden der Bahnverbesserung.

Die hier zur Entwicklung gelangenden Methoden der Bahnverbesserung haben entweder die Reihen für f und g , oder geschlossene Ausdrücke für dieselben zur Grundlage. Dieselben sind auf Verbesserung von Bahnen beliebiger Excentricität eingerichtet und gestatten bequem, von einer Bahn auf die andere, wie z. B. von der Parabel auf die Ellipse, überzugehen. Die auf die Reihen gegründete Bahnverbesserung kommt hauptsächlich bei mässigen Zwischenzeiten in Betracht, wie z. B., wenn man eine nach den Formeln des I. Abschnittes gerechnete Bahn verbessern will, um die Beobachtungen genauer darzustellen. In den Variationen der Reihen für f und g können mit Bequemlichkeit nur Producte von der Ordnung der dritten Potenz der Zwischenzeiten, multiplicirt mit einer Variation berücksichtigt werden. Man kann von vornherein sich vergewissern, ob die Reihen ausreichen werden, indem man in den f und g Reihen (S. 475) die höheren Glieder abschätzt. Sind die mit höheren Potenzen von τ als τ^5 multiplicirten Glieder unmerklich, dann geben die Reihen im Allgemeinen befriedigende Resultate. Anderenfalls ist es gerathen, von vornherein die aus den geschlossenen Ausdrücken für f und g abgeleiteten Formeln anzuwenden. Es ist, wenn man sich mit linearen Variationen begnügt:

$$\varrho \cos \delta \partial \alpha = -\sin \alpha \partial x + \cos \alpha \partial y, \quad \varrho \partial \delta = -\sin \delta (\cos \alpha \partial x + \sin \alpha \partial y) + \cos \delta \partial z. \quad (108)$$

Variirt man nun die Formeln (96), indem man die Producte etc. der Variationen, und die Glieder, welche mit höheren Potenzen von τ als τ^3 multiplicirt sind, übergeht, da sie nicht in einfacher Weise berücksichtigt werden können und nur für längere Zwischenzeiten oder für sehr kleine Werthe von r merklich sind, so erhält man für Daten, welche der Epoche folgen:

$$\left. \begin{aligned} \partial \omega_t &= f_t \partial \omega + \omega \partial f_t + g_t \partial \omega' + \omega' \partial g_t \\ \partial f_t &= \frac{3}{2} \tau^2 \frac{\partial r}{r^4} + \tau^3 \frac{\partial r'}{2 r^4} - \frac{2 \tau^3 r'}{r^5} \partial r \dots \\ \partial g_t &= \frac{1}{2} \frac{\tau^3 \partial r}{r^4} \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (109)$$

wobei $\omega = x, y, z$ gesetzt ist.

Da $\alpha = \alpha_2$, $\delta = \delta_2$ Constanten sind, so ist ferner:

$$\partial x = \cos \alpha \cos \delta \partial \varrho = \frac{\xi}{\varrho} \partial \varrho, \quad \partial y = \sin \alpha \cos \delta \partial \varrho = \frac{\eta}{\varrho} \partial \varrho, \quad \partial z = \sin \delta \partial \varrho = \frac{\zeta}{\varrho} \partial \varrho \quad (110)$$

und:

$$\partial r = \frac{x \partial x + y \partial y + z \partial z}{r} = \left\{ \frac{x}{r} \frac{\xi}{\varrho} + \frac{y}{r} \frac{\eta}{\varrho} + \frac{z}{r} \frac{\zeta}{\varrho} \right\} \partial \varrho \dots \dots \dots (111)$$

Der Coëfficient von $\partial \varrho$ in (111) ist der Cosinus des Winkels am Himmelskörper zwischen den nach der Sonne und der Erde gezogenen Linien. Wird dieser Winkel mit β bezeichnet, so ist auch:

$$\cos \beta = \frac{\varrho - R \cos \psi}{r}, \quad \partial r = \cos \beta \partial \varrho \quad (112)$$

Aus den Formeln (109) erhält man mit Rücksicht auf (110) und (112) ($\xi, \eta, \xi = w$), wenn man noch in ∂f das meist kleine, nicht bequem mitzunehmende Glied $\tau^3 \frac{\partial r'}{2 r^4}$ fortlässt:

$$\partial \omega_t = f w_t \partial \varrho + g_t \partial \omega' \quad (113)$$

wobei gesetzt ist:

$$f w_t = f_t \frac{w}{\varrho} + \frac{\cos \beta}{2 r^4} \left(3 \tau^2 \omega + \tau^3 \left[\omega' - \frac{4 r' \omega}{r} \right] \right) \quad (114)$$

oder auch, für alle drei Coordinaten ausgeschrieben:

$$\left. \begin{aligned} f_{x_t} &= \frac{f_t}{\varrho} \xi + \frac{\cos \beta}{2 r^4} \left(3 \tau^2 x + \tau^3 \left[x' - \frac{4 r'}{r} x \right] \right); \quad \partial x_t = f_{x_t} \partial \xi + g_t \partial x', \\ f_{y_t} &= \frac{f_t}{\varrho} \eta + \frac{\cos \beta}{2 r^4} \left(3 \tau^2 y + \tau^3 \left[y' - \frac{4 r'}{r} y \right] \right); \quad \partial y_t = f_{y_t} \partial \eta + g_t \partial y', \\ f_{z_t} &= \frac{f_t}{\varrho} \xi + \frac{\cos \beta}{2 r^4} \left(3 \tau^2 z + \tau^3 \left[z' - \frac{4 r'}{r} z \right] \right); \quad \partial z_t = f_{z_t} \partial \xi + g_t \partial z', \end{aligned} \right\} \quad . . . (115)$$

Man kann zunächst durch Abschätzung der mit τ^3 multiplicirten Glieder entscheiden, ob dieselben vernachlässigt werden können. Aus den Gleichungen (108) und (115) erhält man, wenn man $\partial, \alpha = \cos \delta \partial \alpha$ setzt:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\varrho_1} [\cos \alpha_1 f_{y_1} - \sin \alpha_1 f_{x_1}], \quad B_1 = -\frac{1}{\varrho_1} [\sin \delta_1 (\sin \alpha_1 f_{y_1} + \cos \alpha_1 f_{x_1}) - \cos \delta_1 f_{z_1}], \quad C_1 = \frac{g_1}{\varrho_1} \\ A_3 &= \frac{1}{\varrho_3} [\cos \alpha_3 f_{y_3} - \sin \alpha_3 f_{x_3}], \quad B_3 = -\frac{1}{\varrho_3} [\sin \delta_3 (\sin \alpha_3 f_{y_3} + \cos \alpha_3 f_{x_3}) - \cos \delta_3 f_{z_3}], \quad C_3 = \frac{g_3}{\varrho_3} \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial, \alpha_1 &= A_1 \partial \varrho - C_1 \sin \alpha_1 \partial x' + C_1 \cos \alpha_1 \partial y' \\ \partial, \alpha_3 &= A_3 \partial \varrho - C_3 \sin \alpha_3 \partial x' + C_3 \cos \alpha_3 \partial y' \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial \delta_1 &= B_1 \partial \varrho - C_1 \sin \delta_1 \cos \alpha_1 \partial x' - C_1 \sin \delta_1 \sin \alpha_1 \partial y' + C_1 \cos \delta_1 \partial z' \\ \partial \delta_3 &= B_3 \partial \varrho - C_3 \sin \delta_3 \cos \alpha_3 \partial x' - C_3 \sin \delta_3 \sin \alpha_3 \partial y' + C_3 \cos \delta_3 \partial z' \end{aligned} \right\} \quad . . . (118)$$

Eliminirt man nun aus den Gleichungen (117) einmal y , das andere Mal x , so folgt:

$$\left. \begin{aligned} C_3 \sin \alpha_3 \partial, \alpha_1 - C_1 \sin \alpha_1 \partial, \alpha_3 &= (A_1 C_3 \sin \alpha_3 - A_3 C_1 \sin \alpha_1) \partial \varrho + C_1 C_3 \sin (\alpha_3 - \alpha_1) \partial y' \\ C_3 \cos \alpha_3 \partial, \alpha_1 - C_1 \cos \alpha_1 \partial, \alpha_3 &= (A_1 C_3 \cos \alpha_3 - A_3 C_1 \cos \alpha_1) \partial \varrho + C_1 C_3 \sin (\alpha_3 - \alpha_1) \partial x' \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

Setzt man jetzt:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \frac{C_3 \cos \alpha_3 \partial, \alpha_1 - C_1 \cos \alpha_1 \partial, \alpha_3}{C_1 C_3 \sin (\alpha_3 - \alpha_1)}, \quad Q_x = \frac{A_1 C_3 \cos \alpha_3 - A_3 C_1 \cos \alpha_1}{C_1 C_3 \sin (\alpha_3 - \alpha_1)} \\ P_y &= \frac{C_3 \sin \alpha_3 \partial, \alpha_1 - C_1 \sin \alpha_1 \partial, \alpha_3}{C_1 C_3 \sin (\alpha_3 - \alpha_1)}, \quad Q_y = \frac{A_1 C_3 \sin \alpha_3 - A_3 C_1 \sin \alpha_1}{C_1 C_3 \sin (\alpha_3 - \alpha_1)} \end{aligned} \right\} \quad . . . (120)$$

dann ist:

$$\partial x' = P_x - Q_x \partial \varrho, \quad \partial y' = P_y - Q_y \partial \varrho \quad (121)$$

Führt man diese Ausdrücke für $\partial x'$ und $\partial y'$ in die Gleichungen (118) ein, so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} P_{x_1} &= \frac{\partial \delta_1 + C_1 \sin \delta_1 (\cos \alpha_1 P_x + \sin \alpha_1 P_y)}{C_1 \cos \delta_1}, & Q_{x_1} &= \frac{B_1 + C_1 \sin \delta_1 (\cos \alpha_1 Q_x + \sin \alpha_1 Q_y)}{C_1 \cos \delta_1} \\ P_{x_3} &= \frac{C \delta_3 + C_3 \sin \delta_3 (\cos \alpha_3 P_x + \sin \alpha_3 P_y)}{C_3 \cos \delta_3}, & Q_{x_3} &= \frac{B_3 + C_3 \sin \delta_3 (\cos \alpha_3 Q_x + \sin \alpha_3 Q_y)}{C_3 \cos \delta_3} \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

$$\partial z' = P_{x_1} - Q_{x_1} \partial \varrho, \quad \partial z' = P_{x_3} - Q_{x_3} \partial \varrho \quad \dots \quad (123)$$

Die Formeln (120) bis (123) gelten für alle Arten von Bahnen. Will man in der Bahnverbesserung keine Annahme über die Excentricität machen, so erhält man sofort aus den Gleichungen (123):

$$\partial \varrho = \frac{P_{x_3} - P_{x_1}}{Q_{x_3} - Q_{x_1}} \quad \dots \quad (124)$$

Die Gleichungen (121) und (123) ergeben dann noch $\partial x', \partial y', \partial z'$.

Will man aber versuchen, die Beobachtungen durch eine Parabel oder Kreisbahn darzustellen, so muss natürlich wieder die betreffende Geschwindigkeitsgleichung befriedigt werden. Dabei ist es natürlich ganz einerlei, von welcher Art von Bahn man ausgeht. Macht man aber eine Voraussetzung über die Excentricität, so sind fünf Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der vier Unbekannten $\partial \varrho, \partial x', \partial y', \partial z'$ gegeben. Können dieselben nicht gleichzeitig befriedigt werden, so ist natürlich nur eine allgemeine Bahnbestimmung möglich. Um die Zahl der Bedingungsgleichungen auf vier zu reduciren, ist es am bequemsten, entweder eine der Gleichungen (123) fortzulassen, oder diese beiden Gleichungen in der Weise in eine einzige zusammenzuziehen, dass die resultirende Bahn gleiche Fehler in den beiden äusseren Declinationen übrig lässt. Um das Letztere zu erreichen, ertheilt man den Coëfficienten P_x und Q_x Gewichte, die sich direct aus den Zwischenzeiten und dem Gange der Function $\sin \delta$ ergeben, und führt dann das Mittel der beiden Gleichungen (123) in die Rechnung ein. Wie man aber auch verfahren mag, jedenfalls ergibt der, durch die nicht benutzten, oder die theilweise benutzten Gleichungen, in der betreffenden Coordinate zum Vorschein kommende Fehler ein Kriterium über die Zulässigkeit der gemachten Excentricitätsannahme. Ist der Fehler bedeutend grösser als die Unsicherheit der Beobachtungen, so kann man ohne Mühe während der Rechnung vermittelst der Formel (124) etc. auf eine allgemeine Bahn übergehen.

Will man nun eine Parabel berechnen, so müssen die Correctionen $\partial \varrho, \partial x', \partial y', \partial z'$, so bestimmt werden, dass:

$$(x' + \partial x')^2 + (y' + \partial y')^2 + (z' + \partial z')^2 = \frac{2}{r + \partial r} = \frac{2}{r} - \frac{2 \partial r}{r^2} + \frac{2(\partial r)^2}{r^3} - \frac{2(\partial r)^3}{r^4} + \dots,$$

oder, da:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}$$

ist, wo die allgemeine Geschwindigkeitsgleichung bedeutet, dass man von einer beliebigen Bahn ausgehen kann, auch:

$$2x' \partial x' + 2y' \partial y' + 2z' \partial z' + (\partial x')^2 + (\partial y')^2 + (\partial z')^2 = \frac{1}{a} - \frac{2 \partial r}{r^2} + \frac{2(\partial r)^2}{r^3} - \frac{2(\partial r)^3}{r^4} + \dots \quad (125)$$

Die Gleichung (112) gibt nur einen genäherten Werth von ∂r als Function von $\partial \varrho$. Gerade hier könnten die so oft angewandten Differentialbeziehungen zwischen den zu corrigirenden Fundamentalgrössen, wie z. B. den Elementen, und den Unterschieden Beobachtung minus Rechnung für kleine Werthe von r oder ϱ zu grossen

Ungenauigkeiten führen. Um dies zu vermeiden, soll zunächst ∂r genau als Function von ∂q ausgedrückt werden. Es ist genau:

$$(r + \partial r)^2 = (x + \partial x)^2 + (y + \partial y)^2 + (z + \partial z)^2,$$

oder nach den Formeln (110), (111), (112) ebenfalls genau:

$$2r\partial r + (\partial r)^2 = 2r \cos \beta \partial q + (\partial q)^2.$$

Setzt man nun:

$$\frac{\partial r}{\partial q} = \frac{2r \cos \beta + \partial q}{2r + \partial r} = \Gamma,$$

so erhält man, nachdem ∂r im Nenner durch $\Gamma \partial q$ ersetzt worden ist:

$$2r \cos \beta + \partial q = \Gamma(2r + \Gamma \partial q).$$

Multiplieirt man jetzt beide Seiten mit ∂q , so ergibt sich die folgende quadratische Gleichung:

$$(\Gamma \partial q)^2 + 2r \Gamma \partial q = (2r \cos \beta + \partial q) \partial q,$$

und daher auch:

$$\Gamma \partial q = \partial r = -r \pm [r^2 + (2r \cos \beta + \partial q) \partial q]^{1/2}.$$

Entwickelt man die Quadratwurzel und bedenkt, dass nach Formel (112) das untere Zeichen keine Bedeutung hat, so wird:

$$\partial r = \cos \beta \partial q + \frac{\sin^2 \beta}{2r} (\partial q)^2 - \frac{\cos \beta \sin^2 \beta}{2r^2} (\partial q)^3 \dots \quad (126)$$

und daher auch:

$$\left. \begin{aligned} (\partial r)^2 &= \cos^2 \beta (\partial q)^2 + \frac{\cos \beta \sin^2 \beta}{r} (\partial q)^3 \dots \\ (\partial r)^3 &= \cos^3 \beta (\partial q)^3 \dots \end{aligned} \right\} \dots \quad (127)$$

Eliminirt man nun ∂r , $(\partial r)^2$, $(\partial r)^3$ aus der Gleichung (125) mittelst der Formeln (126) und (127) und ersetzt $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$ nach den Formeln (121) und (123), wobei, da nur eine Gleichung $\partial z'$ einzuführen ist, das Subscript 1 oder 3 fortgelassen ist, so erhält man, wenn man noch nach Potenzen von ∂q ordnet, nach einigen leicht ersichtlichen Reductionen:

$$Q \partial q = P - \frac{1}{2} [(\partial x')^2 + (\partial y')^2 + (\partial z')^2] - \frac{1 - 3 \cos^2 \beta}{2r^3} (\partial q)^2 + \frac{3 \cos \beta \left(1 - \frac{5}{3} \cos^2 \beta\right)}{2r^4} (\partial q)^3 \dots \quad (128)$$

wo gesetzt worden ist:

$$Q = \frac{\cos \beta}{r^2} - [x' Q_x + y' Q_y + z' Q_z]; \quad P = \frac{1}{2a} - [x' P_x + y' P_y + z' P_z] \dots \quad (128')$$

Glieder mit höheren Potenzen von ∂q können leicht dieser Gleichung hinzugefügt werden, aber man wird kaum, selbst bei kleinen Werthen von r , Ursache haben, die dritten Potenzen beizubehalten. In der Praxis bestimmt man zunächst die lineare Variation von ∂q aus $Q \partial q = P$. Dann berechnet man $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$ nach (121) und (123) und aus diesen die übrigen Glieder rechter Hand der Gleichung (128), deren Summe mit ΔP bezeichnet werden mag. Ein genauerer Werth von ∂q ergibt sich dann aus $Q \partial q = P + \Delta P$ u. s. w. Somit ergeben sich gleichzeitig die endgültigen Werthe der gesuchten Correctionen ∂q , $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$.

Zur Verbesserung einer Kreisbahn, entweder mit oder ohne Annahme über die Excentricität, verfährt man ganz ähnlich wie oben im Falle der Parabel. Da aber für den Kreis die geschlossenen Ausdrücke für f und g ebenso bequem sind, wie die entsprechenden Reihen, so kann man die Verbesserung einer Kreisbahn stets auf die ge-

geschlossenen Ausdrücke für f und g gründen. Es sollen daher zunächst nach Kühnert¹⁾ und v. Oppolzer²⁾ die allgemeinen geschlossenen Ausdrücke für f und g und ihre linearen Variationen abgeleitet werden.

Da in der Bahnebene, wenn die positive x -Axe in das Perihel gelegt wird:

$$x = r \cos v = a(\cos E - e), \quad y = r \sin v = a \cos \varphi \sin E \quad \quad (129)$$

ist; da ferner:

$$dM = \mu dt, \quad dE = \frac{a}{r} dM \quad \quad (130a)$$

und somit auch:

$$E' = \frac{dE}{d\tau} = \frac{1}{r\sqrt{a}} \quad \quad (130b)$$

ist, so ergibt die Differentiation der Coordinaten x und y , gemäss der Gleichungen (129):

$$x' = \frac{dx}{d\tau} = -\sin E \frac{\sqrt{a}}{r}, \quad y' = \frac{dy}{d\tau} = \cos \varphi \cos E \frac{\sqrt{a}}{r} \quad \quad (131)$$

Wendet man nun die Gleichung $\omega_t = f_t \omega + g_t \omega'$ auf x und y (cfr. Gleichung 96) an, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (129) und (131):

$$\left. \begin{aligned} \cos E_t - \cos E &= (f_t - 1)(\cos E - e) - g_t \frac{\sin E}{r\sqrt{a}} \\ \sin E_t - \sin E &= (f_t - 1)\sin E + g_t \frac{\cos E}{r\sqrt{a}} \end{aligned} \right\} \quad \quad (132)$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $\cos E$, die zweite mit $\sin E$ und addiert, so ergibt sich nach einer leichten Reduction, wenn noch $2\bar{g} = E_t - E$ gesetzt wird:

$$f_t = 1 - \frac{2a}{r} \sin^2 \bar{g} = 1 + \frac{a}{r} (\cos 2\bar{g} - 1) \quad \quad (133)$$

Multipliziert man aber die erste der Gleichungen (132) mit $\sin E$, und die zweite mit $\cos E$ und subtrahirt, dann kann man ableiten:

$$g_t = r\sqrt{a} \{ \sin 2\bar{g} - (f_t - 1) e \sin E \} \quad \quad (134)$$

oder, wenn man $f_t - 1$ mit Hülfe der Gleichung (133) eliminirt und einige leicht ersichtliche Reductionen vornimmt:

$$g_t = a^{3/2} \sin 2\bar{g} - 2e a^{3/2} \sin \bar{g} \cos \frac{1}{2} [E_t + E] \quad \quad (135)$$

wofür auch geschrieben werden kann:

$$g_t = a^{3/2} \{ \sin 2\bar{g} - e \sin E_t + e \sin E \} = a^{3/2} \{ \sin 2\bar{g} + (M_t - E_t) - (M - E) \},$$

oder endlich, da $M_t - M = \frac{\tau}{a^{3/2}}$ ist:

$$g_t = \tau - a^{3/2} (2\bar{g} - \sin 2\bar{g}) \quad \quad (136)$$

Setzt man dagegen im ersten Gliede der rechten Seite der Gleichung (135) für a seinen Werth $r + a e \cos E$, so kann man auch schreiben:

$$g_t = a^{1/2} r \sin 2\bar{g} + 2a^{3/2} e \sin \bar{g} \left(\cos E \cos \bar{g} - \cos \frac{1}{2} [E_t + E] \right),$$

¹⁾ Folgerungen aus v. Oppolzer's neuer Methode für die Bearbeitung späterer Oppositionen. *Astronomische Nachrichten*, Bd. 95, Nr. 2266.

²⁾ Lehrbuch zur Bahnbestimmung, Bd. I, S. 96.

oder, da:

$$\sqrt{q} \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{r-q}; \quad \sqrt{q} \operatorname{tg} \frac{v_t}{2} = \sqrt{r_t-q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (147)$$

ist, auch:

$$\gamma_t = \sqrt{r_t-q} - \sqrt{r-q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (148)$$

Für die Kreisbahn ist $a = r$ und $r' = 0$. Somit ergeben die Gleichungen (133) und (138):

$$2\bar{g} = \frac{\tau}{a^{3/2}}; \quad f_t = \cos 2\bar{g}; \quad g_t = a^{1/2} \sin 2\bar{g}; \quad \gamma_t = \sqrt{2a} \sin \bar{g} \quad . \quad . \quad (149)$$

Für die Kreisbahn also kann man f_t und g_t direct berechnen, während für andere Bahnen zunächst γ_t zu bestimmen ist. Für die Ellipse und die Hyperbel ist γ_t als Function von a und \bar{g} gegeben [cfr. Gleichung (141)] und für die Parabel entweder als Functionen von q, r, r_t oder als Function von q, v, v_t [cfr. Gleichung (148) und (146)]. Die in γ_t vorkommenden heliocentrischen Coordinaten berechnet man in der üblichen Weise. Die hier abgeleiteten geschlossenen Ausdrücke für f_t und g_t können bequem zur Berechnung der rechtwinkligen heliocentrischen Coordinaten zur Zeit t verwandt werden, wenn die Reihen für f_t und g_t nicht ausreichen und wenn man die Berechnung der Constanten für den Aequator vermeiden will.

Es sollen nun weiter die zur Bahnverbesserung auf Grund von Zwischenzeiten beliebiger Länge nothwendigen Differentialbeziehungen zwischen f_t, g_t und den in diesen Methoden gewählten Fundamentalgrössen q, x', y', z' abgeleitet werden. Mit Rücksicht auf die in der allgemeinen Bahn geltenden bekannten Relationen, speciell die theilweise schon benutzten:

$$\frac{\tau}{a^{3/2}} = E - e \sin E, \quad r = a (1 - e \cos E), \quad g^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}, \quad r r' = a^{1/2} e \sin E, \quad E' = \frac{1}{r a^{1/2}} \quad (150)$$

erhält man mit Kühnert durch Differentiation der Gleichung

$$\frac{\tau}{a^{3/2}} = (E_t - E) - e (\sin E_t - \sin E):$$

$$\partial (2\bar{g}) = \frac{a}{r_t} \left\{ F(\bar{g}) \partial (g^2) + \left[\frac{2}{r^2} F(\bar{g}) - \frac{\sin 2\bar{g}}{a} \right] \partial r - \frac{2 \sin^2 \bar{g}}{a^{1/2}} \partial (r r') \right\} \quad . \quad . \quad (151)$$

wobei gesetzt worden ist:

$$F(\bar{g}) = -\frac{3}{2} \frac{\tau}{a^{1/2}} + r \sin 2\bar{g} + a^{1/2} (r r') \sin^2 \bar{g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (152)$$

Differentiirt man jetzt noch die Ausdrücke (133) und (136) oder (138) für f_t und g_t und setzt:

$$\left. \begin{aligned} M_t &= - \left\{ \frac{2a^2}{r} \sin^2 \bar{g} + \frac{a^2}{r r_t} \sin 2\bar{g} F(\bar{g}) \right\} \\ N_t &= - a^{1/2} \left\{ \frac{3}{2} (2\bar{g} - \sin 2\bar{g}) + \frac{2 \sin^2 \bar{g}}{r_t} F(\bar{g}) \right\} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (153)$$

so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \partial f_t &= \left\{ \frac{a}{r r_t} \sin^2 2\bar{g} + \frac{2a}{r^2} \sin^2 \bar{g} + \frac{2}{r^2} M_t \right\} \partial r + M_t \partial (g^2) + \frac{2a^{1/2}}{r r_t} \sin^2 \bar{g} \sin 2\bar{g} \partial (r r') \\ \partial g_t &= \left\{ \frac{2}{r^2} N_t + \frac{2a^{1/2}}{r_t} \sin^2 \bar{g} \sin 2\bar{g} \right\} \partial r + N_t \partial (g^2) + \frac{4a^2}{r_t} \sin^4 \bar{g} \partial (r r') \end{aligned} \right\} \quad (154)$$

Diese Ausdrücke sollen nun durch die Einführung der Hilfsgrösse γ_t nach der Formel (141) umgeformt werden, so dass dieselben für alle Arten von Bahnen

bestimmt sind. Bedenkt man, dass $\sin 2\bar{g} = \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2} \gamma_t \sqrt{1 - \frac{\gamma_t^2}{2a}}$ gesetzt werden, und dass in N_t nach der Gleichung (136) $2\bar{g} - \sin 2\bar{g}$ als Function von g_t ausgedrückt werden kann, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} M_t &= -\frac{a\gamma_t}{rr_t} \left[r_t \gamma_t + \sqrt{1 - \frac{\gamma_t^2}{2a}} \left(2r\gamma_t \sqrt{1 - \frac{\gamma_t^2}{2a}} + \frac{rr'\gamma_t^2}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \frac{3}{2} \tau \right) \right] \\ N_t &= -a \left[\frac{3}{2} \left(\tau \left[1 - \frac{\gamma_t^2}{r_t} \right] - g_t \right) + \frac{\gamma_t^3}{r_t} \left(\sqrt{2} r \sqrt{1 - \frac{\gamma_t^2}{2a}} + \frac{rr'\gamma_t}{2} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (155)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial f_t &= \left\{ \frac{\gamma_t^3}{rr_t} \left[\frac{r_t}{r} + 2 \left(1 - \frac{\gamma_t^2}{2a} \right) \right] + \frac{2M_t}{r^2} \right\} \partial r + M_t \partial (g^2) + \frac{\sqrt{2}\gamma_t^3}{r_t r} \sqrt{1 - \frac{\gamma_t^2}{2a}} \partial (rr') \\ \partial g_t &= \left\{ \frac{\sqrt{2}\gamma_t^3}{r_t} \sqrt{1 - \frac{\gamma_t^2}{2a}} + \frac{2N_t}{r^2} \right\} \partial r + N_t \partial (g^2) + \frac{\gamma_t^4}{r_t} \partial (rr') \end{aligned} \right\} \quad (156)$$

Es ist zu beachten, dass $\sqrt{1 - \frac{\gamma_t^2}{2a}} = \cos \bar{g}$ ist und deshalb, ebenso wie γ_t , direct berechnet werden kann.

Für die Parabel ist $g^2 = \frac{2}{r}$ und $\partial (g^2) = -\frac{2}{r^2} \partial r$. Daher fallen in ∂f_t und ∂g_t alle Glieder, welche M_t und N_t enthalten, fort. Setzt man dann noch für die Parabel $a = \infty$, so wird:

$$\left. \begin{aligned} \partial f_t &= \frac{\gamma_t^3}{r_t r} \left[\frac{r_t}{r} + 2 \right] \partial r + \frac{\sqrt{2}\gamma_t^3}{r r_t} \partial (rr') \\ \partial g_t &= \frac{\sqrt{2}\gamma_t^3}{r_t} \partial r + \frac{\gamma_t^4}{r_t} \partial (rr') \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (157)$$

In der Kreisbahn ist $g^2 = \frac{1}{r} = \frac{1}{a}$ und $\partial (g^2) = -\frac{1}{r^2} \partial r$. Daher ist die Summe der M_t und N_t enthaltenden Glieder beziehungsweise $\frac{M_t}{r^2} \partial r$ und $\frac{N_t}{r^2} \partial r$. Setzt man dann noch $r_t = a$ und substituirt die Ausdrücke (155) für M_t und N_t in die Formeln (156), so folgt:

$$\partial f_t = \frac{\gamma_t}{a^3} \sqrt{1 - \frac{\gamma_t^2}{2a}} \frac{3}{\sqrt{2}} \tau \partial r, \quad \partial g_t = -\frac{3}{2a} \left(\tau \left[1 - \frac{\gamma_t^2}{a} \right] - g_t \right) \partial r \quad (158)$$

oder, wenn man γ_t eliminirt und g_t nach den Formeln (149) einführt:

$$\partial f_t = \frac{3}{2} \frac{\tau g_t}{a^4} \partial a, \quad \partial g_t = -\frac{3}{2a} (\tau f_t - g_t) \partial a \dots \dots \dots (159)$$

Die Ausdrücke für ∂f_t und ∂g_t in der Parabel und in der Kreisbahn lassen sich aber auch in einfacherer Weise direct ableiten.

Um ferner eine allgemeine Bahn durch die Bahnverbesserung zu bestimmen, sind die Ausdrücke (156), (157) oder (159) zu benutzen, je nachdem die zu verbessernde Bahn eine allgemeine Bahn, eine Parabel oder eine Kreisbahn war. Macht man aber eine Annahme über die Excentricität, so muss offenbar wieder der betreffenden Geschwindigkeitsgleichung genügt werden. Im Uebrigen verfährt man ganz in derselben Weise wie bei der Anwendung der Reihen für f_t und g_t .

Besonders zu betonen ist, dass in diesen Methoden der Bahnverbesserung eine neue Hypothese nicht in dem gewöhnlichen Sinne gebildet wird, dass man aus der ersten Hypothese (directen Lösung) sich genauere Werthe für die eingeführten Näherungswerthe (wie z. B. für die Verhältnisse der

Dreiecke) verschafft, sondern dass man mit Hülfe von Differentialbeziehungen solche Correctionen zu den Fundamentalgrössen q, x, y, z zur Zeit der Epoche berechnet, dass die Fehler zwischen Beobachtung und Rechnung zum Verschwinden gebracht werden. Dies Verfahren hat denselben Vorzug der schnelleren Annäherung gegenüber der gewöhnlichen Hypothesenrechnung, wie ihn in der versuchsweisen Auffindung der Distanzen die fortgesetzte differentielle Verbesserung der ersten Annahme hat gegenüber dem Verfahren, als Anfangswerth eines neuen Versuches den Endwerth des vorangehenden einzusetzen.

Bei der Bahnverbesserung auf Grund der geschlossenen Ausdrücke für f_t und g_t wird nun ganz in derselben Weise verfahren, wie bei der Ableitung der Formeln (108) bis (118); nur hat man anstatt der beiden letzten Formeln (109) für $\partial f_t, \partial g_t$ an Stelle der Reihen die obigen geschlossenen Ausdrücke einzuführen. Zunächst soll der allgemeinste Fall behandelt werden, nämlich, dass man eine allgemeine Bahn durch Bestimmung einer neuen allgemeinen Bahn verbessern will. Setzt man der Kürze halber:

$$\gamma_t^c = \sqrt{1 - \frac{\gamma_t^2}{2a}} = \cos \bar{g} = \cos \frac{1}{2} [E_t - E] \quad (160)$$

wobei γ_t^c natürlich das Vorzeichen von $\cos \bar{g}$ bekommt, so erhält man durch Anwendung der Formeln (155) und (156), anstatt der Formeln (113) und (114) die folgende Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} \omega = \left\{ f_t \frac{w}{q} + \frac{2 \cos \beta}{r^2} (\omega M_t + \omega' N_t) + \frac{\cos \beta \gamma_t^2}{r r_t} \left(\omega \left[\frac{r_t}{r} + 2 \gamma_t^2 \right] + \sqrt{2} \omega' r \gamma_t \gamma_t^c \right) \right\} \partial q \\ + g_t \partial \omega' + (\omega M_t + \omega' N_t) \partial (g^2) + \left\{ \frac{\sqrt{2} \omega \gamma_t^3}{r r_t} \gamma_t^c + \frac{\omega' \gamma_t^4}{r_t} \right\} \partial (r r') \end{aligned} \right\} (161)$$

Da nun: $g^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \Sigma \omega'^2$ und $r r' = x x' + y y' + z z' = \Sigma \omega \omega'$, so ist:

$$\partial (g^2) = 2 \Sigma \omega' \partial \omega', \quad \partial (r r') = \Sigma \omega \partial \omega' + \Sigma \omega' \partial \omega = \Sigma \omega \partial \omega' + (\Sigma \omega' w) \frac{\partial q}{q}. \quad (162)$$

Setzt man also:

$$\varphi = \frac{\Sigma \omega' w}{q} = \frac{x' \xi + y' \eta + z' \zeta}{q} \quad (163)$$

so erhält man an Stelle der Gleichung (161) nach einigen leichten Umformungen mit Rücksicht auf die Ausdrücke (162) die folgende:

$$\left. \begin{aligned} \partial \omega_t = \left\{ f_t \frac{w}{q} + \frac{\cos \beta}{r^2} [2 (\omega M_t + \omega' N_t) + \omega \gamma_t^2] + \sqrt{2} \cos \beta \gamma_t^c \frac{\gamma_t^2}{r r_t} [\omega' r \gamma_t + \sqrt{2} \omega \gamma_t^c] \right. \\ \left. + \frac{q \gamma_t^4}{r r_t} [\omega' r \gamma_t + \sqrt{2} \omega \gamma_t^c] \right\} \partial q + g_t \partial \omega' + \frac{\gamma_t^3}{r r_t} [\omega' r \gamma_t + \sqrt{2} \omega \gamma_t^c] \Sigma \omega \partial \omega' + 2 (\omega M_t + \omega' N_t) \Sigma \omega' \partial \omega' \end{aligned} \right\} (164)$$

oder, wenn man:

$$g_{\omega_t} = \frac{\gamma_t^3}{r r_t} [\omega' r \gamma_t + \sqrt{2} \omega \gamma_t^c], \quad m_{\omega_t} = \omega M_t + \omega' N_t, \quad f_{\omega_t} = f_t \frac{w}{q} + \frac{\cos \beta}{r^2} [2 m_{\omega_t} + \omega \gamma_t^2] + g_{\omega_t} \left[\varphi + \frac{\sqrt{2} \cos \beta \gamma_t^c}{\gamma_t} \right] \quad (165)$$

setzt, auch:

$$\partial \omega_t = f_{\omega_t} \partial q + g_t \partial \omega' + g_{\omega_t} \Sigma \omega \partial \omega' + 2 m_{\omega_t} \Sigma \omega' \partial \omega' \quad (166)$$

So hat man zum Beispiel für die Variation der x -Coordinate zur Zeit der ersten Beobachtung:

$$\left. \begin{aligned} \partial x_1 = \left\{ \frac{\gamma_1^4}{r r_1} [\omega' r \gamma_1 + \sqrt{2} \omega \gamma_1^c], \quad m_{\omega_1} = \omega M_1 + \omega' N_1, \quad f_{\omega_1} = f_1 \frac{w}{q} + \frac{\cos \beta}{r^2} [2 m_{\omega_1} + \omega \gamma_1^2] + g_{\omega_1} \left[\varphi + \frac{\sqrt{2} \cos \beta \gamma_1^c}{\gamma_1} \right] \right\} \\ \partial x_1 = f_{\omega_1} \partial q + [g_1 + g_{\omega_1} x + 2 m_{\omega_1} x'] \partial x' + [g_{\omega_1} y + 2 m_{\omega_1} y'] \partial y' + [g_{\omega_1} z + 2 m_{\omega_1} z'] \partial z'. \end{aligned} \right\} (167)$$

In ganz analoger Weise können die Ausdrücke für $\partial y_1, \partial z_1, \partial x_3, \partial y_3, \partial z_3$ und die in denselben vorkommenden Hülfsgrössen hingeschrieben werden. Setzt man dann diese

Variationen der heliocentrischen Coordinaten für den ersten, bezw. dritten Ort in die Gleichungen (108) ein, so erhält man wieder die Beziehungen zwischen den Unterschieden „Beobachtung minus Rechnung“ und den gesuchten Correctionen zu den Fundamentalgrößen q, x', y', z' , wodurch die letzteren bestimmt werden können. So ist für den ersten und dritten Ort, wenn man wieder einige Hilfsgrößen einführt und dieselben vollständig hinschreibt:

$$\left. \begin{aligned} A_{f_1} &= \frac{1}{q_1} [\cos \alpha_1 f_{y_1} - \sin \alpha_1 f_{x_1}], & A_{f_3} &= \frac{1}{q_3} [\cos \alpha_3 f_{y_3} - \sin \alpha_3 f_{x_3}] \\ A_{g_1} &= \frac{1}{q_1} [\cos \alpha_1 g_{y_1} - \sin \alpha_1 g_{x_1}], & A_{g_3} &= \frac{1}{q_3} [\cos \alpha_3 g_{y_3} - \sin \alpha_3 g_{x_3}] \\ A_{m_1} &= \frac{1}{q_1} [\cos \alpha_1 m_{y_1} - \sin \alpha_1 m_{x_1}], & A_{m_3} &= \frac{1}{q_3} [\cos \alpha_3 m_{y_3} - \sin \alpha_3 m_{x_3}] \\ B_{f_1} &= -\frac{1}{q_1} [\sin \delta_1 (\sin \alpha_1 f_{y_1} + \cos \alpha_1 f_{x_1}) - \cos \delta_1 f_{z_1}], & B_{f_3} &= -\frac{1}{q_3} [\sin \delta_3 (\sin \alpha_3 f_{y_3} + \cos \alpha_3 f_{x_3}) - \cos \delta_3 f_{z_3}] \\ B_{g_1} &= -\frac{1}{q_1} [\sin \delta_1 (\sin \alpha_1 g_{y_1} + \cos \alpha_1 g_{x_1}) - \cos \delta_1 g_{z_1}], & B_{g_3} &= -\frac{1}{q_3} [\sin \delta_3 (\sin \alpha_3 g_{y_3} + \cos \alpha_3 g_{x_3}) - \cos \delta_3 g_{z_3}] \\ B_{m_1} &= -\frac{1}{q_1} [\sin \delta_1 (\sin \alpha_1 m_{y_1} + \cos \alpha_1 m_{x_1}) - \cos \delta_1 m_{z_1}], & B_{m_3} &= -\frac{1}{q_3} [\sin \delta_3 (\sin \alpha_3 m_{y_3} + \cos \alpha_3 m_{x_3}) - \cos \delta_3 m_{z_3}] \end{aligned} \right\} (168)$$

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{g_1}{q_1}, & C_3 &= \frac{g_3}{q_3}; \\ \partial \alpha_1 &= A_{f_1} \partial q - [\sin \alpha_1 C_1 - x A_{g_1} - 2 x' A_{m_1}] \partial x' + [\cos \alpha_1 C_1 + y A_{g_1} + 2 y' A_{m_1}] \partial y' + [z A_{g_1} + 2 z' A_{m_1}] \partial z' \\ \partial \delta_1 &= B_{f_1} \partial q - [\sin \delta_1 \cos \alpha_1 C_1 - x B_{g_1} - 2 x' B_{m_1}] \partial x' - [\sin \delta_1 \sin \alpha_1 C_1 - y B_{g_1} - 2 y' B_{m_1}] \partial y' + [\cos \delta_1 C_1 + z B_{g_1} + 2 z' B_{m_1}] \partial z' \\ \partial \alpha_3 &= A_{f_3} \partial q - [\sin \alpha_3 C_3 - x A_{g_3} - 2 x' A_{m_3}] \partial x' + [\cos \alpha_3 C_3 + y A_{g_3} + 2 y' A_{m_3}] \partial y' + [z A_{g_3} + 2 z' A_{m_3}] \partial z' \\ \partial \delta_3 &= B_{f_3} \partial q - [\sin \delta_3 \cos \alpha_3 C_3 - x B_{g_3} - 2 x' B_{m_3}] \partial x' - [\sin \delta_3 \sin \alpha_3 C_3 - y B_{g_3} - 2 y' B_{m_3}] \partial y' + [\cos \delta_3 C_3 + z B_{g_3} + 2 z' B_{m_3}] \partial z' \end{aligned} \right\} (169)$$

Der symmetrische Bau der Hilfsgrößen $A_{f_t}, A_{g_t}, A_{m_t}$ einerseits und der $B_{f_t}, B_{g_t}, B_{m_t}$ andererseits ist sofort ersichtlich. Die A_{f_t} und B_{f_t} sind ganz dieselben Hilfsgrößen, welche bei der Anwendung der Reihen für ∂f_t und ∂g_t in den Formeln (116) mit A_t und B_t bezeichnet worden sind. Fernerhin sind die A_{g_t}, B_{g_t} und A_{m_t}, B_{m_t} dieselben Functionen der g_{w_t} und m_{w_t} , wie die A_{f_t}, B_{f_t} der f_{w_t} .

Die Gleichungen (169) können auch wie folgt geschrieben werden:

$$a_i \partial q + b_i \partial x' + c_i \partial y' + d_i \partial z' = n_i \dots \dots \dots (169')$$

wobei $i = 1, 2, 3, 4$ zur Bezeichnung der Coëfficienten der vier Gleichungen gewählt werden kann. Für die Auflösung dieser Gleichungen gelten ungefähr dieselben Regeln wie für die Auflösung der Normalgleichungen in der Methode der kleinsten Quadrate. Im Allgemeinen wird daher die Anwendung der Gauss'schen Methode der Elimination von Vortheil sein. Doch kann die Auflösung unter Umständen, je nach dem Character der Coëfficienten, ausserordentlich vereinfacht werden. Der Rechner wird stets den Weg einschlagen, welcher den geringsten Arbeitsaufwand erfordert. Es sollen daher weiter keine Vorschriften über die Art der Auflösung gemacht werden. Auch kann unterlassen werden, diese Formeln auf die Bahnverbesserung mit Voraussetzung über die Excentricität einzurichten; denn es wird kaum in der Praxis vorkommen, dass man von einer gegebenen allgemeinen Bahn auf eine Parabel oder Kreisbahn übergehen will. Anders liegen die Verhältnisse, wenn man in der Bahnverbesserung von einer Parabel oder Kreisbahn ausgeht, denn dann kann die verbesserte Bahn entweder von derselben Art sein, oder, im ersten Falle, in eine Ellipse bezw. Hyperbel, und im letzteren Falle in eine Ellipse übergehen.

Es sollen nun die Formeln der Bahnverbesserung für den Fall aufgestellt werden, dass man von einer Parabel ausgeht. Indem man wieder ganz wie bei der Ableitung der Formeln (108) bis (118) verfährt, tritt jetzt die Formel (157) an Stelle der Formel (109). Die Endresultate können aber sofort aus den Gleichungen (169) hingeschrieben werden, wenn man bedenkt, dass in der Parabel M_t und N_t , und somit auch alle von diesen beiden Grössen abhängigen Hilfsgrössen fortfallen. Es fallen also die in den Formeln (167) und (168) definirten Hilfsgrössen m_{ω_t} , A_{m_t} , B_{m_t} fort. Ausserdem werden, da $a = \infty$ ist, die in der Formel (160) definirten Hilfsgrössen γ_1^c und γ_3^c gleich eins. Man kann also die vereinfachten Hilfsgrössen g_{ω_t} , f_{ω_t} , A_{f_t} , B_{f_t} für die Parabel direct aus den Formeln (167) und (168) hinschreiben und erhält dann die folgenden Formeln, die also nur gültig sind, wenn man von einer Parabel ausgeht:

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \partial \alpha_1 &= A_{f_1} \partial \varrho - [\sin \alpha_1 C_1 - x A_{g_1}] \partial x' + [\cos \alpha_1 C_1 + y A_{g_1}] \partial y' + z A_{g_1} \partial z' \\ (b) \quad \partial \delta_1 &= B_{f_1} \partial \varrho - [\sin \delta_1 \cos \alpha_1 C_1 - x B_{g_1}] \partial x' - [\sin \delta_1 \sin \alpha_1 C_1 - y B_{g_1}] \partial y' + [\cos \delta_1 C_1 + z B_{g_1}] \partial z' \\ (c) \quad \partial \alpha_3 &= A_{f_3} \partial \varrho - [\sin \alpha_3 C_3 - x A_{g_3}] \partial x' + [\cos \alpha_3 C_3 + y A_{g_3}] \partial y' + z A_{g_3} \partial z' \\ (d) \quad \partial \delta_3 &= B_{f_3} \partial \varrho - [\sin \delta_3 \cos \alpha_3 C_3 - x B_{g_3}] \partial x' - [\sin \delta_3 \sin \alpha_3 C_3 - y B_{g_3}] \partial y' + [\cos \delta_3 C_3 + z B_{g_3}] \partial z' \end{aligned} \right\} (170)$$

Damit man jetzt wieder bequem von einer Art Bahn auf eine andere übergehen kann, sollen ganz nach Art der Gleichungen (121) und (123) die $\partial \omega' = \partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$ wieder auf die Form $\partial \omega' = P_\omega - Q_\omega \partial \varrho$ gebracht werden. Eliminirt man aus der ersten und dritten der Gleichungen (170) das eine Mal $\partial z'$, das andere Mal $\partial \varrho$ und setzt:

$$A = A_{f_1} A_{g_3} - A_{f_3} A_{g_1} \dots \dots \dots (171)$$

so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} A_{g_1} C_1 \alpha_1 - A_{g_1} C_1 \alpha_1 &= A C \varrho - [\sin \alpha_1 C_1 A_{g_1} - \sin \alpha_3 C_3 A_{g_1}] \partial x' + [\cos \alpha_1 C_1 A_{g_1} - \cos \alpha_3 C_3 A_{g_1}] \partial y' \\ A_{f_3} \partial \alpha_1 - A_{f_1} \partial \alpha_3 &= -[\sin \alpha_1 C_1 A_{f_3} - \sin \alpha_3 C_3 A_{f_1} + A x] \partial x' + [\cos \alpha_1 C_1 A_{f_3} - \cos \alpha_3 C_3 A_{f_1} - A y] \partial y' - A z \partial z' \end{aligned} \right\} (170')$$

Diese beiden Gleichungen sollen jetzt an die Stelle der ersten und dritten der Gleichungen (170) treten, und die vier in Betracht kommenden Gleichungen mögen wie folgt geschrieben werden, wo die Gleichungen (170 b) und (170 d) zuletzt stehen:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \partial x' + b_1 \partial y' &= d_1 \partial \varrho + e_1 \\ a_2 \partial x' + b_2 \partial y' + c_2 \partial z' &= e_2 \\ a_3 \partial x' + b_3 \partial y' + c_3 \partial z' &= d_3 \partial \varrho + e_3 \\ a_4 \partial x' + b_4 \partial y' + c_4 \partial z' &= d_4 \partial \varrho + e_4 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (172)$$

Löst man die erste dieser Gleichungen nach $\partial \varrho$ und die zweite nach $\partial z'$ auf und substituirt die so erhaltenen Werthe von $\partial \varrho$ und $\partial z'$ in die dritte, so ergibt sich die Gleichung:

$$a \partial x' + b \partial y' = e \dots \dots \dots (173)$$

wobei gesetzt worden ist:

$$a = a_3 - \frac{c_3}{c_2} a_2 - \frac{d_3}{d_1} a_1, \quad b = b_3 - \frac{c_3}{c_2} b_2 - \frac{d_3}{d_1} b_1, \quad e = e_3 - \frac{c_3}{c_2} e_2 - \frac{d_3}{d_1} e_1 \quad \dots (174)$$

Aus dieser und der ersten der Gleichungen (172) erhält man dann:

$$\left. \begin{aligned} \partial x' &= \frac{b e_1 - b_1 e}{a_1 b - a b_1} + \frac{b d_1}{a_1 b - a b_1} \partial \varrho = P_x - Q_x \partial \varrho \\ \partial y' &= \frac{a_1 e - a e_1}{a_1 b - a b_1} - \frac{a d_1}{a_1 b - a b_1} \partial \varrho = P_y - Q_y \partial \varrho \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (175)$$

Substituirt man diese Ausdrücke für $\partial x'$ und $\partial y'$ in die dritte und vierte der Gleichungen (172), so ist:

$$\left. \begin{aligned} \partial z' &= \frac{e_3 - a_3 P_x - b_3 P_y}{c_3} + \frac{d_3 + a_3 Q_x + b_3 Q_y}{c_3} \partial \varrho = P_{z_1} - Q_{z_1} \partial \varrho \\ \partial z' &= \frac{e_4 - a_4 P_x - b_4 P_y}{c_4} + \frac{d_4 + a_4 Q_x + b_4 Q_y}{c_4} \partial \varrho = P_{z_2} - Q_{z_2} \partial \varrho \end{aligned} \right\} \dots (176)$$

Mit diesen Formeln verfährt man nun ganz in derselben Weise, wie in dem Falle, in welchem die Bahnverbesserung auf die Reihen für ∂f_t und ∂g_t gegründet wurde. Es kommen also zur versuchsweisen Bestimmung einer Parabel oder zur Bestimmung einer allgemeinen Bahn die Formeln (128') und (128), oder die Formel (124) in Betracht. Dabei gelten jetzt dieselben Kriterien und Regeln, welche in Verbindung mit diesen letzteren Gleichungen gegeben worden sind.

Zur Verbesserung einer Kreisbahn endlich kommen die geschlossenen Ausdrücke (159) zur Anwendung. Da die Anwendung der entsprechenden Reihen kaum eine Zeitersparniss in sich schliesst, so wird dieselbe hier überhaupt übergangen. Die Formeln (159) treten also jetzt an die Stelle der beiden letzten Formeln (109), und die erste Formel ergibt:

$$\partial \omega_t = \left\{ f_t \frac{w}{\varrho} + \frac{3 \cos \beta}{2a} \left[\omega \frac{\tau g_t}{a^3} - \omega' (\tau f_t - g_t) \right] \right\} \partial \varrho + g_t \partial \omega' \dots (177)$$

d. h. man erhält, wenn man den Coëfficienten von $\partial \varrho$ wieder mit f_{ω_t} bezeichnet, die Form des Ausdruckes (113). Schreibt man also die f_{ω_t} für alle drei Coordinaten des ersten und dritten Ortes aus, so kann die Rechnung, wie folgt, angelegt werden:

$$d = \frac{3 \cos \beta}{2a}, \quad c_1 = -\frac{\tau_3 g_1}{a^3}, \quad c_1 = \tau_3 f_1 + g_1, \quad c_3 = \frac{\tau_1 g_3}{a^3}, \quad c_3 = \tau_1 f_3 - g_3 \dots (178)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{x_1} &= f_1 \frac{\xi}{\varrho} + d[c_1 x + c'_1 x'], & f_{x_3} &= f_3 \frac{\xi}{\varrho} + d[c_3 x - c'_3 x'] \\ f_{y_1} &= f_1 \frac{\eta}{\varrho} + d[c_1 y + c'_1 y'], & f_{y_3} &= f_3 \frac{\eta}{\varrho} + d[c_3 y - c'_3 y'] \\ f_{z_1} &= f_1 \frac{\xi}{\varrho} + d[c_1 z + c'_1 z'], & f_{z_3} &= f_3 \frac{\xi}{\varrho} + d[c_3 z - c'_3 z'] \end{aligned} \right\} \dots (179)$$

Sodann wird berechnet: $A_1, A_3; B_1, B_3; C_1, C_3$ nach den Formeln (116) und $P_x, P_y, P_{z_1}, P_{z_3}; Q_x, Q_y, Q_{z_1}, Q_{z_3}$ nach den Formeln (120) und (122). Die weitere Anlage der Rechnung hängt davon ab, ob die Bahnverbesserung mit oder ohne Voraussetzung über die Excentricität gemacht werden soll. Man verfährt also genau so, wie in dem Falle, dass die Ausgangsbahn eine Parabel ist. Soll aber die verbesserte Bahn ein Kreis sein, so muss der Gleichung:

$$(x' + \partial x')^2 + (y' + \partial y')^2 + (z' + \partial z')^2 = \frac{1}{r + \partial r} = \frac{1}{a + \partial a} \dots (180)$$

genügt werden. Für den Fall, dass die Ausgangsbahn nicht genau kreisförmig war, kann man schreiben:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a} = \frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{r} - \mathcal{A} \dots (181)$$

Des weiteren verfährt man mit den Gleichungen (180) und (181) wie bei der Parabel mit der Gleichung (125), nur dass jetzt \mathcal{A} an Stelle von $\frac{1}{a}$ tritt, und dass der Factor 2 in den mit Potenzen von ∂r multiplicirten Gliedern der rechten Seite fortfällt. Man erhält dann an Stelle der Gleichungen (128) und (129) die folgenden:

$$Q \partial \varrho = P - \frac{1}{2} [(\partial r')^2 + (\partial y')^2 + (\partial z')^2] - \frac{1 - 3 \cos^2 \beta}{4 r^3} (\partial \varrho)^2 + \frac{3 \cos \beta \left(1 - \frac{5}{3} \cos^2 \beta \right)}{4 r^4} (\partial \varrho)^3 \dots (182)$$

indem:

$$Q = \frac{\cos \beta}{2 r^2} - [x' Q_x + y' Q_y + z' Q_z], \quad P = \frac{\mathcal{A}}{2} - [x' P_x + y' P_y + z' P_z] \dots (183)$$

ist.

Diese Gleichungen ergeben in Verbindung mit den Gleichungen (121) und (123) die gesuchten Werthe von $\partial \varrho$, $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$, indess werden die Glieder zweiter und dritter Ordnung bei Planeten wegen der beträchtlichen Werthe von r kaum je in Betracht kommen.

Es ist nun gezeigt worden, wie man auf Grund irgend einer gegebenen Bahn die Correctionen $\partial \varrho$, $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$ aus den Unterschieden: „Beobachtung minus Rechnung“ berechnen kann. Nachdem diese Correctionen an die ursprünglichen Werthe von ϱ , x' , y' , z' angebracht worden sind, schliesst die Bestimmung der verbesserten Bahn mit der Darstellung der beiden äusseren Oerter und der Berechnung der Elemente nach den betreffenden Formeln des I. Abschnittes. Die dabei etwa in Betracht kommenden geschlossenen Ausdrücke für f_1 , f_3 , g_1 , g_3 finden sich bezw. in den Formeln (141), (146) oder (147), (140), (144), (149), je nach der Art der zu verbessernden Bahn. Soll die verbesserte Bahn aus denselben Beobachtungen wie die ursprüngliche Bahn abgeleitet werden, wie es z. B. oft der Fall ist, wenn die Darstellung der Beobachtungen durch die im I. Abschnitte entwickelten directen Methoden nicht genügend war, so stellt sich die Rechnung sehr einfach, da viele Grössen aus der directen Lösung bekannt sind. Wie viele Grössen man zur Erleichterung der Bahnverbesserung benutzen kann, hängt natürlich ganz von dem gegebenen Rechnungsmaterial ab, und muss dem Rechner überlassen bleiben. Sehr oft kann man aus einer Ephemeride (ohne dass dabei die Elemente bekannt zu sein brauchen) genäherte Werthe der Anfangsgrössen ϱ , ϱ' , α' , δ' oder ϱ , x' , y' , z' durch Interpolation und numerische Differentiation ableiten. Im allgemeinsten Falle werden nur die Elemente der Ausgangsbahn und die Constanten für den Aequator gegeben und die Bahn aus drei neuen, willkürlich gewählten Oertern für lange Zwischenzeiten, am besten Normalörtern, zu berechnen sein. In diesem Falle verschafft man sich die Ausgangswerthe x' , y' , z' durch Differentiation der als Functionen der Constanten für den Aequator ausgedrückten heliocentrischen Coordinaten wie folgt. Es ist z. B.:

$$x' = \frac{1}{k} \frac{dx}{dt} = \frac{d}{k dt} [r \sin a \sin (A' + v)] = r \sin a \cos (A' + v) \frac{dv}{k dt} + \sin a \sin (A' + v) \frac{dr}{k dt},$$

oder da:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k \sqrt{p}}{r^2} = \frac{k(1 + e \cos v)}{p^{3/2}}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{1 + e \cos v} \right) = \frac{p e \sin v}{(1 + e \cos v)^2} \frac{dv}{dt} = \frac{k e \sin v}{\sqrt{p}}$$

ist, auch:

$$x' = \frac{1 + e \cos v}{\sqrt{p}} \sin a \cos (A' + v) + \frac{e \sin v}{\sqrt{p}} \sin a \sin (A' + v).$$

Daher ergibt sich nach einigen leichten Transformationen für alle drei Geschwindigkeiten:

$$x' = \frac{\sin a}{\sqrt{p}} [\cos (A' + v) + e \cos A'], \quad y' = \frac{\sin b}{\sqrt{p}} [\cos (B' + v) + e \cos B'], \quad z' = \frac{\sin c}{\sqrt{p}} [\cos (C' + v) + e \cos C']. \quad (184)$$

Für die Parabel ist $p = 2q$ und $e = 1$; folglich:

$$x' = \sqrt{\frac{2}{q}} \sin a \cos \left(A' + \frac{v}{2} \right) \cos \frac{v}{2}, \quad y' = \sqrt{\frac{2}{q}} \sin b \cos \left(B' + \frac{v}{2} \right) \cos \frac{v}{2}, \quad z' = \sqrt{\frac{2}{q}} \sin c \cos \left(C' + \frac{v}{2} \right) \cos \frac{v}{2}. \quad (185)$$

Für den Kreis ist $\frac{dv}{dt} = \mu = \frac{k}{a^{3/2}}$, $r = a$, $\frac{dr}{dt} = 0$; folglich:

$$x' = \frac{1}{a^{1/2}} \sin a \cos (A' + v), \quad y' = \frac{1}{a^{1/2}} \sin b \cos (B' + v), \quad z' = \frac{1}{a^{1/2}} \sin c \cos (C' + v) \quad (186)$$

wobei $A' + v = A + u$ ist, u. s. w.

In allen Fällen muss ganz besonders darauf geachtet werden, dass die Unterschiede „Beobachtung minus Rechnung“ den Ausgangswerthen ϱ , x' , y' , z' und dem mittleren Orte genau entsprechen. Eventuell sind dieselben nach den betreffenden Formeln des I. Abschnittes zu berechnen.

Es kann vorkommen, dass die auf Grund der Ausgangsbahn an die erste und dritte Beobachtung angebrachten Parallaxen verbesserungsbedürftig sind. Um dann eine Neu-rechnung zu vermeiden, verfährt man wie folgt. Es seien α , δ ; α_g , δ_g ; α_c , δ_c , bzw. die beobachteten, die genauen geocentrischen, und die berechneten geocentrischen Coordinaten. Dann ist genau:

$$\partial\alpha = \cos\delta \partial\alpha = \cos\delta (\alpha_g - \alpha_c) = \cos\delta \left(\alpha + \frac{p_\alpha \varrho}{\varrho + \partial\varrho} - \alpha_c \right), \quad \partial\delta = \delta_g - \delta_c = \delta + \frac{p_\delta \varrho}{\varrho + \partial\varrho} - \delta_c,$$

und dies sind die Unterschiede, welche durch die Bahnverbesserung zum Verschwinden gebracht werden sollen. Da nun aber $\partial\varrho$ noch nicht bekannt ist, so kann man $\frac{1}{\varrho + \partial\varrho} = \frac{1}{\varrho} - \frac{\partial\varrho}{\varrho^2}$ setzen und erhält:

$$\partial\alpha = \cos\delta \left[\left(\alpha + \frac{p_\alpha \varrho}{\varrho} \right) - \alpha_c \right] - \cos\delta \frac{p_\alpha \varrho}{\varrho^2} \partial\varrho, \quad \partial\delta = \left[\left(\delta + \frac{p_\delta \varrho}{\varrho} \right) - \delta_c \right] - \frac{p_\delta \varrho}{\varrho^2} \partial\varrho.$$

Hier sind die in eckige Klammern gesetzten Unterschiede die, welche man erhält, wenn man die Beobachtungen mit den Anfangswerthen ϱ auf das Erdcentrum reducirt; während die vollständigen Ausdrücke für $\partial\alpha$ und $\partial\delta$ auf der linken Seite der Fundamentalgleichungen (117) und (118) oder (169) oder (170) erscheinen sollten, wenn man eine Neurechnung wegen der Ungenauigkeit der Werthe von ϱ vermeiden will. Denkt man sich also die vollständigen Ausdrücke für $\partial\alpha$ und $\partial\delta$ in die linken Seiten der genannten Gleichungen eingeführt und bringt dann die mit $\partial\varrho$ multiplicirten Correctionsglieder auf die rechten Seiten, so können diese Glieder sofort berücksichtigt werden, wenn man setzt:

$$A_i, A_{f_i} + \cos\delta_i \frac{(p_\alpha \varrho)_i}{\varrho_i^2} \text{ für } A_i, A_{f_i}; \quad B_i, B_{f_i} + \frac{(p_\delta \varrho)_i}{\varrho_i^2} \text{ für } B_i, B_{f_i} \quad . \quad (187)$$

je nachdem es sich um A_1, A_3, B_1, B_3 oder um $A_{f_1}, A_{f_3}, B_{f_1}, B_{f_3}$ handelt.

Fünfte Abtheilung.

Berechnung einer elliptischen Bahn aus vier Beobachtungen, von denen nur zwei vollständig sind.

Dreiundachtzigste Vorlesung.

Einleitende Bemerkungen.

Die Nothwendigkeit, zur ersten Berechnung der elliptischen Bahn zuweilen vier Beobachtungen, von denen nur zwei vollständig sind, anzuwenden, haben wir schon früher erwähnt. Man erkennt sie leicht aus der schon in der 47. Vorlesung angestellten Betrachtung. Von derselben Nothwendigkeit können wir uns noch aus einem anderen Gesichtspunkte überzeugen; wir haben in der vierten Abtheilung gesehen, dass die Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen unsicher wird bei solcher Beschaffenheit des Materials, dass der mittlere Sonnenort sehr nahe in dem durch den ersten und dritten geocentrischen Ort gelegten grössten Kreise liegt; es wurde in solchem Falle gerathen, Beobachtungen von anderer Lage zu wählen. Wenn nun $i = 0$ wird, ist es offenbar unmöglich, günstigeres Material in drei Beobachtungen zu finden; man wird also dann jene Methoden nicht anwenden dürfen. Auch bei den Methoden der dritten Abtheilung für die parabolischen Bahnen haben wir einen ganz analogen Fall, den Ausnahmefall der Olbers'schen Methode, kennen gelernt; der Nothwendigkeit, eine vierte Länge zu Hülfe zu nehmen, wurden wir dadurch enthoben, dass bei der Parabel e gegeben ist, das zu Hülfe zu ziehende weitere Datum also in den drei gegebenen Längen schon enthalten ist. Wenn wir diese nahe Verwandtschaft zwischen dem Ausnahmefalle der Olbers'schen Methode für die Parabel und dem der Gauss'schen für die Ellipse uns nicht entgehen lassen, so zeigt sich uns zugleich ein Verfahren, welches die uns hier vorliegende Aufgabe löst, sowohl für den Fall, dass die vollständigen Beobachtungen die äusseren, als für den Fall, dass sie die mittleren sind. Eine dem ersteren Falle entsprechende Auswahl der Beobachtungen wird in Betreff der Bestimmung von i und Ω etwas grössere Genauigkeit versprechen, für die übrigen Elemente indessen ohne Einfluss sein; in der Theoria motus c. c. hat Gauss deshalb nur den zweiten Fall behandelt, weil er etwas angenehmere Rechnungsformen gestattet.

Die Auswahl der Beobachtungen für die Bestimmung der Bahn aus vier Oertern muss mit einer ganz besonderen Sorgfalt geschehen, wenigstens mit einer viel grösseren, als man für gewöhnlich bei drei Oertern nöthig hat, wenn der Erfolg der ganzen Rechnung nicht in hohem Grade gefährdet werden soll. Man muss nämlich ebenso sehr zu vermeiden suchen, dass die drei Zeitintervalle sehr ungleich, als auch, dass zwei der geocentrischen Längen einander nahezu gleich werden, weil sonst, wie wir später deutlich

erkennen werden, schon ein kleiner und unvermeidlicher Beobachtungsfehler einen ausserordentlich bedeutenden Einfluss auf alle bei der Rechnung zum Vorschein kommenden Zahlen ausüben wird. Ein kleiner Planet wird selten lange vor seiner Opposition entdeckt, und es wird demnach zwischen der Epoche der Entdeckung und dem zweiten Stationärwerden, wo die Abnahme der Längen in eine Zunahme übergeht und der Planet auf die durchlaufenen Längen und sehr nahe auf die schon vorher von ihm eingenommenen Oerter zurückkommt, kein grosses Intervall liegen; wenn man ohne besondere Aufmerksamkeit die Beobachtungen aussucht, etwa bloss mit der Rücksicht auf die Zwischenzeiten, so wird man beinahe immer auf Beobachtungen treffen, deren Längen zu wenig verschieden sind. Für so kleine Zeiträume, wie sie bei hinreichend grosser Neigung der Bahn statthaft sind, darf man sich hier bei der Methode aus vier Beobachtungen keinen Erfolg versprechen, da für solche eine genügende Längenbewegung nicht zu erwarten ist.

Vierundachtzigste Vorlesung.

Grundformeln für die Bestimmung der Distanzen aus vier Beobachtungen, von denen nur die äusseren vollständig sind.

Setzen wir der Kürze halber:

$$\begin{aligned} \frac{r' r''' \sin(v''' - v')}{r r''' \sin(v''' - v)} &= \frac{n_1}{n'} = c, \\ \frac{r r' \sin(v' - v)}{r r''' \sin(v''' - v)} &= \frac{n''}{n'} = c'', \\ \frac{r'' r''' \sin(v''' - v'')}{r r''' \sin(v''' - v)} &= \frac{n_{'''}}{n'} = c''', \\ \frac{r r'' \sin(v' - v'')}{r r''' \sin(v''' - v)} &= \frac{n_{''''}}{n'} = c'''' \end{aligned}$$

so bestehen für die heliocentrischen Coordinaten aller vier Oerter die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} x' &= c_1 x + c'_1 x''' \\ y' &= c_1 y + c'_1 y''' \\ z' &= c_1 z + c'_1 z''' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} x'' &= c_{''} x + c''_{''} x''' \\ y'' &= c_{''} y + c''_{''} y''' \\ z'' &= c_{''} z + c''_{''} z''' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Wie schon in der vierten Abtheilung bemerkt wurde, kann man für jedes dieser beiden Systeme die z -Coordinate auf drei verschiedene, beliebig zu wählende Fundamentelebenen bezogen denken, wodurch in die Grundformeln die Winkelabstände der geocentrischen Oerter und der Sonnenörter von den jenen Fundamentelebenen entsprechenden grössten Kreisen der Sphäre zum Vorschein kommen. Den ersten der grössten Kreise legen wir durch den ersten geocentrischen Ort und den Pol der Ekliptik; bezeichnen wir die geocentrischen z -Coordinaten der vier Planetenörter, bezogen auf die dem grössten Kreise entsprechende Ebene, d. h. die Projectionen der vier Abstände von

der Erde \mathcal{A} , \mathcal{A}' , \mathcal{A}'' , \mathcal{A}''' auf eine zu jener Ebene senkrechte Axe mit ξ , ξ' , ξ'' , ξ''' , denselben Theil der Sonnencoordinaten mit Z , Z' , Z'' , Z''' , so haben wir, da $\varepsilon = \xi - Z$, $\varepsilon' = \xi' - Z'$ u. s. w.:

$$\begin{aligned}\xi' - Z' &= c (\xi - Z) + c' (\xi''' - Z'''), \\ \xi'' - Z'' &= c'' (\xi - Z) + c'' (\xi''' - Z''').\end{aligned}$$

Bedeutend ferner w , w' , w'' , w''' die Winkelabstände der vier geocentrischen Oerter von dem durch den ersten Ort und den Pol der Ekliptik gelegten grössten Kreise, wobei dann:

$$\begin{aligned}\xi &= \mathcal{A} \sin w = 0 \\ \xi' &= \mathcal{A}' \sin w' \\ \xi'' &= \mathcal{A}'' \sin w'' \\ \xi''' &= \mathcal{A}''' \sin w'''\end{aligned}$$

die Winkelabstände der Sonnenörter von demselben grössten Kreise mit W , W' , W'' , W''' , so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned}\mathcal{A}' \sin w' - R' \sin W' &= -c, R \sin W + c' (\mathcal{A}''' \sin w''' - R''' \sin W''') \\ \mathcal{A}'' \sin w'' - R'' \sin W'' &= -c'', R \sin W + c'' (\mathcal{A}''' \sin w''' - R''' \sin W''')\end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Werden ferner mit w , w' , w'' , w''' , W , W' , W'' , W''' die Abstände der vier geocentrischen Oerter und der vier Sonnenörter von einem durch den vierten Ort und den Pol gelegten grössten Kreise bezeichnet, so haben wir auch:

$$\left. \begin{aligned}\mathcal{A}' \sin w' - R' \sin W' &= c, (\mathcal{A} \sin w - R \sin W) - c' R''' \sin W''' \\ \mathcal{A}'' \sin w'' - R'' \sin W'' &= c'', (\mathcal{A} \sin w - R \sin W) - c'' R''' \sin W'''\end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Sind noch λ , λ' , λ'' , λ''' die vier geocentrischen Längen des Planeten, β , β''' die Breiten der beiden vollständigen Oerter, \odot , \odot' , \odot'' , \odot''' , wie gewöhnlich, die Längen der Sonne, so wird offenbar:

$$\begin{aligned}\frac{\sin w'}{\sin w} &= \frac{\sin (\lambda' - \lambda)}{\sin (\lambda''' - \lambda')} \\ \frac{\sin w''}{\sin w'} &= \frac{\sin (\lambda'' - \lambda)}{\sin (\lambda''' - \lambda'')} \\ \sin w''' &= \cos \beta''' \sin (\lambda''' - \lambda) \\ \sin w &= \cos \beta \sin (\lambda''' - \lambda) \\ W &= \odot - \lambda, \quad W' = \lambda''' - \odot \\ W' &= \odot' - \lambda, \quad W'' = \lambda''' - \odot' \\ W'' &= \odot'' - \lambda, \quad W''' = \lambda''' - \odot'' \\ W''' &= \odot''' - \lambda, \quad W'''' = \lambda''' - \odot'''\end{aligned}$$

Somit erhalten wir, wenn wir die erste und zweite der Gleichungen (4) in die erste und zweite der Gleichungen (3) dividiren, um \mathcal{A}' und \mathcal{A}'' zu eliminiren:

$$\begin{aligned}& R' \sin (\lambda''' - \odot') \sin (\lambda' - \lambda) - R' \sin (\odot' - \lambda) \sin (\lambda''' - \lambda') \\ &= -c, \mathcal{A} \cos \beta \sin (\lambda''' - \lambda) \sin (\lambda' - \lambda) + c', \mathcal{A}''' \cos \beta''' \sin (\lambda''' - \lambda) \sin (\lambda''' - \lambda') \\ &+ c, R \sin (\lambda''' - \odot) \sin (\lambda' - \lambda) - c, R \sin (\odot - \lambda) \sin (\lambda''' - \lambda') \\ &+ c'', R''' \sin (\lambda''' - \odot''') \sin (\lambda' - \lambda) - c'', R''' \sin (\odot''' - \lambda) \sin (\lambda''' - \lambda')\end{aligned}$$

oder nach einigen leichten Reductionen:

$$\begin{aligned}R' \sin (\lambda' - \odot') &= -c, \{ \mathcal{A} \cos \beta \sin (\lambda' - \lambda) - R \sin (\lambda' - \odot) \} \\ &+ c', \{ \mathcal{A}''' \cos \beta''' \sin (\lambda''' - \lambda') + R''' \sin (\lambda' - \odot''') \}\end{aligned}$$

oder wenn wir die curtirten Distanzen ϱ und ϱ''' einführen:

$$\begin{aligned}R' \sin (\lambda' - \odot') &= c, \{ R \sin (\lambda' - \odot) - \varrho \sin (\lambda' - \lambda) \} \\ &+ c', \{ R''' \sin (\lambda' - \odot''') - \varrho''' \sin (\lambda' - \lambda''') \} \cdot \cdot \cdot \quad (5)\end{aligned}$$

Auf völlig analogem Wege erhält man noch die Gleichung:

$$R'' \sin(\lambda'' - \odot'') = c'' \{ R \sin(\lambda'' - \odot) - \varrho \sin(\lambda'' - \lambda) \} - c'' \{ R''' \sin(\lambda'' - \odot''') - \varrho''' \sin(\lambda'' - \lambda''') \} \quad (6)$$

Um hieraus die Unbekannten ϱ und ϱ''' zu bestimmen, bedürfte es der Kenntniss der Werthe von c , c' , c'' und c''' ; diese Kenntniss kann man sich successive sehr leicht verschaffen, indem man von geschätzten Werthen dieser Grössen ausgeht. Angenähert ist nämlich, wenn t , t' , t'' , t''' die vier Beobachtungszeiten, r' und r'' die Radienvectoren des zweiten und dritten Ortes vorstellen ¹⁾:

$$\begin{aligned} c' &= \frac{t''' - t'}{t''' - t} \cdot \left(1 + \frac{k^2(t' - t)(t''' - t')}{2r'^3} \right) \\ c'' &= \frac{t' - t}{t''' - t} \cdot \left(1 + \frac{k^2(t' - t)(t''' - t')}{2r'^3} \right) \\ c'' &= \frac{t''' - t''}{t''' - t} \cdot \left(1 + \frac{k^2(t'' - t)(t''' - t'')}{2r''^3} \right) \\ c''' &= \frac{t'' - t}{t''' - t} \cdot \left(1 + \frac{k^2(t'' - t)(t''' - t'')}{2r''^3} \right). \end{aligned}$$

Hier wird für r' und r'' immer eine Schätzung zur Hand sein mit vollkommen hinreichender Sicherheit für den schliesslichen Erfolg, z. B. einer vorhergegangenen Berechnung einer Kreisbahn zu entnehmen. Substituirt man die entsprechenden Werthe in (5) und (6), so erhält man eine Näherung für ϱ und ϱ''' und die heliocentrischen Coordinaten x , y , z , x''' , y''' , z''' . Aus diesen letzteren bestimmen sich mit gesteigerter Genauigkeit neue Werthe von r' und r'' , da:

$$\begin{aligned} r'^2 &= (c, x + c' x''')^2 + (c, y + c' y''')^2 + (c, z + c' z''')^2 \\ r''^2 &= (c, x + c'' x''')^2 + (c, y + c'' y''')^2 + (c, z + c'' z''')^2. \end{aligned}$$

Macht man diese neue Substitution in den obigen Ausdrücken für c , c' , c'' und c''' und darauf in (5) und (6), so werden wiederum genauere Werthe von ϱ und ϱ''' und der Coordinaten gefunden werden; die Fortsetzung dieses Verfahrens pflegt in den praktischen Fällen bald dahin zu führen, dass sich in den erhaltenen Zahlen nichts mehr ändert, womit die Durchrechnung der ersten Hypothese erledigt ist.

Bei der zweiten Hypothese berechnet man c , c' , c'' und c''' nach strengeren Formeln, recht bequem z. B. mittelst der am Schlusse der vierten Abtheilung gezeigten Methode, welche sich auf den Lambert'schen Satz über die Bewegung in Kegelschnitten gründet. Werden die so zu erhaltenden Werthe der Verhältnisse zwischen den Dreiecksflächen in (5) und (6) eingesetzt, so bekommt man eine weitere Näherung für ϱ und ϱ''' , eine Näherung, über die man in der Praxis selten hinauszugehen braucht. Für eine etwaige dritte und jede weitere Hypothese würden alle Operationen der zweiten zu wiederholen sein.

Die obigen Formeln können, statt auf Längen und Breiten, auch auf Rectascensionen und Declinationen mit der ganz geringfügigen Modification angewandt werden, dass für R , R' , R'' , R''' die Projectionen des Radius vector der Sonne auf den Aequator,

¹⁾ Genauer ist nach den Entwicklungen der vierten Abtheilung:

$$\begin{aligned} c' &= \frac{t''' - t'}{t''' - t} \cdot \left\{ 1 + \frac{k^2 \cdot [(t''' - t)^2 - (t' - t')^2]}{6r'^3} \right\} \\ c'' &= \frac{t' - t}{t''' - t} \cdot \left\{ 1 + \frac{k^2 \cdot [(t''' - t)^2 - (t' - t')^2]}{6r'^3} \right\} \end{aligned}$$

als erste Annäherung, und analoge Werthe für c'' und c''' zu setzen.

für \odot , \odot' , \odot'' , \odot''' die Rectascensionen der Sonne gesetzt werden. Diese Anwendbarkeit der Formeln ist nicht ohne Bedeutung und Nutzen, ausser früher angeführten Gründen schon deshalb nicht, weil bei dem zweiten und dritten Orte die Declination missglückt sein darf, ohne dass sie unbrauchbar werden. Bekanntlich werden die Declinationen häufiger unsicher, und es wird, wenn man in solchem Falle Längen und Breiten einführt, die Unsicherheit zu einem Theile auf die Längen mit übertragen; diesem Uebelstande wird zuweilen durch Anwendung der Rectascensionen abzuhelfen sein.

Fünfundachtzigste Vorlesung.

Andere Art der Entwicklung der Grundformeln.

Um die Elimination von λ' oder von ϱ' noch einfacher zu bewirken, mache man die XZ -Ebene des Coordinatensystems demjenigen grössten Kreise entsprechend, welcher durch den zweiten geocentrischen Ort und den Pol der Ekliptik geht. Die Projectionen der vier Distanzen Δ , Δ' , Δ'' , Δ''' auf die Y -Axe des Systems werden dann der Reihe nach:

$$\begin{aligned}\Delta \cos \beta \sin (\lambda - \lambda') \\ \Delta' \cos \beta' \sin (\lambda' - \lambda') \text{ oder } 0 \\ \Delta'' \cos \beta'' \sin (\lambda'' - \lambda') \\ \Delta''' \cos \beta''' \sin (\lambda''' - \lambda').\end{aligned}$$

Dieses sind also die geocentrischen Y -Coordinaten; zieht man von ihnen die auf dieselbe Axe bezogenen Sonnencoordinaten:

$$\begin{aligned}R \cos B \sin (\odot - \lambda') \\ R' \cos B' \sin (\odot' - \lambda') \\ R'' \cos B'' \sin (\odot'' - \lambda') \\ R''' \cos B''' \sin (\odot''' - \lambda'),\end{aligned}$$

in denen B , B' , B'' , B''' die vier Breiten (beziehungsweise Declinationen) der Sonne vorstellen, ab, so erhält man die vier heliocentrischen Y -Coordinaten des Planeten:

$$\begin{aligned}y &= \Delta \cos \beta \sin (\lambda - \lambda') - R \cos B \sin (\odot - \lambda') \\ y' &= \Delta' \cos \beta' \sin (\lambda' - \lambda') - R' \cos B' \sin (\odot' - \lambda') \\ y'' &= \Delta'' \cos \beta'' \sin (\lambda'' - \lambda') - R'' \cos B'' \sin (\odot'' - \lambda') \\ y''' &= \Delta''' \cos \beta''' \sin (\lambda''' - \lambda') - R''' \cos B''' \sin (\odot''' - \lambda').\end{aligned}$$

Bezeichnen wir zu besserer Uebersicht die doppelte Dreiecksfläche zwischen den Radienvectoren r und r' mit $[r r']$, die zwischen r und r'' mit $[r r'']$, und so weiter die übrigen, so haben wir nach dem Vorhergehenden:

$$\begin{aligned}R' \cos B' \sin (\lambda' - \odot') &= \frac{[r' r'']}{[r r'']} \{ \varrho \sin (\lambda - \lambda') + R \cos B \sin (\lambda' - \odot) \} \\ &+ \frac{[r r']}{[r r'']} \{ \varrho'' \sin (\lambda'' - \lambda') + R'' \cos B'' \sin (\lambda' - \odot'') \}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}R' \cos B' \sin (\lambda' - \odot') &= \frac{[r' r''']}{[r r''']} \{ \varrho \sin (\lambda - \lambda') + R \cos B \sin (\lambda' - \odot) \} \\ &+ \frac{[r r']}{[r r''']} \{ \varrho''' \sin (\lambda''' - \lambda') + R''' \cos B''' \sin (\lambda' - \odot''') \}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda') + R'' \cos B'' \sin(\lambda' - \odot'') \\ = \frac{[r'' r''']}{[r r''']} \{ \varrho \sin(\lambda - \lambda') + R \cos B \sin(\lambda' - \odot) \} \\ + \frac{[r r'']}{[r r''']} \{ \varrho''' \sin(\lambda''' - \lambda') + R''' \cos B''' \sin(\lambda' - \odot''') \}, \end{aligned}$$

und nach Analogie, wenn die XZ-Ebene durch den dritten geocentrischen Ort gelegt wird:

$$\begin{aligned} \varrho' \sin(\lambda' - \lambda'') + R' \cos B' \sin(\lambda'' - \odot') \\ = \frac{[r' r''']}{[r r''']} \{ \varrho \sin(\lambda - \lambda'') + R \cos B \sin(\lambda'' - \odot) \} \\ + \frac{[r r'']}{[r r''']} \{ \varrho''' \sin(\lambda''' - \lambda'') + R''' \cos B''' \sin(\lambda'' - \odot''') \} \\ R'' \cos B'' \sin(\lambda'' - \odot'') = \frac{[r'' r''']}{[r r''']} \{ \varrho \sin(\lambda - \lambda'') + R \cos B \sin(\lambda'' - \odot) \} \\ + \frac{[r r'']}{[r r''']} \{ \varrho''' \sin(\lambda''' - \lambda'') + R''' \cos B''' \sin(\lambda'' - \odot''') \} \\ R'' \cos B'' \sin(\lambda'' - \odot'') = \frac{[r'' r''']}{[r' r''']} \{ \varrho' \sin(\lambda' - \lambda'') + R' \cos B' \sin(\lambda'' - \odot') \} \\ + \frac{[r' r'']}{[r' r''']} \{ \varrho''' \sin(\lambda''' - \lambda'') + R''' \cos B''' \sin(\lambda'' - \odot''') \}. \end{aligned}$$

Man hat hier sechs Gleichungen zwischen vier Distanzen; die darin vorkommenden Verhältnisse der Dreiecksflächen können, wenigstens in der ersten Hypothese, als gegebene Functionen von r'^3 und r''^3 betrachtet werden. Wird statt r' und r'' R' und R'' eingesetzt, so muss sehr nahe die Erdbahn als Lösung, d. h. $\varrho = \varrho' = \varrho'' = \varrho''' = 0$ erhalten werden. Hierin liegt der Grund, der verbietet, r' und r'' aus den obigen sechs Grundgleichungen zu eliminiren, und auf diese Weise vier Gleichungen zwischen den vier Unbekannten ϱ , ϱ' , ϱ'' , ϱ''' herzustellen. Denn in solchen Gleichungen würde, da sie vom ersten Grade sind, jeder Unterschied zwischen der Lösung für die Erde und die für den Planeten hinwegfallen; mit anderen Worten, sie würden Grössen der nullten Ordnung vernachlässigen.

Wollte man dagegen aus den sechs Gleichungen ϱ , ϱ' , ϱ'' , ϱ''' eliminiren, um zwei Gleichungen r'^3 und r''^3 übrig zu behalten, so würde sich eine ähnliche Unzulässigkeit zeigen; man würde für r' und r'' nur eine einzige reelle Lösung erhalten, während doch in den Gleichungen auch die Lösung $r' = R'$, $r'' = R''$ mit enthalten sein muss. Also auch hier würden Grössen der nullten Ordnung vernachlässigt werden¹⁾. Der in voriger Vorlesung angegebenen Art der Auflösung, bei welcher die Dreiecksflächenverhältnisse zuerst mit geschätzten und später mit den aus ϱ und ϱ''' zu bestimmenden Werthen berechnet werden, kann man den Vorwurf der Vernachlässigung von Grössen der nullten Ordnung nicht mehr machen, da für die Erde und für den Planeten eine verschiedene Lösung erhalten wird.

Nach diesen Betrachtungen werden wir für den hier betrachteten Fall, dass die erste und vierte Beobachtung vollständig sind, zur Bestimmung von Δ und Δ''' oder ϱ' und ϱ''' uns der beiden Gleichungen:

¹⁾ Es ist, wie uns schon die Grundformel der Olbers'schen Methode lehrt, keineswegs immer unmöglich, gewisse Bestimmungsstücke in der Bahnberechnung als Wurzeln von Gleichungen sehr niedrigen Grades, ja sogar ersten Grades, auf brauchbare Weise auszudrücken; aber es bleibt diese Möglichkeit doch immer auf solche Stücke beschränkt, welche ihrer Natur nach für die Erde unbestimmt werden, wie eben das Olbers'sche Verhältniss:

$$\frac{\varrho''}{\varrho} = M.$$

$$\begin{aligned}
 R' \cos B' \sin(\lambda' - \odot') &= \frac{[r' r''']}{[r r''']} \{ \varrho \sin(\lambda - \lambda') + R \cos B \sin(\lambda' - \odot) \} \\
 &+ \frac{[r r']}{[r r''']} \{ \varrho''' \sin(\lambda''' - \lambda') + R''' \cos B''' \sin(\lambda' - \odot''') \} \\
 R'' \cos B'' \sin(\lambda'' - \odot'') &= \frac{[r'' r''']}{[r r''']} \{ \varrho \sin(\lambda - \lambda'') + R \cos B \sin(\lambda'' - \odot) \} \\
 &+ \frac{[r r'']}{[r r''']} \{ \varrho''' \sin(\lambda''' - \lambda'') + R''' \cos B''' \sin(\lambda'' - \odot''') \}
 \end{aligned}$$

bedienen. Die Grössen ϱ' und ϱ'' können, wenn man ϱ und ϱ''' auf die oben angegebene Weise gefunden hat, der zu berücksichtigenden Aberration wegen aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \varrho' \sin(\lambda' - \lambda'') + R' \cos B' \sin(\lambda'' - \odot') \\
 &= \frac{[r' r''']}{[r r''']} \{ \varrho \sin(\lambda - \lambda'') + R \cos B \sin(\lambda'' - \odot) \} \\
 &+ \frac{[r r']}{[r r''']} \{ \varrho''' \sin(\lambda''' - \lambda'') + R''' \cos B''' \sin(\lambda'' - \odot''') \} \\
 \varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda') + R'' \cos B'' \sin(\lambda' - \odot'') \\
 &= \frac{[r'' r''']}{[r r''']} \{ \varrho \sin(\lambda - \lambda') + R \cos B \sin(\lambda' - \odot) \} \\
 &+ \frac{[r r'']}{[r r''']} \{ \varrho''' \sin(\lambda''' - \lambda') + R''' \cos B''' \sin(\lambda' - \odot''') \}
 \end{aligned}$$

berechnet werden. Bei der Verbesserung der beiden Zeiten t' und t'' wegen Aberration würden nun zwar nicht ϱ' und ϱ'' , sondern vielmehr $\varrho' \sec \beta'$, $\varrho'' \sec \beta''$ bekannt sein müssen. In der Wirklichkeit wird die angenommene Unkenntniss genauer Breitenwerthe, abgesehen davon, dass sie für die Breiten fast niemals statthaben wird, der Berücksichtigung der Aberration und anderer kleiner Correctionen, welche von der Breite abhängen, nicht hinderlich sein können.

Sechsendachtzigste Vorlesung.

Grundformeln für die Berechnung der Distanzen aus vier Beobachtungen, deren äussere unvollständig sind.

Die Bestimmung der Distanzen aus den Grundgleichungen fällt etwas bequemer aus, wenn statt der äusseren die beiden mittleren Oerter als vollständige gebraucht werden, da in diesem Falle ϱ' durch r' , ϱ'' durch r'' und lauter bekannte Grössen ausgedrückt werden können. Es wird sich deshalb bei erstlichen Anwendungen empfehlen, bei der ersten Hypothese die zweite und dritte Beobachtung vollständig zu gebrauchen, damit die ersten Schritte zur Näherung möglichst bequem ausfallen, bei den weiteren Hypothesen aber die Rechnung auf vollständige Darstellung der äusseren Oerter zu führen.

Eliminirt man zu dem Zwecke aus den allgemeinen Grundgleichungen (1) und (2), der 84. Vorlesung, einmal ϱ , indem man die XZ-Ebene durch den ersten Ort und den Pol legt, darauf durch analoges Verfahren ϱ''' , so wird nach der Bezeichnung der vorigen Vorlesung:

$$\begin{aligned}
 \varrho' \sin(\lambda' - \lambda) + R' \cos B' \sin(\lambda - \odot') &= \frac{[r' r''']}{[r r''']} \cdot R \cos B \sin(\lambda - \odot) \\
 &+ \frac{[r r']}{[r r''']} \{ \varrho''' \sin(\lambda''' - \lambda) + R''' \cos B''' \sin(\lambda - \odot''') \} \\
 \varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda) + R'' \cos B'' \sin(\lambda - \odot'') &= \frac{[r'' r''']}{[r r''']} \cdot R \cos B \sin(\lambda - \odot) \\
 &+ \frac{[r r']}{[r r''']} \{ \varrho''' \sin(\lambda''' - \lambda) + R''' \cos B''' \sin(\lambda - \odot''') \} \\
 \varrho' \sin(\lambda' - \lambda''') + R' \cos B' \sin(\lambda''' - \odot') &= \frac{[r' r''']}{[r r''']} \{ \varrho \sin(\lambda - \lambda''') + R \cos B \sin(\lambda''' - \odot) \} \\
 &+ \frac{[r r']}{[r r''']} \cdot R''' \cos B''' \sin(\lambda''' - \odot''') \\
 \varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda''') + R'' \cos B'' \sin(\lambda''' - \odot'') &= \frac{[r'' r''']}{[r r''']} \{ \varrho \sin(\lambda - \lambda''') + R \cos B \sin(\lambda''' - \odot) \} \\
 &+ \frac{[r r']}{[r r''']} \cdot R''' \cos B''' \sin(\lambda''' - \odot''').
 \end{aligned}$$

Durch Elimination von ϱ''' und ϱ erhält man:

$$\left. \begin{aligned}
 &\frac{[r r'']}{[r r''']} \{ \varrho' \sin(\lambda' - \lambda) + R' \cos B' \sin(\lambda - \odot') \} \\
 &- \frac{[r r']}{[r r''']} \{ \varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda) + R'' \cos B'' \sin(\lambda - \odot'') \} \\
 &= \frac{[r r''] [r' r'''] - [r r'] [r'' r''']}{[r r''] [r r''']} R \cos B \sin(\lambda - \odot)
 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot (1)$$

$$\left. \begin{aligned}
 &\frac{[r'' r''']}{[r r''']} \{ \varrho' \sin(\lambda' - \lambda''') + R' \cos B' \sin(\lambda''' - \odot') \} \\
 &- \frac{[r' r''']}{[r r''']} \{ \varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda''') + R'' \cos B'' \sin(\lambda''' - \odot'') \} \\
 &= \frac{[r r'] [r'' r'''] - [r r''] [r' r''']}{[r r''] [r r''']} \cdot R''' \cos B''' \sin(\lambda''' - \odot''')
 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot (2)$$

Wird dann ferner gesetzt:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{[r r']}{[r r''']} &= \frac{t' - t}{t''' - t} \cdot \left\{ 1 + \frac{Q'}{2 r'^3} \right\} \\
 \frac{[r r'']}{[r r''']} &= \frac{t'' - t}{t''' - t} \cdot \left\{ 1 + \frac{Q''}{2 r''^3} \right\} \\
 \frac{[r' r''']}{[r r''']} &= \frac{t''' - t'}{t''' - t} \cdot \left\{ 1 + \frac{Q'_m}{2 r'^3} \right\} \\
 \frac{[r'' r''']}{[r r''']} &= \frac{t''' - t''}{t''' - t} \cdot \left\{ 1 + \frac{Q''_m}{2 r''^3} \right\}
 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot (3)$$

so bietet sich für die Berechnung von ϱ' und ϱ'' aus den Gleichungen (1) und (2) folgendes Verfahren dar. Man berechnet, von Schätzwurthen der Grössen r' und r'' ausgehend, nach den Gleichungen (3) die vorläufigen Werthe von $\frac{[r r']}{[r r''']}$, $\frac{[r r'']}{[r r''']}$ u. s. w. wobei angenähert:

$$\begin{aligned} Q' &= Q''' = k^2 (t' - t) (t''' - t') \\ Q'' &= Q''' = k^2 (t'' - t) (t''' - t'')^1). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (1) und (2) liefern dann genährte Werthe von q' und q'' , aus denen wiederum r' und r'' und genauere Werthe der Dreiecksflächenverhältnisse abzuleiten sind. Die wiederholte Substitution derselben in (1) und (2) wird endlich keine merklichen Aenderungen mehr in den zu findenden Zahlen herbeiführen.

Siebenundachtzigste Vorlesung.

Weitere Vereinfachung der Bedingungsgleichungen für q' und q'' .

Die Formeln der vorigen Vorlesung können in denjenigen Fällen mit Nutzen gebraucht werden, in denen das mittlere der drei Zeitintervalle, $t'' - t'$, bedeutend gegen die äusseren an Grösse zurücksteht, weil dann jene Formeln etwas grössere Convergenz versprechen, als die folgenden, im Uebrigen bequemer.

Aus den Grundgleichungen (1) und (2) der 84. Vorlesung folgt nämlich auch, wenn man den ersten Längenmeridian, von welchem alle Längen gerechnet werden sollen, durch den ersten geocentrischen Ort legt:

$$\left. \begin{aligned} q' \sin(\lambda' - \lambda) + R' \cos B' \sin(\lambda - \odot') \\ &= \frac{[r' r'']}{[r' r''']} R \cos B \sin(\lambda - \odot) \\ &+ \frac{[r r']}{[r r'']} \{q'' \sin(\lambda'' - \lambda) + R'' \cos B'' \sin(\lambda - \odot'')\} \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

Wird der erste Längenmeridian durch den vierten geocentrischen Ort gelegt, so ergibt sich die der vorigen analoge Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} q'' \sin(\lambda'' - \lambda''') + R'' \cos B'' \sin(\lambda''' - \odot''') \\ &= \frac{[r' r'']}{[r r'']} R \cos B \sin(\lambda - \odot) \\ &+ \frac{[r'' r''']}{[r' r''']} \{q' \sin(\lambda' - \lambda''') + R' \cos B' \sin(\lambda''' - \odot')\} \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

Es sei:

$$\begin{aligned} \frac{[r r']}{[r r'']} &= \frac{t' - t}{t'' - t} \cdot \left\{ 1 + \frac{Q}{2 r'^3} \right\} \\ \frac{[r' r'']}{[r' r''']} &= \frac{t'' - t'}{t''' - t'} \cdot \left\{ 1 + \frac{Q'}{2 r''^3} \right\} \\ \frac{[r' r'']}{[r r'']} &= \frac{t'' - t'}{t'' - t} \cdot \left\{ 1 + \frac{Q''}{2 r'^3} \right\} \\ \frac{[r'' r''']}{[r' r''']} &= \frac{t''' - t''}{t''' - t'} \cdot \left\{ 1 + \frac{Q'''}{2 r''^3} \right\}, \end{aligned}$$

¹⁾ Oder besser:

$$\begin{aligned} Q' &= \frac{1}{3} k^2 [(t''' - t)^2 - (t' - t)^2] \\ Q'' &= \frac{1}{3} k^2 [(t''' - t)^2 - (t'' - t)^2] \\ Q''' &= \frac{1}{3} k^2 [(t''' - t)^2 - (t''' - t')^2] \\ Q''' &= \frac{1}{3} k^2 [(t''' - t)^2 - (t''' - t'')^2]. \end{aligned}$$

wobei in der ersten Hypothese gesetzt werden kann:

$$\begin{aligned} Q &= k^2(t' - t)(t'' - t') \\ Q' &= k^2(t'' - t')(t''' - t'') \\ Q'' &= k^2(t' - t)(t'' - t') \\ Q''' &= k^2(t'' - t')(t''' - t''). \end{aligned}$$

(In der ersten Hypothese ist demnach $Q = Q''$, $Q' = Q'''$.)¹⁾

Die Gleichungen (1) und (2) nehmen nach Einführung von Q , Q' , Q'' , Q''' folgende Form an:

$$\left. \begin{aligned} &\varrho' \sin(\lambda' - \lambda) + R' \cos B' \sin(\lambda - \odot') \\ &= \frac{t'' - t'}{t'' - t} R \cos B \sin(\lambda - \odot) \cdot \left(1 + \frac{Q''}{2r'^3}\right) \\ &+ \frac{t' - t}{t'' - t} \cdot \{R'' \cos B'' \sin(\lambda - \odot'') + \varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda)\} \left(1 + \frac{Q}{2r'^3}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} &\varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda''') + R'' \cos B''' \sin(\lambda''' - \odot''') \\ &= \frac{t''' - t''}{t''' - t'} R''' \cos B''' \sin(\lambda''' - \odot''') \cdot \left(1 + \frac{Q'}{2r''^3}\right) \\ &+ \frac{t''' - t''}{t''' - t'} \cdot \{R' \cos B' \sin(\lambda''' - \odot') + \varrho' \sin(\lambda' - \lambda''')\} \left(1 + \frac{Q'''}{2r''^3}\right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Diese Gleichungen (3) und (4) haben vor den Gleichungen (1) und (2) den grossen Vorzug, dass darin r und r'' nicht gleichzeitig auftreten, und dass man sie daher durch reine Hypothesen über ϱ' auflösen kann. Denn zu jedem Werthe von ϱ' bestimmt sich r' nach der Formel:

$$r'^2 = R'^2 + \varrho'^2 \sec \beta'^2 + 2 R' \varrho' \sec \beta' \cos \chi';$$

die Gleichung (3) liefert also einen bestimmten Werth von ϱ'' , durch welchen dann auch die Gleichung (4) befriedigt werden muss.

Mit Vortheil kann man hier, ähnlich wie bei der Gauss'schen Form der Olbers'schen Methode für Kometen, ϱ' und ϱ'' durch zwei andere Grössen ersetzen. Es wird:

$$\begin{aligned} r'^2 &= (\varrho' \sec \beta' + R' \cos \chi')^2 + R'^2 \sin^2 \chi' \\ r''^2 &= (\varrho'' \sec \beta'' + R'' \cos \chi'')^2 + R''^2 \sin^2 \chi''. \end{aligned}$$

Setzt man daher:

$$\begin{aligned} \varrho' \sec \beta' + R' \cos \chi' &= u' \\ \varrho'' \sec \beta'' + R'' \cos \chi'' &= u'' \\ R' \sin \chi' &= C' \\ R'' \sin \chi'' &= C'', \end{aligned}$$

so gehen (3) und (4) über in:

$$\left. \begin{aligned} &u' \cos \beta' \sin(\lambda' - \lambda) + R' \cos B' \sin(\lambda - \odot') - R' \cos \chi' \cos \beta' \sin(\lambda' - \lambda) \\ &= \frac{t'' - t'}{t'' - t} \cdot R \cos B \sin(\lambda - \odot) \cdot \left(1 + \frac{Q''}{2(u'^2 + C'^2)^{3/2}}\right) \\ &+ \frac{t' - t}{t'' - t} \cdot \{R'' \cos B'' \sin(\lambda - \odot'') - R'' \cos \chi'' \cos \beta'' \sin(\lambda'' - \lambda) \\ &+ u'' \cos \beta'' \sin(\lambda'' - \lambda)\} \left(1 + \frac{Q}{2(u'^2 + C'^2)^{3/2}}\right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

¹⁾ Genauer ist auch hier:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{3} k^2 [(t'' - t)^2 - (t' - t)^2] \\ Q' &= \frac{1}{3} k^2 [(t''' - t'')^2 - (t'' - t')^2] \\ Q'' &= \frac{1}{3} k^2 [(t'' - t)^2 - (t' - t')^2] \\ Q''' &= \frac{1}{3} k^2 [(t''' - t'')^2 - (t'' - t'')^2]. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & u'' \cos \beta'' \sin (\lambda'' - \lambda''') + R'' \cos B'' \sin (\lambda''' - \odot'') - R'' \cos \chi'' \cos \beta'' \sin (\lambda'' - \lambda''') \\ &= \frac{t'' - t'}{t''' - t'} R''' \cos B''' \sin (\lambda''' - \odot''') \left(1 + \frac{Q'}{2(u'' + C'')^{3/2}} \right) \\ &+ \frac{t''' - t''}{t''' - t'} \{ R' \cos B' \sin (\lambda''' - \odot') - R' \cos \chi' \cos \beta' \sin (\lambda' - \lambda''') \\ &+ u' \cos \beta' \sin (\lambda' - \lambda''') \} \left(1 + \frac{Q'''}{2(u'' + C''')^{3/2}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Achtundachtzigste Vorlesung.

Fortsetzung der Entwicklungen der 87. Vorlesung.

Die Glieder der Gleichungen (5) und (6) haben eine sehr einfache geometrische Bedeutung, deren Erkenntniss uns erlauben wird, dieselben noch mehr zusammenzuziehen und in möglichst reducirter Form zu schreiben.

Sehr leicht erkennt man, dass u' nichts Anderes ist als die rechtwinklige Projection des Radius vectors der zweiten Beobachtung auf die Richtung der Verbindungslinie zwischen Planet und Erde, oder das Stück dieser Linie, welches zwischen dem Planeten und dem Fusspunkte eines von der Sonne gefällten Perpendikels liegt. Die Grösse:

$$\cos \beta' \sin (\lambda' - \lambda)$$

ist der Cosinus des Winkels, welchen die Verbindungslinie Erde-Planet in der zweiten Beobachtung mit einer Richtung macht, deren Länge (Rectascension) gleich $90^\circ + \lambda$, und deren Breite (Declination) gleich Null ist. Die Grösse:

$$(u' - R' \cos \chi') \cos \beta' \sin (\lambda' - \lambda)$$

ist demnach die Projection der Distanz Δ' auf die genannte Richtung; ebenso zeigt sich, dass:

$$R' \cos B' \sin (\odot - \lambda)$$

die Projection von R' auf dieselbe Richtung ist. Die erste oder linke Seite der Gleichung (5) ist offenbar nichts Anderes, als die Projection des Radius vectors des Planeten auf eine X -Axe, welche auf den Punkt der Sphäre von der Länge (Rectascension) $90^\circ + \lambda$, und der Breite (Declination) 0° zielt. Werden überhaupt alle x -Coordinationen des Planeten auf diese Axe bezogen und mit $x_\lambda, x'_\lambda, x''_\lambda, x'''_\lambda$ bezeichnet, ebenso die Sonnen-coordinationen in Beziehung auf die genannte Axe mit $X_\lambda, X'_\lambda, X''_\lambda, X'''_\lambda$, so lässt sich die Gleichung (5) schreiben:

$$x'_\lambda = \left\{ \frac{t'' - t'}{t''' - t'} x_\lambda + \frac{t' - t}{t''' - t} x''_\lambda \right\} + 1/2 \left\{ \frac{t'' - t'}{t''' - t} Q'' x_\lambda + \frac{t' - t}{t''' - t} Q' x''_\lambda \right\} \frac{1}{(C'^2 + u'^2)^{3/2}}, \quad (1)$$

wobei für die Rechnung die $x_\lambda, x'_\lambda, x''_\lambda$ durch die Relationen:

$$x_\lambda = -X_\lambda$$

$$x'_\lambda = (u' - R' \cos \chi') \cos \beta' \sin (\lambda' - \lambda) - X'_\lambda$$

$$x''_\lambda = (u'' - R'' \cos \chi'') \cos \beta'' \sin (\lambda'' - \lambda) - X''_\lambda$$

gegeben werden. Die Grössen der Gleichung (6) sind die x -Coordinationen des Planeten, bezogen auf eine andere Axe, deren Richtung der Länge (Rectascension) $90^\circ + \lambda'''$ und

der Breite (Declination) 0° entspricht. Nach Analogie mit dem Vorhergehenden können wir schreiben:

$$x''_\lambda = \left\{ \frac{t'' - t'}{t''' - t'} x'''_{\lambda'''} + \frac{t''' - t''}{t''' - t'} x'_{\lambda'''} \right\} \\ + \frac{1}{2} \left\{ \frac{t'' - t'}{t''' - t'} Q' x'''_{\lambda'''} + \frac{t''' - t''}{t''' - t'} Q'' x'''_{\lambda'''} \right\} \{C''^2 + u''^2\}^{-3/2} \dots \dots (2)$$

wobei die Relationen:

$$x'_{\lambda'''} = (u' - R' \cos \chi') \cos \beta' \sin (\lambda' - \lambda''') - X'_{\lambda'''} \\ x''_{\lambda'''} = (u'' - R'' \cos \chi'') \cos \beta'' \sin (\lambda'' - \lambda''') - X''_{\lambda'''} \\ x'''_{\lambda'''} = - X'''_{\lambda'''}$$

zuzuziehen sind.

Die Form der Gleichungen (1) und (2) ist recht übersichtlich, da die darin vorkommenden Grössen beinahe unmittelbar durch die Data des Materials ausgedrückt werden, daher die Vorbereitungsrechnungen sich auf ein Minimum reduciren.

Wenn es darauf ankommt, jene Gleichungen auf möglichst kurze Weise ohne Rücksicht auf andere Beziehungen abzuleiten, so kann das durch folgende Bemerkungen geschehen.

Jede heliocentrische Coordinate lässt sich ausdrücken als die Differenz: geocentrische Coordinate weniger Sonnencoordinate. Soll nun aus der allgemeineren Fundamentalgleichung:

$$x' = \frac{[r' r'']}{[r' r'']} x + \frac{[r' r']}{[r' r'']} x''$$

die Distanz Δ der ersten Beobachtung durch eine bestimmte Wahl des Coordinatensystems eliminirt werden, so genügt es, für die X-Axe eine Richtung zu suchen, von der man trotz der Unvollständigkeit der ersten Beobachtung sagen kann, dass sie mit der Richtung von Δ einen Winkel von 90° bildet, damit die geocentrische Coordinate verschwinde. Solche Richtung hat aber offenbar der Pol des durch den ersten geocentrischen Ort gelegten Längen- (beziehungsweise Rectascensions-) Meridians. Dieselbe Betrachtung wiederholt sich für die Gleichung:

$$x'' = \frac{[r'' r''']}{[r'' r''']} x' + \frac{[r'' r'']}{[r'' r''']} x''',$$

hier muss die X-Axe so gewählt werden, dass sie von dem unvollständigen Orte der vierten Beobachtung 90° absteht und die geocentrische Coordinate mit Δ''' oder q''' verschwindet.

Leicht kann man nach derselben Betrachtungsweise auch denjenigen Gleichungen, welche dazu dienen, um aus q' und q'' die Grössen q und q''' zu finden, die einfachste Gestalt geben. Man braucht zu dem Zweck nur aus der allgemeinen Gleichung zwischen x , x' und x'' einmal die Distanz Δ'' zu eliminiren, was einfach dadurch erreicht wird, dass eine von Δ'' um 90° abstehende X-Axe gewählt wird; das andere Mal bringt man in der Gleichung zwischen x' , x'' , x''' nach derselben Methode den Coëfficienten von Δ' zum Verschwinden. Auf solche Weise wird man zwei Gleichungen, die eine zwischen Δ und Δ'' , die andere zwischen Δ' und Δ''' bekommen, in welchen nun auch die Verhältnisse zwischen den Dreiecksflächen nicht mehr ganz unbekannt sind.

Die Coëfficienten, welche in allen diesen Gleichungen vorkommen, Cosinus des Abstandes zweier gegebenen Punkte der Sphäre von einander, berechnen sich nach der bekannten Cosinusformel der sphärischen Trigonometrie auf so einfache Art, dass ihre besondere Ausführung hier nicht nöthig scheint.

Neunundachtzigste Vorlesung.

Modification in der Bildung der ersten Hypothese zur Erzielung einer grösseren Genauigkeit bei derselben.

Die einfache Form der aufzulösenden Gleichungen erlaubt es, die erste Hypothese noch um ein Erhebliches genauer zu bilden, als wir bis dahin gethan haben. Wir fanden nach den Reihenentwickelungen der Abtheilung IV, für die Verhältnisse der Dreiecksflächen, wenn zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} k(t' - t) &= \vartheta'', & k(t'' - t) &= \vartheta', & k(t'' - t') &= \vartheta, \\ k(t'' - t') &= \vartheta'', & k(t''' - t') &= \vartheta', & k(t''' - t'') &= \vartheta, \end{aligned}$$

gesetzt wird (wobei $\vartheta = \vartheta''$),

$$\begin{aligned} \frac{[r' r'']}{[r' r'']} &= \frac{\vartheta}{\vartheta'} \left\{ 1 + \frac{\vartheta'^2 - \vartheta^2}{6 r'^3} + \frac{\vartheta'' (\vartheta'^2 + \vartheta \vartheta'' - \vartheta^2)}{4 r'^4} \frac{dr'}{k dt} + \dots \right\} \\ \frac{[r' r']}{[r' r']} &= \frac{\vartheta''}{\vartheta'} \left\{ 1 + \frac{\vartheta'^2 - \vartheta''^2}{6 r'^3} - \frac{\vartheta (\vartheta^2 + \vartheta \vartheta'' - \vartheta'^2)}{4 r'^4} \frac{dr'}{k dt} + \dots \right\} \\ \frac{[r'' r''']}{[r' r''']} &= \frac{\vartheta_i}{\vartheta'_i} \left\{ 1 + \frac{\vartheta'^2 - \vartheta_i^2}{6 r''^3} + \frac{\vartheta'_i (\vartheta'^2 + \vartheta_i \vartheta'_i - \vartheta_i^2)}{4 r''^4} \frac{dr''}{k dt} + \dots \right\} \\ \frac{[r' r'']}{[r' r''']} &= \frac{\vartheta'_i}{\vartheta'_i} \left\{ 1 + \frac{\vartheta'^2 - \vartheta_i'^2}{6 r''^3} - \frac{\vartheta_i (\vartheta^2 + \vartheta_i \vartheta'_i - \vartheta_i^2)}{4 r''^4} \frac{dr''}{k dt} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Nun ist offenbar sehr nahe:

$$\frac{dr'}{k dt} = \frac{r'' - r'}{\vartheta} = - \frac{r' - r''}{\vartheta'_i},$$

ebenso:

$$\frac{dr''}{k dt} = \frac{r'' - r'}{\vartheta'_i} = - \frac{r' - r''}{\vartheta}.$$

Bei Einführung dieser Werthe in die Gleichungen (1) und (2) der 88. Vorlesung würden wiederholt die Unbekannten r' und r'' gleichzeitig auftreten; man braucht aber die Glieder mit $r'' - r'$ erst dann bei der Rechnung heranzuziehen, wenn man der Lösung mit Berücksichtigung der vorhergehenden Glieder schon ganz nahe gekommen ist, und kann jene Glieder dann als eine bekannte Grösse behandeln.

Mit nicht allzu viel Complication kann man sogar in der Genauigkeit noch einen Schritt weiter gehen. Unter Anwendung des Taylor'schen Satzes hat man:

$$\begin{aligned} r - r' &= \frac{dr'}{dt} \cdot (t - t') + \frac{d^2 r'}{2 dt^2} \cdot (t - t')^2 + \dots \\ r'' - r' &= \frac{dr'}{dt} \cdot (t'' - t') + \frac{d^2 r'}{2 dt^2} \cdot (t'' - t')^2 + \dots \end{aligned}$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen die Grösse $\frac{d^2 r'}{2 dt^2}$, so lässt sich

$\frac{dr'}{dt}$ durch r , r' und r'' ausdrücken; es wird nämlich:

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{(t' - t)^2 (r'' - r') + (t'' - t')^2 (r' - r)}{(t' - t)(t'' - t)(t'' - t')}$$

oder:

$$\frac{dr'}{k dt} = \frac{\vartheta''^2 (r'' - r') + \vartheta^2 (r' - r)}{\vartheta \vartheta' \vartheta''}.$$

Durch Analogie erhält man:

$$\frac{dr''}{dt} = \frac{(t'' - t)^2 (r''' - r'') + (t''' - t'')^2 (r'' - r')}{(t'' - t')(t''' - t'')(t''' - t')}$$

oder:

$$\frac{dr''}{k dt} = \frac{\vartheta''^2 (r''' - r'') + \vartheta'^2 (r'' - r')}{\vartheta, \vartheta', \vartheta''}.$$

Diese Ausdrücke werden, nach Substitution in den Reihenentwickelungen, drei Unbekannte gleichzeitig auftreten lassen, nämlich in der Gleichung (1) der 88. Vorlesung die Grössen r, r', r'' , in (2) die Grössen r', r'', r''' . Da nun aber nach dem mehrfach beschriebenen Verfahren r und r''' leicht aus r' und r'' berechnet werden können, so wird auch diese viel genauere Lösung nicht sehr umständlich, wenn man sich nur bei den ersten Versuchen auf die Glieder niederer Ordnung beschränkt.

Man kann alles eben Gesagte endlich noch in der Ausdehnung zur Anwendung bringen, dass man in den Finalgleichungen die vier Unbekannten r, r', r'', r''' auftreten lässt, wobei es dann möglich wird, in der ersten Hypothese die Näherung bis zu den Gliedern achter Ordnung inclusive zu treiben.

Neunzigste Vorlesung.

Die Gauss'sche Form der Berechnung der Bahn aus vier Beobachtungen.

Um den Leser endlich noch mit derjenigen Form bekannt zu machen, welche Gauss in der *Theoria motus c. c.* seiner Methode der Bahnberechnung aus vier Beobachtungen, von denen die mittleren vollständig sind, gegeben hat, machen wir von der Darstellungsweise Gebrauch, welche Bruhns in seiner Abhandlung: „*De planetis minoribus inter Martem et Jovem circa Solem versantibus*“ gewählt hat, wobei wir zugleich die dortige Bezeichnungsweise beibehalten wollen.

Es seien:

- t, t', t'', t''' die Beobachtungszeiten,
- $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ die geocentrischen Längen,
- β', β'' die geocentrischen Breiten zur Zeit t' und t'' ,
- L, L', L'', L''' die Längen der Erde,
- R, R', R'', R''' die Radienvectoren der Erde,
- r, r', r'', r''' die Abstände des Planeten,
- $\varrho, \varrho', \varrho'', \varrho'''$ die curtirten Distanzen des Planeten von der Erde,
- v, v', v'', v''' die wahren Anomalien des Planeten,
- E, E', E'', E''' die excentrischen Anomalien,
- M, M', M'', M''' die mittleren Anomalien;

ferner sei zur Abkürzung wieder:

$$\begin{aligned} r \ r' \sin(v' - v) &= [r \ r'] \\ r \ r'' \sin(v'' - v) &= [r \ r''] \\ r' \ r'' \sin(v'' - v') &= [r' \ r''] \\ r' \ r''' \sin(v''' - v') &= [r' \ r'''] \\ r'' \ r''' \sin(v''' - v'') &= [r'' \ r'''] \\ \frac{[r' \ r'']}{[r \ r'']} &= n \\ \frac{[r'' \ r''']}{[r' \ r''']} &= n' \\ \frac{[r \ r']}{[r \ r'']} &= n'' \\ \frac{[r' \ r'']}{[r' \ r''']} &= n'''. \end{aligned}$$

Bekanntlich ist nun:

$$\begin{aligned} [r' \ r''] x - [r \ r''] x' + [r \ r'] x'' &= 0 \\ [r' \ r''] y - [r \ r''] y' + [r \ r'] y'' &= 0 \\ [r'' \ r'''] x' - [r' \ r'''] x'' + [r' \ r''] x''' &= 0 \\ [r'' \ r'''] y' - [r' \ r'''] y'' + [r' \ r''] y''' &= 0, \end{aligned}$$

wenn wieder x, y, x', y' u. s. w. die heliocentrischen Coordinaten des Planeten vorstellen. Für letztere hat man aber auch die Relationen:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varrho \cos \alpha + R \cos L \\ y &= \varrho \sin \alpha + R \sin L \\ x' &= \varrho' \cos \alpha' + R' \cos L' \\ y' &= \varrho' \sin \alpha' + R' \sin L' \\ z' &= \varrho' \operatorname{tg} \beta' \\ x'' &= \varrho'' \cos \alpha'' + R'' \cos L'' \\ y'' &= \varrho'' \sin \alpha'' + R'' \sin L'' \\ z'' &= \varrho'' \operatorname{tg} \beta'' \\ x''' &= \varrho''' \cos \alpha''' + R''' \cos L''' \\ y''' &= \varrho''' \sin \alpha''' + R''' \sin L''' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

demnach, wenn man hierauf in den obigen Grundgleichungen Rücksicht nimmt:

$$\begin{aligned} n (\varrho \cos \alpha + R \cos L) - (\varrho' \cos \alpha' + R' \cos L') + n'' (\varrho'' \cos \alpha'' + R'' \cos L'') &= 0 \\ n (\varrho \sin \alpha + R \sin L) - (\varrho' \sin \alpha' + R' \sin L') + n'' (\varrho'' \sin \alpha'' + R'' \sin L'') &= 0 \\ n' (\varrho' \cos \alpha' + R' \cos L') - (\varrho'' \cos \alpha'' + R'' \cos L'') + n''' (\varrho''' \cos \alpha''' + R''' \cos L''') &= 0 \\ n' (\varrho' \sin \alpha' + R' \sin L') - (\varrho'' \sin \alpha'' + R'' \sin L'') + n''' (\varrho''' \sin \alpha''' + R''' \sin L''') &= 0. \end{aligned}$$

Wird die erste Gleichung mit $\sin \alpha$ multiplicirt, die zweite mit $-\cos \alpha$ und addirt, werden ferner die dritte und vierte nach Multiplication mit beziehungsweise $\sin \alpha'''$ und $\cos \alpha'''$ addirt, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} n R \sin(\alpha - L) - \{\varrho' \sin(\alpha - \alpha') + R' \sin(\alpha - L')\} \\ + n'' \{\varrho'' \sin(\alpha - \alpha'') + R'' \sin(\alpha - L'')\} = 0 \\ n' \{\varrho' \sin(\alpha''' - \alpha') + R' \sin(\alpha''' - L')\} \\ - \{\varrho'' \sin(\alpha''' - \alpha'') + R'' \sin(\alpha''' - L'')\} + n''' R''' \sin(\alpha''' - L''') = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

Es sei ferner:

$$P' = \frac{n}{n'}, \quad P'' = \frac{n''}{n'}, \quad Q' = (n + n'' - 1)r'^3, \quad Q'' = (n' + n''' - 1)r''^3,$$

so dass:

$$\begin{aligned} 1 + P' &= \frac{n + n''}{n''} & 1 + P'' &= \frac{n' + n'''}{n'} \\ 1 + \frac{Q'}{r'^3} &= n + n'' & 1 + \frac{Q''}{r''^3} &= n' + n''' \\ \frac{1}{n''} &= \frac{1 + P'}{1 + \frac{Q'}{r'^3}} & \frac{1}{n'} &= \frac{1 + P''}{1 + \frac{Q''}{r''^3}} \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke für n , n' , n'' , n''' sind in (2) zu substituiren; man erhält dadurch:

$$\left. \begin{aligned} P' R \sin(\alpha - L) - \frac{1 + P'}{1 + \frac{Q'}{r'^3}} \{R' \sin(\alpha - L') + Q' \sin(\alpha - \alpha')\} \\ + R'' \sin(\alpha - L'') + Q'' \sin(\alpha - \alpha'') = 0 \\ P'' R''' \sin(\alpha''' - L''') - \frac{1 + P''}{1 + \frac{Q''}{r''^3}} \{R'' \sin(\alpha''' - L'') + Q'' \sin(\alpha''' - \alpha'')\} \\ + R' \sin(\alpha''' - L') + Q' \sin(\alpha''' - \alpha') = 0 \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

Die vier Unbekannten Q' , r' , Q'' und r'' werden auf zwei reducirt, wenn man die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q'}{\cos \beta'} &= -R' \cos \delta' + \sqrt{r'^2 - R'^2 \sin^2 \delta'^2} \\ \frac{Q''}{\cos \beta''} &= -R'' \cos \delta'' \pm \sqrt{r''^2 - R''^2 \sin^2 \delta''^2} \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

heranzieht, worin δ' und δ'' die durch die Formeln:

$$\begin{aligned} \cos \delta' &= \cos \beta' \cos(\alpha' - L') \\ \cos \delta'' &= \cos \beta'' \cos(\alpha'' - L'') \end{aligned}$$

zu bestimmenden äusseren Winkel an der Erde in der zweiten und dritten Beobachtung vorstellen.

Führt man noch die Winkel am Planeten ein, z' und z'' , und setzt zur Abkürzung:

$$\sqrt{r'^2 - R'^2 \sin^2 \delta'^2} = x' \quad \sqrt{r''^2 - R''^2 \sin^2 \delta''^2} = x'',$$

so wird:

$$\begin{aligned} \cotg z' &= \frac{x'}{R' \sin \delta'} & \cotg z'' &= \frac{x''}{R'' \sin \delta''} \\ r' &= \frac{R' \sin \delta'}{\sin z'} & r'' &= \frac{R'' \sin \delta''}{\sin z''} \\ Q' &= \frac{R' \sin(\delta' - z')}{\sin z'} \cos \beta' & Q'' &= \frac{R'' \sin(\delta'' - z'')}{\sin z''} \cos \beta''. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (3) gehen über in:

$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{P'}{1 + \frac{Q'}{r'^3}} \{R' \sin(\alpha - L') + \cos \beta' \sin(\alpha - \alpha') x' - \cos \beta' \sin(\alpha - \alpha') R' \cos \delta'\} \\ = P' R \sin(\alpha - L) + R'' \sin(\alpha - L'') + \cos \beta'' \sin(\alpha - \alpha'') x'' - \cos \beta'' \sin(\alpha - \alpha'') R'' \cos \delta'' \\ 1 + \frac{P''}{1 + \frac{Q''}{r''^3}} \{R'' \sin(\alpha''' - L''') + \cos \beta'' \sin(\alpha''' - \alpha'') x'' - \cos \beta'' \sin(\alpha''' - \alpha'') R'' \cos \delta''\} \\ = P'' R''' \sin(\alpha''' - L''') + R' \sin(\alpha''' - L') + \cos \beta' \sin(\alpha''' - \alpha') x' - \cos \beta' \sin(\alpha''' - \alpha') R' \cos \delta' \end{aligned} \right\} (5)$$

Setzt man noch:

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta' \sin(\alpha - \alpha') &= A; & \cos \beta'' \sin(\alpha - \alpha'') &= B \\ \cos \beta'' \sin(\alpha''' - \alpha'') &= C; & \cos \beta' \sin(\alpha''' - \alpha') &= D \\ \frac{R' \sin(\alpha - L')}{A} - R' \cos \delta' &= b' \\ \frac{R'' \sin(\alpha''' - L'')}{C} - R'' \cos \delta'' &= b'' \\ \frac{R' \sin(\alpha''' - L')}{D} - R' \cos \delta' &= \kappa' \\ \frac{R'' \sin(\alpha - L'')}{B} - R'' \cos \delta' &= \kappa'' \\ \frac{R \sin(\alpha - L)}{B} &= \lambda \\ \frac{R''' \sin(\alpha''' - L''')}{D} &= \lambda''' \\ \frac{A}{B} &= \mu' \\ \frac{C}{D} &= \mu'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu' (1 + P') (x' + b')}{1 + \frac{Q'}{(x'^2 + R'^2 \sin \delta'^2)^{3/2}}} &= x'' + \kappa'' + \lambda P' \\ \frac{\mu'' (1 + P'') (x'' + b'')}{1 + \frac{Q''}{(x''^2 + R''^2 \sin \delta''^2)^{3/2}}} &= x' + \kappa' + \lambda''' P' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

oder, wenn zu grösserer Bequemlichkeit:

$$\begin{aligned} -\kappa'' - \lambda P' &= c' & -\kappa' - \lambda''' P'' &= c'' \\ \mu' (1 + P') &= d' & \mu'' (1 + P'') &= d'' \end{aligned}$$

gesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} x' &= c' + \frac{d' (x' + b')}{1 + \frac{Q'}{(x'^2 + R'^2 \sin \delta'^2)^{3/2}}} \\ x'' &= c'' + \frac{d'' (x'' + b'')}{1 + \frac{Q''}{(x''^2 + R''^2 \sin \delta''^2)^{3/2}}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Es sei:

$$\begin{aligned} k(t' - t) &= \tau'' & k(t'' - t) &= \tau' & k(t''' - t') &= \tau \\ k(t''' - t'') &= \tau''' & k(t''' - t') &= \tau'_0, \end{aligned}$$

so wird nach den Entwicklungen der Abtheilung IV:

$$\left. \begin{aligned} n &= \frac{\tau}{\tau'} \left\{ 1 + \frac{1}{6} \frac{\tau'' (\tau' + \tau)}{\tau'^3} + \frac{1}{4} \frac{\tau'' (\tau''^2 + \tau \tau'' - \tau^2)}{\tau'^4} \frac{d\tau'}{k dt} + \dots \right\} \\ n'' &= \frac{\tau''}{\tau'} \left\{ 1 + \frac{1}{6} \frac{\tau (\tau' + \tau'')}{\tau'^3} - \frac{1}{4} \frac{\tau (\tau^2 + \tau \tau'' - \tau''^2)}{\tau'^4} \frac{d\tau'}{k dt} + \dots \right\} \\ n' &= \frac{\tau'''}{\tau'_0} \left\{ 1 + \frac{1}{6} \frac{\tau (\tau' + \tau''')}{\tau''^3} + \frac{1}{4} \frac{\tau (\tau^2 + \tau \tau''' - \tau''^2)}{\tau''^4} \frac{d\tau''}{k dt} + \dots \right\} \\ n''' &= \frac{\tau}{\tau'_0} \left\{ 1 + \frac{1}{6} \frac{\tau''' (\tau'_0 + \tau)}{\tau''^3} - \frac{1}{4} \frac{\tau''' (\tau''^2 + \tau''' \tau - \tau^2)}{\tau''^4} \frac{d\tau''}{k dt} + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots (9)$$

Unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung setzt Gauss in der ersten Annäherung:

$$P' = \frac{n}{n''} - \frac{\tau}{\tau''} \quad P'' = \frac{n'''}{n'} = \frac{\tau}{\tau'''} \\ Q' = (n + n'' - 1) r'^3 = \frac{1}{2} \tau \tau'' \quad Q'' = (n' + n'' - 1) r''^3 = \frac{1}{2} \tau \tau'''.$$

Einundneunzigste Vorlesung.

Fortsetzung der Entwicklungen der vorhergehenden Vorlesung.

Bruhns macht hier den Vorschlag, die erste Hypothese auf etwas andere Art als die eben angegebene zu bilden, um durchschnittlich, besonders aber bei sehr ungleichen Zeitintervallen, eine grössere Genauigkeit zu erreichen. Es verdient diese Modification um so mehr Beachtung, als gerade bei der Berechnung einer Bahn aus vier Oertern bei dem Aussuchen des Materials eine ziemlich grosse Ungleichheit der Zwischenzeiten gar nicht zu vermeiden ist, wenn man nicht das viel grössere Uebel haben will, dass zwei von den vier geocentrischen Längen einander sehr nahe gleich werden.

Die Gleichungen (2) der 90. Vorlesung werden unter Zuziehung von (4) und (6) sich schreiben lassen:

$$n \lambda - \mu' x' - \mu' b' + n'' x'' + n'' \kappa'' = 0 \\ n''' \lambda''' - \mu'' x'' - \mu'' b'' + n' x' + n' \kappa' = 0.$$

Werden darin für n , n' , n'' und n''' noch diejenigen Glieder der Entwicklung berücksichtigt, welche $\frac{1}{r'^3}$ und $\frac{1}{r''^3}$ enthalten, dividirt man ferner die erste der vorstehenden Gleichungen mit $\frac{\tau}{\tau'}$, die zweite mit $\frac{\tau}{\tau'_0}$ und setzt:

$$P' = \frac{\tau}{\tau''} \quad P'' = \frac{\tau}{\tau'''},$$

so wird man haben:

$$\mu' (1 + P') (x' + b') = (x'' + \kappa'' + \lambda' P') \cdot \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{6} [\tau (\tau' + \tau'')] + \frac{1}{6} \frac{\tau' (\tau'' - \tau) P' \lambda'}{P' \lambda + x'' + \kappa''}}{r'^3} \right\} \\ \mu'' (1 + P'') (x'' + b'') = (x' + \kappa' + \lambda''' P'') \cdot \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{6} [\tau (\tau'_0 + \tau''')] + \frac{1}{6} \frac{\tau'_0 (\tau''' - \tau') P'' \lambda'''}{P'' \lambda''' + x' + \kappa'}}{r''^3} \right\}$$

Sollen nun diese Gleichungen auf dieselbe Form, wie in (8) der 90. Vorlesung zurückgebracht werden, so braucht man nur zu setzen:

$$\left. \begin{aligned} Q' &= \frac{1}{6} \tau (\tau' + \tau'') + \frac{1}{6} \frac{\tau' (\tau'' - \tau) P' \lambda}{P' \lambda + x'' + \kappa''} \\ &= \frac{1}{6} \tau^2 \left(\frac{2 + P'}{P'} \right) + \frac{1}{6} \frac{\tau \tau' (1 - P') \lambda}{x'' - c'} \\ Q'' &= \frac{1}{6} \tau (\tau'_0 + \tau''') + \frac{1}{6} \frac{\tau'_0 (\tau''' - \tau') P'' \lambda'''}{P'' \lambda''' + x' + \kappa'} \\ &= \frac{1}{6} \tau^2 \left(\frac{2 + P''}{P''} \right) + \frac{1}{6} \frac{\tau \tau'_0 (1 - P'') \lambda'''}{x' - c''} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

In diesen Ausdrücken kommen auch die unbekannten Grössen x' und x'' vor, für welche die aus den Versuchen selbst hervorgehenden Näherungen eingesetzt werden. Bei der Auflösung der Gleichungen (8) der 90. Vorlesung geht man von derjenigen Annäherung aus, welche sich ergibt, wenn $Q' = Q'' = 0$ gesetzt wird, d. h. von den Werthen:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{c'' + d''(b'' + c') + d' d'' b'}{1 - d' d''} \\ x'' &= \frac{c' + d'(b' + c'') + d' d'' b''}{1 - d' d''} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Die Verbesserungen aber kann man auf folgende Art erhalten. Mit einem genäherten Werthe von x' , welchen wir durch ξ' bezeichnen wollen, bestimmt man aus der ersteren der Gleichungen (8) den Näherungswerth ξ'' , und darauf mit diesem letzteren aus der zweiten jener Gleichungen den Werth von x' , welchen wir X' nennen wollen. Es sei nun der Versuchswerth von x' überhaupt gleich $\xi' + \Delta \xi'$, der nach der ersten der Gleichungen (8) dazu gehörende Werth von x'' gleich $\xi'' + \Delta \xi''$ und der darauf aus der zweiten Gleichung folgende Werth von x' gleich $X' + \Delta X'$, so wird man sehr angenähert die Proportion haben:

$$\Delta \xi' : \Delta X' = x' - \xi' : x' - X'$$

oder:

$$(x' - X') \Delta \xi' = \Delta X' (x' - \xi'),$$

also auch:

$$x' = \frac{X' \Delta \xi' - \xi' \Delta X'}{\Delta \xi' - \Delta X'} = \xi' + \frac{(\xi' - X') \Delta \xi'}{\Delta X' - \Delta \xi'}.$$

Für x'' erhält man auf demselben Wege:

$$x'' = \xi'' + \frac{(\xi'' - X') \Delta \xi''}{\Delta X' - \Delta \xi''}.$$

Aus x' und x'' findet man r' , r'' , q' , q'' mit Hülfe der oben angegebenen Relationen, und dann ferner auf bekannte Weise die heliocentrischen Coordinaten.

Um die heliocentrischen Bogen zwischen den äusseren Oertern, also $v''' - v$ auf bequeme Art zu finden, bemerke man, dass:

$$r r' \sin(v' - v) = \frac{r''}{n} r' r'' \sin(v'' - v') \text{ u. s. w.,}$$

also:

$$r \sin(v' - v) = \frac{r''}{n} r'' \sin(v'' - v'). \dots \dots \dots (3)$$

desgleichen:

$$r \sin(v' - v + v'' - v') = \frac{1}{n} r' \sin(v'' - v') \dots \dots \dots (4)$$

$$r''' \sin(v''' - v'') = \frac{r'}{n'''} r' \sin(v'' - v') \dots \dots \dots (5)$$

$$r''' \sin(v''' - v'' + v'' - v') = \frac{1}{n'''} r'' \sin(v'' - v') \dots \dots \dots (6)$$

Werden (3) und (4) sowie auch nachher (5) und (6) einmal addirt, das andere Mal von einander subtrahirt, so erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} r \sin \{(v' - v) + \frac{1}{2} (v'' - v')\} &= \frac{r' + n'' r''}{n} \sin \frac{1}{2} (v'' - v') \\ r \cos \{(v' - v) + \frac{1}{2} (v'' - v')\} &= \frac{r' - n'' r''}{n} \cos \frac{1}{2} (v'' - v') \\ r''' \sin \{(v''' - v'') + \frac{1}{2} (v'' - v')\} &= \frac{r'' + n' r'}{n'''} \sin \frac{1}{2} (v'' - v') \\ r''' \cos \{(v''' - v'') + \frac{1}{2} (v'' - v')\} &= \frac{r'' - n' r'}{n'''} \cos \frac{1}{2} (v'' - v'). \end{aligned}$$

Zweiundneunzigste Vorlesung.

Zusammenstellung der Formeln und Rechnungsbeispiel.

Bruhns wählt in der genannten Schrift folgende Beobachtungen des Planeten Bellona, um daran den Gang der numerischen Rechnung zu zeigen:

$t, t', t'', t''' \dots\dots\dots$	1854 März 4,5	März 17,5	März 47,5	März 86,5
$\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''' \dots\dots\dots$	177° 50' 48'',8	174° 53' 27'',7	169° 32' 23'',9	170° 55' 44'',6
$(\beta), \beta', \beta'', (\beta''') \dots\dots\dots$	(+ 7° 13' 56'',9)	+ 8° 6' 39'',2	+ 9° 1' 30'',3	(+ 8° 39' 19'',4)
$L, L', L'', L''' \dots\dots\dots$	164° 5' 58'',1	177° 3' 37'',0	206° 36' 54'',4	244° 20' 46'',2
$\log R, \log R', \log R'',$ $\log R''' \dots\dots\dots$	9,996668	9,998194	0,001910	0,005815.

Die vorstehenden Zahlen sind von dem Einflusse der Parallaxe, der Nütation und der Fixsternaberration befreit, auf das mittlere Aequinoctium der Epoche 1855,0 bezogen worden.

1. Kommen die folgenden Formeln zur Anwendung:

$$\begin{aligned} \tau'' &= k (t' - t) & \tau' &= k (t'' - t) \\ \tau &= k (t'' - t') & \tau_0 &= k (t''' - t') \\ \tau''' &= k (t''' - t'') \end{aligned}$$

wobei $\log k = 8,2355814$, ferner:

$$\begin{aligned} \lg w' &= \frac{\lg \beta'}{\sin(\alpha' - L')} & \lg \delta' &= \frac{\lg(\alpha' - L')}{\cos w'} \\ \lg w'' &= \frac{\lg \beta''}{\sin(\alpha'' - L'')} & \lg \delta'' &= \frac{\lg(\alpha'' - L'')}{\cos w''} \end{aligned}$$

δ und δ'' , die äusseren Winkel an der Erde in der zweiten und dritten Beobachtung, sind stets kleiner als 180° , und da in den Gleichungen $\cos \delta' = \cos \beta' \cos(\alpha' - L')$, $\cos \delta'' = \cos \beta'' \cos(\alpha'' - L'')$, $\cos \beta'$ und $\cos \beta''$ positive Grössen sind, so zu wählen, dass $\cos \delta'$ mit $\cos(\alpha' - L')$, $\cos \delta''$ mit $\cos(\alpha'' - L'')$ gleiches Vorzeichen hat.

In diesem Falle ergibt sich:

$$\begin{aligned} \log \tau'' &= 9,349524 & \log \tau' &= 9,869049 \\ \log \tau &= 9,712702 & & \\ \log \tau''' &= 9,826646 & \log \tau_0 &= 0,074430 \\ \delta' &= 8^\circ 23' 38'',7 & \delta'' &= 38^\circ 0' 14'',3 \\ \log R' \sin \delta' &= 9,162490 & \log R'' \sin \delta'' &= 9,791291 \\ \log R' \cos \delta' &= 9,993516 & \log R'' \cos \delta'' &= 9,898419. \end{aligned}$$

Sodann kommen 2. die Formeln:

$$\begin{array}{ll}
 \cos \beta' \sin (\alpha - \alpha') = A & \cos \beta'' \sin (\alpha - \alpha'') = B \\
 \cos \beta' \sin (\alpha''' - \alpha') = C & \cos \beta' \sin (\alpha''' - \alpha') = D \\
 \frac{R' \sin (\alpha - L')}{A} - R' \cos \delta' = b' & \frac{R \sin (\alpha - L)}{B} = \lambda \\
 \frac{R'' \sin (\alpha''' - L'')}{C} - R'' \cos \delta'' = b'' & \frac{R''' \sin (\alpha''' - L''')}{D} = \lambda''' \\
 \frac{R' \sin (\alpha''' - L')}{D} - R' \cos \delta' = \kappa' & \frac{A}{B} = \mu' \\
 \frac{R'' \sin (\alpha - L'')}{B} - R'' \cos \delta'' = \kappa'' & \frac{C}{D} = \mu''
 \end{array}$$

an die Reihe. Man erhält dadurch:

$$\begin{array}{ll}
 \log A = 8,708003 & \log C = 8,379153 \\
 \log B = 9,154385 & \log D = 8,835077_n \\
 \log b' = 9,855749_n & \log b'' = 1,402504_n \\
 \log \kappa' = 9,755687 & \log \kappa'' = 0,621092_n \\
 \log \lambda = 0,218206 & \log \lambda''' = 1,152288 \\
 \log \mu' = 9,553618 & \log \mu'' = 9,544076_n
 \end{array}$$

3. Wird nun zur Bildung der ersten Hypothese geschritten, wobei:

$$P' = \frac{\tau}{\tau'}, \quad P'' = \frac{\tau}{\tau''},$$

und Q' , Q'' entweder nach Gauss:

$$Q' = 1/2 \tau \tau'' \quad Q'' = 1/2 \tau \tau'''. \quad (1)$$

oder mit der Bruhns'schen Verbesserung:

$$\begin{array}{l}
 Q' = 1/6 \left\{ \tau^2 \frac{2 + P'}{P'} + \tau \tau' \frac{(1 - P') \lambda}{x' - c'} \right\} \\
 Q'' = 1/6 \left\{ \tau^2 \frac{2 + P''}{P''} + \tau \tau'' \frac{(1 - P'') \lambda''}{x'' - c''} \right\}
 \end{array} \quad (2)$$

Zur Abkürzung sei:

$$\begin{array}{ll}
 c' = -\kappa' - \lambda P' & d' = \mu' (1 + P') \\
 c'' = -\kappa' - \lambda''' P'' & d'' = \mu'' (1 + P'').
 \end{array}$$

Man erhält hier:

$$\begin{array}{ll}
 \log c' = 9,562483 & \log c'' = 1,060426_n \\
 \log d' = 0,073143 & \log d'' = 9,791860_n.
 \end{array}$$

Es sind sodann auf irgend einem indirecten Wege, z. B. dem in voriger Vorlesung beschriebenen ¹⁾, die Gleichungen:

$$x'' = c' + \frac{d' (x' + b')}{Q' \left(1 + \frac{(x'^2 + R'^2 \sin^2 \delta'^2)^{3/2}}{Q'} \right)} \quad (I)$$

¹⁾ Eine bequeme Auflösungsart besteht darin, dass man in den Annäherungsformeln (2) der Vorlesung 91 anstatt d' die Grösse $d' : \left\{ 1 + \frac{Q'}{x'^2 + R'^2 \sin^2 \delta'^2} \right\}$ und anstatt d'' die Grösse $d'' : \left\{ 1 + \frac{Q''}{x''^2 + R''^2 \sin^2 \delta''^2} \right\}$ einsetzt, indem man die Werthe von Q' und Q'' successive verbessert.

$$x' = c'' + \frac{d''(x'' + b'')}{1 + \frac{Q''}{(x''^2 + R''^2 \sin \delta''^2)^{3/2}}} \quad \dots \quad (II)$$

aufzulösen.

Die Bruhns'sche Hypothesenbildung von Q' und Q'' nach (2) kann offenbar erst angewandt werden, wenn x' und x'' schon nahe bekannt sind. Zuerst erhält man:

$$\log P' = 0,363178 \quad \log P'' = 9,886056$$

und wenn (1) zu Grunde gelegt wird:

$$\log Q' = 8,761196 \quad \log Q'' = 9,238318.$$

Von den Annäherungsformeln:

$$x' = \frac{c'' + d''(b'' + c') + d' d'' b''}{1 - d' d''}$$

$$x'' = \frac{c' + d'(b' + c'') + d' d'' b''}{1 - d' d''}$$

ausgehend, welche $\log x' = 0,409737$, $\log x'' = 0,407602$ als erste Werthe bieten, findet sich:

$$\log x' = 0,395328$$

$$\log x'' = 0,389030,$$

wenn die Hypothese nach (1) gebildet wird; nach (2) dagegen, wenn die Näherungswerthe $\log x' = 0,409737$, $\log x'' = 0,407602$ zu Grunde gelegt werden, ergibt sich:

$$\log Q' = 8,303187 \quad \log Q'' = 9,263833$$

$$\log x' = 0,394034 \quad \log x'' = 0,388375.$$

Mit letzterer Lösung wird dann aus (2) die noch genauere:

$$\log Q' = 8,224279 \quad \log Q'' = 9,264200$$

$$\log x' = 0,393996 \quad \log x'' = 0,388409$$

gefunden.

4. Kommt die Reihe an die Formeln:

$$\cotg z' = \frac{x'}{R' \sin \delta'}$$

$$r' = \frac{R' \sin \delta'}{\sin z'}$$

$$\varrho' = \frac{R' \sin(\delta' - z')}{\sin z'} \cos \beta'$$

$$\cotg z'' = \frac{x''}{R'' \sin \delta''}$$

$$r'' = \frac{R'' \sin \delta''}{\sin z''}$$

$$\varrho'' = \frac{R'' \sin(\delta'' - z'')}{\sin z''} \cos \beta''$$

$$\left. \begin{aligned} n'' &= \left(1 + \frac{Q'}{r'^3}\right) \frac{1}{1 + P'} \\ n &= n'' P' \\ n' &= \left(1 + \frac{Q''}{r'^3}\right) \frac{1}{1 + P''} \\ n''' &= n' P' \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{wenn } Q' \text{ und } Q'' \text{ aus} \\ (1) \text{ berechnet sind,} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} n'' &= \frac{\tau''}{\tau'} \left(1 + \frac{\tau \tau''}{2 r'^3} \cdot \frac{2 + P'}{3}\right) \\ n &= \frac{\tau}{\tau'} \left(1 + \frac{\tau \tau''}{2 r'^3} \cdot \frac{1 + 2 P'}{3 P'}\right) \\ n' &= \frac{\tau'''}{\tau'_0} \left(1 + \frac{\tau \tau'''}{2 r''^3} \cdot \frac{2 + P''}{3}\right) \\ n''' &= \frac{\tau}{\tau'_0} \left(1 + \frac{\tau \tau'''}{2 r''^3} \cdot \frac{1 + 2 P''}{3 P''}\right) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{wenn } Q' \text{ und } Q'' \text{ aus} \\ (2) \text{ berechnet sind.} \end{array}$$

In dem gegenwärtigen Beispiele würde aus (1) folgen:

$$\begin{array}{ll} z' = 3^{\circ} 20' 52'',9 & z'' = 14^{\circ} 10' 15'',5 \\ \log r' = 0,396069 & \log r'' = 0,402451 \\ \log \varrho' = 0,171675 & \log \varrho'' = 0,214119 \\ \log n'' = 9,482097 & \log n = 9,756855 \\ \log n' = 9,845275 & \log n''' = 9,642911 \end{array}$$

dagegen aus (2):

$$\begin{array}{ll} z' = 3^{\circ} 21' 29'',9 & z'' = 14^{\circ} 11' 25'',4 \\ \log r' = 0,394743 & \log r'' = 0,401868 \\ \log \varrho' = 0,169465 & \log \varrho'' = 0,213203 \\ \log n'' = 9,482823 & \log n' = 9,844981 \\ \log n = 9,756517 & \log n''' = 9,643393 \end{array}$$

5. Kommt die Ableitung der heliocentrischen Längen und Breiten, und, wenn die Verbesserung weit genug getrieben ist, des Knotens, der Neigung und der Argumente der Breite u, u', u'', u''' . Es dienen dazu die bekannten Gleichungen:

$$\begin{array}{l} r' \cos b' \sin(l' - L') = \varrho' \sin(\alpha' - L') \\ r' \cos b' \cos(l' - L') = \varrho' \cos(\alpha' - L') + R' \\ r' \sin b' = \varrho' \operatorname{tg} \beta' \\ r'' \cos b'' \sin(l'' - L'') = \varrho'' \sin(\alpha'' - L'') \\ r'' \cos b'' \cos(l'' - L'') = \varrho'' \cos(\alpha'' - L'') + R'' \\ r'' \sin b'' = \varrho'' \operatorname{tg} \beta'', \end{array}$$

wenn l, l', l'', l''' die heliocentrischen Längen, b, b', b'', b''' die heliocentrischen Breiten des Planeten vorstellen. Zur partiellen Prüfung der Rechnung dient, dass ϱ', ϱ'', r' und r'' mit den vorhin gefundenen Werthen übereinstimmen müssen. Zur Berechnung von Ω, i, u', u'' hat man dann weiter:

$$\begin{array}{l} \sin [1/2(l'' + l') - \Omega] \operatorname{tg} i = 1/2(\operatorname{tg} b'' + \operatorname{tg} b') \sec 1/2(l'' - l') \\ \cos [1/2(l'' + l') - \Omega] \operatorname{tg} i = 1/2(\operatorname{tg} b'' - \operatorname{tg} b') \operatorname{cosec} 1/2(l'' - l') \\ \operatorname{tg} u' = \operatorname{tg}(l' - \Omega) \sec i, \quad \operatorname{tg} u'' = \operatorname{tg}(l'' - \Omega) \sec i. \end{array}$$

Die numerischen Werthe sind hier, wenn Q' und Q'' aus (1) gebildet werden:

$$\begin{array}{ll} \log r' = 0,396069 & \log r'' = 0,402451 \text{ (also wie oben)} \\ l' = 175^{\circ} 45' 42'',6 & l'' = 183^{\circ} 29' 4'',9 \\ \log \operatorname{tg} b' = 8,931042 & \log \operatorname{tg} b'' = 9,014923 \\ \Omega = 144^{\circ} 42' 20'',5 & i = 9^{\circ} 23' 10'',9 \\ u' = 31^{\circ} 23' 54'',7 & u'' = 39^{\circ} 9' 23'',7. \end{array}$$

Wird die Hypothese nach (2) gebildet, so erhält man die Zahlen:

$$\begin{array}{ll} \log r' = 0,394742 & \log r'' = 0,401868 \\ l' = 175^{\circ} 45' 52'',2 & l'' = 183^{\circ} 30' 13'',4 \\ \log \operatorname{tg} b' = 8,930153 & \log \operatorname{tg} b'' = 9,014586 \\ \Omega = 144^{\circ} 43' 4'',8 & i = 9^{\circ} 22' 28'',3 \\ u' = 31^{\circ} 23' 16'',6 & u'' = 39^{\circ} 9' 44'',7. \end{array}$$

6. Sind die heliocentrischen Coordinaten der äusseren Oerter zu suchen nach den Formeln:

$$\begin{array}{l} r \sin [1/2(u'' - u') + (u' - u)] = \frac{r' + n'' r''}{n} \sin 1/2(u'' - u') \\ r \cos [1/2(u'' - u') + (u' - u)] = \frac{r' - n'' r''}{n} \cos 1/2(u'' - u') \end{array}$$

$$r''' \sin [1/2 (u'' - u') + (u''' - u'')] = \frac{r'' + n' r'}{n'''} \sin 1/2 (u'' - u')$$

$$r''' \cos [1/2 (u'' - u') + (u''' - u'')] = \frac{r'' - n' r'}{n'''} \cos 1/2 (u'' - u').$$

Für Bellona wird hier nach der Hypothesenbildung aus (1) gefunden:

$$\begin{array}{ll} \log r = 0,393473 & \log r''' = 0,411478 \\ u = 27^{\circ} 58' 29'',7 & u''' = 48^{\circ} 54' 28'',1, \end{array}$$

nach (2) aber:

$$\begin{array}{ll} \log r = 0,391813 & \log r''' = 0,411750 \\ u = 27^{\circ} 56' 25'',8 & u''' = 48^{\circ} 52' 46'',3. \end{array}$$

Wie in praktischen Fällen überhaupt, ist es nun sehr zweckmässig, eine vollständige Prüfung der bis hierher gefundenen Werthe vorzunehmen. Man berechnet zu dem Ende l , l''' , b und b''' aus u und u''' und dann weiter α , α''' , β , β''' , ϱ , ϱ''' ; es müssen dann, auf welche der beiden Arten die Hypothese für Q' und Q'' auch gebildet sein möge, α und α''' genau, β und β''' nahe mit den Beobachtungen übereinstimmen. Man kann sich folgender Formeln bedienen:

$$\begin{array}{ll} tg(l - \Omega) = tg u \cos i, & tg(l''' - \Omega) = tg u''' \cos i \\ \sin b = \sin u \sin i & \sin b''' = \sin u''' \sin i \\ r \cos b \sin(l - L) & = \varrho \sin(\alpha - L) \\ r \cos b \cos(l - L) - R & = \varrho \cos(\alpha - L) \\ r \sin b & = \varrho \operatorname{tg} \beta \\ r''' \cos b''' \sin(l''' - L''') & = \varrho''' \sin(\alpha''' - L''') \\ r''' \cos b''' \cos(l''' - L''') - R''' & = \varrho''' \cos(\alpha''' - L''') \\ r''' \sin b''' & = \varrho''' \operatorname{tg} \beta'''. \end{array}$$

Bei Hypothesenbildung nach (1) wird gefunden:

$$\begin{array}{ll} l = 172^{\circ} 21' 42'',7 & l''' = 193^{\circ} 13' 50'',3 \\ \log \sin b = 8,883683 & \log \sin b''' = 9,089603 \\ \alpha = 177^{\circ} 50' 48'',8 & \alpha''' = 170^{\circ} 55' 44'',4 \\ \beta = 7^{\circ} 13' 52'',4 & \beta''' = 8^{\circ} 40' 13'',3 \\ \log \varrho = 0,173753 & \log \varrho''' = 0,317833. \end{array}$$

Bei der Hypothesenbildung aus (2) erhält man:

$$\begin{array}{ll} l = 172^{\circ} 20' 27'',1 & l''' = 193^{\circ} 12' 56'',0 \\ \log \sin b = 8,882648 & \log \sin b''' = 9,088872 \\ \alpha = 177^{\circ} 50' 48'',9 & \alpha''' = 170^{\circ} 55' 44'',7 \\ \beta = 7^{\circ} 13' 55'',9 & \beta''' = 8^{\circ} 39' 14'',3 \\ \log \varrho = 0,170998 & \log \varrho''' = 0,318209. \end{array}$$

Nach S. 479 aber soll sein: $\beta''' = 8^{\circ} 39' 19'',4$. Die Prüfung fällt demnach befriedigend aus.

Dreiundneunzigste Vorlesung.

Fortsetzung des Rechnungsbeispiels. Zweite Hypothese.

Es müssen jetzt nach den eben gefundenen Zahlen P' und P'' , Q' und Q'' verbessert werden, für welches Geschäft eine Reihe von Methoden zu Gebote stehen.

Bezeichnet man das Verhältniss $\frac{\text{Sector}}{\text{Dreieck}}$ für die Intervalle $t' - t$, $t'' - t'$, $t''' - t''$ beziehungsweise mit y , y' , y'' , so wird man nach den früher gegebenen Entwicklungen haben:

$$P' = \frac{\tau}{\tau'} \cdot \frac{y}{y'} \quad P'' = \frac{\tau}{\tau''} \cdot \frac{y''}{y'}$$

$$Q' = \frac{1}{2} \tau \tau'' \frac{r' r''}{r r''} \frac{1}{y y' \cos \frac{1}{2}(u' - u) \cos \frac{1}{2}(u'' - u) \cos \frac{1}{2}(u'' - u')}$$

$$Q'' = \frac{1}{2} \tau \tau''' \frac{r'' r'''}{r' r'''} \frac{1}{y' y'' \cos \frac{1}{2}(u'' - u') \cos \frac{1}{2}(u''' - u') \cos \frac{1}{2}(u''' - u'')}.$$

Hansen's Kettenbruch oder auch die Encke'sche Reihenentwicklung oder die Tafeln der Theoria motus (siehe Tafel XII und XIII im beifolgenden Tafelanhang) liefern für das vorliegende Beispiel, wenn die erste Hypothese für Q' und Q'' nach (1) der 92. Vorlesung gebildet war:

$$\begin{aligned} \log y &= 0,000237 \\ \log y' &= 0,001224 \\ \log y'' &= 0,001965 \\ \log P' &= 0,362191 & \log P'' &= 9,886797 \\ \log Q' &= 8,759209 & \log Q'' &= 9,240136, \end{aligned}$$

für Q' und Q'' aus (2) der 92. Vorlesung:

$$\begin{aligned} \log y &= 0,000239 \\ \log y' &= 0,001232 \\ \log y'' &= 0,001964 \\ \log P' &= 0,362185 & \log P'' &= 9,886788 \\ \log Q' &= 8,758811 & \log Q'' &= 9,240008. \end{aligned}$$

Für den Fall der ersten Hypothese aus (1) der 92. Vorlesung ergibt dann die zweite Hypothese die folgenden Zahlen:

$$\begin{aligned} \log c' &= 9,572660 & \log d' &= 0,072455 \\ \log c'' &= 1,061130_n & \log d'' &= 9,792182_n \\ \log x' &= 0,394030 & \log x'' &= 0,388426 \\ \varepsilon' &= 30^\circ 21' 28'',9 & \varepsilon'' &= 140^\circ 11' 23'',6 \\ \log r' &= 0,394777 & \log r'' &= 0,401883 \\ \log \varrho' &= 0,169523 & \log \varrho'' &= 0,213226 \\ \log n' &= 9,482792 & \log n &= 9,844983 \\ \log n' &= 9,756571 & \log n''' &= 9,643368 \\ l' &= 175^\circ 45' 51'',9 & l'' &= 183^\circ 30' 11'',5 \\ \delta &= 144^\circ 42' 53'',5 & i &= 90^\circ 22' 27'',1 \\ u' &= 31^\circ 23' 27'',7 & u'' &= 39^\circ 9' 51'',0 \\ \log r &= 0,391866 & \log r''' &= 0,411701 \\ u &= 27^\circ 56' 39'',7 & u''' &= 48^\circ 53' 6'',7 \\ l &= 172^\circ 20' 29'',6 & l''' &= 193^\circ 13' 5'',2 \\ \alpha &= 177^\circ 50' 48'',9 & \alpha''' &= 170^\circ 55' 44'',4 \\ \beta &= 7^\circ 13' 56'',0 & \beta''' &= 8^\circ 39' 17'',0, \end{aligned}$$

für Q' und Q'' aus (2) der 92. Vorlesung liefert die zweite Hypothese:

$$\begin{aligned} \log c' &= 9,572721 & \log d' &= 0,072451 \\ \log c'' &= 1,061122_n & \log d'' &= 9,792179_n \\ \log x' &= 0,394046 & \log x'' &= 0,388452 \\ \varepsilon' &= 30^\circ 21' 28'',5 & \varepsilon'' &= 140^\circ 11' 20'',7 \end{aligned}$$

$\log r' = 0,394793$	$\log r'' = 0,401907$
$\log q' = 0,169549$	$\log q'' = 0,213264$
$\log n' = 9,482794$	$\log n = 9,844979$
$\log n' = 9,756571$	$\log n''' = 9,643359$
$l' = 175^{\circ}45'51'',8$	$l'' = 183^{\circ}30'8'',7$
$\Omega = 144^{\circ}43'5'',6$	$i = 9^{\circ}22'31'',2$
$u' = 31^{\circ}23'15'',5$	$u'' = 39^{\circ}9'39'',1$
$\log r = 0,391882$	$\log r''' = 0,411741$
$u = 27^{\circ}56'28'',3$	$u''' = 48^{\circ}52'47'',2$
$l = 172^{\circ}20'30'',1$	$l''' = 193^{\circ}12'57'',5$
$\alpha = 177^{\circ}50'48'',8$	$\alpha''' = 170^{\circ}55'44'',6$
$\beta = 7^{\circ}13'56'',0$	$\beta''' = 8^{\circ}39'17'',3$

Wird aus diesen Zahlen die dritte Hypothese gebildet, so ergibt die Fortsetzung von (1) der 92. Vorlesung:

$\log y = 0,000239$	
$\log y' = 0,001232$	
$\log y'' = 0,001964$	
$\log P' = 0,362185$	$\log P'' = 9,886788$
$\log Q' = 8,758812$	$\log Q'' = 9,240035,$

von (2) der 92. Vorlesung:

$\log y = 0,000239$	
$\log y' = 0,001232$	
$\log y'' = 0,001964$	
$\log P' = 0,362185$	$\log P'' = 9,886788$
$\log Q' = 8,758804$	$\log Q'' = 9,240026.$

Die Fortsetzung von (1) der 92. Vorlesung würde das Durchrechnen einer dritten Hypothese verlangen, wenn scharfe Uebereinstimmung erzielt werden soll; bei (2) der 92. Vorlesung hingegen stimmen die $\log P'$, $\log P''$ der dritten Hypothese vollständig, die eine weniger wichtige Rolle spielenden $\log Q'$ und $\log Q''$ aber so nahe mit den Zahlen der zweiten Hypothese, dass hier die weitere Berechnung der dritten Hypothese erspart wird.

Auf bekanntem Wege ergeben sich dann aus den heliocentrischen Coordinaten der äusseren Oerter die folgenden Elemente der Bellona:

Epoche 1855, März 0,0.	
$M = 36^{\circ}44'13'',8$	} Mittleres Aequinoctium von 1855,0
$\pi = 122^{\circ}17'6'',3$	
$\Omega = 144^{\circ}43'5'',6$	
$i = 9^{\circ}22'31'',2$	
$\varphi = 8^{\circ}54'3'',9$	
$\log a = 0,443278$	
$\mu = 767'',520,$	

wobei M die mittlere Anomalie der Epoche bedeutet.

Vierundneunzigste Vorlesung.

Hypothesenbildung (1) und (2).

Die vorhergehenden Rechnungen haben gezeigt, wie sehr die von Bruhns vorgeschlagene Hypothesenbildung (2) der älteren (1) der 92. Vorlesung an Genauigkeit überlegen ist. Wir wollen hier deren zwei andere hinzufügen, durch welche die Genauigkeit der ersten Hypothese noch weiter erheblich gesteigert werden kann.

Sehen wir uns nämlich die Gleichungen (9) der 90. und (1) der 91. Vorlesung etwas genauer an; der Kürze halber seien n, n', n'', n''' unter der Form:

$$\begin{aligned} n &= \frac{\tau}{\tau'} \left(1 + \frac{q}{r'^3} \right) & q &= \frac{1}{6} \tau'' (\tau' + \tau) \\ n' &= \frac{\tau'''}{\tau'_0} \left(1 + \frac{q'}{r''^3} \right) & q' &= \frac{1}{6} \tau (\tau'_0 + \tau''') \\ n'' &= \frac{\tau''}{\tau'} \left(1 + \frac{q''}{r'^3} \right) & q'' &= \frac{1}{6} \tau (\tau' + \tau'') \\ n''' &= \frac{\tau'''}{\tau'_0} \left(1 + \frac{q'''}{r''^3} \right) & q''' &= \frac{1}{6} \tau''' (\tau'_0 + \tau) \end{aligned}$$

enthalten, so gehen die Gleichungen (1) der 91. Vorlesung über in:

$$\begin{aligned} Q' &= q'' + \frac{(q - q'') P' \lambda}{P' \lambda + x'' + x'''} \\ Q'' &= q' - \frac{(q''' - q') P'' \lambda'''}{P'' \lambda''' + x' + x''}, \end{aligned}$$

während noch immer $P' = \frac{\tau}{\tau''}$, $P'' = \frac{\tau}{\tau''}$ gesetzt wird. In der vorstehenden Form können Q' und Q'' auch dann noch enthalten gedacht werden, wenn in den Reihenentwickelungen für n, n', n'', n''' Glieder von noch höherer Ordnung berücksichtigt werden sollen.

Sollen die Glieder mit $\frac{dr'}{k dt}$ und $\frac{dr''}{k dt}$ zugezogen werden, so hat man:

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{6} \tau'' (\tau' + \tau) + \frac{1}{4} \tau'' (\tau'' \tau' - \tau^2) \frac{dr'}{r' k dt} \\ q'' &= \frac{1}{6} \tau (\tau' + \tau'') - \frac{1}{4} \tau (\tau \tau' - \tau'^2) \frac{dr'}{r' k dt} \\ q' &= \frac{1}{6} \tau (\tau'_0 + \tau''') + \frac{1}{4} \tau (\tau \tau'_0 - \tau''^2) \frac{dr''}{r'' k dt} \\ q''' &= \frac{1}{6} \tau''' (\tau'_0 + \tau) - \frac{1}{4} \tau''' (\tau''' \tau'_0 - \tau^2) \frac{dr''}{r'' k dt} \\ q - q'' &= \frac{1}{6} (\tau''^2 - \tau^2) + \frac{1}{4} (\tau''^3 + \tau^3) \frac{dr'}{r' k dt} \\ q''' - q' &= \frac{1}{6} (\tau'''^2 - \tau^2) - \frac{1}{4} (\tau^3 + \tau'''^3) \frac{dr''}{r'' k dt}, \end{aligned}$$

demnach:

$$\begin{aligned} Q' &= \frac{1}{6} \left\{ \tau (\tau' + \tau'') + \frac{(\tau''^2 - \tau^2) P' \lambda}{P' \lambda + x'' + \kappa''} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{4} \left\{ \tau (\tau \tau' - \tau''^2) - \frac{(\tau^3 + \tau''^3) P' \lambda}{P' \lambda + x'' + \kappa''} \right\} \frac{dr'}{r' k dt} \\ Q'' &= \frac{1}{6} \left\{ \tau (\tau'_0 + \tau''') + \frac{(\tau''^2 - \tau^2) P'' \lambda'''}{P'' \lambda''' + x' + \kappa'} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \left\{ \tau (\tau \tau'_0 - \tau''^2) - \frac{(\tau^3 + \tau''^3) P'' \lambda'''}{P'' \lambda''' + x' + \kappa'} \right\} \frac{dr''}{r'' k dt}. \end{aligned}$$

Setzt man hier nach Vorlesung 89, aber unter Annahme der Bruhns'schen Bezeichnung:

$$\begin{aligned} \frac{dr'}{r' k dt} &= \frac{r'' - r'}{r' \tau} \\ \frac{dr''}{r'' k dt} &= \frac{r'' - r'}{r'' \tau}, \end{aligned}$$

so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} Q' &= \frac{1}{6} \left\{ \tau (\tau' + \tau'') + \frac{(\tau''^2 - \tau^2) P' \lambda}{P' \lambda + x'' + \kappa''} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \left\{ \tau \tau' - \tau''^2 - \frac{\tau^3 + \tau''^3}{\tau} \cdot \frac{P' \lambda}{P' \lambda + x'' + \kappa''} \right\} \frac{r' - r''}{r'} \\ Q'' &= \frac{1}{6} \left\{ \tau (\tau'_0 + \tau''') + \frac{(\tau''^2 - \tau^2) P'' \lambda'''}{P'' \lambda''' + x' + \kappa'} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \left\{ \tau \tau'_0 - \tau''^2 - \frac{\tau^3 + \tau''^3}{\tau} \cdot \frac{P'' \lambda'''}{P'' \lambda''' + x' + \kappa'} \right\} \frac{r'' - r'}{r''} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

wobei, wie früher bei Bruhns' Bildung der ersten Hypothese, die Grössen P' und P'' als Abkürzungen für $\frac{\tau}{\tau''}$ und $\frac{\tau}{\tau''}$ betrachtet werden müssen. In den folgenden Hypothesen dagegen stellen P' und P'' wieder die Verhältnisse $\frac{n}{n''}$ und $\frac{n''}{n}$ vor.

Noch erheblich weitere Annäherung an die wahren Werthe erhält man gleich in der ersten Hypothese, wenn nach Vorlesung 89:

$$\begin{aligned} \frac{dr'}{k dt} &= \frac{\tau^2 (r' - r) + \tau''^2 (r'' - r')}{\tau \tau' \tau''} \\ \frac{dr''}{k dt} &= \frac{\tau'^2 (r''' - r'') + \tau''^2 (r'' - r')}{\tau \tau'_0 \tau''} \end{aligned}$$

gesetzt wird; es ergeben sich dann die Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} Q' &= \frac{1}{6} \left\{ \tau (\tau' + \tau'') + \frac{(\tau''^2 - \tau^2) P' \lambda}{P' \lambda + x'' + \kappa''} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \left\{ \tau \tau' - \tau''^2 - \frac{\tau^3 + \tau''^3}{\tau} \cdot \frac{P' \lambda}{P' \lambda + x'' + \kappa''} \right\} \cdot \frac{\tau^2 (r - r') + \tau''^2 (r' - r'')}{\tau' \tau'' r'} \\ Q'' &= \frac{1}{6} \left\{ \tau (\tau'_0 + \tau''') + \frac{(\tau''^2 - \tau^2) P'' \lambda'''}{P'' \lambda''' + x' + \kappa'} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \left\{ \tau \tau'_0 - \tau''^2 - \frac{\tau^3 + \tau''^3}{\tau} \cdot \frac{P'' \lambda'''}{P'' \lambda''' + x' + \kappa'} \right\} \cdot \frac{\tau'^2 (r''' - r'') + \tau''^2 (r'' - r')}{\tau'_0 \tau''' r''} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Die Ausdrücke für n'' , n , n' , n''' werden bei der Hypothese nach (1):

$$\begin{aligned} n'' &= \frac{\tau''}{\tau'} \left\{ 1 + \frac{\tau \tau''}{2 r'^3} \frac{2 + P'}{3} + \frac{\tau \tau' - \tau''^2}{4} \cdot \frac{r' - r''}{r'^4} \right\} \\ n &= \frac{\tau}{\tau'} \left\{ 1 + \frac{\tau \tau''}{2 r'^3} \frac{1 + 2 P'}{3} + \frac{\tau'' \tau' - \tau^2}{4 P'} \cdot \frac{r'' - r'}{r'^4} \right\} \\ n' &= \frac{\tau'''}{\tau'_0} \left\{ 1 + \frac{\tau \tau'''}{2 r''^3} \frac{2 + P''}{3} + \frac{\tau \tau'_0 - \tau'''^2}{4} \cdot \frac{r'' - r'}{r''^4} \right\} \\ n''' &= \frac{\tau}{\tau'_0} \left\{ 1 + \frac{\tau \tau'''}{2 r''^3} \frac{1 + 2 P''}{3} + \frac{\tau'' \tau'_0 - \tau''^2}{4 P''} \cdot \frac{r' - r''}{r''^4} \right\}, \end{aligned}$$

bei der Hypothese nach (2):

$$\begin{aligned} n'' &= \frac{\tau''}{\tau'} \left\{ 1 + \frac{\tau \tau''}{2 r'^3} \frac{2 + P'}{3} + \frac{\tau \tau' - \tau''^2}{4} \cdot \frac{\tau^2 (r - r') + \tau''^2 (r' - r'')}{\tau' \tau'' r'^4} \right\} \\ n &= \frac{\tau}{\tau'} \left\{ 1 + \frac{\tau \tau''}{2 r'^3} \frac{1 + 2 P'}{3} + \frac{\tau'' \tau' - \tau^2}{4 P'} \cdot \frac{\tau^2 (r' - r) + \tau''^2 (r'' - r')}{\tau' \tau'' r'^4} \right\} \\ n' &= \frac{\tau'''}{\tau'_0} \left\{ 1 + \frac{\tau \tau'''}{2 r''^3} \frac{2 + P''}{3} + \frac{\tau \tau'_0 - \tau'''^2}{4} \cdot \frac{\tau'^2 (r''' - r'') + \tau'''^2 (r'' - r')}{\tau'_0 \tau'' r''^4} \right\} \\ n''' &= \frac{\tau}{\tau'_0} \left\{ 1 + \frac{\tau \tau'''}{2 r''^3} \frac{1 + 2 P''}{3} + \frac{\tau'' \tau'_0 - \tau''^2}{4 P''} \cdot \frac{\tau'^2 (r'' - r''') + \tau'''^2 (r' - r'')}{\tau'_0 \tau'' r''^4} \right\}. \end{aligned}$$

In den Formeln (1) und (2) sind die ersten Glieder offenbar mit denen der Bruhns'schen Formeln identisch. Die Zusatzglieder zu berücksichtigen, bietet sich bei den praktischen Rechnungen die beste Gelegenheit, nämlich da, wo die Zeiten wegen der Aberration zu corrigiren sind und deshalb schon aus diesem Grunde die Auflösung der Finalgleichungen noch einmal vorgenommen werden muss.

Das oben behandelte Beispiel für Bellona kann hier auch gleich dazu dienen, die Anwendung der Hypothese (1) und (2) zu zeigen, indem wir die aus (2) der 92. Vorlesung in der ersten Hypothese folgenden Werthe benutzen.

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left(\tau \tau' - \tau''^2 - \frac{\tau^3 + \tau''^3}{\tau} \cdot \frac{P' \lambda}{P' \lambda + x'' + x'''} \right) &= - 0,049083 \\ \frac{1}{4} \left(\tau \tau'_0 - \tau'''^2 - \frac{\tau^3 + \tau'''^3}{\tau} \cdot \frac{P'' \lambda'''}{P'' \lambda''' + x' + x'} \right) &= - 0,125807 \\ \frac{r' - r''}{r'} &= - 0,016541 \\ \frac{r'' - r'}{r''} &= + 0,016272, \end{aligned}$$

also $\log Q' = 8,244821$, $\log Q'' = 9,259334$. Lösen wir nach diesen Werthen die Finalgleichungen (I) und (II) der 92. Vorlesung von Neuem auf, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \log x' &= 0,394201 & \log x'' &= 0,388641 \\ \log r' &= 0,394946 & \log r'' &= 0,402085 \\ \log n'' &= 9,482781 & \log n &= 9,844974 \\ \log n''' &= 9,643279 & \log n' &= 9,756528. \end{aligned}$$

Rechnet man nach Hypothese (2), so erhält man $\log Q' = 8,243955$, $\log Q'' = 9,259147$, daraus im Uebrigen sehr nahe dieselbe Lösung. Den Grad ihrer Annäherung zu beurtheilen, braucht man nur die Werthe von n , n' , n'' , n''' mit den in der 93. Vorlesung

gefundenen zu vergleichen, da von der Darstellung dieser Verhältnisse der Dreiecke auch die der geocentrischen Oerter vorzugsweise abhängig ist. Man hat nämlich:

92. Vorlesung		94. Vorlesung	
Hypothese nach (1)	nach (2)	nach (1)	definitive Werthe
$\log n = 9,844974$	9,844981	9,845275	9,844979
$\log n' = 9,756855$	9,756517	9,756528	9,756571
$\log n'' = 9,482097$	9,482823	9,482781	9,482794
$\log n''' = 9,642911$	9,643393	9,643338	9,643359.

Sechste Abtheilung.

Die mechanische Quadratur und die Methoden der speciellen Störungen.

A. Die mechanische Quadratur.

Fünfundneunzigste Vorlesung.

Herleitung der Methode der mechanischen Quadratur aus dem Taylor'schen Theorem (nach Encke).

(1.)

Bei der Anwendung der mechanischen Quadratur haben wir es, wie überhaupt in den meisten Anwendungen bei der Astronomie, mit lauter Grössen zu thun, die, wenn man sie für verschiedene Werthe der Variabeln, von denen sie abhängen, bestimmt und die (nicht zu grossen) Aenderungen dieser Werthe in arithmetischer Progression fortschreiten lässt, auf arithmetische Reihen von höheren Ordnungen führen, das heisst auf solche Reihen, bei welchen irgend eine der höheren Differenzen als constant oder verschwindend betrachtet werden kann. Für alle solche Reihen, bei denen die Continuität stets stattfindet, gilt der Taylor'sche Lehrsatz in aller Strenge und ohne Ausnahme. Wie weit man seine Entwicklung führen muss, hängt von der Grösse der Aenderung ab, die man in regelmässiger Reihenfolge bei der zu Grunde gelegten Variabeln annimmt. Es gehört ein praktischer Tact, der nicht auf bestimmte Regeln sich zurückführen lässt, dazu, um das richtige Verhältniss zwischen der Genauigkeit, die man erreichen will, und der dazu nöthigen Weitläufigkeit der Rechnung zu finden.

So wie bei dem Taylor'schen Satze Differentialquotienten der verschiedenen Ordnungen vorkommen, so werden bei der Anwendung die Differenzen gebraucht werden, die aus den verschiedenen Werthen der Functionen hervorgehen. Beide sind einander ganz analog. Wenn der Differentialquotient der ersten Ordnung die Geschwindigkeit ist, mit welcher sich die Function für einen bestimmten Werth der zu Grunde liegenden Variabeln oder des Argumentes ändert, und zwar auf eine dabei angenommene Einheit bezogen, so ist die erste Differenz der Inbegriff der sämmtlichen Aenderungen, welche der Werth der Function für eine angenommene Aenderung des Argumentes erlitten hat. Sie muss deshalb, mehr oder minder genähert, das Product des Differentialquotienten in die Aenderung des Argumentes sein, wenn man die letztere in den Einheiten ausdrückt, die bei dem Differentialquotienten zu Grunde liegen. Wird deshalb der Differential-

quotient der ersten Ordnung bei der Function $f(x)$ mit $f'(x)$ bezeichnet, so liegt es in der Natur der Sache, die erste Differenz analog, aber doch verschieden, durch f'_0 anzuzeigen. Dabei wird bei nicht allzu grossem Intervalle des Argumentes — es möge das Intervall mit ω bezeichnet werden — und zwei auf einander folgenden Werthen a und $a + \omega$ die Differenz der Functionen $f(a)$ und $f(a + \omega)$ in der Regel am nächsten durch $\omega f' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right)$ ausgedrückt werden. Zweckmässig wird deshalb auch die erste Differenz:

$$f(a + \omega) - f(a) = f'_0 \left(a + \frac{1}{2} \omega \right)$$

bezeichnet werden; und zwar dieses mit um so grösserem Rechte, als bei der einfachen Betrachtung der Entwicklung nach dem Taylor'schen Satze:

$$\begin{aligned} f(a + \omega) &= f \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) + \frac{1}{2} \omega f' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) \\ &\quad + \frac{1}{8} \omega^2 f'' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) + \frac{1}{48} \omega^3 f''' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) \dots \\ f(a) &= f \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) - \frac{1}{2} \omega f' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) \\ &\quad + \frac{1}{8} \omega^2 f'' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) - \frac{1}{48} \omega^3 f''' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) \dots \end{aligned}$$

die Differenz:

$$f(a + \omega) - f(a) = \omega f' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) + \frac{1}{24} \omega^3 f''' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) \dots$$

sich als eine wirkliche Function von $a + \frac{1}{2} \omega$ darstellt, da die Differentialquotienten $f' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right)$, $f''' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right)$ Functionen von x sind, in welchen nach der Differentiation $x = a + \frac{1}{2} \omega$ gesetzt worden ist. Stellt man deshalb die Argumente, von a an, regelmässig mit dem Intervalle ω fortschreitend, vertical unter einander, und setzt die dazugehörigen Functionen daneben, so wird, wenn man eine horizontale Linie zwischen a und $a + \omega$ hindurchführt, ganz der bisherigen Entwicklung gemäss die verticale Reihe der ersten Differenz bei den Functionen sich so stellen:

Argument	Function	I. Differenz
$a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$	$f(a)$	
$a + \omega \quad . \quad . \quad . \quad .$	$f(a + \omega)$	$f'_0 \left(a + \frac{1}{2} \omega \right)$
$a + 2 \omega \quad . \quad . \quad .$	$f(a + 2 \omega)$	$f'_0 \left(a + \frac{3}{2} \omega \right)$
$a + 3 \omega \quad . \quad . \quad .$	$f(a + 3 \omega)$	$f'_0 \left(a + \frac{5}{2} \omega \right)$
	etc.	

in welcher Bezeichnung für diese erste Differenz sich alles vereinigt, was man wünschen kann: Die Analogie mit dem Differentialquotienten, der Ort, wohin die Differenz gehört, oder die beiden Functionen, aus denen sie gebildet ist, und der Begriff, dass die ersten Differenzen wirklich als reine Functionen der Argumente

$$\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) \quad \left(a + \frac{3}{2} \omega\right) \quad \left(a + \frac{5}{2} \omega\right) \quad \text{etc.}$$

anzusehen sind; und da sie ebenfalls eine arithmetische Reihe der höheren Ordnung bilden, eine vollständige Interpolation bei ihnen stattfinden kann. Wenn folglich die erste Differenz:

$$f_0^I(a + \omega)$$

oder:

$$f\left(a + \frac{3}{2} \omega\right) - f\left(a + \frac{1}{2} \omega\right)$$

verlangt wird, so wird es nur nöthig sein, zwischen:

$$f_0^I\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) \quad \text{und} \quad f_0^I\left(a + \frac{3}{2} \omega\right)$$

strenge mit Rücksicht auf die höheren Differenzen zu interpoliren, um ohne die neuen Functionen $f\left(a + \frac{3}{2} \omega\right)$ und $f\left(a + \frac{1}{2} \omega\right)$ zu bilden, den richtigen Werth zu erhalten.

(2.)

Es wird kaum nöthig sein, hinzuzufügen, dass diese Betrachtungen bei den höheren Differenzen sich fortsetzen. Die zweiten Differenzen werden folglich wieder den ganzen Argumenten $a, a + \omega, a + 2 \omega$ etc. entsprechen, oder es wird:

$$f_0^I\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) - f_0^I\left(a - \frac{1}{2} \omega\right) = f_0^{II}(a)$$

$$f_0^I\left(a + \frac{3}{2} \omega\right) - f_0^I\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) = f_0^{II}(a + \omega) \quad \text{etc.}$$

Sie werden reine Functionen von $a, a + \omega$ etc. bilden und danach interpolirt werden können, wenn es erforderlich ist. Später wird es doch noch nöthig sein, direct nachzuweisen, dass f_0^{II} eine Function von $f^{II}(a), f^{IV}(a)$ etc. ist, und also überhaupt eine Function von x sein muss, wenn nach der Differentiation $x = a$ gesetzt wird. Hier braucht deshalb nur die Analogie zu Hülfe genommen zu werden.

Die dritten Differenzen werden wieder halbe Intervalle in ihren Argumenten haben, oder es wird:

$$f_0^{II}(a + \omega) - f_0^{II}(a) = f_0^{III}\left(a + \frac{1}{2} \omega\right)$$

$$f_0^{II}(a + 2 \omega) - f_0^{II}(a + \omega) = f_0^{III}\left(a + \frac{3}{2} \omega\right) \quad \text{etc.}$$

Bei den vierten Differenzen, überhaupt bei denen mit gerader Ordnungszahl, treten ganze Argumente ein, bei den fünften, überhaupt bei denen mit ungerader Ordnungszahl, halbe Intervalle. Das Schema wird also:

Argument	Function	I. Differenz	II. Differenz	III. Differenz	IV. Differenz
$a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$	$f(a)$	$f_0^I\left(a + \frac{1}{2} \omega\right)$ $f_0^I\left(a + \frac{3}{2} \omega\right)$	$f_0^{II}(a)$	$f_0^{III}\left(a + \frac{1}{2} \omega\right)$ $f_0^{III}\left(a + \frac{3}{2} \omega\right)$ etc.	$f_0^{IV}(a)$
$a + \omega \quad . \quad . \quad . \quad .$	$f(a + \omega)$		$f_0^{II}(a + \omega)$		$f_0^{IV}(a + \omega)$
$a + 2 \omega \quad . \quad . \quad .$	$f(a + 2 \omega)$ etc.		$f_0^{II}(a + 2 \omega)$		$f_0^{IV}(a + 2 \omega)$

Alle Verticalreihen bilden Reihen einer höheren arithmetischen Ordnung und können für jedes andere Argument interpolirt werden, wenn man nur gehörig berücksichtigt, ob die wirklich gebildeten Differenzen Functionen von ganzen Argumenten sind, oder von gebrochenen, das heisst von solchen, die halbe Intervalle neben sich haben.

So wie bei dem Taylor'schen Satze ein folgendes Glied das Differential des vorhergehenden, oder das vorhergehende Glied das Integral des folgenden enthält, so ist von selbst klar, dass derselbe Zusammenhang zwischen den Reihen der Differenzen und der summirten Functionen stattfinden muss, oder den Reihen, von deren erster die gegebenen Functionen $f(a)$, $f(a + \omega)$ etc. die Differenzen sind, von deren zweiter summirter Function die erste die Differenz ist u. s. w. Bezeichnet man nach der Analogie die erste summirte Function mit 1f_0 , die zweite mit 2f_0 , die dritte mit 3f_0 , so werden auch diese als Reihen von höherer arithmetischer Ordnung gelten müssen, und zwar werden bei der ersten, dritten, und überhaupt denen mit ungerader Ordnungszahl, die ihnen zugehörigen Argumente ein halbes Intervall enthalten und Functionen von gebrochenem Argumente sein, die zweiten, vierten und überhaupt die mit gerader Ordnungszahl, zu ganzen Argumenten und solchen Functionen gehören. Das Schema wird folglich werden:

Argument	III. summ. Function	II. summ. Function	I. summ. Function	Function
$a \dots\dots$	$^3f_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right)$	$^2f_0(a)$	$^1f_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right)$	$f(a)$
$a + \omega \dots$	$^3f_0\left(a + \frac{3}{2}\omega\right)$	$^2f_0(a + \omega)$	$^1f_0\left(a + \frac{3}{2}\omega\right)$	$f(a + \omega)$
$a + 2\omega \dots$	$^3f_0\left(a + \frac{5}{2}\omega\right)$	$^2f_0(a + 2\omega)$	$^1f_0\left(a + \frac{5}{2}\omega\right)$	$f(a + 2\omega)$
$a + 3\omega \dots$	$^3f_0\left(a + \frac{7}{2}\omega\right)$	$^2f_0(a + 3\omega)$	$^1f_0\left(a + \frac{7}{2}\omega\right)$	$f(a + 3\omega)$
	etc.		etc.	

Auch hier gilt Alles so wie bei den Differenzen, und die Verminderung der Accente, wenn man es so nennen will, oder die Vertauschung von f^{iv} mit f , f^{iii} mit 1f , f^{ii} mit 2f , f^i mit 3f geben, bei der Vergleichung mit dem Schema bis zur vierten Differenz, die Bezeichnung von selbst an. Der Anfang bei den summirten Functionen wird durch die Constanten bei der Integration bedingt. Er ist z. B. bei der ersten summirten Function völlig gleichgültig, sobald man nur ein bestimmtes Integral verlangt, oder die Differenz zweier summirter Functionen in der Verticalreihe der ersten summirten Functionen. Bei den höheren muss auf die Constanten der niederen summirten Functionen für den Anfang Rücksicht genommen werden. Das Schema der Differenzen und summirten Functionen ist völlig der Gliederung der Taylor'schen Reihe analog.

(3.)

Es möge hier noch eine Bezeichnung angeführt werden, welche bloss zur leichteren Hinschreibung dient. Bei allen Verticalreihen können durch Interpolation andere Argumente eingeführt werden, doch wird dieses in der Regel nur bei der Interpolation in die Mitte hinein stattfinden, so dass z. B. bei den Verticalreihen, die von der Form $a + n\omega$ sind, eine andere von der Form $a + \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega$ interpolirt wird, oder umgekehrt bei den Verticalreihen von der Form $a + \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega$, eine andere von der Form $a + n\omega$. Bei dieser Interpolation kommt das arithmetische Mittel zweier auf

einander folgender Werthe, bei denen die Argumente nur um ω verschieden sind, aber welche immer derselben Verticalreihe angehören, vor. Man bezeichne ein solches arithmetisches Mittel durch das untere Zeichen $\frac{1}{2}$ statt 0, und setze das arithmetische Mittel der Argumente hinzu, so wird nie eine Zweideutigkeit entstehen. So z. B. ist:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [f(a) + f(a + \omega)] &= f_{\frac{1}{2}}\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) \\ \frac{1}{2} \left[f_0^{\text{I}}\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) + f_0^{\text{I}}\left(a + \frac{3}{2}\omega\right) \right] &= f_{\frac{1}{2}}^{\text{I}}(a + \omega) \\ \frac{1}{2} [f_0^{\text{II}}(a + \omega) + f_0^{\text{II}}(a + 2\omega)] &= f_{\frac{1}{2}}^{\text{II}}\left(a + \frac{3}{2}\omega\right) \\ \frac{1}{2} \left[f_0^{\text{I}}\left(a + \frac{3}{2}\omega\right) + f_0^{\text{I}}\left(a + \frac{5}{2}\omega\right) \right] &= f_{\frac{1}{2}}^{\text{I}}(a + 2\omega) \end{aligned}$$

und so fort. Bei diesem arithmetischen Mittel wird also ein ganzes Argument bei den Differenzen und summirten Functionen von ungerader Ordnungszahl vorkommen, Argumente mit halben Intervallen bei den Differenzen und summirten Functionen von gerader Ordnungszahl. Diese Bezeichnung ist nicht wesentlich, aber sie macht die Formeln eleganter und übersichtlicher. Man muss nur dabei unterscheiden, dass namentlich

$$f_{\frac{1}{2}}\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) \text{ ganz verschieden ist von } f\left(a + \frac{1}{2}\omega\right)$$

und ähnlich bei den anderen Functionen.

(4.)

Die eigentliche Aufgabe der mechanischen Quadratur ist die Ermittlung des Integrals durch die Berechnung der einzelnen Werthe der Differentialquotienten. Um indessen von dem allgemeinen Taylor'schen Satze ausgehen zu können, wird es passender sein, die Summe der einzelnen Differentialquotienten, oder der gegebenen Functionen aus dem Taylor'schen Satze herzuleiten. Drückt man jede nächste Function durch die ihr um ein Intervall nachfolgende aus, und schreibt eine Reihe solcher Gleichungen unter einander, so hat man:

$$\begin{aligned} f(a) &= f(a + \omega) - \omega f^{\text{I}}(a + \omega) + \frac{1}{2}\omega^2 f^{\text{II}}(a + \omega) \\ &\quad - \frac{1}{6}\omega^3 f^{\text{III}}(a + \omega) + \frac{1}{24}\omega^4 f^{\text{IV}}(a + \omega) \dots \\ f(a + \omega) &= f(a + 2\omega) - \omega f^{\text{I}}(a + 2\omega) + \frac{1}{2}\omega^2 f^{\text{II}}(a + 2\omega) \\ &\quad - \frac{1}{6}\omega^3 f^{\text{III}}(a + 2\omega) + \frac{1}{24}\omega^4 f^{\text{IV}}(a + 2\omega) \dots \\ f(a + 2\omega) &= f(a + 3\omega) - \omega f^{\text{I}}(a + 3\omega) + \frac{1}{2}\omega^2 f^{\text{II}}(a + 3\omega) \\ &\quad - \frac{1}{6}\omega^3 f^{\text{III}}(a + 3\omega) + \frac{1}{24}\omega^4 f^{\text{IV}}(a + 3\omega) \dots \\ f(a + 3\omega) &= f(a + 4\omega) - \omega f^{\text{I}}(a + 4\omega) + \frac{1}{2}\omega^2 f^{\text{II}}(a + 4\omega) \\ &\quad - \frac{1}{6}\omega^3 f^{\text{III}}(a + 4\omega) + \frac{1}{24}\omega^4 f^{\text{IV}}(a + 3\omega) \dots \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f[a + (n-2)\omega] - f[a + (n-1)\omega] - \omega f'[a + (n-1)\omega] + \frac{1}{2}\omega^2 f''[a + (n-1)\omega] \\
 - \frac{1}{6}\omega^3 f'''[a + (n-1)\omega] + \frac{1}{24}\omega^4 f^{IV}[a + (n-1)\omega] \dots \\
 f[a + (n-1)\omega] = f(a + n\omega) - \omega f'(a + n\omega) + \frac{1}{2}\omega^2 f''(a + n\omega) \\
 - \frac{1}{6}\omega^3 f'''(a + n\omega) + \frac{1}{24}\omega^4 f^{IV}(a + n\omega).
 \end{aligned}$$

Summirt man diese sämtlichen Gleichungen, so wird auf der linken Seite nur $f(a)$ übrig bleiben und auf der rechten Seite im ersten Gliede $f(a + n\omega)$. In den übrigen Gliedern kommen die Summen der verschiedenen Differentialquotienten, von dem Argumente $a + \omega$ bis zu dem Argumente $a + n\omega$, überall vor. Bezeichnet man die endlichen Summen ähnlich wie die Integrale, indem man das letzte Argument als Endgrenze ansetzt, die Anfangsgrenze aber mit negativem Zeichen nimmt, so dass:

$$f'(a + \omega) + f'(a + 2\omega) \dots + f'(a + n\omega) = \sum_{m=0}^{m=n} f'(a + m\omega),$$

so wird das Ganze:

$$\begin{aligned}
 f(a) = f(a + n\omega) - \omega \sum_{m=0}^{m=n} f'(a + m\omega) \\
 + \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{m=0}^{m=n} f''(a + m\omega) \\
 - \frac{1}{6}\omega^3 \sum_{m=0}^{m=n} f'''(a + m\omega) \\
 + \frac{1}{24}\omega^4 \sum_{m=0}^{m=n} f^{IV}(a + m\omega) \text{ etc.},
 \end{aligned}$$

oder es wird:

$$\begin{aligned}
 \omega \sum_{m=0}^{m=n} f'(a + m\omega) = f(a + n\omega) - f(a) \\
 + \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{m=0}^{m=n} f''(a + m\omega) \\
 - \frac{1}{6}\omega^3 \sum_{m=0}^{m=n} f'''(a + m\omega) \\
 + \frac{1}{24}\omega^4 \sum_{m=0}^{m=n} f^{IV}(a + m\omega) \text{ etc.}
 \end{aligned}$$

Da nun aber die Entwicklung ganz auf dieselbe Weise auch bei f'', f''' etc. stattfinden kann, so lassen sich die endlichen Summen auf der rechten Seite eliminiren. Man hat ganz analog:

$$\begin{aligned}
 \omega \sum_{m=0}^{m=n} f''(a + m\omega) &= f'(a + n\omega) - f'(a) \\
 &+ \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{m=0}^{m=n} f'''(a + m\omega) \\
 &- \frac{1}{6} \omega^3 \sum_{m=0}^{m=n} f^{IV}(a + m\omega) \\
 &+ \frac{1}{24} \omega^4 \sum_{m=0}^{m=n} f^{V}(a + m\omega) \text{ etc.} \\
 \omega \sum_{m=0}^{m=n} f^{IV}(a + m\omega) &= f'''(a + n\omega) - f'''(a) \\
 &+ \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{m=0}^{m=n} f^{IV}(a + m\omega) \\
 &- \frac{1}{6} \omega^3 \sum_{m=0}^{m=n} f^{V}(a + m\omega) \text{ etc.}
 \end{aligned}$$

Multipliziert man die Gleichung für $\Sigma f'(a + m\omega)$ mit 1, die für $\Sigma f''(a + m\omega)$ mit $\alpha_0 \omega$, für $\Sigma f'''(a + m\omega)$ mit $\beta_0 \omega^2$, für $\Sigma f^{IV}(a + m\omega)$ mit $\gamma_0 \omega^3$ u. s. w., und summirt die Producte, wo $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ etc. unbestimmte Coëfficienten sind, über die man so verfügen kann, dass in der Summe aller Producte die endlichen Summen der rechten Seite wegfallen, so hat man:

$$\begin{aligned}
 \omega \sum_{m=0}^{m=n} f'(a + m\omega) &+ \left(\alpha_0 - \frac{1}{2} \right) \omega^2 \sum_{m=0}^{m=n} f''(a + m\omega) \\
 &+ \left(\beta_0 - \frac{1}{2} \alpha_0 + \frac{1}{6} \right) \omega^3 \sum_{m=0}^{m=n} f'''(a + m\omega) \\
 &+ \left(\gamma_0 - \frac{1}{2} \beta_0 + \frac{1}{6} \alpha_0 - \frac{1}{24} \right) \omega^4 \sum_{m=0}^{m=n} f^{IV}(a + m\omega) \dots \\
 &= f(a + n\omega) - f(a) + \alpha_0 \omega [f'(a + n\omega) - f'(a)] \\
 &\quad + \beta_0 \omega^2 [f''(a + n\omega) - f''(a)] \\
 &\quad + \gamma_0 \omega^3 [f'''(a + n\omega) - f'''(a)] \\
 &\quad + \delta_0 \omega^4 [f^{IV}(a + n\omega) - f^{IV}(a)] \dots
 \end{aligned}$$

Für die Wegschaffung sämtlicher endlicher Summen, ausser der für $f'(a + m\omega)$, hat man folglich die Gleichungen, welche beliebig fortgesetzt werden können:

$$\alpha_0 - \frac{1}{2} = 0 \qquad \beta_0 - \frac{1}{2} \alpha_0 + \frac{1}{6} = 0 \qquad \gamma_0 - \frac{1}{2} \beta_0 + \frac{1}{6} \alpha_0 - \frac{1}{24} = 0 \text{ etc.,}$$

oder, wenn man sie nach einander auflöst:

$$\begin{array}{ll}
 \alpha_0 = \frac{1}{2} & \varepsilon_0 = 0 \\
 \beta_0 = + \frac{1}{12} & \xi_0 = + \frac{1}{30240} \\
 \gamma_0 = 0 & \eta_0 = 0 \\
 \delta_0 = - \frac{1}{720} & \vartheta_0 = - \frac{1}{1209600}.
 \end{array}$$

Bezeichnet man diese Brüche, absolut genommen, mit:

$$A_1 = \frac{1}{12} \quad A_2 = \frac{1}{720} \quad A_3 = \frac{1}{30240} \quad A_4 = \frac{1}{1209600},$$

so wird also die obige Gleichung:

$$\begin{aligned} \omega \sum_{m=0}^{m=n} f'(a + m\omega) &= f(a + n\omega) - f(a) \\ &+ \frac{1}{2} \omega [f''(a + n\omega) - f''(a)] \\ &+ A_1 \omega^2 [f'''(a + n\omega) - f'''(a)] \\ &- A_2 \omega^4 [f^{IV}(a + n\omega) - f^{IV}(a)] \\ &+ A_3 \omega^6 [f^{VI}(a + n\omega) - f^{VI}(a)] \dots \end{aligned}$$

Da nun $f(x) = \int f'(x) dx$, so kann man für $f(a + n\omega) - f(a)$ schreiben:

$$\int_{x=a}^{x=a+n\omega} f'(x) dx$$

und wenn man die Functionen, für welche die successiven Werthe berechnet werden, lieber mit $f(a)$ statt mit $f'(a)$ bezeichnet (in der That sind sie eigentlich Differentialquotienten), so wird die Bestimmung eines bestimmten Integrals, indem man überall die Accente in der obigen Formel um einen vermindert, durch mechanische Quadratur, in dem Ausdrücke enthalten sein:

$$\begin{aligned} \omega \sum_{m=0}^{m=n} f(a + m\omega) &= \int_a^{a+n\omega} f(x) dx + \frac{1}{2} \omega [f(a + n\omega) - f(a)] \\ &+ A_1 \omega^2 [f'(a + n\omega) - f'(a)] \\ &- A_2 \omega^4 [f'''(a + n\omega) - f'''(a)] \\ &+ A_3 \omega^6 [f^{V}(a + n\omega) - f^{V}(a)]. \end{aligned}$$

Die Glieder, die hier auf der rechten Seite neben dem Integrale stehen, und die den Unterschied zwischen diesem und der einfachen Summenformel bilden, sind sonach bloss aus den Gliedern der Taylor'schen Reihe entstanden und werden immer geringer, je kleiner das Intervall angenommen wird. Sie sind die Reduction der Summenformel bei endlichem Intervall auf Summen bei unendlich kleinem oder verschwindendem Intervall, d. h. auf das wirkliche Integral.

(5.)

Die auffallende Eigenschaft der Zahlen $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ etc., dass von β_0 an gerechnet, nur die Zahlen in ungerader Stelle einen reellen Werth haben, die in gerader Stelle stets = 0 sind, erläutert Euler in seiner Differentialrechnung, Cap. V. Zuerst entwickelt er die Entwicklung des Bruches:

$$V = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 - \frac{1}{24}u^3 \dots} = 1 + \alpha_0 u + \beta_0 u^2 + \gamma_0 u^3 \text{ etc.},$$

wie man sogleich sieht, wenn man mit dem Nenner des Bruches hinüber multiplicirt, und da bei der Anwendung von Exponentialfunctionen Euler zeigt, dass:

$$V - \frac{1}{2}u = \frac{1 + \frac{u^2}{2 \cdot 4} + \frac{u^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots}{1 + \frac{u^2}{4 \cdot 6} + \frac{u^4}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 16} + \dots}$$

so wird, wenn α_0 , wie der Augenschein lehrt, $= \frac{1}{2}$ ist, keine ungerade Potenz in der Reihe vorkommen, die den Werth von $V - \frac{1}{2} u$ ausdrückt, also $\gamma_0, \varepsilon_0, \eta_0$ etc. = Null werden. Ferner wird:

$$\frac{1}{2} u \cot g \frac{1}{2} u = 1 - A_1 u^2 - A_2 u^4 - A_3 u^6 \dots,$$

wenn für A_1, A_2, A_3 die obigen Werthe angenommen werden. Endlich hängen diese A_1, A_2, A_3 auch zusammen mit den reciproken Werthen der geraden Potenzen der natürlichen Zahlen, wenn man sie in das Unendliche fortsetzt. Wenn

$$\left(1 + \frac{1}{2^{2i}} + \frac{1}{3^{2i}} + \frac{1}{4^{2i}} \dots + \frac{1}{\infty}\right) = \left[\frac{1}{m^{2i}}\right]$$

gesetzt wird, so ist:

$$A_1 = \left[\frac{1}{m^2}\right] \cdot \frac{1}{2\pi^2}$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{m^4}\right] \cdot \frac{1}{2^3 \pi^4}$$

$$A_3 = \left[\frac{1}{m^6}\right] \cdot \frac{1}{2^5 \pi^6}$$

und überhaupt:

$$A_n = \left[\frac{1}{m^{2n}}\right] \cdot \frac{1}{2^{2n-1} \pi^{2n}}.$$

Für die mechanische Quadratur bedarf man dieser Eigenschaften weiter nicht. Man wird niemals mehr als die drei Werthe höchstens gebrauchen, die sich unmittelbar ihren numerischen Werthen nach ergeben aus den angeführten Gleichungen. Immer zeigt die letzte Relation für A_n , dass, weil bei erhöhtem n die $\left[\frac{1}{m^{2n}}\right]$ sich immer mehr der Einheit nähern, die A nahe abnehmen werden nach einer geometrischen Progression, deren Exponent $\frac{1}{2^2 \pi^2}$ oder etwa $\frac{1}{40}$ ist.

(6.)

Die Formel:

$$\begin{aligned} \omega \sum_{m=0}^{m=n} f(a + m\omega) &= \int_a^{a+n\omega} f(x) dx + \frac{1}{2} \omega [f(a + n\omega) - f(a)] \\ &\quad + A_1 \omega^2 [f'(a + n\omega) - f'(a)] \\ &\quad - A_2 \omega^4 [f'''(a + n\omega) - f'''(a)] \\ &\quad + A_3 \omega^6 [f^{(v)}(a + n\omega) - f^{(v)}(a)] \dots \end{aligned}$$

hat das Unbequeme, dass auf beiden Seiten dieselben Grössen, $f(a)$ und $f(a + n\omega)$ vorkommen. Die linke Seite ist:

$$\omega [f(a + \omega) + f(a + 2\omega) + f(a + 3\omega) \dots + f(a + n\omega)].$$

Schafft man das Glied der rechten Seite hinüber:

$$\frac{1}{2} \omega [f(a + n\omega) - f(a)],$$

so werden beide Theile:

$$\omega \left\{ \left[\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(a + \omega) \right] + \left[\frac{1}{2} f(a + \omega) + \frac{1}{2} f(a + 2\omega) \right] \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{2} f[a + (n-1)\omega] + \frac{1}{2} f(a + n\omega) \right\}.$$

Dieses führt darauf, die Form der Ausdrücke etwas zu ändern, um einen einfacheren Ausdruck zu bekommen. Setzt man zuerst:

$$a + \frac{1}{2} \omega \text{ statt } a \quad \frac{1}{2} \omega \text{ statt } \omega \quad 2n \text{ statt } n,$$

so wird die linke Seite und damit die Gleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \omega \{ f(a + \omega) + f(a + 2\omega) + f(a + 3\omega) \dots + f(a + n\omega) \} \\ & + \frac{1}{2} \omega \left\{ f\left(a + \frac{3}{2} \omega\right) + f\left(a + \frac{5}{2} \omega\right) + f\left(a + \frac{7}{2} \omega\right) \dots + f\left[a + \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega\right] \right\} \\ & = \int_{a + \frac{1}{2} \omega}^{a + \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega} f(x) dx + \frac{1}{4} \omega \left\{ f\left[a + \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega\right] - f\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) \right\} \\ & \quad + \frac{1}{4} A_1 \omega^2 \left\{ f^I\left[a + \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega\right] - f^I\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) \right\} \\ & \quad - \frac{1}{16} A_2 \omega^4 \left\{ f^{III}\left[a + \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega\right] - f^{III}\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) \right\} \\ & \quad + \frac{1}{64} A_3 \omega^6 \left\{ f^V\left[a + \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega\right] - f^V\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) \right\}. \end{aligned}$$

Vertauscht man aber in derselben Gleichung allein:

$$a \text{ mit } a + \frac{1}{2} \omega,$$

so wird die Gleichung:

$$\begin{aligned} & \omega \left\{ f\left(a + \frac{3}{2} \omega\right) + f\left(a + \frac{5}{2} \omega\right) + f\left(a + \frac{7}{2} \omega\right) \dots + f\left[a + \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega\right] \right\} \\ & = \int_{a + \frac{1}{2} \omega}^{a + \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega} f(x) dx + \frac{1}{2} \omega \left\{ f\left[a + \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega\right] - f\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) \right\} \\ & \quad + A_1 \omega^2 \left\{ f^I\left[a + \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega\right] - f^I\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) \right\} \\ & \quad - A_2 \omega^4 \left\{ f^{III}\left[a + \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega\right] - f^{III}\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) \right\} \\ & \quad + A_3 \omega^6 \left\{ f^V\left[a + \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega\right] - f^V\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) \right\} \text{ etc.} \end{aligned}$$

Multipliziert man die vorletzte Gleichung mit 2 und zieht die letzte davon ab, so wird:

$$\begin{aligned} \omega \sum_{m=0}^{m=n} f(a + m\omega) &= \int_{a + \frac{1}{2} \omega}^{a + \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega} f(x) dx - \left(1 - \frac{1}{2}\right) A_1 \omega^2 \left\{ f^I\left[a + \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega\right] \right. \\ & \quad \left. - f^I\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \left(1 - \frac{1}{8}\right) A_2 \omega^4 \left\{ f^{(4)} \left[a + \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega \right] - f^{(4)} \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) \right\} \\ & - \left(1 - \frac{1}{32}\right) A_3 \omega^6 \left\{ f^{(6)} \left[a + \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega \right] - f^{(6)} \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) \right\} \text{ etc.} \end{aligned}$$

Ein Ausdruck, aus welchem durch Veränderung der Grenzen des Integrals der vorhin bemerkte Uebelstand, dass dieselben Grössen auf beiden Seiten vorkommen, verschwunden ist, und der deshalb einen kleinen Vorzug auch wegen der kleineren Correctionscoefficienten vor dem anderen hat.

(7.)

Hiermit würde die Aufgabe vollständig gelöst sein, wenn die Differentialquotienten wirklich gegeben wären. Es würde dann, wenn statt der A die Zahlen eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} \int_{a + \frac{1}{2} \omega}^{a + \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega} f(x) dx &= \omega \sum_{m=0}^{m=n} f(a + m \omega) + \frac{1}{24} \omega^2 \left\{ f' \left[a + \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega \right] - f' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) \right\} \\ &- \frac{7}{5760} \omega^4 \left\{ f^{(3)} \left[a + \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega \right] - f^{(3)} \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) \right\} \\ &+ \frac{31}{967680} \omega^6 \left\{ f^{(5)} \left[a + \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega \right] - f^{(5)} \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) \right\} \end{aligned}$$

oder nach der ersten Form:

$$\begin{aligned} \int_a^{a + n \omega} f(x) dx &= \omega \sum_{m=0}^{m=n} f(a + m \omega) - \frac{1}{2} \omega [f(a + n \omega) - f(a)] \\ &- \frac{1}{12} \omega^2 [f'(a + n \omega) - f'(a)] \\ &+ \frac{1}{720} \omega^4 [f^{(3)}(a + n \omega) - f^{(3)}(a)] \\ &- \frac{1}{30240} \omega^6 [f^{(5)}(a + n \omega) - f^{(5)}(a)]. \end{aligned}$$

Da indessen nicht die Differentialquotienten der berechneten Functionen, sondern die numerischen Differenzen gegeben sind, so bedarf es zur Bequemlichkeit der Rechnung noch der Reduction der einen auf die anderen. Es würde ein bedeutender Umweg sein, wenn man zuerst die Differentialquotienten berechnen müsste, um die Integrale dann vermittelst ihrer zu finden.

Die Gleichungen zwischen den Differentialquotienten und den Differenzen finden sich wiederum durch einfache Anwendung des Taylor'schen Satzes. Man hat die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(a + \omega) &= f\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) + \frac{1}{2} \omega f' \left(a + \frac{1}{2} \omega\right) + \frac{1}{8} \omega^2 f'' \left(a + \frac{1}{2} \omega\right) \\ &+ \frac{1}{48} \omega^3 f^{(3)} \left(a + \frac{1}{2} \omega\right) + \dots \\ f(a) &= f\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) - \frac{1}{2} \omega f' \left(a + \frac{1}{2} \omega\right) + \frac{1}{8} \omega^2 f'' \left(a + \frac{1}{2} \omega\right) \\ &- \frac{1}{48} \omega^3 f^{(3)} \left(a + \frac{1}{2} \omega\right) + \dots \end{aligned}$$

Folglich wird wegen $f(a + \omega) - f(a) = f'_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right)$:

$$f'_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) = \omega f''\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) + \frac{1}{24}\omega^3 f'''(a + \frac{1}{2}\omega) + \frac{1}{1920}\omega^5 f^{(5)}\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) \dots$$

Führt man hier die Differentialquotienten $f''(a)$, $f'''(a)$, $f^{(5)}(a)$ etc. ein, so wird:

$$f'_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) = f''(a) + \frac{1}{2}\omega f'''(a) + \frac{1}{8}\omega^2 f^{(4)}(a) + \frac{1}{48}\omega^3 f^{(5)}(a) + \dots$$

$$f'''(a + \frac{1}{2}\omega) = f^{(4)}(a) + \frac{1}{2}\omega f^{(5)}(a) \dots$$

und das Ganze wird:

$$\begin{aligned} f'_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) &= \omega f''(a) + \frac{1}{2}\omega^2 f'''(a) + \frac{1}{6}\omega^3 f^{(4)}(a) \\ &+ \frac{1}{24}\omega^4 f^{(5)}(a) + \frac{1}{120}\omega^5 f^{(6)}(a) + \dots \end{aligned}$$

Es wird daraus, wegen:

$$f'_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) = f(a + \omega) - f(a)$$

$$f'_0\left(a - \frac{1}{2}\omega\right) = f(a) - f(a - \omega)$$

und wenn man ω negativ setzt und auf der rechten Seite das Zeichen überall ändert:

$$\begin{aligned} f'_0\left(a - \frac{1}{2}\omega\right) &= \omega f''(a) - \frac{1}{2}\omega^2 f'''(a) + \frac{1}{6}\omega^3 f^{(4)}(a) \\ &- \frac{1}{24}\omega^4 f^{(5)}(a) + \frac{1}{120}\omega^5 f^{(6)}(a) - \dots \end{aligned}$$

oder wegen:

$$f'_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) - f'_0\left(a - \frac{1}{2}\omega\right) = f^{(4)}(a)$$

erhält man:

$$f^{(4)}(a) = \omega^2 f^{(4)}(a) + \frac{1}{12}\omega^5 f^{(5)}(a) + \frac{1}{360}\omega^6 f^{(6)}(a) \dots$$

Geht man so fort, so findet man:

$$f^{(4)}\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) = \omega^3 f^{(5)}\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) + \frac{1}{8}\omega^5 f^{(6)}\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) + \dots$$

$$f^{(5)}(a) = \omega^4 f^{(6)}(a) + \frac{1}{6}\omega^6 f^{(7)}(a)$$

$$f^{(6)}\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) = \omega^5 f^{(7)}\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) + \frac{5}{24}\omega^7 f^{(8)}\left(a + \frac{1}{2}\omega\right)$$

$$f^{(7)}(a) = \omega^6 f^{(8)}(a) + \frac{1}{4}\omega^8 f^{(9)}(a) \text{ etc.}$$

Nimmt man hier die Functionen mit ganzen Argumenten zusammen und die, bei welchen halbe Argumente vorkommen, so hat man die beiden Systeme, wobei die Entwicklung etwas weiter fortgeführt ist:

$$f_0^I\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) = \omega f^I\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) + \frac{1}{24} \omega^3 f^{III}\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) + \frac{1}{1920} \omega^5 f^V\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) \\ + \frac{1}{322560} \omega^7 f^{VII}\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) +$$

$$f_0^{III}\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) = \omega^2 f^{III}\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) + \frac{1}{8} \omega^4 f^V\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) + \frac{13}{1920} \omega^6 f^{VII}\left(a + \frac{1}{2} \omega\right),$$

$$f_0^V\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) = \omega^4 f^V\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) + \frac{5}{24} \omega^6 f^{VIII}\left(a + \frac{1}{2} \omega\right)$$

und:

$$f_0^{II}(a) = \omega^2 f^{II}(a) + \frac{1}{12} \omega^4 f^{IV}(a) + \frac{1}{360} \omega^6 f^{VI}(a) + \frac{1}{20160} \omega^8 f^{VIII}(a) \dots$$

$$f_0^{IV}(a) = \omega^4 f^{IV}(a) + \frac{1}{6} \omega^6 f^{VI}(a) + \frac{1}{80} \omega^8 f^{VIII}(a) \dots$$

$$f_0^{VI}(a) = \omega^6 f^{VI}(a) + \frac{1}{4} \omega^8 f^{VIII}(a) + \dots$$

Leitet man aus diesen beiden Systemen die Werthe von:

$$f^I\left(a + \frac{1}{2} \omega\right), \quad f^{III}\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) \text{ etc.}, \quad f^{II}(a), \quad f^{IV}(a) \text{ etc.}$$

aus den gegebenen Grössen:

$$f_0^I\left(a + \frac{1}{2} \omega\right), \quad f_0^{III}\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) \text{ etc.}, \quad f_0^{II}(a), \quad f_0^{IV}(a) \text{ etc.}$$

ab, was durch einfache Multiplication mit zweckmässigen Zahlencoefficienten und Summirung der Producte geschieht, so erhält man:

$$\omega f^I\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) = f_0^I\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) - \frac{1}{24} f_0^{III}\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) + \frac{3}{640} f_0^V\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) \\ - \frac{5}{7168} f_0^{VII}\left(a + \frac{1}{2} \omega\right)$$

$$\omega^2 f^{II}(a) = f_0^{II}(a) - \frac{1}{12} f_0^{IV}(a) + \frac{1}{90} f_0^{VI}(a) - \frac{1}{560} f_0^{VIII}(a)$$

$$\omega^3 f^{III}\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) = f_0^{III}\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) - \frac{1}{8} f_0^V\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) + \frac{37}{1920} f_0^{VII}\left(a + \frac{1}{2} \omega\right)$$

$$\omega^4 f^{IV}(a) = f_0^{IV}(a) - \frac{1}{6} f_0^{VI}(a) + \frac{7}{240} f_0^{VIII}(a)$$

$$\omega^5 f^V\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) = f_0^V\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) - \frac{5}{24} f_0^{VIII}\left(a + \frac{1}{2} \omega\right)$$

$$\omega^6 f^{VI}(a) = f_0^{VI}(a) - \frac{1}{4} f_0^{VIII}(a),$$

in welchen Ausdrücken die Entwicklung so weit getrieben ist, als man sie irgend gebraucht. In der Praxis wird man niemals so weit gehen, sondern statt bis zur siebenten oder achten Differenz fortzugehen, lieber die Intervalle bei den Argumenten verringern, wodurch man höchstens bis zur fünften oder vierten Differenz zu gehen nöthig haben wird.

(8.)

Diese Ableitung für den Ausdruck der Differentialquotienten durch Differenzen ist die elementarste, wenn man einmal bloss von dem Taylor'schen Satze ausgehen will

Aber sie ist ungemein weitläufig und deshalb unbefriedigend. Man kann sie weit übersichtlicher und eleganter machen, wenn man eine analytische Function zu Grunde legt, welche die Eigenschaften vereinigt, Ausdrücke für die Differenzen und Differentialquotienten zu geben, die nie abbrechen, den hier gewählten Bezeichnungen sich anschliessen und die sämtlichen Ausdrücke auf eine oder einige Reihen reduciren, deren Entwicklung analytisch gegeben ist. Die Zahlencoëfficienten müssen sich bei ihr völlig genau ergeben, da sie von der Natur der Function ganz unabhängig sind.

Eine solche ist die Exponentialfunction e^x . Legt man sie statt der allgemeinen Function $f(x)$ zu Grunde, so hat man zuerst für die Differentialquotienten in Bezug auf x stets denselben Werth e^x . Es werden folglich:

$$f(a) = e^a, \quad f'(a) = e^a, \quad f''(a) = e^a, \quad f'''(a) = e^a, \\ f(a + \omega) = f'(a + \omega) = f''(a + \omega) = f'''(a + \omega) = e^{a+\omega} \text{ u. s. w.}$$

Für die Differenzen aber hat man:

$$f_0'(a + \frac{1}{2}\omega) = e^{a+\omega} - e^a = e^{a+\frac{1}{2}\omega} \left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega} \right) \\ f_0''(a) = \left(e^{a+\frac{1}{2}\omega} - e^{a-\frac{1}{2}\omega} \right) \left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega} \right) \\ = e^a \left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega} \right)^2$$

oder übersichtlicher, wenn man:

$$e^{+\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega} = u$$

setzt:

$$f_0'(a + \frac{1}{2}\omega) = e^{a+\frac{1}{2}\omega} \cdot u = f'(a + \frac{1}{2}\omega) \cdot u \\ f_0''(a) = e^a \cdot u^2 = f''(a) \cdot u^2 \\ f_0'''(a + \frac{1}{2}\omega) = e^{a+\frac{1}{2}\omega} \cdot u^3 = f'''(a + \frac{1}{2}\omega) \cdot u^3 \\ f_0^{IV}(a) = e^a \cdot u^4 = f^{IV}(a) \cdot u^4 \\ \text{u. s. w.}$$

wie sich aus dem beliebig fortzusetzenden Schema :

Argument	Function	I. Differenz	II. Differenz	III. Differenz	IV. Differenz
$a - \omega \dots$	$e^{a-\omega}$	$e^{a-\frac{1}{2}\omega} \cdot u$	$e^{a-\omega} \cdot u^2$	$e^{a-\frac{1}{2}\omega} \cdot u^3$	$e^{a-\omega} \cdot u^4 \dots$
$a \dots$	e^a	$e^{a+\frac{1}{2}\omega} \cdot u$	$e^a \cdot u^2$	$e^{a+\frac{1}{2}\omega} \cdot u^3$	$e^a \cdot u^4$
$a + \omega \dots$	$e^{a+\omega}$		$e^{a+\omega} \cdot u^2$		$e^{a+\omega} \cdot u^4 \dots$

ergiebt. Substituirt man diese Werthe in die obigen Gleichungen für $\omega f'(a + \frac{1}{2}\omega)$,

$\omega^2 f''(a)$ u. s. w. und hebt auf beiden Seiten die gleichen Factoren $e^{a+\frac{1}{2}\omega} \cdot e^a \dots$ weg, so bleibt überall nur eine Potenz von ω auf der linken, und eine Reihe nach Potenzen von u auf der rechten Seite übrig. Entwickelt man deshalb aus der Gleichung:

$$e^{+\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega} = u$$

den Werth von ω nach einer Reihe, die nach Potenzen von u fortgeht, so wird diese Reihe und ihre Potenzen die numerischen Coëfficienten in den obigen Entwicklungen geben müssen.

Zu diesem Zwecke hat man zuerst aus:

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}u} &= e^{\frac{1}{2}u^2} = u \\ e^{\frac{1}{2}u} &= \frac{1}{2}u + \sqrt{1 + \frac{1}{4}u^2} \\ e^{\frac{1}{2}u} &= \frac{1}{2}u + \sqrt{1 + \frac{1}{4}u^2}, \\ e^{\frac{1}{2}u} \cdot e^{\frac{1}{2}u} &= 2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}u^2} \\ \frac{e^{\frac{1}{2}u}}{e^{\frac{1}{2}u}} &= \left(1 + \frac{1}{4}u^2\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

folglich:

Es ist aber auch nach dem Werthe von $e^{\frac{1}{2}u}$:

$$\frac{1}{2} \frac{d\omega}{du} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}u \left(1 + \frac{1}{4}u^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}u + \sqrt{1 + \frac{1}{4}u^2}}.$$

oder:

$$\frac{d\omega}{du} = \left(1 + \frac{1}{4}u^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

folglich:

$$\omega = \int \left(1 + \frac{1}{4}u^2\right)^{-\frac{1}{2}} du,$$

ohne weitere Hinzufügung einer Constante, weil für $u = 0$ auch $\omega = 0$ wird. In den beiden Reihen:

$$\left(1 + \frac{1}{4}u^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{u^2}{2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{u^4}{2^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{u^6}{2^6} + \dots$$

und:

$$\omega = \int \left(1 + \frac{1}{4}u^2\right)^{-\frac{1}{2}} du = u - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{u^3}{2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{u^5}{2^4} \text{ etc.}$$

und den Potenzen dieser letzteren wird also das Gesetz der obigen Zahlencoëfficienten in dem Ausdrücke der Differentialquotienten durch die Differenzen enthalten sein. In der That ist:

$$\begin{aligned} \omega &= u - \frac{1}{24} u^3 + \frac{3}{640} u^5 - \frac{5}{7168} u^7 \dots \\ \omega^2 &= u^2 - \frac{1}{12} u^4 + \frac{1}{90} u^6 - \frac{1}{560} u^8 \dots \\ \omega^3 &= u^3 - \frac{1}{8} u^5 + \frac{37}{1920} u^7 \dots \\ \omega^4 &= u^4 - \frac{1}{6} u^6 + \frac{7}{240} u^8 \dots \end{aligned}$$

$$\omega^5 = u^5 - \frac{5}{24} u^7 \dots$$

$$\omega^6 = u^6 - \frac{1}{4} u^8 \dots$$

Fügt man auf der linken Seite die Differentialquotienten je nach den Potenzen von ω , bei den geraden bezogen auf das Argument a , bei den ungeraden bezogen auf das Argument $a + \frac{1}{2} \omega$, hinzu, und vertauscht auf der rechten die Potenzen von u mit den Differenzen derselben Ordnung, ebenfalls bei den ungeraden für das Argument $a + \frac{1}{2} \omega$, bei den geraden für das Argument a , so hat man die obigen Werthe, die man hiernach beliebig fortsetzen kann.

(9.)

Die Ausdrücke der Differentialquotienten durch die Differenzen in (8) kann man in die erste Integralformel in (7) sogleich substituiren, weil in derselben dann die Werthe der Differenzen:

$$f_0^I \left(a + \frac{1}{2} \omega \right), f_0^{III} \left(a + \frac{1}{2} \omega \right), f_0^V \left(a + \frac{1}{2} \omega \right), f_0^I (a), f_0^{IV} (a), f_0^{VI} (a)$$

vorkommen, die unmittelbar bei der Bildung der Differenzen vorliegen. Für die zweite Integralformel in (7) ist noch eine kleine Umformung nöthig. Hier werden $f^I (a)$, $f^{III} (a)$, $f^V (a)$ durch Differenzen ausgedrückt werden müssen, die folglich auch die Form haben werden $f_0^I (a)$, $f_0^{III} (a)$, $f_0^V (a)$, aber bei der Bildung der Differenzen aus den gegebenen Functionen nicht unmittelbar vorliegen, sondern erst durch Interpolation hergeleitet werden mussten. Man würde z. B. den Werth von $f_0^I (a)$ aus den beiden Werthen $f_0^I \left(a - \frac{1}{2} \omega \right)$ und $f_0^I \left(a + \frac{1}{2} \omega \right)$, die wirklich vorliegen, und ihren Differenzen durch Interpolation zu suchen haben. Allein man kann auf leichterem Wege die nöthigen Reihenentwickelungen finden. Betrachtet man die Exponentialfunction, so wird in ihr:

$$f_0^I (a) = e^a \cdot u,$$

wenn man es aus der Bildung der Functionen $f \left(a - \frac{1}{2} \omega \right)$, $f \left(a + \frac{1}{2} \omega \right)$, $f \left(a + \frac{3}{2} \omega \right)$ ableitete.

Dagegen wird hier:

$$f_0^I \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) = e^{a + \frac{1}{2} \omega} u$$

$$f_0^I \left(a - \frac{1}{2} \omega \right) = e^{a - \frac{1}{2} \omega} u,$$

folglich wird:

$$f_0^I (a) = \frac{1}{2} \left[f_0^I \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) + f_0^I \left(a - \frac{1}{2} \omega \right) \right] \frac{2}{e^{+\frac{1}{2} \omega} + e^{-\frac{1}{2} \omega}}$$

oder nach der oben eingeführten Bezeichnung:

$$f_0^I (a) = f_{\frac{1}{2}}^I (a) \cdot \frac{2}{e^{+\frac{1}{2} \omega} + e^{-\frac{1}{2} \omega}}$$

Da nun ganz dasselbe auch bei:

$$f_0'''(a) = f_{\frac{1}{2}}'''(a) \cdot \frac{2}{e^{+\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}}$$

$$f_0^{\text{v}}(a) = f_{\frac{1}{2}}^{\text{v}}(a) \cdot \frac{2}{e^{+\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}}$$

stattfindet, so wird in den Reihen von u , nach welchen ω und seine Potenzen entwickelt sind (und also auch in den Ausdrücken, wodurch die Differentialquotienten aus den Differenzen hervorgehen), durch eine einfache Multiplikation mit der Reihe, welche den Werth von:

$$\frac{2}{e^{+\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}}$$

nach Potenzen von u giebt, oder nach dem Obigen durch:

$$\frac{2}{e^{+\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}} = \left(1 + \frac{1}{4}u^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

der vollständige Ausdruck der Differentialquotienten gegeben sein. Nur wird man hier die Potenzen von u , mit dem arithmetischen Mittel von derselben Ordnung und mit demselben Argumente bezeichnet, vertauschen, wobei die Differenzen von ungerader Ordnung ganze Argumente, die von gerader Ordnung gebrochene oder halbe Intervalle enthalten.

Nimmt man deshalb die Reihe:

$$\left(1 + \frac{1}{4}u^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{u^2}{2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{u^4}{2^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{u^6}{2^6} + \dots$$

und multiplicirt sie mit den verschiedenen Potenzen von ω , so wird:

$$\omega \cdot \frac{2}{e^{+\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}} = u - \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{30}u^5 - \frac{1}{140}u^7 \dots$$

$$\omega^2 \cdot \frac{2}{e^{+\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}} = u^2 - \frac{5}{24}u^4 + \frac{259}{5760}u^6 \dots$$

$$\omega^3 \cdot \frac{2}{e^{+\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}} = u^3 - \frac{1}{4}u^5 + \frac{7}{120}u^7 \dots$$

$$\omega^4 \cdot \frac{2}{e^{+\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}} = u^4 - \frac{7}{24}u^6 \dots$$

$$\omega^5 \cdot \frac{2}{e^{+\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}} = u^5 - \frac{1}{3}u^7 \dots$$

und durch Einführung der arithmetischen Mittel wird:

$$\omega f^{\text{I}}(a) = f_{\frac{1}{2}}^{\text{I}}(a) - \frac{1}{6} f_{\frac{1}{2}}^{\text{III}}(a) + \frac{1}{30} f_{\frac{1}{2}}^{\text{V}}(a) - \frac{1}{140} f_{\frac{1}{2}}^{\text{VII}}(a) \dots$$

$$\omega^2 f^{\text{II}}\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) = f_{\frac{1}{2}}^{\text{II}}\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) - \frac{5}{24} f_{\frac{1}{2}}^{\text{IV}}\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) + \frac{259}{5760} f_{\frac{1}{2}}^{\text{VI}}\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) \dots$$

$$\omega^3 f^{\text{III}}(a) = f_{\frac{1}{2}}^{\text{III}}(a) - \frac{1}{4} f_{\frac{1}{2}}^{\text{V}}(a) + \frac{7}{120} f_{\frac{1}{2}}^{\text{VII}}(a) \dots$$

$$\begin{aligned}\omega^4 f^{iv} \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) &= f_{\frac{1}{2}}^{iv} \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) - \frac{7}{24} f_{\frac{1}{2}}^{vi} \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) \cdots \\ \omega^5 f^v (a) &= f_{\frac{1}{2}}^v (a) - \frac{1}{3} f_{\frac{1}{2}}^{vi} (a) \cdots\end{aligned}$$

Dieses sind die Ausdrücke, die in die zweite Integralformel eingeführt werden müssen, um die Correctionen durch die Differenzen auszudrücken.

(10.)

Endlich, da hier nun Differenzen mit ihren Bezeichnungen eingeführt sind, wird es zweckmässig sein, auch die summirten Functionen statt der bisherigen Σ zu setzen. Es wird:

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{m=n} f(a + m\omega) &= f(a + \omega) + f(a + 2\omega) \cdots + f(a + n\omega) \\ &= f_0 \left[a + \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega \right] - f_0 \left(a + \frac{1}{2} \omega \right)\end{aligned}$$

und auf ähnliche Weise, wie bei den Differenzen arithmetische Mittel vorkommen in der zweiten Formel, wird es auch bei den Summen der Fall sein. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{m=n} f(a + m\omega) &= \frac{1}{2} [f(a + n\omega) + f(a)] \\ &= \frac{1}{2} f(a) + f(a + \omega) + f(a + 2\omega) + f(a + 3\omega) + \cdots + f[a + (n-1)\omega] \\ &\quad + \frac{1}{2} f(a + n\omega) \\ &= \frac{1}{2} f_0 \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) - \frac{1}{2} f_0 \left(a - \frac{1}{2} \omega \right) + f_0 \left[a + \left(n - \frac{1}{2} \right) \omega \right] - f_0 \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} f_0 \left[a + \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega \right] - \frac{1}{2} f_0 \left[a + \left(n - \frac{1}{2} \right) \omega \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ f \left[a + \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega \right] + f_0 \left[a + \left(n - \frac{1}{2} \right) \omega \right] \right\} - \frac{1}{2} \left\{ f_0 \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) \right. \\ &\quad \left. + f_0 \left(a - \frac{1}{2} \omega \right) \right\} \\ &= f_{\frac{1}{2}}^i (a + n\omega) - f_{\frac{1}{2}}^i (a).\end{aligned}$$

Substituirt man jetzt die Differenzen statt der Differentialquotienten, so wird nach gehöriger Reduction:

$$\begin{aligned}\int_{a + \frac{1}{2} \omega}^{a + \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega} f(x) dx &= \omega \left\{ f_0 \left[a + \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega \right] - f_0 \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{24} \left\{ f_0 \left[a + \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega \right] - f_0 \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{17}{5760} \left\{ f_0^m \left[a + \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega \right] - f_0^m \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{367}{967680} \left\{ f_0^v \left[a + \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega \right] - f_0^v \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) \right\} \text{ etc.} \right\}\end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} \int_a^{a+n\omega} f(x) dx &= \omega \left\{ f_{\frac{1}{2}}(a+n\omega) - f_{\frac{1}{2}}(a) \right. \\ &= \frac{1}{12} \left\{ f_{\frac{1}{2}}'(a+n\omega) - f_{\frac{1}{2}}'(a) \right\} \\ &\quad + \frac{11}{720} \left\{ f_{\frac{1}{2}}'''(a+n\omega) - f_{\frac{1}{2}}'''(a) \right\} \\ &\quad \left. - \frac{191}{60480} \left\{ f_{\frac{1}{2}}^{(v)}(a+n\omega) - f_{\frac{1}{2}}^{(v)}(a) \right\} \text{ etc.} \right\} \end{aligned}$$

Bei dem letzten Integrale thut man gut, die erste Zeile auf der rechten Seite

$$f_{\frac{1}{2}}(a+n\omega) - f_{\frac{1}{2}}(a)$$

so zu schreiben:

$$f_{\frac{1}{2}}(a+n\omega) - f_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) + \frac{1}{2}f(a),$$

weil in dem arithmetischen Mittel $f_{\frac{1}{2}}(a)$ bereits ein Theil des Integrals enthalten ist, und die summirte Function doch mit einem $f_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right)$ beginnen muss, eine Grösse, die an sich ganz willkürlich ist, da sie im Integrale wieder abgezogen wird.

Die letzten Glieder in beiden Ausdrücken, die zu den Argumenten $a + \frac{1}{2}\omega$ und a gehören, bilden, wenn man das Integral beliebig fortsetzen will, die Constante des Anfanges. Man kann deshalb die Formeln auch so schreiben, dass man für die erste summirte Function an die Stelle von $f_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right)$ setzt:

$$C_{\frac{1}{2}} = \left\{ -\frac{1}{24} f_0'\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) + \frac{17}{5760} f_0'''(a + \frac{1}{2}\omega) - \frac{327}{967680} f_0^{(v)}(a + \frac{1}{2}\omega) \right\}$$

und damit die summirte Reihe bildet. Es wird dann ganz vollständig:

$$\begin{aligned} \int_a^{a+(n+\frac{1}{2})\omega} f(x) dx &= \omega \left\{ f_0\left[a + \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega\right] + \frac{1}{24} f_0'\left[a + \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega\right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{17}{5760} f_0'''(a + \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega) \right. \\ &\quad \left. + \frac{367}{967680} f_0^{(v)}\left[a + \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega\right] \right\} \end{aligned}$$

Für die zweite Formel setzt man an die Stelle von $f_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right)$:

$$C_0 = \left\{ +\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{12}f_{\frac{1}{2}}'(a) - \frac{11}{720}f_{\frac{1}{2}}'''(a) + \frac{191}{60480}f_{\frac{1}{2}}^{(v)}(a) \dots \right\}$$

und erhält dann, wenn man damit die summirte Reihe bildet, ebenfalls vollständig:

$$\begin{aligned} \int_a^{a+n\omega} f(x) dx &= \omega \left\{ f_{\frac{1}{2}}(a+n\omega) - \frac{1}{12}f_{\frac{1}{2}}'(a+n\omega) \right. \\ &\quad \left. + \frac{11}{720}f_{\frac{1}{2}}'''(a+n\omega) \right. \\ &\quad \left. - \frac{191}{60480}f_{\frac{1}{2}}^{(v)}(a+n\omega) \dots \right\} \end{aligned}$$

Es wird dann das bestimmte Integral $a + \frac{1}{2} \omega$ bis $a + \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega$ und a bis $(a + n \omega)$ vollständig gefunden, wenn man an die Zahlen der summirten Function, die zu dem End-Argumente gehören, nur die angegebenen drei Correctionen anbringt und nähert sich in dieser Form der Entwicklung des allgemeinen Integrals.

(11.)

Am einfachsten lassen sich beide Ausdrücke so in Worten fassen. Es sei, um die kleinen Brüche zu vermeiden:

$$\alpha = \frac{1}{24}, \quad \beta = -\frac{17}{5760}, \quad \gamma = +\frac{367}{967\,680} \text{ etc.},$$

und man habe für die zu integrirende Function $f(x)$ die Reihenfolge von Werthen:

$$f(a), \quad f(a + \omega), \quad f(a + 2\omega) \dots$$

beliebig weit berechnet, so wird das Integral allgemein werden:

$$\begin{aligned} \int_a^{a+n\omega} f(x) dx = \omega \{ & f_0(a + n\omega) + \alpha f_0^I(a + n\omega) \\ & + \beta f_0^{III}(a + n\omega) \\ & + \gamma f_0^V(a + n\omega) + \dots \} \\ & + \text{Const.}, \end{aligned}$$

wo die Constante so bestimmt wird, dass für das Argument, für welches das Integral Null werden soll, es sei dieses das Argument $(a + n' \omega)$, die vorangehenden Ausdrücke mit negativem Zeichen hinzugesetzt werden, also:

$$\begin{aligned} \text{Const.} = - \omega \{ & f_0(a + n' \omega) + \alpha f_0^I(a + n' \omega) \\ & + \beta f_0^{III}(a + n' \omega) \\ & + \gamma f_0^V(a + n' \omega) \dots \} \end{aligned}$$

Dieser allgemeine Ausdruck wird in der Rechnung am einfachsten, wenn, wie in der ersten Integrationsformel von (10), die Zahlen n und n' von der Form $\left(i + \frac{1}{2}\right)$ und $\left(i' + \frac{1}{2}\right)$ werden, weil dann unmittelbar die aus der Reihe $f(a), f(a + \omega)$ u. s. w. sich ergebende summirte Function $f_0\left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega\right]$ und die Differenzen:

$$f_0^I\left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega\right], \quad f_0^{III}\left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega\right], \quad f_0^V\left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega\right],$$

ohne weitere Aenderung angewandt werden können, und ebenso bei i' . Ist aber n von einer anderen Form, so müssen diese Functionen von $f_0, f_0^I, f_0^{III}, f_0^V$ etc. aus den wirklich dastehenden Zahlen so interpolirt werden, als ob sie reine Functionen der Argumente $a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega$ bei allen wären.

Ein Beispiel dieser Art giebt die zweite Integrationsformel, wo n von der Form i ist, und n' von der Form i' . Die hier nothwendige Interpolation in die Mitte hinein ist bei ihr ausgeführt, und da hier die arithmetischen Mittel der Functionen von:

$$a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \quad \text{und} \quad a + \left(i - \frac{1}{2}\right) \omega$$

vorkommen, so sind diese eingeführt und die Zahlenreihe:

$$1 - \frac{1}{12} u^2 + \frac{11}{720} u^4 - \frac{191}{60480} u^6 \dots$$

ist entstanden aus dem Producte von:

$$1 + \alpha u^2 + \beta u^4 + \gamma u^6 \dots$$

mit der bei der Interpolation in die Mitte hinein geltenden Reihe:

$$\left(1 + \frac{1}{4} u^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{8} u^2 + \frac{3}{128} u^4 + \frac{5}{1024} u^6 \dots$$

Zur Bequemlichkeit der Rechnung kann man hier noch hinzufügen, dass man am besten thut, nicht:

$$f(a) \quad f(a + \omega) \quad f(a + 2\omega) \text{ etc.}$$

anzusetzen, sondern:

$$\omega f(a) \quad \omega f(a + \omega) \quad \omega f(a + 2\omega) \text{ etc.}$$

Da dieser Factor ω sowohl in die Differenzen als in die summirten Functionen, die man aus $\omega f(a)$, $\omega f(a + \omega)$, $\omega f(a + 2\omega)$ bildet, von selbst übergeht, so fällt er in diesem Falle aus der rechten Seite völlig weg.

Endlich kann man noch bemerken, dass, wenn man das Beispiel der Exponentialgrösse e^x auch bei der Integrationsformel verfolgt, die summirte Function:

$$f_0\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) = e^{a + \frac{1}{2} \omega} \frac{1}{u}$$

wird und da $f e^x dx$ für $x = \left(a + \frac{1}{2} \omega\right)$ wiederum $e^{a + \frac{1}{2} \omega}$ ist, die obige Integralformel die Gleichung geben wird:

$$1 = \omega \left\{ \frac{1}{u} + \alpha u + \beta u^3 + \gamma u^5 \dots \right\},$$

woraus folgt:

$$\frac{u}{\omega} = 1 + \alpha u^2 + \beta u^4 + \gamma u^6 \dots$$

oder:

$$\frac{u}{\omega} = \frac{u}{\int \frac{d\omega}{du} du} = \frac{u}{u - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \frac{u^3}{2^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \frac{u^5}{2^4} \dots},$$

das heisst:

$$1 + \alpha u^2 + \beta u^4 + \gamma u^6 \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{24} u^2 + \frac{3}{640} u^4 - \frac{5}{7168} u^6},$$

so dass die Werthe α , β , γ etc., wenn man sie fortsetzen wollte, aus dem reciproken Werthe der Zahlenreihe entstehen würden, die bei dem ersten Differentialquotienten $f'\left(a + \frac{1}{2} \omega\right)$ stattfindet, wie es auch bei dem Integrale in der Natur der Sache liegt.

(12).

Vermittelst dieses allgemeinen Ausdruckes der Integration für jede Form des Argumentes, nöthigenfalls mit Zuziehung der Interpolation werden sich die zweiten, dritten und folgenden Integrationen ohne alle Mühe ausführen und ableiten lassen. Bei der Bildung der verschiedenen Constanten findet immer dasselbe Princip statt, die allgemeinen Integrationsformeln so zu benutzen, dass man die Werthe der Constanten mit

ihrer Zuziehung richtig erhält. Diese Werthe sind an der gehörigen Stelle in den summirten Reihen so anzusetzen und zu der Bildung der summirten Reihen zu benutzen, dass später auf die Anfangsgrenze nicht mehr Rücksicht zu nehmen ist, sondern an alle Werthe der dadurch gebildeten summirten Reihen nur die Correctionen der Endgrenze anzubringen sind. Die Bequemlichkeit der Rechnung wird dabei allein noch einige Betrachtungen nöthig machen.

Werde zuerst das zweite Integral gesucht, so giebt die allgemeine Formel für das erste Integral:

$$\int f(x) dx = \omega \{ f_0'(a + n\omega) + \alpha f_0''(a + n\omega) + \beta f_0'''(a + n\omega) + \gamma f_0^{IV}(a + n\omega) \dots \}$$

die verschiedenen Theile des zweiten Integrals, je nach den Theilen, aus denen das erste besteht. Setzt man zuerst statt:

$$f(a + n\omega) \dots \dots f_0'(a + n\omega),$$

so hat man für den ersten Theil des zweiten Integrals den Ausdruck:

$$\int dx \int f(x) dx = \omega^2 \{ f_0''(a + n\omega) + \alpha f_0'''(a + n\omega) + \beta f_0^{IV}(a + n\omega) + \gamma f_0^{V}(a + n\omega) \dots \},$$

weil bei den beiderseitigen höheren arithmetischen Reihen die Differenzreihen nur vorrücken. Ebenso werden die folgenden Theile, wenn man für:

$$\begin{array}{llll} f(a + n\omega) & \text{nach und nach} & f_0'(a + n\omega) \\ & " & f_0''(a + n\omega) \\ & " & f_0'''(a + n\omega) \\ & " & f_0^{IV}(a + n\omega) \end{array}$$

setzt, respective:

$$\begin{array}{l} \omega^2 \{ \alpha f(a + n\omega) + \alpha^2 f_0''(a + n\omega) + \alpha \beta f_0^{IV}(a + n\omega) \dots \} \\ \omega^2 \{ \beta f_0''(a + n\omega) + \alpha \beta f_0^{IV}(a + n\omega) \dots \} \\ \omega^2 \{ \gamma f_0^{IV}(a + n\omega) \dots \} \end{array}$$

Zusammen wird also:

$$\int_{a+n\omega}^a dx \int f(x) dx = \omega^2 \{ f_0''(a + n\omega) + 2\alpha f(a + n\omega) + (\alpha^2 + 2\beta) f_0''(a + n\omega) + 2(\alpha\beta + \gamma) f_0^{IV}(a + n\omega) \dots \}$$

oder die Zahlenreihe der wirklichen Integrationscoefficienten wird die Form geben:

$$\begin{aligned} \int_{a+n\omega}^a dx \int f(x) dx = \omega^2 \{ & f_0''(a + n\omega) + \frac{1}{12} f(a + n\omega) \\ & - \frac{1}{240} f_0''(a + n\omega) \\ & + \frac{31}{60480} f_0^{IV}(a + n\omega) \dots \}, \end{aligned}$$

bei denen, wenn man:

$$\alpha_1 = \frac{1}{12} \quad \beta_1 = -\frac{1}{240} \quad \gamma_1 = +\frac{31}{60480}$$

setzt, die Reihe:

$$1 + \alpha_1 u^2 + \beta_1 u^4 + \gamma_1 u^6 + \dots = \left(\frac{u}{\omega} \right)^2,$$

nach dem oben am Ende von (11) angeführten Werthe. Unmittelbar kann sie angewandt werden für:

$$n\omega = i\omega,$$

weil in den geraden summirten Reihen und Differenzen die Werthe:

$${}^{11}f_0(a + i\omega) \quad f(a + i\omega) \quad f_0''(a + i\omega) \quad f_0^{\text{IV}}(a + i\omega)$$

ohne weitere vorzunehmende Aenderung vorkommen.

Ist aber $n\omega$ von der Form $\left(i + \frac{1}{2}\right)\omega$, so müssen diese Reihen so in die Mitte hinein interpolirt werden, als wären sie reine Functionen von $(a + i\omega)$. Multiplicirt man also:

$$\left(\frac{u}{\omega}\right)^2 \text{ mit } \left(1 + \frac{1}{4}u^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

und führt statt der wirklichen Differenzen die arithmetischen Mittel ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \int_{a + \left(i + \frac{1}{2}\right)\omega} d x \int f(x) d x &= \omega^2 \left\{ {}^{11}f_{\frac{1}{2}} \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right)\omega \right] - \frac{1}{24} f_{\frac{1}{2}} \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right)\omega \right] \right. \\ &\quad + \frac{17}{1920} f_{\frac{1}{2}}'' \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right)\omega \right] \\ &\quad \left. - \frac{367}{193536} f_{\frac{1}{2}}^{\text{IV}} \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right)\omega \right] \cdots \right\}. \end{aligned}$$

Es wird bei der Rechnung bequemer sein, bei einer solchen zweiten Integration nicht $f(a)$, $f(a + \omega)$ u. s. w. anzusetzen, sondern $\omega^2 f(a)$, $\omega^2 f(a + \omega)$ etc. Man erhält dann allerdings das erste Integral, verbunden mit dem Factor ω , und muss, wenn man es gebrauchen will, mit diesem Factor erst dividiren. In der Regel aber wird man grössere und bequemere Zahlenwerthe erhalten.

(13.)

Wendet man dasselbe Verfahren auf die dritte Integration an, so wird man erhalten:

$$\begin{aligned} \int_{a + n\omega} d x \int d x \int f(x) d x &= \omega^3 \left\{ {}^{11}f_0(a + n\omega) + \frac{1}{8} f_0'(a + n\omega) \right. \\ &\quad + \frac{7}{1920} f_0''(a + n\omega) \\ &\quad \left. + \frac{457}{967680} f_0'''(a + n\omega) \cdots \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man hier:

$$\alpha_2 = \frac{1}{8} \quad \beta_2 = -\frac{7}{1920} \quad \gamma_2 = +\frac{457}{967680},$$

so entspringt die Reihe aus diesen Coëfficienten aus $\left(\frac{u}{\omega}\right)^3$; oder es ist:

$$1 + \alpha_2 u^2 + \beta_2 u^4 + \gamma_2 u^6 + \cdots = \left(\frac{u}{\omega}\right)^3.$$

Unmittelbar ist diese Form anzuwenden, wenn n von der Form ist $i + \frac{1}{2}$, wegen

der ungeraden Ordnungszahl der summirten Reihen und Differenzen. Für die Form:

$$u = i$$

wird man die letzte Reihe:

$$1 + \alpha_2 u^2 + \beta_2 u^4 + \gamma_2 u^6 \text{ multipliciren mit } \left(1 + \frac{1}{4} u^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

und statt der Differenzen arithmetische Mittel einführen müssen. Man erhält dann:

$$\int dx \int dx \int f(x) dx = \omega^3 \left\{ {}^m f_{\frac{1}{2}}(a + i\omega) + \frac{1}{240} f_{\frac{1}{2}}'(a + i\omega) - \frac{31}{30240} f_{\frac{1}{2}}'''(a + i\omega) \dots \right\}$$

das Glied mit $f_{\frac{1}{2}}'(a + i\omega)$ hat hier den Coëfficienten Null, so dass mit verhältnissmässig weit grösserer Näherung als bei den früheren Integrationen die dritte summirte Function das dreifache Integral ausdrückt.

(14.)

Es mögen jetzt die Werthe der sowohl am Anfange als am Ende der Integration anzusetzenden Grössen, welche nach den bisher ausgesprochenen Grundsätzen nur bei dem Anfange besonders eine etwas grössere Mühe der Berechnung verlangen, so für die drei ersten Integrationen übersichtlich zusammengestellt werden, und zwar für beide Formen von x und x' , $= a$ und $= a + \frac{1}{2}\omega$, dass man unmittelbar das jedesmal Nöthige daraus entnehmen kann.

Zuerst hat man nach dem Ausdrücke für $\frac{u}{\omega}$ in einer Reihe, und ihrer Potenzen bis zur dritten:

$$\begin{aligned} \frac{u}{\omega} &= 1 + \frac{1}{24} u^2 - \frac{17}{5760} u^4 + \frac{367}{967680} u^6 \dots \\ &= 1 + \alpha u^2 + \beta u^4 + \gamma u^6 \dots \\ \frac{u^2}{\omega^2} &= 1 + \frac{1}{12} u^2 - \frac{1}{240} u^4 + \frac{31}{60480} u^6 \dots \\ &= 1 + \alpha_1 u^2 + \beta_1 u^4 + \gamma_1 u^6 \dots \\ \frac{u^3}{\omega^3} &= 1 + \frac{1}{8} u^2 - \frac{7}{1920} u^4 + \frac{457}{967680} u^6 \dots \\ &= 1 + \alpha_2 u^2 + \beta_2 u^4 + \gamma_2 u^6 \dots \end{aligned}$$

Die Werthe $\alpha, \beta, \gamma; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, die hierdurch gegeben sind, bilden die Zahlenwerthe, welche bei der ersten, zweiten und dritten Integration für die wirklich dastehenden Differenzen gebraucht werden.

Multiplicirt man diese Reihen mit $\left(1 + \frac{1}{4} u^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{u}{\omega} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} u^2\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{12} u^2 + \frac{11}{720} u^4 - \frac{191}{60480} u^6 \dots \\ &= 1 + \alpha' u^2 + \beta' u^4 + \gamma' u^6 \dots \\ \frac{u^2}{\omega^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} u^2\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{24} u^2 + \frac{17}{1920} u^4 - \frac{367}{193536} u^6 \dots \\ &= 1 + \alpha'_1 u^2 + \beta'_1 u^4 + \gamma'_1 u^6 \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{u^3}{\omega^3} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} u^2\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - 0 u^2 + \frac{1}{240} u^4 - \frac{31}{30 \cdot 240} u^6 \dots \\ &= 1 + \alpha'_2 u^2 + \beta'_2 u^4 + \gamma'_2 u^6 \dots \end{aligned}$$

Die Werthe $\alpha', \beta', \gamma'; \alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1; \alpha'_2, \beta'_2, \gamma'_2$, die hierdurch gegeben sind, und nöthigenfalls fortgesetzt werden können, bilden die Zahlenwerthe, welche bei der ersten, zweiten und dritten Integration bei Anwendung der arithmetischen Mittel gebraucht werden.

Es sei jetzt die Anfangsgrenze für alle drei Integrationen so gegeben, dass für $x' = a$ die Integrale sämmtlich Null werden. Hat man dann die Reihe der Werthe berechnet:

$$f(a) \quad f(a + \omega) \quad f(a + 2\omega) \dots \quad f(a + n\omega) \dots,$$

so bildet man für die Anfangsgrenze von der Form:

$$1) \quad n = i' - 0$$

bei der ersten Integration die erste summirte Reihe so, dass man an die Stelle von ${}^I f_0 \left(a + \frac{1}{2} \omega\right)$ setzt:

$${}^I f_0 \left(a + \frac{1}{2} \omega\right) = C_0 = \frac{1}{2} f(a) - \alpha' f_{\frac{1}{2}}^I(a) - \beta' f_{\frac{1}{2}}^{III}(a) - \gamma' f_{\frac{1}{2}}^V(a) \dots \dots \dots (A)$$

Für die zweite Integration fügt man mit Beibehaltung der ersten summirten Reihe eine zweite summirte Reihe hinzu, indem man an die Stelle von ${}^I f_0(a)$ setzt:

$${}^II f_0(a) = C'_0 = \{-\alpha_1 f(a) - \beta_1 f_0^I(a) - \gamma_1 f_0^{IV}(a) \dots\} \dots \dots \dots (B)$$

Für die dritte Integration bildet man aus der zweiten summirten Reihe eine dritte summirte Reihe, indem man in derselben anfängt mit dem Werthe C''_0 , der an die Stelle von ${}^{III} f_0 \left(a + \frac{1}{2} \omega\right)$ gesetzt wird, wo:

$$\begin{aligned} {}^{III} f_0 \left(a + \frac{1}{2} \omega\right) = C''_0 = & \left\{ -\frac{1}{2} \alpha_1 f(a) + \beta_1 f_0^I \left(a - \frac{1}{2} \omega\right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \gamma_1 \left\{ f_0^{III} \left(a + \frac{1}{2} \omega\right) + 3 f_0^{III} \left(a - \frac{1}{2} \omega\right) \right\} \dots \right\} \dots \dots (C) \end{aligned}$$

Wenn dagegen die Anfangsgrenze für alle drei Integrationen so gegeben ist, dass für $x = a + \frac{1}{2} \omega$ die Integrale sämmtlich Null werden, so bildet man bei der Form:

$$2) \quad n = i' + \frac{1}{2}$$

die erste summirte Reihe, so dass man an die Stelle von ${}^I f_0 \left(a + \frac{1}{2} \omega\right)$ die Grösse $C_{\frac{1}{2}}$ setzt, wo:

$$\begin{aligned} {}^I f_0 \left(a + \frac{1}{2} \omega\right) = C_{\frac{1}{2}} = & \left\{ -\alpha f_0^I \left(a + \frac{1}{2} \omega\right) - \beta f_0^{III} \left(a + \frac{1}{2} \omega\right) \right. \\ & \left. - \gamma f_0^V \left(a + \frac{1}{2} \omega\right) \dots \right\} \dots \dots (D) \end{aligned}$$

Für die zweite Integration wird unter Beibehaltung der auf diese Weise gebildeten ersten summirten Reihe für den Anfang an die Stelle von ${}^II f_0(a)$ die Grösse $C'_{\frac{1}{2}}$ gesetzt, wo:

$${}^{\text{II}}f_0(a) = C_1 = \left\{ \alpha f(a + \omega) + \beta [2 f_0^{\text{II}}(a + \omega) + f_0^{\text{II}}(a)] \right. \\ \left. + \gamma [3 f_0^{\text{IV}}(a + \omega) + 2 f_0^{\text{IV}}(a)] \dots \right\} \quad . \quad . \quad (\text{E})$$

Vermittelst der hiermit gebildeten zweiten summirten Reihe wird für die dritte Integration eine dritte summirte Reihe gebildet, bei der der Anfang gemacht wird, indem man an die Stelle von ${}^{\text{III}}f_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right)$ die Grösse C_1'' setzt, wo:

$${}^{\text{III}}f_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) = C_1'' = \left\{ -\alpha_2 f_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) - \beta_2 f_0'\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) \right. \\ \left. \gamma_2 f_0^{\text{III}}\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) \dots \right\} \quad . \quad . \quad (\text{F})$$

Es stellten sich folglich die Anfänge der drei summirten Reihen so, wenn die Integrale sämmtlich Null sind für die Anfangsgrenze:

$$1) \quad x' = a :$$

Argument	Function	I. summirte Reihe	II. summirte Reihe	III. summirte Reihe
$a \dots \dots \dots$	$f(a)$	C_0	C'_0	C''_0
$a + \omega \dots \dots \dots$	$f(a + \omega)$	$C_0 + f(a + \omega)$	$C'_0 + C'_\omega$	$C''_0 + C'_\omega + C''_\omega$
$a + 2\omega \dots \dots \dots$	$f(a + 2\omega)$		$2C_0 + C'_0 + f(a + \omega)$	

$$2) \quad \text{Für } x' = a + \frac{1}{2}\omega :$$

Argument	Function	I. summirte Reihe	II. summirte Reihe	III. summirte Reihe
$a \dots \dots \dots$	$f(a)$	$C_{\frac{1}{2}}$	$C'_{\frac{1}{2}}$	$C''_{\frac{1}{2}}$
$a + \omega \dots \dots \dots$	$f(a + \omega)$	$C_{\frac{1}{2}} + f(a + \omega)$	$C'_{\frac{1}{2}} + C'_{\frac{1}{2}}$	$C''_{\frac{1}{2}} + C'_{\frac{1}{2}} + C''_{\frac{1}{2}}$
$a + 2\omega \dots \dots \dots$	$f(a + 2\omega)$		$2C_{\frac{1}{2}} + C'_{\frac{1}{2}} + f(a + \omega)$	

Der Werth der ganzen bestimmten Integrale hängt dann nur von der Form der Endgrenze ab und ist, je nachdem diese von der Form $a + i\omega$ oder $a + \left(i + \frac{1}{2}\right)\omega$ ist, von einander unterschieden. Indessen wird der Ausdruck derselben weit einfacher, weil keine Rücksicht mehr genommen zu werden braucht auf die in den anderen summirten Reihen anzusetzenden Zahlen, welche sich aus den ausgeführten Summirungen von selbst ergeben. Man hat dann:

$$1) \quad \text{Für die Endgrenze } x = a + i\omega :$$

$$\left. \begin{aligned} \int f(x) dx &= \omega \left\{ f_{\frac{1}{2}}'(a + i\omega) + \alpha' f_{\frac{1}{2}}^{\text{I}}(a + i\omega) + \beta' f_{\frac{1}{2}}^{\text{III}}(a + i\omega) \right. \\ &\quad \left. + \gamma' f_{\frac{1}{2}}^{\text{V}}(a + i\omega) \dots \right\} \\ \int dx \int f(x) dx &= \omega^2 \left\{ {}^{\text{II}}f_0(a + i\omega) + \alpha_1 f(a + i\omega) + \beta_1 f_0^{\text{II}}(a + i\omega) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_1 f_0^{\text{IV}}(a + i\omega) \dots \right\} \\ \int dx \int dx \int f(x) dx &= \omega^3 \left\{ {}^{\text{III}}f_{\frac{1}{2}}(a + i\omega) + \alpha'_2 f_{\frac{1}{2}}^{\text{I}}(a + i\omega) + \beta'_2 f_{\frac{1}{2}}^{\text{I}}(a + i\omega) \right. \\ &\quad \left. + \gamma'_2 f_{\frac{1}{2}}^{\text{III}}(a + i\omega) \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{I})$$

2) Für die Endgrenze $x = a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega$:

$$\left. \begin{aligned} \int f(x) dx &= \omega \left\{ f_0 \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \right] + \alpha f_0' \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \right] \right. \\ &\quad \left. + \beta f_0'' \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \right] + \gamma f_0''' \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \right] + \dots \right\} \\ \int dx \int f(x) dx &= \omega^2 \left\{ f_0' \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \right] + \alpha_1 f_0' \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \right] \right. \\ &\quad \left. + \beta_1 f_0'' \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \right] + \gamma_1 f_0''' \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \right] + \dots \right\} \\ \int dx \int dx \int f(x) dx &= \omega^3 \left\{ f_0'' \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \right] + \alpha_2 f_0'' \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \right] \right. \\ &\quad \left. + \beta_2 f_0''' \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \right] + \gamma_2 f_0'''' \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \right] + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(15.)

Setzt man in diesen letzten Ausdrücken $i = 0$, so wird man die Werthe der oben angegebenen Constanten erhalten für:

$$1) \quad x' = a$$

hat man aus dem ersten Systeme:

$$\left\{ f_{\frac{1}{2}}'(a) + \alpha' f_{\frac{1}{2}}^I(a) + \beta' f_{\frac{1}{2}}^{III}(a) + \gamma' f_{\frac{1}{2}}^{IV}(a) \dots \right\} = 0,$$

oder weil:

$$f_{\frac{1}{2}}'(a) = f_0' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) = \frac{1}{2} f'(a) = C_0' = \frac{1}{2} f'(a) \quad \dots \quad (A)$$

den Werth von C_0 wie oben.

Ebenso wird für C_0' die Gleichung:

$$\left\{ f_0''(a) + \alpha_1 f_0''(a) + \beta_1 f_0'''(a) + \gamma_1 f_0''''(a) \dots \right\} = 0. \quad \dots \quad (B)$$

oder weil $f_0''(a) = C_0'$, den Werth von C_0' geben.

Endlich für C_0'' hat man bei dem dritten Integrale:

$$\left\{ f_{\frac{1}{2}}'''(a) + \alpha_2' f_{\frac{1}{2}}^I(a) + \beta_2' f_{\frac{1}{2}}^I(a) + \gamma_2' f_{\frac{1}{2}}^{III}(a) \dots \right\} = 0$$

oder weil:

$$f_{\frac{1}{2}}'''(a) = f_0''' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) = \frac{1}{2} f_0'''(a)$$

und:

$$C_0'' = f_0''' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right); \quad C_0' = f_0''(a)$$

$$\left\{ C_0'' = \frac{1}{2} C_0' + \alpha_2' f_{\frac{1}{2}}^I(a) + \beta_2' f_{\frac{1}{2}}^I(a) + \gamma_2' f_{\frac{1}{2}}^{III}(a) \dots \right\} = 0.$$

Da nun aber:

$$\alpha_2' = 0, \quad \beta_2' = -\beta_1 \quad \text{und} \quad \gamma_2' = -2\gamma_1$$

ist, so wird, wenn man die früheren Werthe substituirt:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} C'_0 &= +\frac{1}{2} \alpha_1 f(a) + \frac{1}{2} \beta_1 f''_0(a) + \frac{1}{2} \gamma_1 f''''_0(a) \dots \\
 + \alpha'_2 f'_{\frac{1}{2}}(a) &= 0 \\
 + \beta'_2 f''_{\frac{1}{2}}(a) &= -\beta_1 f'_{\frac{1}{2}}(a) \\
 + \gamma'_2 f'''_{\frac{1}{2}}(a) &= -2\gamma_1 f'''_{\frac{1}{2}}(a)
 \end{aligned}$$

dabei ist:

$$\begin{aligned}
 f''_0(a) &= f''_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) - f''_0\left(a - \frac{1}{2}\omega\right) \\
 f'_{\frac{1}{2}}(a) &= \frac{1}{2} f''_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) + \frac{1}{2} f''_0\left(a - \frac{1}{2}\omega\right) \\
 f''_0(a) &= f'''_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) - f'''_0\left(a - \frac{1}{2}\omega\right) \\
 f'_{\frac{1}{2}}(a) &= \frac{1}{2} f'''_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) + \frac{1}{2} f'''_0\left(a - \frac{1}{2}\omega\right)
 \end{aligned}$$

und die Gleichung wird:

$$\left. \begin{aligned}
 C''_0 + \left\{ \frac{1}{2} \alpha_1 f(a) - \beta_1 f''_0\left(a - \frac{1}{2}\omega\right) \right. \\
 \left. - \frac{1}{2} \gamma_1 f'''_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) + 3 f'''_0\left(a - \frac{1}{2}\omega\right) \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (C)$$

und giebt damit den obigen Werth von C''_0 .

Aus dem zweiten Systeme hat man für:

$$2) \quad x = a + \frac{1}{2}\omega:$$

$$C_{\frac{1}{2}} + \left\{ \alpha f'_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) + \beta f'''_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) + \gamma f''_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) \dots \right\} = 0 \dots (D)$$

weil:

$$C_{\frac{1}{2}} = f'_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right).$$

Bei der zweiten Integration wird:

$$\begin{aligned}
 f_{\frac{1}{2}}\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) &= C'_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} C_{\frac{1}{2}} = C'_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \alpha f'_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \beta f'''_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) - \frac{1}{2} \gamma f''_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right)
 \end{aligned}$$

und damit soll die Gleichung stattfinden:

$$\begin{aligned}
 C'_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \alpha f'_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) - \frac{1}{2} \beta f'''_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) - \frac{1}{2} \gamma f''_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) \dots \\
 + \alpha'_1 f_{\frac{1}{2}}\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) + \beta'_1 f'_{\frac{1}{2}}\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) + \gamma'_1 f''_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) \dots = 0.
 \end{aligned}$$

Es ist hier aber:

$$\alpha'_1 = \alpha \quad \beta'_1 = -3\beta \quad \gamma'_1 = -5\gamma \dots$$

und:

$$f_0' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) = f(a + \omega) - f(a)$$

$$f_{\frac{1}{2}}' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) = \frac{1}{2} f(a + \omega) + \frac{1}{2} f(a),$$

sowie die analogen Werthe bei f_0''' und f_0^{iv} . Setzt man diese Werthe zusammen, so wird:

$$\left. \begin{aligned} C_{\frac{1}{2}}' - \alpha f(a + \omega) - \beta \{ 2 f_0''(a + \omega) + f_0''(a) \} \\ - \gamma \{ 3 f_0^{iv}(a + \omega) + 2 f_0^{iv}(a) \} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (E)$$

wie es der oben gegebene Werth verlangt.

Endlich findet wegen $C_{\frac{1}{2}}'' = f_0'' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right)$ für die dritte Integration die Gleichung statt:

$$C_{\frac{1}{2}}'' + \alpha_2 f_0' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) + \beta_2 f_0' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) + \gamma_2 f_0''' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) = 0,$$

oder wegen $f_0' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) = C_{\frac{1}{2}}'$:

$$C_{\frac{1}{2}}'' + \alpha_2 C_{\frac{1}{2}}' + \beta_2 f_0' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) + \gamma_2 f_0''' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) = 0 \quad \dots \quad (F)$$

wie es die obige Angabe verlangt.

Für den Anfang der verschiedenen Integrationen wird man die zu berechnenden Functionen immer so wählen können, dass bei berechnetem $f(a)$, $f(a + \omega)$ etc. der Anfang entweder auf $x' = a$, oder $= a + \frac{1}{2} \omega$ fällt und reicht dann mit diesen Formeln aus.

Für die Endgrenze ist es am bequemsten, einige Werthe der Integrale für:

$$a = (i - 1) \omega, \quad a = \left(i - \frac{1}{2} \right) \omega, \quad a = i \omega, \quad a = \left(i + \frac{1}{2} \right) \omega, \quad a = (i + 1) \omega$$

nach den hier gegebenen Ausdrücken zu berechnen und aus ihnen den Werth des Integrals für andere Grenzen, die nicht auf $a + i \omega$ und $a + \left(i + \frac{1}{2} \right) \omega$ fallen, strenge zu interpoliren. Man kann ähnlich auch bei dem Anfange verfahren, nur wird man bei den höheren Integrationen, auf den richtigen Beginn der sämtlichen vorangehenden summirten Reihen zu sehen haben.

(16.)

Als Beispiel kann noch die Annahme:

$$f(x) = x^4 \quad a = 1 \quad \omega = 1,$$

gemacht werden. Es wird damit für:

1) $x' = 1$:

$$\int f(x) dx = \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{5}$$

$$\int dx \int f(x) dx = \frac{1}{30} x^6 - \frac{1}{5} x + \frac{1}{6}$$

$$\int dx \int dx \int f(x) dx = \frac{1}{210} x^7 - \frac{1}{10} x^2 + \frac{1}{6} x - \frac{1}{14}$$

und für:

2) $x' = 1,5:$

$$\int f(x) dx = \frac{1}{5} x^5 - \frac{243}{160}$$

$$\int dx \int f(x) dx = \frac{1}{30} x^6 - \frac{243}{160} x + \frac{243}{128}$$

$$\int dx \int dx \int f(x) dx = \frac{1}{210} x^7 - \frac{243}{320} x^2 + \frac{243}{128} x - \frac{2187}{1792}.$$

Zu dem Anfange der Reihen bei der mechanischen Quadratur bedarf man der Differenzen der ersten Werthe von $f(a)$, $f(a + \omega)$ u. s. w. Diese sind:

	Argument	Function	f'_0	f''_0	f'''_0	f^{IV}_0	f^V_0
$a - \omega$	0	0	1	2	12	24	0
a	1	1	15	14	36	24	0
$a + \omega$	2	16		50		24	

Soll nun zuerst die Anfangsgrenze:

1) $x' = 1$

sein, so wird nach den in (14) gegebenen Werthen:

$$C_0 = \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{12} f'_{\frac{1}{2}}(a) - \frac{11}{720} f'''_{\frac{1}{2}}(a) + \frac{191}{60480} f^{V}_{\frac{1}{2}}(a)$$

$$C'_0 = -\frac{1}{12} f(a) + \frac{1}{240} f''_0(a) - \frac{31}{60480} f^{IV}_0(a)$$

$$C''_0 = -\frac{1}{24} f(a) - \frac{1}{240} f'_0\left(a - \frac{1}{2} \omega\right) + \frac{31}{120960} \left[f'''_0\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) + 3 f'''_0\left(a - \frac{1}{2} \omega\right) \right]$$

und da hier:

$$f(a) = 1 \quad f''_0(a) = 14 \quad f'_0\left(a - \frac{1}{2} \omega\right) = 1$$

$$f'_{\frac{1}{2}}(a) = 8 \quad f^{IV}_0(a) = 24 \quad f'''_0\left(a - \frac{1}{2} \omega\right) = 12$$

$$f'''_{\frac{1}{2}}(a) = 24 \quad f^{IV}_0\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) = 36.$$

$$f^V_{\frac{1}{2}}(a) = 0$$

so wird: $C_0 = + 0,8000 \quad C'_0 = - 0,0373 \quad C''_0 = - 0,0274$

und die summirten Reihen bilden sich so:

	Argument	$f(a)$	$f\left(a + \frac{1}{2} \omega\right)$	${}^II f(a)$	${}^III f\left(a + \frac{1}{2} \omega\right)$
a	1	1	+ 0,800	- 0,037	- 0,027
$a + \omega$	2	16	+ 16,800	+ 0,763	+ 0,736
$a + 2 \omega$	3	81	+ 97,800	+ 17,563	+ 18,299
$a + 3 \omega$	4	256	+ 353,800	+ 115,363	+ 133,662
$a + 4 \omega$	5	625	+ 978,800	+ 469,163	+ 602,825
$a + 5 \omega$	6	1296		+ 1447,963	
etc.				etc.	

Wird:

$$2) \quad x' = 1,5$$

angenommen, so sind die Werthe zu nehmen:

$$C_{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{24} f_0' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) + \frac{17}{5760} f_0''' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) - \frac{367}{967680} f_0^{(v)} \left(a + \frac{1}{2} \omega \right)$$

$$C_{\frac{1}{2}}' = \frac{1}{24} f \left(a + \omega \right) - \frac{17}{5760} [2 f_0'' \left(a + \omega \right) + f_0'' \left(a \right)] \\ + \frac{367}{967680} [3 f_0^{(iv)} \left(a + \omega \right) + 2 f_0^{(iv)} \left(a \right)]$$

$$C_{\frac{1}{2}}'' = -\frac{1}{8} f_0' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) + \frac{7}{1920} f_0' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) - \frac{457}{967680} f_0''' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right).$$

Da nun hier:

$$f_0' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) = 15 \quad f_0 \left(a + \omega \right) = 16$$

$$f_0''' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) = 36 \quad f_0'' \left(a \right) = 14$$

$$f_0^{(v)} \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) = 0 \quad f_0''' \left(a + \omega \right) = 50$$

$$f_0^{(iv)} \left(a \right) = 24$$

$$f_0^{(iv)} \left(a + \omega \right) = 24$$

und wenn man den Werth von $C_{\frac{1}{2}}$ an die Stelle von $f_0' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right)$ setzt:

$$C_{\frac{1}{2}}'' = + \frac{17}{1920} f_0' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) - \frac{407}{483840} f_0''' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right),$$

so werden die Werthe:

$$C_{\frac{1}{2}} = - 0,5188$$

$$C_{\frac{1}{2}}' = + 0,3757$$

$$C_{\frac{1}{2}}'' = + 0,1025$$

und die summirten Reihen bilden sich für den Anfangswerth $x' = 1,5$ so:

	Argument	$f \left(a \right)$	$f_0' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right)$	${}^{II}f_0 \left(a \right)$	${}^{III}f_0 \left(a + \frac{1}{2} \omega \right)$
$a \dots\dots\dots$	1	1	— 0,519	+ 0,376	+ 0,103
$a + \omega \dots\dots\dots$	2	16	+ 15,481	— 0,143	— 0,040
$a + 2 \omega \dots\dots\dots$	3	81	+ 96,481	+ 15,338	+ 15,298
$a + 3 \omega \dots\dots\dots$	4	256	+ 353,481	+ 111,819	+ 127,117
$a + 4 \omega \dots\dots\dots$	5	625	+ 978,481	+ 465,300	+ 592,417
$a + 5 \omega \dots\dots\dots$	6	1296		+ 1443,781	
etc.				etc.	

Aus beiden Tabellen werden sich die richtigen Werthe nach den Formeln (I) und (II) in (14.) ergeben, die nach der Substitution der Zahlen werden für:

$$1) \quad x = a + i\omega:$$

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \omega \left\{ f_{\frac{1}{2}}^I(a + i\omega) - \frac{1}{12} f_{\frac{1}{2}}^I(a + i\omega) + \frac{11}{720} f_{\frac{1}{2}}^III(a + i\omega) \right. \\ &\quad \left. - \frac{191}{60480} f_{\frac{1}{2}}^V(a + i\omega) \right\} \\ \int dx \int f(x) dx &= \omega^2 \left\{ f_0^II(a + i\omega) + \frac{1}{12} f^I(a + i\omega) - \frac{1}{240} f_0^III(a + i\omega) \right. \\ &\quad \left. + \frac{31}{60480} f_0^IV(a + i\omega) \right\} \\ \int dx \int dx \int f(x) dx &= \omega^3 \left\{ f_{\frac{1}{2}}^III(a + i\omega) + \frac{1}{240} f_{\frac{1}{2}}^I(a + i\omega) - \frac{31}{30240} f_{\frac{1}{2}}^III(a + i\omega) \dots \right\} \end{aligned}$$

und für:

$$2) \quad x = a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega:$$

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \omega \left\{ f_0 \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \right] + \frac{1}{24} f_0^I \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{17}{5760} f_0^III \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \right] + \frac{367}{967680} f_0^V \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \right] \right\} \\ \int dx \int f(x) dx &= \omega^2 \left\{ f_{\frac{1}{2}}^II \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \right] - \frac{1}{24} f_{\frac{1}{2}}^I \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{17}{1920} f_{\frac{1}{2}}^III \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \right] - \frac{367}{193536} f_{\frac{1}{2}}^IV \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \right] \right\} \\ \int dx \int dx \int f(x) dx &= \omega^3 \left\{ f_0^III \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \right] - \frac{1}{8} f_0^I \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{7}{1920} f_0^I \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \right] - \frac{457}{967680} f_0^III \left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega \right] \right\}. \end{aligned}$$

B. Die speciellen Störungen.

Sechsendneunzigste Vorlesung.

Allgemeine Bemerkungen über definitive Bahnbestimmungen.

Wir haben in den vorhergehenden Abschnitten gesehen, wie man aus einer gewissen Zahl von Beobachtungen mehr oder weniger angenäherte Elementensysteme eines Kometen oder Planeten erhalten kann. Mit Hülfe eines derartigen Elementensystemes ist es dann gewöhnlich möglich, das betreffende Object längere Zeit hindurch aufzufinden. So lange man also nur diesen Zweck im Auge hat, lösen die im Vorhergehenden gegebenen Methoden das Problem der Bewegung eines Himmelskörpers im Allgemeinen in ziemlich befriedigender Weise.

Aus diesem Grunde hat man sich in früherer Zeit fast ausschliesslich auf die Berechnung „vorläufiger“ Bahnen beschränkt. Hierzu kam noch der Umstand, dass die älteren Beobachtungen in Folge der Unsicherheit der astronomischen Fundamentalconstanten und in Folge der Mangelhaftigkeit der technischen Hilfsmittel nicht auf bedeutende Genauigkeit Anspruch machen konnten. Man konnte sich daher mit vollem Rechte auf näherungsweise Darstellungen der Bewegung der Himmelskörper beschränken. Erst der bedeutende Aufschwung der beobachtenden Astronomie seit der Mitte des achtzehnten Jahrhunderts machte die Auffindung neuer, strengerer Methoden zur Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers nöthig.

Man bestrebte sich also, anstatt nur einzelne Beobachtungen eines Objectes zu verwerthen, sämmtliche Beobachtungen zur Bestimmung einer Bahn heranzuziehen, und stellte die Frage in folgender Form: Wenn ein Elementensystem gegeben, welches sämmtliche zur Verfügung stehenden Beobachtungen bis auf gewisse Grössen in Rectascension und Declination darstellt, welche Verbesserungen muss man dann an diesen Bahnelementen anbringen, um eine bessere oder die beste mögliche Darstellung aller Beobachtungen zu erreichen?

Es sind nun aber die Rectascensionen und Declinationen eines Objectes sehr verwickelte Functionen seiner Bahnelemente. In Folge dessen ist es im Allgemeinen schwierig, anzugeben, um welchen Betrag sich diese Grössen ändern, wenn sich ein Bahnelement um eine gewisse Grösse ändert. Nur dann, wenn die Aenderungen der Bahnelemente als unendlich kleine Grössen von der ersten Ordnung betrachtet werden können, ist es leicht, diese Aufgabe durch Differentialformeln zu lösen. Man ist also gezwungen, die Kenntniss eines Elementensystemes vorauszusetzen, welches die Beobachtungen bis auf sehr kleine Beträge genau darstellt, und kann dann annehmen, dass das zu suchende Elementensystem von dem gegebenen nur um unendlich kleine Grössen erster Ordnung abweicht und allgemein die Aenderungen des scheinbaren Ortes als lineare Functionen der Aenderungen der Bahnelemente darstellen. Somit hat man gewisse analytische Ausdrücke für die Darstellungen jeder einzelnen Beobachtung durch alle dem gegebenen Elementensysteme unendlich benachbarten.

Es handelt sich jetzt noch darum, eine Bedingung zu wählen, durch welche ein möglichst guter Anschluss der zu bestimmenden Bahn an die Beobachtungen erreicht wird; mit anderen Worten, die Gesamtheit der übrig bleibenden Abweichungen möglichst klein zu erhalten.

Man hat sich daran gewöhnt, die zu suchenden Bahnelemente so zu bestimmen, dass die Summe der Quadrate der Abweichungen ein Minimum wird. An Stelle der Abweichungen in Rectascension ($\Delta\alpha$) nimmt man jedoch $\Delta\alpha \cos \delta$ (wo δ die Declination des Objectes), weil $\Delta\alpha \cos \delta$ die wirkliche Abweichung der Beobachtung auf der Sphäre ist.

Die zu suchenden Bahnelemente definirt man also durch die Bedingung, dass die Summe:

$$\Sigma[(\Delta\alpha \cos \delta)^2 + (\Delta\delta)^2]$$

ein Minimum werden soll. Wir sehen an dieser Stelle von der theoretischen Begründung dieser „Methode der kleinsten Quadrate“ vollständig ab und beschränken uns im Augenblicke darauf, die praktischen Vortheile derselben hervorzuheben. Die Grössen $\Delta\alpha \cos \delta$ und $\Delta\delta$ haben natürlich im Allgemeinen verschiedene Vorzeichen, d. h. die Beobachtungen fallen bald auf die eine Seite der idealen Bahn, bald auf die andere. Die Grössen $(\Delta\alpha \cos \delta)^2$ und $(\Delta\delta)^2$ sind jedoch immer positiv; sie sind ferner um so grösser, je grösser die absoluten Werthe von $\Delta\alpha \cos \delta$ und $\Delta\delta$ sind. Die oben angegebene Minimalbedingung muss daher von vornherein Elemente liefern, welche sich sehr gut an die wirkliche Bahn anschliessen. Es bleibt nun noch zu untersuchen, ob dieselbe die Bahnelemente vollständig bestimmt.

Sei für eine bestimmte Beobachtung im Sinne „Beobachtung (o) minus Rechnung (c)“:

$$\delta_o - \delta_c = n$$

für unser ursprüngliches Elementensystem; d. h. also, wenn man mit den zu Grunde zu legenden Elementen für die Zeit der Beobachtung die Declination berechnet, so erhält man δ_c . Diese Grösse weicht von der vom Beobachter gemessenen Grösse δ_o um n ab.

Wir bezeichnen die Bahnelemente des ursprünglichen Systemes mit $e_1, e_2 \dots e_i$. In den astronomischen Anwendungen der Methode der kleinsten Quadrate ist i immer gleich 5 oder 6, je nachdem man eine parabolische Bahn oder eine allgemeine Kepler'sche Bewegung voraussetzt. Nun nehmen wir an, dass man zu diesen Grössen noch die Correctionen $\Delta e_1, \Delta e_2 \dots \Delta e_i$ hinzufügen muss, um die, zu suchende, „definitive“ Bahn zu erhalten. Für diese Bahn sei die der Beobachtungszeit entsprechende Declination gleich δ .

Dann hat man:

$$\delta = \delta_c + \frac{d\delta_c}{de_1} \Delta e_1 + \frac{d\delta_c}{de_2} \Delta e_2 + \dots + \frac{d\delta_c}{de_i} \Delta e_i.$$

Die Grössen $\frac{d\delta_c}{de}$ (die Differentialquotienten der Coordinate δ_c nach den Bahnelementen) sind offenbar Functionen der Bahnelemente $e_1, e_2 \dots e_i$ und der Beobachtungszeit (da δ_c selbst eine Function dieser Grössen ist). Später werden wir analytische Ausdrücke für dieselben aufstellen und können sie daher als bekannt betrachten, da wir ja die Beobachtungszeit und das ursprüngliche Elementensystem $e_1 \dots e_i$ kennen. Desgleichen haben wir gesehen, wie man n (die Abweichung der Beobachtung von der ursprünglichen Ephemeride) erhält. Indem wir in der Gleichung für δ die Grösse δ_c durch $\delta_o - n$ ersetzen, folgt:

$$\delta_o - \delta = n - \frac{d\delta_c}{de_1} \Delta e_1 - \frac{d\delta_c}{de_2} \Delta e_2 - \dots - \frac{d\delta_c}{de_i} \Delta e_i \dots \dots (1)$$

Diese Grösse ist aber nichts Anderes als $\Delta\delta$, die Abweichung der beobachteten

Coordinate δ_0 von der, dem zu suchenden definitiven Elementensysteme entsprechenden Coordinate δ .

Wir sehen also, dass die Grössen $\Delta\delta$ und ebenso $\Delta\alpha \cos \delta$ lineare Functionen mit bekannten Coëfficienten der, dem ursprünglichen Elementensysteme zuzuertheilenden Zuwächse Δe sind. Sie enthalten ausserdem noch ein bekanntes constantes Glied n .

Obige Minimalbedingung kommt mithin also darauf hinaus, die Grössen $\Delta e_1, \Delta e_2 \dots \Delta e_i$ so zu bestimmen, dass sich ein Ausdruck, welcher ihre Quadrate und ihre ersten Potenzen mit gegebenen Coëfficienten enthält, auf ein Minimum reducirt. Wir bemerken übrigens, dass die Coëfficienten der Quadrate von $\Delta e_1 \dots \Delta e_i$ immer positiv sind. Nun wollen wir die Form der Minimalbedingung aufsuchen. Zu diesem Zwecke denken wir allen Grössen $\Delta e_2, \Delta e_3 \dots \Delta e_i$ einen gewissen Werth zuertheilt, mit Ausnahme von Δe_1 , welches wir so bestimmen wollen, dass ein Ausdruck von der Form:

$$(\Delta e_1)^2 A + \Delta e_1 F(\Delta e_2, \Delta e_3 \dots \Delta e_i) + G(\Delta e_2 \dots \Delta e_i) \dots \dots (2)$$

ein Minimum wird.

In diesem Ausdrucke ist A eine positive Grösse, welche nicht von $\Delta e_2 \dots \Delta e_i$ abhängt. F ist eine lineare Function dieser Grössen. Die allgemeine Bedingung dafür, dass der Ausdruck (2) bei gegebenen Werthen von $\Delta e_2 \dots \Delta e_i$ ein Maximum, ein Minimum oder einen Wendepunkt hat, ist allgemein:

$$\frac{d(2)}{d\Delta e_1} = 0$$

oder:

$$2\Delta e_1 A + F(\Delta e_2, \Delta e_3 \dots \Delta e_i) = 0 \dots \dots (3)$$

Hieraus ergibt sich also Δe_1 als eine lineare Function von $\Delta e_2 \dots \Delta e_i$.

Man überzeugt sich leicht, dass der durch die Gleichung (3) definirte Werth von Δe_1 einem Minimum von (2) entspricht (weil, wie wir sahen, A immer positiv ist).

Betrachtet man irgend eine andere Grösse, z. B. Δe_i , als variabel und alle übrigen als gegeben, so erhält man eine der Gleichung (3) analoge.

Man erhält also im Ganzen i lineare Gleichungen zur Bestimmung der Grössen $\Delta e_1 \dots \Delta e_i$.

Die Methode der kleinsten Quadrate bestimmt somit die Unbekannten vollständig und eindeutig. Die Summe der übrig bleibenden Fehlerquadrate wird immer ein Minimum.

Die Gleichungen (1) pflegt man die Bedingungsgleichungen, die Gleichungen (3) die Normalgleichungen zu nennen.

Im Vorhergehenden haben wir vorausgesetzt, dass die Methode der kleinsten Quadrate auf jede einzelne Beobachtung angewendet wird, wie das gelegentlich auch Bessel gethan hat. Es erfordert dies aber einen ausserordentlichen Arbeitsaufwand.

Aus diesem Grunde zieht man es vor, mehrere Beobachtungen in einen „Normalort“ zu vereinigen und nur auf diese Normalörter die Methode der kleinsten Quadrate anzuwenden. Da nämlich die wirkliche Bahn des Objectes sich immer in unmittelbarer Nähe an die der Rechnung zu Grunde gelegte anschmiegt, so kann man für einige Tage voraussetzen, dass z. B. die Differenz: „Wirkliches δ minus berechnetes δ “ der Zeit proportional ist. Wenn also in diesem Zeitraume eine Anzahl Beobachtungen die wirklichen δ geben würden (d. h. keine Beobachtungsfehler enthielten), so würde das Mittel der Differenzen $\delta_0 - \delta_c$ die der Ephemeride hinzuzufügende Correction für das Mittel der Beobachtungszeiten sein, oder $\Delta\delta$ bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate.

Der Umstand, dass die Beobachtungen nicht die wirklichen Orte geben, sondern auch noch Beobachtungsfehler enthalten, spielt bei dieser Betrachtung keine Rolle. Das Mittel der $\delta_0 - \delta_c$ ist natürlich genauer als ein einzelner Werth dieser Grösse.

Fügt man dasselbe zu dem, dem Mittel der Beobachtungszeiten entsprechenden δ_c hinzu (und ebenso für die Rectascension), so erhält man einen Normalort, der ebenfalls genauer ist als eine einzelne Beobachtung.

Durch Bildung solcher Normalorte wird die rechnerische Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate ausserordentlich erleichtert.

So lange sich die Beobachtungen eines Objectes nur über einen oder zwei Monate erstrecken, kann man sie so sämmtlich zur Bestimmung der Bahnelemente verwenden. Für längere Zeiträume bewirkt aber die Anziehung der Planeten Abweichungen von der Kepler'schen Bewegung, die Störungen. Diese Grössen müssen offenbar an die Ephemeride vor Vergleichung mit den Beobachtungen angebracht werden. Man stellt sich also die Aufgabe wie folgt: Man sucht für einen gewissen Theil der Bahn (oder präciser gesagt für eine bestimmte Epoche) ein Elementensystem, welches die wirkliche Bewegung osculiren soll. Dasselbe soll also für den betreffenden Zeitpunkt den Ort und die heliocentrischen Geschwindigkeitscomponenten des Objectes streng darstellen.

Zu diesem Zwecke geht man von einem für die Osculationsepoche näherungsweise richtigen Systeme aus, und berechnet die Störungen durch die Planeten. Man bringt dieselben dann an die Ephemeride an und vergleicht erst nachher mit den Beobachtungen. Durch Ausgleichung mittelst der Methode der kleinsten Quadrate erhält man dann das wahrscheinlichste, für die Osculationsepoche geltende Elementensystem.

Dieses Verfahren setzt voraus, dass das Ausgangselementensystem so angenähert ist, dass es die Störungen vollständig genau wiedergiebt. So lange es sich nur um Beobachtungen einer Erscheinung handelt, ist dies im Allgemeinen leicht zu erreichen. Wenn aber Beobachtungen verschiedenen Umläufen angehören, können sich diesem Verfahren erhebliche Schwierigkeiten entgegenstellen.

Nehmen wir an, dass es sich um die Beobachtungen zweier Erscheinungen handle. Man verfügt über ein Elementensystem, welches die Beobachtungen einer Erscheinung ziemlich gut darstellt. Jetzt berechnet man die Störungen für den Zeitraum, welcher die beiden Erscheinungen trennt und bringt die hieraus folgenden Correctionen an die Ephemeriden für die erste und zweite Erscheinung an.

Mit Hülfe der Grössen: $\alpha_0 - \alpha_c$ und $\delta_0 - \delta_c$ verbessert man dann das ursprüngliche Elementensystem mittelst der Methode der kleinsten Quadrate. Zuweilen können die Correctionen desselben so gross werden, dass sich eine Abänderung der Werthe für die Störungen nöthig macht. Dies kann besonders dann eintreten, wenn die Störungen in dem Zeitraume zwischen beiden Erscheinungen beträchtlich waren, z. B. in Folge starker Annäherung an Jupiter. In einem solchen Falle bleibt dann weiter nichts übrig, als mit dem verbesserten Elementensysteme die Störungen neu zu berechnen und dann die Ausgleichung von Neuem zu beginnen.

Was die Berechnung der Störungen durch mechanische Quadraturen, „die speciellen Störungen“, wie man zu sagen pflegt, betrifft, so ist dieselbe im Principe sehr einfach.

Wie in der ersten Vorlesung gezeigt, treten zu den Kraftcomponenten der Centralbewegung noch störende Kräfte hinzu, welche durch die Planeten bedingt sind und eine allmälige Abweichung des Objectes von der Kepler'schen Bewegung hervorbringen. Man kann nun entweder berechnen, um wieviel eine nach den Kepler'schen Gesetzen berechnete Coordinate von der wirklichen Coordinate abweicht (Coordinatenstörungen), oder aber man betrachtet die Variation der osculirenden Bahnelemente (Variation der Constanten).

Man denkt sich also in diesem letzteren Falle alle Bahnelemente, welche die wirkliche Bewegung osculiren, d. h. in jedem Zeitpunkte die heliocentrischen Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten des Objectes streng dargestellt, und verfolgt die Aenderungen dieser Elemente mit der Zeit. Zur Berechnung der störenden Kräfte (welche auch den Ort des gestörten Objectes enthalten) wäre, strenge genommen, bereits die Kenntniss der Störungen nöthig. Da jedoch die Massen der Planeten gegenüber der Masse der Sonne sehr klein sind, so genügt im Allgemeinen eine näherungsweise Kenntniss der Coordinaten des gestörten Körpers, um die störenden Kräfte mit hinreichender Genauigkeit zu berechnen.

Die Methode der mechanischen Quadratur giebt nun immer im Voraus genäherte Werthe für die Störungen und also auch für den wahren Ort des gestörten Körpers, so dass wir die störenden Kräfte als bekannt voraussetzen können.

Die Differentialgleichungen für die Veränderung der Störung in einer Coordinate oder in einem Bahnelemente nehmen dann die Form an:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = X \quad \text{oder} \quad \frac{d\eta}{dt} = Y,$$

wo (wenn man die störenden Kräfte kennt) X oder Y bekannte Grössen sind. Hat man für einige äquidistante Intervalle X oder Y berechnet, so kann man, wie aus den Vorlesungen 94 und 95 über mechanische Quadratur folgt, X und Y nach Potenzen der Zeit (des Argumentes) entwickeln, wodurch sich durch Quadratur ξ oder η , nach Potenzen der Zeit entwickelt, ergibt. Man kann also, von Intervall zu Intervall weitergehend, die Grössen ξ oder η berechnen und so die Bewegung des Körpers verfolgen.

Wenn sich das Object einem Planeten, z. B. Jupiter, sehr nähert, so ist es zuweilen gerathen, diesen letzteren Körper als Centalkörper zu betrachten, die Sonne und die übrigen Planeten hingegen als störende. Man berechnet dann für den Moment, in welchem man den Uebergang machen will, die jovicentrischen Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten und hieraus jovicentrische Osculationselemente, verfolgt dann während einer gewissen Zeit die Bewegung um Jupiter und berechnet schliesslich, wenn sich der Körper wieder von Jupiter entfernt hat, Osculationselemente bezüglich der Sonne, mit deren Hülfe man dann die Bewegung weiter verfolgt. Laplace hat im vierten Bande seiner *Mécanique Céleste* eine Formel für den Radius der Wirkungssphäre eines Planeten gegeben, d. h. für den Grad der Annäherung eines Körpers an einen Planeten, bei welchem es vortheilhaft ist, den Planeten als Centalkörper zu betrachten.

Die definitiven Bahnbestimmungen gehören zu den mühsamsten Arbeiten der Astronomie, allein wichtige Resultate belohnen die ermüdende Thätigkeit des Rechners.

Die genaue rechnerische Verfolgung eines Objectes über lange Zeiträume hin controlirt die Grundlagen der ganzen classischen Astronomie. Zunächst bilden derartige Untersuchungen eine Garantie für die Richtigkeit des Newton'schen Gravitationsgesetzes. So haben Asthen und Backlund nachgewiesen, dass der Encke'sche Komet in der Nähe seines Perihels Widerstandskräften begegnet.

Auch bezüglich der Planetenmassen ergeben derartige Rechnungen wichtige Schlüsse. Man setzt zu diesem Zwecke die von einem Planeten hervorgerufenen Elementenstörungen als der Masse desselben proportional voraus und führt so in die Bedingungsgleichungen noch als Unbekannte die Correctionen der Planetenmassen ein. Auf diesem Wege erhielt der uns leider so früh entrissene Hårdtl eine Jupitermasse, welche ziemlich merklich von den sonst gegebenen Werthen abweicht. Dieses bemerkenswerthe Resultat fand seine Bestätigung durch Newcomb's grosse Arbeit über die Polyhymnia. — In ähnlicher Weise hat man aus den Erscheinungen kleiner Planeten bei grosser Annäherung an die Erde die Sonnenparallaxe bestimmt.

So liefern die hier citirten und noch viele andere, verdienstvolle definitive Bahnbestimmungen wichtige Aufschlüsse über die Fundamentalconstanten des Sonnensystems. —

Nach diesen einleitenden Bemerkungen gehen wir zur Darstellung der verschiedenen Methoden über, mit deren Hülfe sich die speciellen Störungen berechnen lassen.

Siebenundneunzigste Vorlesung.

I. Encke's Methode zur Berechnung der speciellen Störungen in den rechtwinkligen Coordinaten.

Die einfachste Methode zur Berechnung der speciellen Störungen ist die von Bond und unabhängig von diesem später von Encke entdeckte, und in grösserem Umfange angewandte Methode der Störungen in den rechtwinkligen Coordinaten.

Man betrachtet die Bewegung in erster Annäherung als eine Kepler'sche und bestimmt die Abweichung der wirklichen Bahn von der ungestörten in den drei Coordinaten. Seien also x^0 , y^0 und z^0 die ungestörten, der Kepler'schen Bewegung entsprechenden Coordinaten, und ξ , η und ζ die Störungen, so sind in jedem Augenblicke die drei rechtwinkligen Coordinaten x , y und z des Körpers gegeben durch:

$$\begin{aligned} x &= x^0 + \xi \\ y &= y^0 + \eta \\ z &= z^0 + \zeta \end{aligned}$$

und folglich ist auch:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d^2 x^0}{dt^2} + \frac{d^2 \xi}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{d^2 y^0}{dt^2} + \frac{d^2 \eta}{dt^2} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{d^2 z^0}{dt^2} + \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \end{aligned}$$

Die elliptische Bewegung wird dann nach den ersten Vorlesungen von Abtheilung I durch die folgenden drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung charakterisirt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x^0}{dt^2} + \frac{k^2 (1+m) x^0}{r^0{}^3} &= 0 \\ \frac{d^2 y^0}{dt^2} + \frac{k^2 (1+m) y^0}{r^0{}^3} &= 0 \\ \frac{d^2 z^0}{dt^2} + \frac{k^2 (1+m) z^0}{r^0{}^3} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (I)$$

in denen k^2 die Gauss'sche Constante bedeutet, wobei:

$$r^0{}^2 = x^0{}^2 + y^0{}^2 + z^0{}^2$$

ist.

Denkt man sich jetzt als dritten Körper einen störenden Planeten, der sowohl auf die Sonne, wie auf den gestörten Planeten einwirkt, dann sind die Differentialgleichungen der gestörten Bewegung:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)x}{r^3} &= X \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)y}{r^3} &= Y \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)z}{r^3} &= Z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (II)$$

wobei:

$$\begin{aligned} X &= m^1 k^2 \left(\frac{x^1 - x}{\varrho^3} - \frac{x^1}{r^1{}^3} \right) \\ Y &= m^1 k^2 \left(\frac{y^1 - y}{\varrho^3} - \frac{y^1}{r^1{}^3} \right) \\ Z &= m^1 k^2 \left(\frac{z^1 - z}{\varrho^3} - \frac{z^1}{r^1{}^3} \right) \end{aligned}$$

die nach den Coordinatenaxen zerlegten störenden Kräfte bezeichnen, so genommen, dass sie die relative Bewegung des Planeten um die Sonne bestimmen, wenn man sie nur an den gestörten Planeten angebracht denkt, und dabei ihre Richtung in der Art gewählt ist, dass sie die Coordinaten vergrössern. Es bezeichnen also x, y, z die wahren heliocentrischen Coordinaten des gestörten Planeten, x^0, y^0, z^0 seine ungestörten Coordinaten und x^1, y^1, z^1 die heliocentrischen Coordinaten des störenden Planeten. Mithin ist:

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= (x^1 - x)^2 + (y^1 - y)^2 + (z^1 - z)^2 \\ r^1{}^2 &= x^1{}^2 + y^1{}^2 + z^1{}^2. \end{aligned}$$

Durch Subtraction der beiden Gleichungssysteme (I) und (II) ergibt sich unmittelbar:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= X + k^2(1+m) \left\{ \frac{x^0}{r^0{}^3} - \frac{x}{r^3} \right\} \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= Y + k^2(1+m) \left\{ \frac{y^0}{r^0{}^3} - \frac{y}{r^3} \right\} \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= Z + k^2(1+m) \left\{ \frac{z^0}{r^0{}^3} - \frac{z}{r^3} \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (III)$$

Die Masse m des angezogenen Planeten oder Kometen ist dabei in den meisten Anwendungen auf unser Sonnensystem gleich Null.

Mit der Aufstellung der äusserst einfachen Gleichungen (III) ist die Grundlage der Encke'schen Methode gegeben. Will man die störende Einwirkung mehrerer anziehender Körper berücksichtigen, so tritt in denselben neben dem ersten Term noch ein ähnlicher mit $m^{(2)}, x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}$ auf, u. s. w.

Um die Methode anzuwenden, geht man von einem Osculationselementensysteme für eine bestimmte Epoche aus. Dasselbe muss die Beobachtungen in der Nähe einer gewissen Epoche (der Osculationsepoche) möglichst gut darstellen, mindestens über einen Zeitraum von einem bis drei Monaten. Man nimmt dann in der Mitte dieser Zeit eine Osculationsepoche an und setzt voraus, dass die Elemente für den betreffenden Zeitpunkt die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten des gestörten Körpers streng darstellen, oder die wirkliche Bewegung „osculiren“.

Da sich die Störungen gewöhnlich erst nach Monaten fühlbar machen, so hat man in der Wahl der Osculationsepoche einen ziemlichen Spielraum. Nun geben die astronomischen Jahrbücher die Coordinaten der Planeten (nebst mehr oder weniger zuverlässigen Angaben über ihre Massen) für gewisse Intervalle, z. B. von 20 zu 20 Tagen, von einem gewissen Datum ausgehend. Man setzt also die Osculationsepoche für einen dieser Tage fest und wählt als Integrationsintervall 20 oder 40 Tage, um sich die Interpolation der Planetencoordinaten zu ersparen.

Gewöhnlich gilt ein Intervall von 40 Tagen für die Berechnung der Störungen für ausreichend. Im Falle grosser Störungen muss man jedoch mit Intervallen von 20 Tagen oder noch weniger rechnen. Will man die Einwirkung mehrerer Planeten berücksichtigen, so muss man für alle dasselbe Integrationsintervall zu Grunde legen. Hierdurch geht dann aber ein grosser Theil der Kürze, durch welche sich die Encke'sche Methode gegenüber den beiden anderen, im Folgenden zu besprechenden Methoden der speciellen Störungen auszeichnet, verloren. Auch aus anderen Gründen, die wir später kennen lernen werden, ist man mehr und mehr davon abgekommen, die Encke'sche Methode für umfangreichere Arbeiten in unserem Sonnensysteme anzuwenden.

Um so nützlicher erweist sie sich, wenn es sich nur darum handelt, die Bewegung eines Objectes unseres Sonnensystems für einen kürzeren Zeitraum, z. B. während einer einzigen Opposition zu behandeln. Einer besonders häufigen Anwendung erfreut sich die Encke'sche Methode in rechnerischen Untersuchungen über das drei Körperproblem. Hier, wo man noch obendrein die Bedingungen des Problems vereinfachen kann, indem man z. B. die drei Körper in eine Ebene legt, leistet die Encke'sche Methode zur Aufsuchung periodischer Lösungen, Behandlung von Stabilitätsfragen u. s. w. ganz Ausserordentliches. Die rechtwinkligen Coordinaten, welche sie gleichzeitig giebt, erlauben unmittelbar eine graphische Darstellung der Bewegung.

Der Anwendung der Encke'schen Methode geht naturgemäss die Berechnung der Coordinaten x^1 , y^1 und z^1 des störenden Körpers für gewisse Epochen voraus. Wenn es sich um Anwendung auf unser Sonnensystem handelt, pflegt man die rechtwinkligen Coordinaten auf die Ekliptik zu beziehen.

In früherer Zeit wurde die Encke'sche Methode, wie gesagt, öfter angewendet und man hat daher Sorge getragen, dem Bahnrechner soweit als möglich entgegen zu kommen.

So enthält die erste Publication der Astronomischen Gesellschaft die rechtwinkligen Eklipticalcoordinaten aller Planeten ausser Mercur von 1830 bis 1864. Dieselben stützen sich auf ältere Tafeln der Planeten, so z. B. für Jupiter auf Bouvard. Die sechste Publication der Astronomischen Gesellschaft enthält die Coordinaten von Jupiter nach Bouvard von 1770 bis 1830. Von 1770 bis 1843 hat ferner M. Coniel die Jupitercoordinaten nach Leverrier im Bulletin astronomique gegeben. Endlich hat Möller in den Astronomischen Nachrichten die Coordinaten Jupiters von 1843 bis 1878 nach Leverrier berechnet. Für die Gegenwart ist man genöthigt, sich die Coordinaten der störenden Massen selbst zu berechnen. Die Astronomischen Jahrbücher geben jedoch für gewisse Tage im Jahre die heliocentrischen Eklipticalcoordinaten der Planeten: nämlich die Länge l , die Breite b und den Radiusvector r .

Man hat dann ganz einfach:

$$x^1 = r^1 \cos b^1 \cos l^1$$

$$y^1 = r^1 \cos b^1 \sin l^1$$

$$z^1 = r^1 \sin b^1.$$

Diese Angaben beziehen sich auf das mittlere Aequinoctium des Anfanges eines

Jahrzehnts, so dass man im Allgemeinen beim Uebergange aus einem Jahre in das andere das Coordinatensystem nicht zu wechseln braucht.

Man rechnet dann die Bahnelemente des gestörten Körpers auf den Anfang des betreffenden Jahrzehnts um, auf den sich auch die Planetencoordinaten beziehen. Hierauf rechnet man mit den so umgeformten Bahnelementen die rechtwinkligen Ekliptical-coordinaten x^0, y^0, z^0 des Objectes nach den Formeln:

$$\begin{aligned}x^0 &= r^0 a \sin (A + \omega + v^0) \\y^0 &= r^0 b \sin (B + \omega + v^0) \\z^0 &= r^0 c \sin (\omega + v^0),\end{aligned}$$

worin indess die Grössen a, b, c und A, B nicht die eigentlichen Gauss'schen Constanten repräsentiren, sondern durch die Formeln:

$$\begin{aligned}a \sin A &= \cos \delta \\a \cos A &= - \sin \delta \cos i \\b \sin B &= \sin \delta \\b \cos B &= \cos \delta \cos i \\c &= \sin i\end{aligned}$$

gegeben sind.

Die Grössen x^0, y^0 und z^0 berechnet man für dieselben Epochen, für welche die Coordinaten des störenden Körpers gegeben sind.

Nach diesen Vorbereitungen kann man nun daran gehen, aus den Gleichungen (III) die Grössen ξ, η und ζ durch mechanische Quadraturen zu ermitteln. Ueber das diesbezügliche Verfahren schicken wir zunächst einige allgemeine Bemerkungen voraus, um sodann die rechnerische Zurichtung, durch welche Encke die Auflösung der Gleichungen (III) durch eine Tafel wesentlich erleichtert hat, in Encke's Originaldarstellung anzuschliessen.

In den rechten Seiten der Gleichungen (III), die man zu dem genannten Zwecke als bekannt voraussetzen muss, treten ja die wahren Coordinaten x, y und z des gestörten Körpers auf.

Man müsste also schon ξ, η und ζ kennen, um

$$\begin{aligned}x &= x^0 + \xi \\y &= y^0 + \eta \\z &= z^0 + \zeta\end{aligned}$$

berechnen zu können. In den ersten Gliedern der rechten Seite der Gleichungen (III) hat dies weniger zu bedeuten. Diese Glieder sind wegen des Factors m (der Masse des störenden Körpers) immer sehr klein und es würde daher zu ihrer Berechnung schon eine ganz rohe Kenntniss von ξ, η und ζ genügen. Man nennt diese, für Anwendungen auf unser Sonnensystem leichter zu berechnenden Glieder die „directen Glieder“.

Grössere Bedeutung haben die zweiten Glieder auf der rechten Seite der Gleichungen (III), welche als Factor die Sonnenmasse enthalten. Dieselben sind bei den gewöhnlichen Anwendungen weit grösser als die ersten und müssen daher mit genaueren Werthen von ξ, η und ζ berechnet werden. Man nennt diese Glieder die „indirecten Glieder“.

Nehmen wir im Hinblick auf die vorausgehenden Darstellungen der mechanischen Quadratur an, dass sich die mechanische Quadratur bereits im Gange befinde, so ist allgemein:

$$\int \int_{(t)}^{a + i \omega} dt^2 = \omega^2 \left[{}''f(a + i \omega) + \frac{1}{12} f(a + i \omega) - \frac{1}{240} f''(a + i \omega) \dots \right]$$

und in vorliegendem Falle f beziehungsweise gleich:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2}, \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2}, \quad \frac{d^2 \zeta}{dt^2}.$$

Man behält nun als Variable nicht die Zeit (gemessen in mittleren Sonnentagen) bei, sondern nimmt als Zeiteinheit das Intervall, z. B. ω mittlere Sonnentage an, hat also allgemein:

$$t = n \omega + \text{const.}$$

oder:

$$dt = \omega \, dn$$

und somit:

$$\int \int_{(n \omega + \text{const.})}^{a + i \omega} dn^2 = {}''f(a + i \omega) + \frac{1}{12} f(a + i \omega) - \frac{1}{240} f''(a + i \omega) \dots$$

Man berechnet also:

$$\frac{d^2 \xi}{dn^2} = \omega^2 \frac{d^2 \xi}{dt^2}$$

und integrirt diese letztere Grösse.

Zu diesem Zwecke braucht man nur in den Gleichungen (III) $k \omega$ an Stelle von k oder $k^2 \omega^2$ an Stelle von k^2 zu setzen.

Die Grundgleichungen werden dann:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dn^2} &= k^2 \omega^2 m^1 \left\{ \frac{x^1 - x}{\varrho^3} - \frac{x^1}{r^1{}^3} \right\} + k^2 \omega^2 (1 + m) \left\{ \frac{x^0}{r^0{}^3} - \frac{x}{r^3} \right\} \\ \frac{d^2 \eta}{dn^2} &= k^2 \omega^2 m^1 \left\{ \frac{y^1 - y}{\varrho^3} - \frac{y^1}{r^1{}^3} \right\} + k^2 \omega^2 (1 + m) \left\{ \frac{y^0}{r^0{}^3} - \frac{y}{r^3} \right\} \\ \frac{d^2 \zeta}{dn^2} &= k^2 \omega^2 m^1 \left\{ \frac{z^1 - z}{\varrho^3} - \frac{z^1}{r^1{}^3} \right\} + k^2 \omega^2 (1 + m) \left\{ \frac{z^0}{r^0{}^3} - \frac{z}{r^3} \right\} \end{aligned} \right\} \dots \quad (\text{IV})$$

und auf diese Gleichungen, in denen die Zeiteinheit mit dem Intervalle identisch ist, hat man einfach nun die Formel:

$$\int \int_{(n \omega)}^{a + i \omega} dn^2 = {}''f(a + i \omega) + \frac{1}{12} f(a + i \omega) - \frac{1}{240} f''(a + i \omega)$$

anzuwenden, wobei $f(a + i \omega)$ beziehungsweise gleich $\frac{d^2 \xi}{dn^2}$, $\frac{d^2 \eta}{dn^2}$ oder $\frac{d^2 \zeta}{dn^2}$ ist.

Wenn sich die mechanische Quadratur bereits im Gange befindet, so ist über die Anwendung der Gleichungen (IV) nicht viel zu sagen. Man sieht aus denselben, dass man $\xi(a + i \omega)$ angenähert bereits kennen muss, um den strengen Werth von ξ , η und ζ durch die doppelte Summirung zu erhalten. Bei derartigen Rechnungen ist es indess fast immer leicht, die Werthe von ξ , η und ζ mit hinreichender Genauigkeit im Voraus zu schätzen. Zu Anfang einer mechanischen Quadratur sind die Anfangswerthe der ersten und zweiten Summenreihe unbekannt, sowie die Störungen.

Man setzt dann in erster Näherung die Störungen gleich Null und berechnet unter dieser Voraussetzung die Werthe von:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2}, \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 \zeta}{dt^2},$$

etwa zwei Intervalle vor und zwei Intervalle nach der Osculation.

Fällt die Osculationsepoche mit einer der Epochen für die Differentialquotienten (a) zusammen, so bestimmt man die Anfangsconstanten der Summenreihen nach den Formeln:

$${}^{11}f(a) = -\frac{1}{12}f(a) + \frac{1}{240}f''(a) - \frac{31}{60480}f^{iv}(a) \dots$$

$${}^{11}f(a - \frac{1}{2}\omega) = -\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{12}f'(a) - \frac{11}{720}f'''(a) + \frac{191}{60480}f^v(a) \dots$$

Die Quadratur vollzieht sich dann nach der Formel:

$$\int \int f(x) dx^2 = {}^{11}f(a + i\omega) + \frac{1}{12}f(a + i\omega) - \frac{1}{240}f''(a + i\omega) \\ + \frac{31}{60480}f^{iv}(a + i\omega) \dots$$

Fällt hingegen die Osculationsepoche in die Mitte zwischen zwei Epochen $a - \omega$ und a , für welche man die Differentialquotienten berechnet hat, so wendet man die Formeln an:

$${}^{11}f(a) = \frac{1}{24}f(a - \omega) - \frac{17}{5760}[2f''(a - \omega) + f''(a)]$$

$$\frac{367}{967680}[3f^{iv}(a - \omega) + 2f^{iv}(a)] \dots$$

$${}^{11}f(a - \frac{1}{2}\omega) = -\frac{1}{24}f(a - \frac{1}{2}\omega) + \frac{17}{5760}f'''(a - \frac{1}{2}\omega) - \frac{367}{967680}f^v(a - \frac{1}{2}\omega) \dots$$

$$\int \int_{\frac{a-i\omega}{2}}^{a+i\omega} f(n) dn^2 = {}^{11}f(a + i\omega) + \frac{1}{12}f(a + i\omega) - \frac{1}{240}f''(a + i\omega) \dots$$

Sind für die ersten Intervalle verbesserte Werthe von ξ , η und ζ bestimmt, so kann man mit denselben die Differentialquotienten noch einmal berechnen und so noch genauere Werthe für die Störungen ableiten.

Gewöhnlich aber genügt es bei der Berechnung der Differentialquotienten für die ersten Intervalle die Störungen gleich Null zu setzen. Sowie eine gewisse Anzahl Werthe von ξ , η und ζ erhalten werden, bildet man ihre Differenzreihen, um sich vor Fehlern bei Anwendung der mechanischen Quadratur zu sichern. Es ist stets zu empfehlen, sich durch Bildung der Differentialquotienten davon zu überzeugen, dass die Werthe von ξ und $\frac{d\xi}{dt}$ für die Osculationsepoche wirklich gleich Null sind, damit nicht gleich in der Grundlage der mechanischen Quadratur ein Irrthum bestehen bleibt.

Nach diesen allgemein orientirenden Bemerkungen gehen wir dazu über, die Grundgleichungen (III) rechnerisch so umzuformen, dass ihre Integration durch Anwendung einer Tafel erleichtert wird. Wir folgen dabei der Originaldarstellung von Encke; indem wir zunächst die Regeln der mechanischen Quadratur mit Encke in Kürze dahin zusammenfassen, wie sie bei Anwendung auf den vorliegenden Fall des Gleichungssystems (III) oder (IV) gebraucht werden.

Soll $\int_b^a dx \int f(x) dx$ gefunden werden, so bestimmt man für verschiedene Werthe von x , die eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden, die numerischen Werthe von:

$$f(a), f(a + \omega), f(a + 2\omega) \dots f(a + n\omega).$$

Das gewählte Intervall ω darf nicht zu gross sein, um keine allzu mühsame Verbesserung der später vorzunehmenden Summation nöthig zu machen, aber auch nicht zu klein, damit

man nicht zu viele Werthe zu berechnen hat. Die Grenzen b und b^1 müssen innerhalb a und $a + n\omega$ liegen. Doch ist es nicht nöthig, dass sie mit einem der berechneten Werthe zusammenfallen. Da aus den auf einander folgenden Werthen $f(a)$ bis $f(a + n\omega)$ irgend ein Werth durch Interpolation gefunden werden kann, der dem $f(b)$ oder $f(b^1)$ entspricht, und eben dasselbe auch bei allen aus der Reihe $f(a)$ bis $f(a + n\omega)$ abgeleiteten Werthen, sofern sie für eines der Argumente a bis $a + n\omega$ gelten, stattfindet, so wird man immer den Anfangswerth oder Endwerth des Integrals durch Interpolation finden können, wenn man ihn für mehrere der Argumente a bis $a + n\omega$ hat. Indessen wird man auch bei der Auswahl der Werthe a bis $a + n\omega$ es so einrichten können, dass einer oder ein Mittel aus zweien mit den Grenzen übereinkommen. Hier werden wir deshalb annehmen, dass die Anfangsgrenze auf $a + \frac{1}{2}\omega$ trifft, die Endgrenze auf $a + i\omega$ oder $a + \left(i + \frac{1}{2}\right)\omega$.

Für die Integration bedarf man der ersten, zweiten etc. Differenzen der Grössen $f(a)$, $f(a + \omega)$ etc. Werde die n te Differenz durch f_0^n bezeichnet, analog den Differentialquotienten, und werde, um anzugeben, zu welcher Stelle sie gehört, das Mittel der beiden Argumentenwerthe, aus deren Differenzen sie hervorgeht, dem f_0^n hinzugefügt, so dass also:

$$\begin{aligned} f(a + \omega) - f(a) &= f_0^1\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) \\ f_0^1\left(a + \frac{3}{2}\omega\right) - f_0^1\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) &= f_0^2\left(a + \omega\right) \\ f_0^2(a + 2\omega) - f_0^2(a + \omega) &= f_0^3\left(a + \frac{3}{2}\omega\right) \text{ etc.,} \end{aligned}$$

so wird sich das folgende Schema bilden:

Argument	Function	I. Differenz	II. Differenz	III. Differenz
$a \dots\dots\dots$	$f(a)$	$f_0^1\left(a + \frac{1}{2}\omega\right)$	$f_0^2(a)$	$f_0^3\left(a + \frac{1}{2}\omega\right)\dots$
$a + \omega \dots\dots$	$f(a + \omega)$	$f_0^1\left(a + \frac{3}{2}\omega\right)$	$f_0^2(a + \omega)$	$f_0^3\left(a + \frac{3}{2}\omega\right)\dots$
$a + 2\omega \dots\dots$	$f(a + 2\omega)$	$f_0^1\left(a + \frac{5}{2}\omega\right)$	$f_0^2(a + 2\omega)$	$f_0^3\left(a + \frac{5}{2}\omega\right)\dots$
$a + 3\omega \dots\dots$	$f(a + 3\omega)$		$f_0^2(a + 3\omega)$	

Ebenso bedarf man aber auch der summirten Reihen für die Integration. Man bezeichne die erste summirte Reihe analog den Differenzen durch f_0^1 , mit Hinzufügung eines Argumentes in demselben Sinne wie bei den Differenzen, so dass also:

$$\begin{aligned} f(a + \omega) + f_0^1\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) &= f_0^1\left(a + \frac{3}{2}\omega\right) \\ f_0^2(a) + f_0^1\left(a + \frac{1}{2}\omega\right) &= f_0^2(a + \omega) \\ f_0^2(a + \omega) + f_0^1\left(a + \frac{3}{2}\omega\right) &= f_0^2(a + 2\omega), \end{aligned}$$

weil nämlich:

$$f_0^2(a + 2\omega) - f_0^2(a + \omega) = f_0^1\left(a + \frac{3}{2}\omega\right),$$

so wird sich ein zweites Schema bilden:

Argument	Function	I. summirte Reihe	II. summirte Reihe
$a \dots\dots\dots$	$f(a)$	${}^1f_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right)$	${}^{II}f_0(a) \dots$
$a + \omega \dots\dots$	$f(a + \omega)$	${}^1f_0\left(a + \frac{3}{2}\omega\right)$	${}^{II}f_0(a + \omega) \dots$
$a + 2\omega \dots\dots$	$f(a + 2\omega)$	${}^1f_0\left(a + \frac{5}{2}\omega\right)$	${}^{II}f_0(a + 2\omega) \dots$
$a + 3\omega \dots\dots$	$f(a + 3\omega)$		${}^{II}f_0(a + 3\omega) \dots$

Es bedarf dabei jede summirte Reihe eines Anfangswerthes für irgend ein Argument, ähnlich wie das Integral einer Constante bedarf.

Mit Hülfe dieser beiden Schemata lässt sich das einfache und doppelte Integral von $f(x)$ durch mechanische Quadratur folgendermaassen bestimmen:

Es sei die Anfangsgrenze $a + \frac{1}{2}\omega$, die Endgrenze $a + \left(i + \frac{1}{2}\right)\omega$. Man setze in der ersten summirten Reihe:

$$C_1 = -\frac{1}{24} f_0' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) + \frac{17}{5760} f_0''' \left(a + \frac{1}{2} \omega \right)$$

an die Stelle von ${}^1f_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right)$ oder:

$$C_1 = {}^1f_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right),$$

und in der zweiten summirten Reihe den Werth:

$$C_2 = -\frac{1}{24} f_0'(a + \omega) - \frac{17}{5760} [2f_0''(a + \omega) + f_0^{IV}(a)] \dots$$

an die Stelle von ${}^{II}f_0(a)$ oder:

$$C_2 = {}^{II}f_0(a),$$

und bilde damit die Tafel beliebig weit fortgesetzt:

Argument	Function	I. summirte Reihe	II. summirte Reihe
$a \dots\dots\dots$	$f(a)$	$C_1 = {}^1f_0\left(a + \frac{1}{2}\omega\right)$	$C_2 = {}^{II}f_0(a)$
$a + \omega \dots\dots$	$f(a + \omega)$	${}^1f_0\left(a + \frac{3}{2}\omega\right)$	${}^{II}f_0(a + \omega)$
$a + 2\omega \dots\dots$	$f(a + 2\omega)$	${}^1f_0\left(a + \frac{5}{2}\omega\right)$	${}^{II}f_0(a + 2\omega)$
$a + 3\omega \dots\dots$	$f(a + 3\omega)$		${}^{II}f_0(a + 3\omega)$

so wird das erste Integral:

$$\int_{a + \frac{1}{2}\omega}^{a + \left(i + \frac{1}{2}\right)\omega} f(x) dx = \omega \left\{ {}^1f_0 \left[a + \left(i + \frac{1}{2} \right) \omega \right] + \frac{1}{24} f_0' \left[a + \left(i + \frac{1}{2} \right) \omega \right] - \frac{17}{5760} f_0''' \left[a + \left(i + \frac{1}{2} \right) \omega \right] \right\} \dots$$

und das Doppelintegral:

$$\begin{aligned} & \int_{a + \frac{1}{2}\omega}^{a + \left(i + \frac{1}{2}\right)\omega} f(x) dx = \omega^2 \left\{ \frac{1}{2} \{ {}^{\text{II}}f_0(a + i\omega) + {}^{\text{II}}f_0[a + (i + 1)\omega] \} \right. \\ & \quad - \frac{1}{48} \{ f(a + i\omega) + f[a + (i + 1)\omega] \} \\ & \quad \left. + \frac{17}{3840} \{ f_0^{\text{III}}(a + i\omega) + f_0^{\text{III}}[a + (i + 1)\omega] \} \right\} \dots \end{aligned}$$

Bliebe dagegen zwar die Anfangsgrenze, aber änderte sich die Endgrenze in $a + i\omega$, so würde:

$$\begin{aligned} & \int_{a + \frac{1}{2}\omega}^{a + i\omega} f(x) dx = \omega \left\{ \frac{1}{2} \{ {}^{\text{I}}f_0 \left[a + \left(i + \frac{1}{2} \right) \omega \right] + {}^{\text{I}}f_0 \left[a - \left(i - \frac{1}{2} \right) \omega \right] \right\} \\ & \quad - \frac{1}{24} \{ f_0^{\text{I}} \left[a + \left(i + \frac{1}{2} \right) \omega \right] - f_0^{\text{I}} \left[a - \left(i - \frac{1}{2} \right) \omega \right] \} \\ & \quad + \frac{11}{1440} \{ f_0^{\text{III}} \left[a + \left(i + \frac{1}{2} \right) \omega \right] - f_0^{\text{III}} \left[a - \left(i - \frac{1}{2} \right) \omega \right] \} \dots \end{aligned}$$

und das Doppelintegral:

$$\int_{a + \frac{1}{2}\omega}^{a + i\omega} dx \int f(x) dx = \omega^2 \left\{ {}^{\text{II}}f_0(a + i\omega) + \frac{1}{12} f(a + i\omega) - \frac{1}{240} f_0^{\text{III}}(a + i\omega) \right\} \dots$$

Bei der Integration der hier vorkommenden Grössen ist die Zeit das Argument. Wird deshalb das Doppelintegral bis zur Zeit $a + i\omega$ verlangt, so werden für dieselbe Zeit die Functionen ${}^{\text{II}}f_0(a + i\omega)$, $f(a + i\omega)$, $f_0^{\text{III}}(a + i\omega)$ gebildet werden müssen, wobei namentlich:

$$f(a + i\omega) = \frac{d^2 \xi}{dt^2},$$

wenn die erste Differentialgleichung als Beispiel gewählt wird, eine Grösse, welche die Kenntniss von ξ , η , ξ schon verlangt. Indessen wenn keine ausserordentlichen Fälle vorkommen, so werden die Brüche $\frac{1}{12}$ und $-\frac{1}{240}$, mit welchen in Ausdrücke des Integrals $f(a + i\omega)$ und $f_0^{\text{III}}(a + i\omega)$ multiplicirt sind, eine falsche Annahme für diese Werthe nur in geringem Maasse einwirken lassen. Man wird, wenn man bis zu $f[a + (i - 1)\omega]$ die Rechnung strenge durchgeführt hat, aus dem Gange dieser Function bis zur Zeit $a + (i - 1)\omega$, einen nicht ganz unsicheren Schluss auf ihren Werth $f(a + i\omega)$ machen können, und der Factor $\frac{1}{12}$ wird wesentlich beitragen, den Irrthum zu verringern. Noch mehr findet dieses bei $f_0^{\text{III}}(a + i\omega)$ statt. Der Werth aber, von dem hauptsächlich das Doppelintegral abhängt, ${}^{\text{II}}f_0(a + i\omega)$, ist an sich schon durch die früheren Rechnungen bis zur Zeit $a + (i - 1)\omega$ gegeben, weil:

$$\begin{aligned} {}^{\text{II}}f_0(a + i\omega) &= {}^{\text{II}}f_0[a + (i - 1)\omega] + {}^{\text{I}}f_0 \left[a + \left(i - \frac{1}{2} \right) \omega \right] \\ &= {}^{\text{II}}f_0[a + (i - 1)\omega] + {}^{\text{I}}f_0 \left[a + \left(i - \frac{3}{2} \right) \omega \right] + f[a + (i - 1)\omega]. \end{aligned}$$

Hat man also alle Grössen bis zu $f[a + (i - 1)\omega]$ strenge gegeben, so hat man es in seiner Gewalt, für $f(a + i\omega)$ einen so genäherten Schätzwert zu erhalten, dass man mit Sicherheit hoffen darf, wenn man diesen Näherungswert verwendet, um die rechte Seite der Gleichungen numerisch zu berechnen, es werde eine kurze, indirecte

Rechnung zum Ziele führen. Mit dem Näherungswerthe führt man die Integration aus, und mit dem genäherten Integral berechnet man die Correctionen, welche in $\int \int f x dx^2$ vorkommen, um die genaueren Werthe des Integrals zur Berechnung des zweiten Differentialquotienten zu erhalten. Man schreitet auf diese Weise von Intervall zu Intervall vor. Aus $f[a + (i - 1)\omega]$ findet man $f(a + i\omega)$, aus diesem $f[a + (i + 1)\omega]$ u. s. w.

Für den Anfang der Rechnung, d. h. für $f(a)$ und $f(a + \omega)$ nimmt man zuerst $\xi, \eta, \zeta = 0$ und findet daraus $f(a)$ und $f(a + \omega)$ genähert, woraus sich C_1, C_2 und $C_1 + C_2$ ergeben. Die Integrationsformel, auf diese fünf Werthe angewandt, giebt dann die Grössen $f(a)$ und $f(a + \omega)$ strenge, und von diesem Anfange an schreitet dann die Rechnung in ganz gleichmässiger Weise fort.

Die erste Rechnungsform, die hier vorgeschlagen werden kann, wird sich deshalb so aufstellen lassen.

In dem Ausdrücke von X, Y, Z vernachlässigt man einstweilen den Betrag der Störungen, welche bei dem gestörten Planeten x^0 in x verwandeln und da x', y', z' strenge bekannt sind, ebenso auch x^0, y^0, z^0 für jede beliebige Zeit angegeben werden können, so wird man:

$$\begin{aligned} X &= m' k^2 \left(\frac{x' - x^0}{\varrho^0{}^3} - \frac{x'}{r'^3} \right) \\ Y &= m' k^2 \left(\frac{y' - y^0}{\varrho^0{}^3} - \frac{y'}{r'^3} \right) \\ Z &= m' k^2 \left(\frac{z' - z^0}{\varrho^0{}^3} - \frac{z'}{r'^3} \right) \end{aligned}$$

wobei:

$$\varrho^2 = (x' - x^0)^2 + (y' - y^0)^2 + (z' - z^0)^2$$

für alle Zeiten $a, a + \omega, a + 2\omega, \dots, a + n\omega$ berechnen können. Der Fehler, der aus der Substitution von x^0 statt x entsteht, ist in der That bei diesen Kräften ungemein gering, da er von der zweiten Potenz der Massen herrührt.

Für den zweiten Theil der Gleichungen (5):

$$\frac{x^0}{r^0{}^3} - \frac{x}{r^3}, \quad \frac{y^0}{r^0{}^3} - \frac{y}{r^3}, \quad \frac{z^0}{r^0{}^3} - \frac{z}{r^3},$$

kann man, wenn ξ, η, ζ klein sind, das erste Differential der Grössen $\frac{x^0}{r^0{}^3}, \frac{y^0}{r^0{}^3}, \frac{z^0}{r^0{}^3}$ einführen. Es wird:

$$\begin{aligned} \frac{x'}{r^3} - \frac{x^0}{r^0{}^3} &= \frac{\xi}{r^0{}^3} - \frac{3x^0}{r^0{}^4} \delta r^0 \\ \frac{y'}{r^3} - \frac{y^0}{r^0{}^3} &= \frac{\eta}{r^0{}^3} - \frac{3y^0}{r^0{}^4} \delta r^0 \\ \frac{z'}{r^3} - \frac{z^0}{r^0{}^3} &= \frac{\zeta}{r^0{}^3} - \frac{3z^0}{r^0{}^4} \delta r^0, \end{aligned}$$

wenn:

$$\delta r^0 = \frac{x^0}{r^0} \xi + \frac{y^0}{r^0} \eta + \frac{z^0}{r^0} \zeta,$$

und folglich:

$$k^2 (1 + m) \left(\frac{x^0}{r^0{}^3} - \frac{x}{r^3} \right) = \left(3 \frac{x^0}{r^0} \delta r - \xi \right) \frac{k^2 (1 + m)}{r^0{}^3}$$

$$k^2 (1 + m) \left(\frac{y^0}{r^0{}^3} - \frac{y}{r^3} \right) = \left(3 \frac{y^0}{r^0} \delta r - \eta \right) \frac{k^2 (1 + m)}{r^0{}^3}$$

$$k^2 (1 + m) \left(\frac{z^0}{r^0{}^3} - \frac{z}{r^3} \right) = \left(3 \frac{z^0}{r^0} \delta r - \xi \right) \frac{k^2 (1 + m)}{r^0{}^3}.$$

Die Gleichungen werden folglich, sobald man auf dem oben angezeigten Wege einen Näherungswerth für ξ , η , ξ erhalten hat, er möge mit ξ_0 , η_0 , ξ_0 bezeichnet werden, in der folgenden Ordnung in Anwendung kommen. Zuerst berechnet man:

$$\delta r^0 = \frac{x^0}{r^0} \xi_0 + \frac{y^0}{r^0} \eta_0 + \frac{z^0}{r^0} \xi_0,$$

findet damit:

$$\frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = m' k^2 \left(\frac{x' - x^0}{\varrho^0{}^3} - \frac{x'}{r'^3} \right) + \frac{k^2 (1 + m)}{r^0{}^3} \left(3 \frac{x^0}{r^0} \delta r^0 - \xi_0 \right)$$

$$\frac{d^2 \eta_1}{dt^2} = m' k^2 \left(\frac{y' - y^0}{\varrho^0{}^3} - \frac{y'}{r'^3} \right) + \frac{k^2 (1 + m)}{r^0{}^3} \left(3 \frac{y^0}{r^0} \delta r^0 - \eta_0 \right)$$

$$\frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = m' k^2 \left(\frac{z' - z^0}{\varrho^0{}^3} - \frac{z'}{r'^3} \right) + \frac{k^2 (1 + m)}{r^0{}^3} \left(3 \frac{z^0}{r^0} \delta r^0 - \xi_0 \right)$$

und durch Anwendung der Integralformeln auf diese Zahlen ein Integral ξ_1 , η_1 , ξ_1 , welches zuverlässig schon näher der Wahrheit kommt als ξ_0 , η_0 und ξ_0 . Eine Wiederholung derselben Operation wird die genauen Werthe ξ , η , ξ geben, wenn man ξ_1 , η_1 , ξ_1 statt ξ_0 , η_0 , ξ_0 einführt.

Man kann auf diese Weise durch alle Intervalle a bis $a + n\omega$ die Rechnung durchführen. Allein die strengste Genauigkeit wird man dabei nicht erreichen. Denn einmal sind die Grössen X , Y , Z nicht streng richtig, weil ξ , η , ξ bei ihnen vernachlässigt sind. Dann aber wird bei grösseren ξ , η , ξ das erste Glied in der Entwicklung von $\frac{x^0}{r^0{}^3} - \frac{x}{r^3}$, $\frac{y^0}{r^0{}^3} - \frac{y}{r^3}$, $\frac{z^0}{r^0{}^3} - \frac{z}{r^3}$, nicht mehr ausreichen. Wollte man deshalb auch die ganze Rechnung noch einmal durchmachen für alle Intervalle, und mit den jedenfalls sehr genäherten ξ , η , ξ die Werthe für X , Y , Z verbessern, so würde man doch wegen der nicht vollständigen Strenge der Annahme, dass:

$$\frac{x_0}{r^0{}^3} - \frac{x}{r^3} = \left(3 \frac{x^0}{r^0} \delta r - \xi \right) \frac{1}{r^0{}^3}$$

$$\frac{y_0}{r^0{}^3} - \frac{y}{r^3} = \left(3 \frac{y^0}{r^0} \delta r - \eta \right) \frac{1}{r^0{}^3}$$

$$\frac{z_0}{r^0{}^3} - \frac{z}{r^3} = \left(3 \frac{z^0}{r^0} \delta r - \xi \right) \frac{1}{r^0{}^3}$$

die ganz strengen Werthe nicht erreichen.

Den ersten Mangel, dass die Werthe von X , Y , Z wegen der vernachlässigten ξ , η , ξ nicht genau sind, kann man dadurch beseitigen, dass man die Werthe von X , Y , Z nicht auf einmal für alle Intervalle berechnet, sondern bei ihnen ebenso wie bei den Daten für $\frac{d^2 \xi}{dt^2}$, $\frac{d^2 \eta}{dt^2}$, $\frac{d^2 \xi}{dt^2}$ immer von Intervall zu Intervall fortschreitet und jedesmal

in X, Y, Z die ersten genäherten Werthe ξ_0, η_0, ζ_0 einführt. Bei diesen Kräften werden die genäherten Werthe völlig ausreichen, weil der Factor m' in unserem Sonnensysteme immer kleiner als 0,001, bei einer etwas sorgfältigen Berücksichtigung der Mittel, die man hat, gleich zuerst der Wahrheit sich zu nähern, den etwaigen Mangel völlig unmerklich macht. Man fügt folglich den im Voraus berechneten Werthen von x^0, y^0, z^0 jedesmal das zum nächsten Intervalle gehörige ξ_0, η_0, ζ_0 hinzu. Die Rechnung wird dadurch allerdings weniger angenehm, aber man hat auch den Vortheil, eine völlige Strenge zu erreichen.

Der zweite Mangel würde sich beseitigen lassen, wenn man statt der Differentialformel die eigentliche Form:

$$\frac{x^0}{r^{0^3}} = \frac{x}{r^3}, \quad \frac{y^0}{r^{0^3}} = \frac{y}{r^3}, \quad \frac{z^0}{r^{0^3}} = \frac{z}{r^3}$$

beibehielte. Diese Art der Ermittlung der numerischen Werthe würde indessen sowohl ungenau, durch die Differenz zweier nicht sehr verschiedenen Grössen zur Erhaltung eines kleinen Werthes, als auch wegen der nachherigen Einführung der verbesserten Werthe von ξ_0, η_0, ζ_0 zu weitläufig sein. Eine bequeme und nicht sehr ausgedehnte Tafel wird diesen Mangel völlig beseitigen. Schreibt man nämlich:

$$\begin{aligned} k^2 (1 + m) \left(\frac{x^0}{r^{0^3}} - \frac{x}{r^3} \right) &= \frac{k^2 (1 + m)}{r^{0^3}} \left\{ \left(1 - \frac{r^{0^3}}{r^3} \right) x - \xi \right\} \\ k^2 (1 + m) \left(\frac{y^0}{r^{0^3}} - \frac{y}{r^3} \right) &= \frac{k^2 (1 + m)}{r^{0^3}} \left\{ \left(1 - \frac{r^{0^3}}{r^3} \right) y - \eta \right\} \\ k^2 (1 + m) \left(\frac{z^0}{r^{0^3}} - \frac{z}{r^3} \right) &= \frac{k^2 (1 + m)}{r^{0^3}} \left\{ \left(1 - \frac{r^{0^3}}{r^3} \right) z - \xi \right\}, \end{aligned}$$

so lässt sich $1 - \frac{r^{0^3}}{r^3}$ durch eine Tafel streng finden, ohne dass die Einführung besserer Werthe für ξ_0, η_0, ζ_0 eine zu grosse Weitläufigkeit machte. Denn da:

$$r^2 = r^{0^2} + 2x^0\xi + 2y^0\eta + 2z^0\zeta + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

so wird:

$$\frac{r^2}{r^{0^2}} = 1 + 2 \frac{\left(x^0 + \frac{1}{2}\xi \right) \xi + \left(y^0 + \frac{1}{2}\eta \right) \eta + \left(z^0 + \frac{1}{2}\zeta \right) \zeta}{r^{0^2}}.$$

Sei:

$$x^0 + \frac{1}{2}\xi = \frac{r^0 + \frac{1}{2}\xi}{r^{0^2}} \xi + \frac{y^0 + \frac{1}{2}\eta}{r^{0^2}} \eta + \frac{z^0 + \frac{1}{2}\zeta}{r^{0^2}} \zeta = q,$$

so wird:

$$\frac{r^2}{r^{0^2}} = 1 + 2q$$

$$\frac{r^{0^3}}{r^3} = (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}} = 1 - 3q + \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 2} q^2 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} q^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} q^4 \dots$$

Setzt man daher:

$$f = 3 \cdot \left\{ 1 - \frac{5}{2} q + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 3} q^2 - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4} q^3 \dots \right\},$$

so wird:

$$1 - \frac{r^0{}^3}{r^3} = f q$$

und:

$$\begin{aligned} k^2 (1 + m) \left(\frac{x^0}{r^0{}^3} - \frac{x}{r^3} \right) &= \frac{k^2 (1 + m)}{r^0{}^3} \left\{ f q x - \xi \right\} \\ k^2 (1 + m) \left(\frac{y^0}{r^0{}^3} - \frac{y}{r^3} \right) &= \frac{k^2 (1 + m)}{r^0{}^3} \left\{ f q y - \eta \right\} \\ k^2 (1 + m) \left(\frac{z^0}{r^0{}^3} - \frac{z}{r^3} \right) &= \frac{k^2 (1 + m)}{r^0{}^3} \left\{ f q z - \xi \right\}, \end{aligned}$$

auf welche Weise das Glied $f q$ den durch Differentiation erhaltenen Factor $3 \frac{\delta r^0}{r^0}$ streng ersetzt.

Die dazu nöthige Tafel für f mit dem Argumente q ist in der Ausdehnung von $-0,030$ bis $+0,030$ auf sieben Decimalen im Logarithmus berechnet und als Tafel XVII im Anhang aufgenommen. Wahrscheinlich wird diese Ausdehnung für alle Fälle genügen. Denn da q nahe dem Incremente des hyperbolischen Logarithmus von r durch die Störungen gleich ist, so wird dem Werthe von $q = 0,030$, bei dem mittleren Werthe des r für die kleinen Planeten etwa $0,08$ in der Störung des Radius vector entsprechen, die wohl zunächst nicht eintreffen wird. Die Tafel ist übrigens nicht unmittelbar nach der Reihe, sondern nach dem durch die Entwicklung nach einem Kettenbruche erhaltenen Näherungswerthe berechnet:

$$f = 3 \cdot \frac{1 + \frac{q}{2}}{1 + \frac{q}{2} + \frac{35}{12} q^2},$$

bei welchem der Fehler im nächsten Gliede der Reihenentwicklung $3 \times -\frac{35}{720} q^4$ beträgt und hier keinen merklichen Einfluss mehr äussern kann. Die Formel, nach der die f -Tafel gerechnet, ist also folgende:

$$f = 3 \left\{ 1 - \frac{5}{2} q + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 8} q^2 - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4} q^3 + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} q^4 \dots \right\},$$

wobei:

$$q = \frac{x + \frac{1}{2} \xi}{r^0{}^2} \xi + \frac{y + \frac{1}{2} \eta}{r^0{}^2} \eta + \frac{z + \frac{1}{2} \xi}{r^0{}^2} \xi.$$

Stellt man hiernach die strenge Berechnung der Störungen zusammen, so wird sie die folgende sein:

Für die verschiedenen Intervalle $a, a + \omega, a + 2\omega, a + 3\omega, \dots (a + n\omega)$ berechnet man die elliptischen Coordinaten x^0, y^0, z^0, r^0 , sowie die des störenden Planeten x', y', z', r' . Man bildet dann für den nächsten Ort nach dem schon berechneten $x^0 + \xi^0, y^0 + \eta^0, z^0 + \xi^0$, sowie $x^0 + \frac{1}{2} \xi^0, y^0 + \frac{1}{2} \eta^0, z^0 + \frac{1}{2} \xi^0$; und berechnet mit diesen Werthen zuerst:

$$\begin{aligned} X &= m' k^2 \left\{ \frac{x' - x^0 - \xi^0}{r^0{}^3} - \frac{x'}{r'^3} \right\} \\ Y &= m' k^2 \left\{ \frac{y' - y^0 - \eta^0}{r^0{}^3} - \frac{y'}{r'^3} \right\} \\ Z &= m' k^2 \left\{ \frac{z' - z^0 - \xi^0}{r^0{}^3} - \frac{z'}{r'^3} \right\}, \end{aligned}$$

wo:

$$\varrho^0{}^2 = (x' - x^0 - \xi^0)^2 + (y' - y^0 - \eta^0)^2 + (z' - z^0 - \xi^0)^2.$$

Bei diesen Werthen braucht man nur die einfache Zahl in der zweiten summirten Reihe zu nehmen, oder höchstens, wenn man von $a + (i - 1)\omega$ auf $a + i\omega$ übergeht, die Zahl:

$${}''f_0(a + i\omega) + \frac{1}{12}f[a + (i - 1)\omega].$$

Man bedarf nämlich gewöhnlich hier nur bei ξ^0, η^0, ξ^0 der Werthe bis auf fünf Decimalen, und wenn man die Störungen selbst bis zur siebenten Decimale berechnet, so wird bei schicklich gewähltem Intervalle ω die Correction von ${}''f_0(a + i\omega)$ nur auf die sechste und siebente Decimale fallen. Ebenso bildet man aus den unter einander stehenden Zahlen x^0 und ξ^0 , y^0 und η^0 , z^0 und ξ^0 die Werthe $x^0 + \frac{1}{2}\xi^0$, $y^0 + \frac{1}{2}\eta^0$, $z^0 + \frac{1}{2}\xi^0$. Auch diese werden keiner späteren Verbesserungen bedürfen. Man berechnet dann:

$$q = \frac{x^0 + \frac{1}{2}\xi^0}{r^0{}^2} \xi^0 + \frac{y^0 + \frac{1}{2}\eta^0}{r^0{}^2} \eta^0 + \frac{z^0 + \frac{1}{2}\xi^0}{r^0{}^2} \xi^0,$$

wobei man nach dem Gange der Functionen $f(a + n\omega)$ bis zu $n = i - 1$ hin, oder der Grössen $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ für die Multiplicatoren ξ^0, η^0, ξ^0 die möglichst genäherten Werthe zu ermitteln gesucht hat, nimmt aus der Tafel den zugehörigen Werth von f und erhält damit die Werthe:

$$\begin{aligned} \frac{k^2(1+m)}{r^0{}^3} \left\{ f q (x^0 + \xi^0) - \xi^0 \right\} &= \delta \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} \\ \frac{k^2(1+m)}{r^0{}^3} \left\{ f q (y^0 + \eta^0) - \eta^0 \right\} &= \delta \cdot \frac{d^2\eta}{dt^2} \\ \frac{k^2(1+m)}{r^0{}^3} \left\{ f q (z^0 + \xi^0) - \xi^0 \right\} &= \delta \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2}. \end{aligned}$$

Die Summe dieser Grössen mit X, Y, Z giebt die zuverlässig schon sehr genäherten Werthe von $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, oder die Grösse $f(a + i\omega)$. Das vermittelt dieser Grösse erhaltene Doppelintegral:

$${}''f_0(a + i\omega) + \frac{1}{12}f(a + i\omega) - \frac{1}{240}f_0''(a + i\omega)$$

wird schon bei der ersten Wiederholung die der Wahrheit völlig oder so gut wie völlig entsprechenden Werthe ξ, η, ξ geben, mit denen man die Rechnung von q an wiederholt und dann keine merkliche Aenderung mehr finden wird.

Die Anordnung der Rechnung, welche Encke am bequemsten scheint, ist die folgende. Auf zwei neben einander stehenden Seiten werden, nachdem $x^0, y^0, z^0, r^0; x', y', z', r'$ berechnet, in einer verticalen Spalte unter einander geschrieben:

t	I.	II.	t	I.	II.
	$a + i \omega$	$a + i \omega$		$a + i \omega$	$a + i \omega$
	x^0	$\log \frac{\left(x^0 + \frac{1}{2} \xi^0\right)}{r^{0^2}}$		$\log z' - z$	$f q x$
	ξ^0	$\log \frac{y^0 + \frac{1}{2} \eta^0}{r^{0^2}}$		$\log \frac{y' - y}{\cos}$	ξ^0
	y^0	$\log \xi^0$		$\log \left\{ \frac{\cos}{\sin} \right\}$	$f q y$
	η^0	$\log \frac{y^0 + \frac{1}{2} \eta^0}{r^{0^2}}$		$\log q$	η^0
	z^0	$\log \eta^0$		$\log q^3$	ξ^0
	ζ^0	$\log \frac{z^0 + \frac{1}{2} \zeta^0}{r^{0^2}}$		$\log \frac{m^0}{q^3}$	$\log r^{0^3}$
	$\log \left(x^0 + \frac{1}{2} \xi^0\right)$	$\log \xi^0$		$\log m^0 \frac{x' - x}{q^3}$	$\log \frac{k^2 (1 + m)}{r^{0^3}} \omega^2$
	$\log \left(y^0 + \frac{1}{2} \eta^0\right)$	$x^0 + \frac{1}{2} \xi^0$		$\log m^0 \frac{y' - y}{q^3}$	$\log (f q x - \xi^0)$
	$\log \left(z^0 + \frac{1}{2} \zeta^0\right)$	$y^0 + \frac{1}{2} \eta^0$		$\log m^0 \frac{z' - z}{q^3}$	$\log (f q y - \eta^0)$
	$\log r^{0^2}$	$\log \frac{z^0 + \frac{1}{2} \zeta^0}{r^{0^2}}$		$B \text{ oder } C$	$\log (f q z - \zeta^0)$
x	x'	$\log \frac{y^0 + \frac{1}{2} \eta^0}{r^{0^2}}$		$\log m^0 \frac{y' - y}{q^3}$	X^0
	$x^0 + \xi^0$	$\log \frac{z^0 + \frac{1}{2} \zeta^0}{r^{0^2}}$		$\log m^0 \frac{z' - z}{q^3}$	$d \cdot \frac{d^2 \xi}{dt^2}$
		$\log \frac{z^0 + \frac{1}{2} \zeta^0}{r^{0^2}}$		$B \text{ oder } C$	Y^0
y	y'	$\log \frac{z^0 + \frac{1}{2} \zeta^0}{r^{0^2}}$		$\log m^0 \frac{z' - z}{q^3}$	$d \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}$
	$y^0 + \eta^0$	$\log \frac{z^0 + \frac{1}{2} \zeta^0}{r^{0^2}}$			Z^0
z	z'	q		$\log m^0 \frac{z' - z}{q^3}$	$d \cdot \frac{d^2 \xi}{dt^2}$
	$z^0 + \zeta^0$	$\log q$		$\log m^0 \frac{z' - z}{q^3}$	$\omega^2 \frac{d^2 \xi}{dt^2}$
		$\log f$		$B \text{ oder } C$	$\omega^2 \frac{d^2 \eta}{dt^2}$
	$\log (x' - x)$	$\log (f q)$			$\omega^2 \frac{d^2 \zeta}{dt^2}$
	$\log (y' - y)$	$\log x^0 + \xi^0$		$\log X^0$	$\omega^2 \frac{d^2 \eta}{dt^2}$
	$\log \left\{ \frac{\cos}{\sin} \right\}$	$\log y^0 + \eta^0$		$\log Y^0$	$\omega^2 \frac{d^2 \zeta}{dt^2}$
		$\log z^0 + \zeta^0$		$\log Z^0$	

In diesen Columnen bedarf nur der Erklärung 1) die Bezeichnung $\log \left\{ \frac{\cos}{\sin} \right\}$. Sie soll ausdrücken, dass, wenn man z. B. zur Erhaltung von $V[(x' - x)^2 + (y' - y)^2]$ den Quotienten $\frac{x' - x}{y' - y} = \lg \gamma$ setzt, an die Stelle von $\log \left\{ \frac{\cos}{\sin} \right\}$ entweder der $\log \cos$ oder der $\log \sin$ gesetzt werden soll, immer der \log der Function, welche den grössten Werth hat und daher sich am leichtesten interpoliren lässt, um entweder durch den Bruch $\frac{x' - x}{\sin \gamma}$ oder $\frac{y' - y}{\cos \gamma}$ den Werth der Quadratwurzel zu erhalten; 2) die eingeführte Grösse m^0 . Wenn man die Störungen in Einheiten der siebenten Decimale haben will, so wird $\log m^0 = 3,4711629 + \log m' + 2 \log \omega$, wo der erste Logarithmus k^2 in Einheiten der siebenten Decimale ist, und bei ω als Einheit der Tag zu nehmen ist. Es wird vortheilhaft sein, da das Doppelintegral $\int dx \int f(x) dx$ eine Multiplication mit ω^2 verlangt, sogleich $\omega^2 \cdot \frac{d^2 \xi}{dt^2}$ anzusetzen, um nachher nicht nöthig zu haben, ${}^{11}f_0(a + i\omega)$ mit ω^2 zu multipliciren; 3) die Bezeichnung B oder C . Es bezieht sich diese auf die

Gauss'schen Logarithmen, da je nachdem die Summe der Zahlen, deren Logarithmen man vor sich hat, zu nehmen ist, oder die Differenz, eine von diesen Grössen mit dem grösseren Logarithmus zu verbinden ist; 4) die Einführung des Factors ω^2 in $\log \frac{k^2 (1+m)}{r^0{}^3} \omega^2$ erklärt sich aus dem unter 2) bemerkten Umstande, dass $\omega^2 \frac{d^2 \xi}{dt^2}$ am vortheilhaftesten angesetzt wird.

Wenn die erste Rechnung durchgeführt ist, so verbessert man die unter II. aufgeführte Columnne vermittelst der jetzt genauer zu erhaltenden Werthe von ξ_0, η_0, ζ_0 , bei

welchen indessen $\frac{x^0 + \frac{1}{2} \xi^0}{r^0{}^2}, \frac{y^0 + \frac{1}{2} \eta^0}{r^0{}^2}, \frac{z^0 + \frac{1}{2} \zeta^0}{r^0{}^2}$ mit seinem früheren Werthe beibehalten werden kann. Die Werthe in der Columnne I. bedürfen sämtlich keiner weiteren Verbesserung.

Ein kleines numerisches Beispiel werde hier hinzugefügt, da die Kürze der Operation, verbunden mit vollständiger Schärfe, doch nur bei einer solchen Anwendung hervortritt.

Für die Elemente der Vesta:

$$\begin{array}{l} L^0 = 120^\circ 6' 28'',2 \\ M^0 = 229^\circ 51' 50'',8 \\ \pi^0 = 250^\circ 14' 37'',4 \\ \Omega^0 = 102^\circ 47' 14'',1 \\ i^0 = 7^\circ 8' 26'',5 \\ \varphi^0 = 5^\circ 5' 48'',8 \\ u^0 = 977'',64529 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1853. \text{ Sept. } 11. \text{ } 0^h \text{ M. Par. Zt.} \\ \\ \\ \text{M. Acq. } 1810 \\ \\ \\ \end{array}$$

und das Intervall $\omega = 42$ Tagen waren die Störungswerthe bis 1855. Oct. 28. so gefunden worden:

	$f(a+i\omega)$	$f_0(a+i\omega)$	$f_0(a+i\omega)$	$f(a+i\omega)$	$f_0(a+i\omega)$	$f_0(a+i\omega)$	$f(a+i\omega)$	$f_0(a+i\omega)$	$f_0(a+i\omega)$
1855	$42^2 \frac{d^2 \xi}{dt^2}$	$\left(42 \frac{d \xi}{dt}\right)$	(ξ)	$42^2 \frac{d^2 \eta}{dt^2}$	$\left(42 \frac{d \eta}{dt}\right)$	(η)	$42^2 \frac{d^2 \zeta}{dt^2}$	$\left(42 \frac{d \zeta}{dt}\right)$	(ζ)
Aug. 5. . .	— 697,0	— 724,6	+ 7305,3	— 346,5	+ 3447,1	+ 19 447,4	+ 148,13	+ 143,77	— 1211,47
Sept. 16. . .	— 516,8	— 1241,4	+ 6580,7	— 832,4	+ 2614,7	+ 22 894,5	+ 146,22	+ 289,99	— 1067,70
Oct. 28. . .	— 185,5	— 1426,9	+ 5339,3	— 1190,0	+ 1424,7	+ 25 509,2	+ 112,81	+ 402,80	— 777,71
Dec. 9. . .			+ 3912,4			+ 26 933,9			— 374,91

Die Grössen ξ, η, ζ waren in Einheiten der siebenten Decimale gegeben und die Ueberschriften $\left(42 \frac{d \xi}{dt}\right)$ und (ξ) etc. bedeuten nicht die strengen Werthe, sondern die Summen von $42^2 \frac{d^2 \xi}{dt^2}$ etc.

Es wurde nun zunächst für Dec. 9. berechnet:

$$x^0 = + 2,35158 \quad y^0 = - 0,31156 \quad z^0 = - 0,27865$$

und für Jupiter:

$$x' = + 4,59100 \quad y' = - 1,95917 \quad z' = - 0,09740.$$

Als vorläufige Werthe wurden angenommen, in Einheiten der fünften Decimale, zufolge der obigen Werthe von ξ, η, ζ für Dec. 9.:

$$\xi^0 = + 39 \quad \eta^0 = + 268 \quad \xi^0 = - 4.$$

Hiermit und mit der Jupitermasse $\frac{1}{1053,924}$, während die Masse der Vesta = Null angenommen ward, ergab sich:

$$\log m^0 = 3,694853,$$

und es fand sich in Einheiten der siebenten Decimale als das Resultat der Columnen I:

$$X^0 = + 329,3 \quad Y^0 = - 299,4 \quad Z^0 = + 45,34$$

Werthe, die keiner Verbesserung bedürfen.

Für die Columnen II wurden die Werthe von ξ^0 , η^0 , ξ^0 in Einheiten der siebenten Decimale angenommen:

$$\xi^0 = + 3937,0 \quad \eta^0 = + 26820,0 \quad \xi^0 = - 370,0,$$

woraus sich fand:

$$\frac{x^0 + \frac{1}{2} \xi^0}{r^{0^2}} \xi^0 = + 1623,1 \quad \frac{y^0 + \frac{1}{2} \eta^0}{r^{0^2}} \eta^0 = - 1458,5 \quad \frac{z^0 + \frac{1}{2} \xi^0}{r^{0^2}} \xi^0 = + 18,1.$$

Es war folglich $q = + 182,7$ und $\log f = 0,47710$, womit man erhalten wird:

$$\delta \frac{d^2 \xi}{dt^2} = - 101,1 \quad \delta \frac{d^2 \eta}{dt^2} = - 1034,0 \quad \delta \frac{d^2 \xi}{dt^2} = + 8,33.$$

Endlich erhält man durch Vereinigung dieser Werthe mit X^0 , Y^0 , Z^0 :

$$42^2 \frac{d^2 \xi}{dt^2} = + 228,2 \quad 42^2 \frac{d^2 \eta}{dt^2} = - 1333,4 \quad 42^2 \frac{d^2 \xi}{dt^2} = + 53,67.$$

Leitet man hieraus ξ , η , ξ selbst ab, so wird:

$$\begin{aligned} \xi &= + 3912,4 + \frac{228,2}{12} = + 3931,4 \\ \eta &= + 26933,9 - \frac{1333,4}{12} = + 26822,8 \\ \xi &= - 374,91 + \frac{53,67}{12} = - 370,44, \end{aligned}$$

und wenn man mit diesen Werthen die Rechnung wiederholt, wobei man nur in den Einheiten und Decimalen eine kleine Aenderung findet, so wird:

$$\frac{x^0 + \frac{1}{2} \xi}{r^{0^2}} \xi = + 1620,8 \quad \frac{y^0 + \frac{1}{2} \eta}{r^{0^2}} \eta = - 1458,3 \quad \frac{z^0 + \frac{1}{2} \xi}{r^{0^2}} \xi = + 18,1,$$

folglich:

$$\begin{aligned} q &= + 180,6 & \log f &= 0,47710 \\ \delta \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= - 101,8 & \delta \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= - 1034,0 & \delta \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= + 8,41, \end{aligned}$$

und also durch Vereinigung mit X^0 , Y^0 , Z^0 :

$$42^2 \frac{d^2 \xi}{dt^2} = + 227,5 \quad 42^2 \frac{d^2 \eta}{dt^2} = - 1333,4 \quad 42^2 \frac{d^2 \xi}{dt^2} = + 53,75.$$

Werthe, die jetzt die vollkommen strengen sind, und sich nur in den Decimalen von den ersten aus den beiläufigen Werthen von ξ , η , ξ berechneten unterscheiden. Setzt man mit denselben die Störungstafeln fort:

355. Oct. 28.	— 185,5	— 1126,9	+ 5339,3	— 1190,0	+ 1121,7	+ 25 509,2	+ 112,81	+ 102,80	— 777,71
Dec. 9.	+ 227,5	— 1199,4	+ 3912,4	— 1333,4	+ 91,3	+ 26 933,9	+ 53,75	+ 456,55	— 374,91
356. Jan. 20.			+ 2713,0			+ 27 025,2			+ 81,64

so wird jetzt dieselbe Rechnung für Jan. 20. zu wiederholen sein. Die geringere von f'' abhängige Correction, deren Factor $-\frac{1}{240}$ ist, wird man in den bei Weitem meisten Fällen gar nicht zu berücksichtigen haben, wenn das Intervall klein genug gewählt worden ist. Wenigstens aber wird der Einfluss derselben in den Werthen von ξ , η , ζ so klein sein, dass man bei der Berechnung der $\omega^2 \frac{d^2 \xi}{dt^2}$, $\omega^2 \frac{d^2 \eta}{dt^2}$, $\omega^2 \frac{d^2 \zeta}{dt^2}$ darauf nicht Rücksicht zu nehmen nöthig hat. —

Bei derartigen Rechnungen entnimmt man gewöhnlich ξ , η , ζ der mechanischen Quadratur extrapolatorisch, und berechnet so:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2}, \frac{d^2 \eta}{dt^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 \zeta}{dt^2}.$$

Es ist dies um so leichter, als durch die mechanische Quadratur schon immer der doppelt summirte Werth für das nächste Intervall bekannt ist; man braucht also nur noch $\frac{1}{12} f(a + i\omega) - \frac{1}{240} f''(a + i\omega)$ zu schätzen, was wohl fast immer mit genügender Genauigkeit geschehen kann. Andererseits ist es immer anzurathen (wie das auch in dem noch folgenden ausführlichen Beispiele geschehen ist), die Werthe von ξ , η und ζ direct durch Differenzreihen zu prüfen, schon um sich vor Fehlern in der doppelten Summation zu sichern. Sind aber diese Differenzreihen gegeben, so ist es keineswegs schwierig, den für ξ , η und ζ zu erwartenden Werth mit völlig hinreichender Sicherheit vorauszusehen. Nähert sich der gestörte Körper sehr dem störenden, so ist man häufig gezwungen, das Intervall zu verengern (zu halbiren), oder dasselbe später wieder zu verdoppeln, wenn die Entfernung eine grössere wird.

Meistens gestaltet sich diese Aufgabe einfach in Folge der Kleinheit des Gliedes $-\frac{1}{240} f''(a + i\omega)$. In schwierigeren Fällen aber kann man sich der von Herrn Professor Dr. H. Seeliger¹⁾ gegebenen Formeln zur Neubestimmung der Integrationsconstanten bedienen. Bei dieser Gelegenheit wie bei Osculationen ist es immer dringend anzurathen, die beiden Quadraturen neben einander zu führen und sich so von der Richtigkeit der Anfangsconstanten zu überzeugen. —

Wir wollen jetzt noch die vollständige rechnerische Durchführung einer mechanischen Quadratur für den Fall folgender Anwendung der Enecke'schen Methode geben: dass die Bewegung eines Planeten von der Masse Null, der sich zu einer gewissen Zeit in derselben Ebene wie zwei Körper von der Masse Eins (der Sonnenmasse) befindet, untersucht werden soll.

Die Störungen wollen wir dabei mit δx , δy , δz bezeichnen, da die bisher für dieselben angewandte Bezeichnung ξ , η , ζ im Folgenden anderweitig verwendet wird.

¹⁾ H. Seeliger, Untersuchungen über die Bewegungsverhältnisse in dem dreifachen Sternsysteme ζ cancri. Denkschriften der Wiener Akademie 1881, Bd. XLIV, S. 35.

Der eine Körper von der Masse Eins (ein in das Sonnensystem eindringender Stern) beschreibt dann um die Sonne eine Hyperbel mit dem Perihelabstande:

$$q^1 = [0,100\,343\,3] \text{ Erdbahnradien.}$$

Die Excentricität e^1 wählen wir gleich:

$$143,6684 [2,157\,361\,3].$$

Hieraus folgt:

$$(-a^1) = [7,946\,015\,5] \quad p^1 = [2,260\,717\,0].$$

Als Nullpunkt der Zeit setzen wir den Periheldurchgang des Sternes fest.

Die $+x$ -Axe gehe durch sein Perihel, die $+y$ -Axe senkrecht dazu (und y wachsend im Sinne der Bewegung des Sternes).

Die Zeiten sind in mittleren Sonnentagen gezählt.

Demnach sind z. B. für die Zeiten -20^d und $+20^d$ die Werthe von x^1 beide gleich. Hingegen sind für diese Zeiten die y^1 gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen. Allgemein ist:

$$x^1 = r^1 \cos v^1, \quad y^1 = r^1 \sin v^1,$$

wo $v^1 \begin{cases} \text{vor} \\ \text{nach} \end{cases}$ dem Periheldurchgange $\begin{cases} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{cases}$.

Die Berechnung dieser Grössen geschah nach den für Hyperbelbahnen mit starken Excentricitäten gegebenen Vorschriften (siehe siebente Vorlesung).

Für den Planeten wurde angenommen, dass er im Augenblicke -45^d (Osculations-epoche) eine Kreisbahn mit dem Radius:

$$r^0 = 1,255\,261\,0 [0,098\,734\,0],$$

und zwar in demselben Sinne wie der Stern um die Sonne beschreiben soll. Seine mittlere Bewegung ist daher in diesem Augenblicke:

$$n^0 = 42' \, 2'',932.$$

Die Anfangslage des Planeten soll eine derartige sein, dass er (wenn keine Störungen stattfänden) sich zur Zeit des Periheldurchganges des Sternes auf dessen Apsidenlinie zwischen ihm und der Sonne befinden würde, so dass zur Zeit $t = 0$ die drei Körper in einer geraden Linie ständen.

Die ungestörten Coordinaten des Planeten berechnen sich daher nach den Formeln

$$\begin{aligned} x^0 &= r^0 \cos M^0 \\ y^0 &= r^0 \sin M^0, \end{aligned}$$

wobei $M_0 = nt$ ist.

Also ist auch y_0 vor dem Periheldurchgange des Sternes negativ.

Es wurden nun von der Osculationsepoche -45^d ab, die Störungen der rechtwinkligen Coordinaten des Planeten: δx und δy berechnet. Seine wahren Coördinaten sind demnach:

$$x = x^0 + \delta x, \quad y = y^0 + \delta y.$$

In Folge der starken Annäherung des Planeten an den Stern mussten die Intervalle immer mehr und mehr verengert werden. Schliesslich zwischen $-6^d,5$ und $-3^d,0$ wurde mit einem Intervalle von $\frac{1}{4}$ Tag gerechnet.

Wir setzen die Coordinaten des störenden Körpers x^1 und y^1 als gegeben voraus und beginnen sofort mit der Bildung der Differentialquotienten.

Die Störungen sind wie immer in Einheiten der siebenten Decimale ausgedrückt. Wir geben hier ein Bruchstück der Rechnung (Zeiteinheit $\frac{1}{4}d$) wieder:

t	— 4,25	— 4,0	— 3,75	— 3,50	— 3,25	— 3,0
M	— 2° 58' 42",461	— 2° 48' 11",728	— 2° 37' 40",995	— 2° 27' 10",262	— 2° 16' 39",529	— 2° 6' 8",796
$\cos M$	9,999 413	9,999 480	9,999 543	9,999 602	9,999 657	9,999 707
$\sin M$	8,715 674 _n	8,689 367 _n	8,661 360 _n	8,631 416 _n	8,599 249 _n	8,564 504 _n
$\log x^0$	0,098 147	0,098 214	0,098 277	0,098 336	0,098 391	0,098 441
$\log y^0$	8,814 408 _n	8,788 101 _n	8,760 094 _n	8,730 150 _n	8,697 983 _n	8,663 238 _n
$\frac{1}{2} \delta x$	— 749	— 788	— 829	— 873	— 921	— 971
x^0	+ 1,253 566	+ 1,253 759	+ 1,253 940	+ 1,254 111	+ 1,254 271	+ 1,254 414
δx	— 1 497	— 1 575	— 1 658	— 1 746	— 1 841	— 1 942
$\frac{1}{2} \delta y$	— 875	— 936	— 1 005	— 1 083	— 1 171	— 1 272
y^0	— 0,065 224	— 0,061 390	— 0,057 556	— 0,053 722	— 0,049 887	— 0,046 051
δy	— 1 749	— 1 872	— 2 009	— 2 166	— 2 342	— 2 543
x^1	+ 1,257 031	+ 1,257 321	+ 1,257 606	+ 1,257 876	+ 1,258 134	+ 1,258 379
x	+ 1,252 069	+ 1,252 184	+ 1,252 282	+ 1,252 365	+ 1,252 430	+ 1,252 472
y^1	— 1,107 150	— 1,042 087	— 0,977 016	— 0,911 936	— 0,846 847	— 0,781 748
y	— 0,066 973	— 0,063 262	— 0,059 565	— 0,055 888	— 0,052 229	— 0,048 594
$x^0 + \frac{1}{2} \delta x$	+ 1,252 82	+ 1,252 97	+ 1,253 11	+ 1,253 13	+ 1,253 35	+ 1,253 44
$y^0 + \frac{1}{2} \delta y$	— 0,066 10	— 0,062 33	— 0,058 56	— 0,054 81	— 0,051 06	— 0,047 32
$\log (x^0 + \frac{1}{2} \delta x)$	0,097 89	0,097 94	0,097 99	0,099 04	0,098 07	0,098 10
$\log \delta x$	7,175 22 _n	7,197 28 _n	7,219 58 _n	7,242 04 _n	7,265 05 _n	7,288 25 _n
$\log (y^0 + \frac{1}{2} \delta y)$	8,820 20 _n	8,794 70 _n	8,767 60 _n	8,738 86 _n	8,708 08 _n	8,675 04 _n
$\log \delta y$	7,242 79 _n	7,272 31 _n	7,302 98 _n	7,335 66 _n	7,369 59 _n	7,405 35 _n
$\log 1/r^2 \delta x (x^0 + \frac{1}{2} \delta x)$	7,075 64 _n	7,097 75 _n	7,120 10 _n	7,143 61 _n	7,165 65 _n	7,188 88 _n
$\log 1/r^2 \delta y (y^0 + \frac{1}{2} \delta y)$	5,865 52	5,869 54	5,873 11	5,877 05	5,880 20	5,882 92
numerus	— 0,001 190	0,001 252	— 0,001 318 6	— 0,001 391 9	— 0,001 464 4	— 0,001 544 9
numerus	+ 0,000 073	+ 0,000 074	+ 0,000 074 7	+ 0,000 075 3	+ 0,000 075 9	+ 0,000 076 4
Summe = q	— 0,001 117	0,001 178	— 0,001 243 9	— 0,001 316 6	— 0,001 388 5	— 0,001 468 5
$\log q$	7,048 05	7,071 15 _n	7,094 79 _n	7,119 46 _n	7,142 55 _n	7,166 88 _n
$\log f$	0,478 34	0,478 40	0,478 47	0,478 55	0,478 63	0,478 72
$\log x$	0,097 62	0,097 66	0,097 70	0,098 73	0,097 75	0,097 77
$\log f q / r^0$	7,230 19 _n	7,253 35 _n	7,277 06 _n	7,301 81 _n	7,321 98 _n	7,349 40 _n
$\log y$	8,825 90 _n	8,801 14 _n	8,774 99 _n	8,747 32 _n	8,717 91 _n	8,686 59 _n
$\log f q x / r^3$	7,327 81 _n	7,351 01 _n	7,374 76 _n	7,400 54 _n	7,422 73 _n	7,447 17 _n
$\log f q y / r^3$	6,056 09	6,054 49	6,052 05	6,049 13	6,042 89	6,035 99
$\log \delta x / r^3$	6,879 02 _n	6 901 08 _n	6,923 38 _n	6,945 84 _n	6,968 85 _n	6,992 05 _n
$\log \delta y / r^3$	6,946 59 _n	6,976 11 _n	7,006 78 _n	7,039 46 _n	7,073 39 _n	7,109 15 _n
$x^1 \left(\begin{array}{l} + f q x / r^3 \\ - \delta x / r^3 \end{array} \right)$	— 0,002 127	— 0,002 244	— 0,002 370	— 0,002 515 0	— 0,002 646 9	— 0,002 800
$y^1 \left(\begin{array}{l} + f q y / r^3 \\ - \delta y / r^3 \end{array} \right)$	+ 0,000 757	+ 0,000 796	+ 0,000 838	+ 0,000 882 8	+ 0,000 930 8	+ 0,000 982
$x^1 \left(\begin{array}{l} + f q y / r^3 \\ - \delta y / r^3 \end{array} \right)$	+ 0,000 114	+ 0,000 113	+ 0,000 113	+ 0,000 112 0	+ 0,000 110 4	+ 0,000 109
$y^1 \left(\begin{array}{l} + f q x / r^3 \\ - \delta x / r^3 \end{array} \right)$	+ 0,000 884	+ 0,000 946	+ 0,001 016	+ 0,001 095 1	+ 0,001 184 1	+ 0,001 286
$x^1 - x$	+ 0,004 962	+ 0,005 140	+ 0,005 324	+ 0,005 511	+ 0,005 704	+ 0,005 907
$y^1 - y$	— 1,040 177	— 0,978 825	— 0,917 451	— 0,856 048	— 0,794 618	— 0,733 154

$\log(x^1 - x)$	7,695 657	7,710 963	7,726 238	7,741 230	7,756 180	7,771 367
$\cos L$	9,999 995	9,999 994	9,999 993	9,999 991	9,999 989	9,999 986
\sin	0,051 336	9,972 133	9,887 770	9,797 521	9,700 507	9,595 627
q^3	0,017 107 _n	9,990 705 _n	9,962 583 _n	9,932 498 _n	9,900 158 _n	9,865 195 _n
$\log(y^1 - y)$						
$\log L$	2,321 450 _n	2,279 742 _n	2,236 35 _n	2,191 268 _n	2,143 978 _n	2,093 828 _n
q	0,017 112	9,990 711	9,962 590	9,932 507	9,900 169	9,865 209
$\log(x^1 - x)/q^3$. . .	7,644 321	7,738 830	7,838 468	7,943 709	8,055 673	8,175 740
$\log(y^1 - y)/q^3$. . .	9,965 771 _n	0,018 572 _n	0,074 813 _n	0,134 977 _n	0,199 651 _n	0,269 568 _n
$x^{(2)} \begin{cases} -x^1/r^1 & \dots\dots\dots -0,267\ 446 \\ + (x^1 - x)/q^3 & \dots\dots\dots +0,004\ 409 \end{cases}$		$\begin{cases} -0,288\ 708 \\ +0,005\ 481 \end{cases}$	$\begin{cases} -0,311\ 377 \\ +0,006\ 894 \end{cases}$	$\begin{cases} -0,335\ 401 \\ +0,008\ 784 \end{cases}$	$\begin{cases} -0,360\ 679 \\ +0,011\ 368 \end{cases}$	$\begin{cases} -0,387\ 047 \\ +0,014\ 979 \end{cases}$
$y^{(2)} \begin{cases} -y^1/r^1 & \dots\dots\dots +0,235\ 557 \\ + (y^1 - y)/q^3 & \dots\dots\dots -0,924\ 210 \end{cases}$		$\begin{cases} +0,239\ 285 \\ -1,043\ 690 \end{cases}$	$\begin{cases} +0,241\ 904 \\ -1,187\ 992 \end{cases}$	$\begin{cases} +0,243\ 159 \\ -1,364\ 510 \end{cases}$	$\begin{cases} +0,242\ 772 \\ -1,583\ 621 \end{cases}$	$\begin{cases} +0,240\ 447 \\ -1,860\ 235 \end{cases}$
x^1	-0,001 370	-0,001 448	-0,001 532	-0,001 632	-0,001 716	-0,001 818
x^2	-0,263 037	-0,283 227	-0,304 483	-0,326 617	-0,349 311	-0,372 068
y^1	+0,000 998	+0,001 059	+0,001 129	+0,001 207	+0,001 295	+0,001 395
y^2	-0,688 653	-0,804 405	-0,946 088	-1,121 351	-1,340 849	-1,619 788
Σx	-0,264 407	-0,284 675	-0,306 015	-0,328 249	-0,351 027	-0,373 886
$\log \Sigma x$	9,422 273 _n	9,454 350 _n	9,485 743 _n	9,516 204 _n	9,545 340 _n	9,572 739 _n
$\log(kw)^2 \Sigma x$	1,689 316 _n	1,721 393 _n	1,752 786 _n	1,783 247 _n	1,812 383 _n	1,839 782 _n
Σy	-0,687 655	-0,803 346	-0,944 959	-1,120 144	-1,342 144	-1,618 393
$\log \Sigma y$	9,837 371 _n	9,904 903 _n	9,975 413 _n	0,049 274 _n	0,127 799 _n	0,209 084 _n
$\log(kw)^2 \Sigma y$	2,104 414 _n	2,171 946 _n	2,242 456 _n	2,316 317 _n	2,394 832 _n	2,476 127 _n
$d^2 \delta x/dn^2$	-48,90	-52,65	-56,60	-60,71	-64,92	-69,15
$d^2 \delta y/dn^2$	-127,18	-148,58	-174,77	-207,17	-248,22	-299,31

(Hier folgen nebenstehende Tabellen.)

Bei — 3^a steht der Planet dem Sterne schon bedeutend näher als der Sonne. Es ist daher vortheilhafter, von da ab denselben als Centralkörper und die Sonne als störenden Körper zu betrachten. Die rechtwinkligen Coordinaten des Planeten, bezogen auf den zweiten Hauptkörper und gerechnet in derselben Richtung wie x und y seien ξ und η .

Dann ist:

$$\begin{aligned} x &= x^1 + \xi \\ y &= y^1 + \eta. \end{aligned}$$

Die Formeln zum Uebergange auf den Stern stimmen im Wesentlichen mit den sonst bekannten überein.

Man ermittelt $x^0, y^0, \delta x, \delta y, x^1, y^1$ und rechnet:

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= - \frac{\sin v^1 k \sqrt{2}^1)}{\sqrt{p^1}} \\ \frac{dy^1}{dt} &= \frac{k \sqrt{2}^1 e^1}{\sqrt{p^1}} + \cos v^1 \cdot \frac{k \sqrt{2}}{\sqrt{p^1}} \end{aligned}$$

¹⁾ In diesen Formeln tritt $\sqrt{2}$ auf, weil sowohl der Stern als die Sonne die Masse 1 haben; $\sqrt{2}$ ist also die Wurzel aus der Summe der beiden Massen.

und:

$$\frac{dx^0}{dt} = -y^0 n, \quad \frac{dy^0}{dt} = +x^0 n,$$

wo die mittlere tägliche Bewegung des Planeten in Linearmaass $n = \pm \frac{k}{\frac{2}{3} r^0}$ ist, je nach-

dem der Planet gegen die Sonne recht- oder rückläufig ist.

Die Differentialquotienten $\frac{dx^1}{dt}$ und $\frac{dy^1}{dt}$ kann man mit Hilfe des Flächensatzes controliren:

$$x^1 \frac{dy^1}{dt} - y^1 \frac{dx^1}{dt} = k \sqrt{1+m^1} \sqrt{p^1} = k \sqrt{2} \sqrt{p^1}.$$

Die Grössen $\frac{d\delta x}{dt}$ und $\frac{d\delta y}{dt}$ erhält man durch die mechanische Quadratur. Man rechnet nun:

$$\begin{aligned} x &= x^0 + \delta x; & \frac{dx}{dt} &= \frac{dx^0}{dt} + \frac{d\delta x}{dt} \\ y &= y^0 + \delta y; & \frac{dy}{dt} &= \frac{dy^0}{dt} + \frac{d\delta y}{dt} \\ \xi &= x - x^1; & \frac{d\xi}{dt} &= \frac{dx}{dt} - \frac{dx^1}{dt} \\ \eta &= y - y^1; & \frac{d\eta}{dt} &= \frac{dy}{dt} - \frac{dy^1}{dt}. \end{aligned}$$

Für die weitere Rechnung bilden ξ , η , $\frac{d\xi}{dt}$ und $\frac{d\eta}{dt}$ das Fundament.

Die Länge des Planeten in seiner Bahn um den zweiten Hauptkörper, u (gerechnet von der ξ -Axe), und sein Radius vector ϱ bestimmen sich nach den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \xi &= \varrho \cos u \\ \eta &= \varrho \sin u. \end{aligned}$$

Die übrigen Grössen bezeichnen wir wie gewöhnlich, nur sei noch erwähnt, dass ω (die Perihellänge) ebenfalls von der ξ -Axe aus gerechnet wird. Ferner gilt im Folgenden das $\begin{Bmatrix} \text{obere} \\ \text{untere} \end{Bmatrix}$ Vorzeichen, je nachdem der Planet um den zweiten Hauptkörper $\begin{Bmatrix} \text{rechtläufig} \\ \text{rückläufig} \end{Bmatrix}$ ist.

Man findet jetzt:

$$\begin{aligned} \frac{d\varrho}{dt} &= \frac{1}{\varrho} \left(\xi \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{d\eta}{dt} \right) \\ k \sqrt{p} &= \pm \left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} \right). \end{aligned}$$

Die Grössen e , v , ω und $-a$ bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$e \sin v = \frac{\sqrt{p}}{k} \left(\frac{d\varrho}{dt} \right)$$

$$e \cos v = \frac{p}{r} - 1$$

$$\omega = u \mp v$$

$$(-a) = \frac{p}{e^2} - 1.$$

Es wird hier sogleich eine Hyperbel vorausgesetzt, entsprechend unserem Beispiele. Für die bis jetzt gefundenen Grössen ergeben sich folgende Controlen:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{q} - \frac{1}{k^2} \left[\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 \right] \quad \dots \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \mp \sin u \cdot \frac{k}{\sqrt{p}} \mp \frac{ek}{\sqrt{p}} \sin \omega \\ \frac{d\eta}{dt} &= \pm \frac{k}{\sqrt{p}} \cos u \pm \frac{ek}{\sqrt{p}} \cos \omega \\ \xi &= q \cos u \\ \eta &= q \sin u \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2)$$

Weiter wurde F aus:

$$\frac{e}{\cos F} = 1 + \frac{q}{(-a)}$$

berechnet. Als Controle für F konnte die Formel:

$$\sqrt{\frac{e+1}{e-1}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} v}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} F}$$

dienen, welche auch, da e nahe gleich 1 ist, mit Vortheil zur Bestimmung von e verwendet werden könnte.

Mittelst:

$$\frac{\operatorname{Mod.} k}{(-a)^{\frac{3}{2}}} t = (e \operatorname{Mod.}) \operatorname{tg} F - \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} F \right)$$

ergab sich dann die seit dem Periheldurchgange verflossene Zeit t und schliesslich die Zeit des Periheldurchganges selbst.

Zur Controle rechnet man dann umgekehrt:

$$\operatorname{tg} F = \frac{1}{e \operatorname{Mod.}} \left[\frac{\operatorname{Mod.} k}{(-a)^{\frac{3}{2}}} t + \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{1}{2} F \right) \right]$$

und schliesslich:

$$q = (-a) \left(\frac{e}{\cos F} - 1 \right),$$

wodurch F endgültig geprüft wird.

Beiläufig geben wir hier einige bei dieser Rechnung mehrfach verwendete Constanten:

$$\operatorname{Mod.} = [9,637\,784\,3]$$

$$\operatorname{Mod.} k = [7,873\,365\,7]$$

$$k = [8,235\,581\,4]$$

$$k'' = [3,550\,006\,6].$$

Wählt man als Osculationsepoche -4^d , so gestaltet sich die Rechnung wie folgt:

x^0	$ + 1,253\,758\,8$	y^0	$ - 0,061\,390\,5$
δx	$ - 1\,575\,0$	δy	$ - 1\,872\,5$
x	$ + 1,252\,183\,8$	y	$ - 0,063\,263\,0$
x^1	$ + 1,257\,323\,7$	y^1	$ - 1,042\,087\,3$
ξ	$ - 0,005\,139\,9$	η	$ + 0,978\,824\,3$

$\frac{dx^0}{dt}$	+ 0,000 750 899	$\frac{dy^0}{dt}$	+ 0,015 335 375
$\frac{d\delta x}{dt}$	— 320 171	$\frac{d\delta y}{dt}$	— 520 428
$\frac{dx}{dt}$	+ 0,000 430 728	$\frac{dy}{dt}$	+ 0,014 814 947
$\frac{dx^1}{dt}$	+ 0,001 149 863	$\frac{dy^1}{dt}$	+ 0,260 267 779
$\frac{d\xi}{dt}$	— 0,000 719 135	$\frac{d\eta}{dt}$	— 0,245 452 832

Die Bewegung des Planeten um den zweiten Hauptkörper ist demnach rechtläufig; d. h. sie erfolgt in demselben Sinne, wie die des zweiten Hauptkörpers um die Sonne.

Mittelst dieser Werthe von ξ , η , $\frac{d\xi}{dt}$ und $\frac{d\eta}{dt}$ wurden nun siebenstellig die Bahnelemente des Planeten bezüglich des Sternes berechnet:

$\log \xi$	7,710 954 7 _n	$\log \xi \frac{d\xi}{dt}$	4,567 765 1
$\sin u'$	9,999 994 0	$L . G$	0,000 006 7
$\cos u'$	9,990 704 7	$\log \eta \frac{d\eta}{dt}$	9,380 672 7 _n
$\log \eta$	9,990 704 7	$\log \left(\xi \frac{d\xi}{dt} + \eta \frac{d\eta}{dt} \right)$	9,380 666 0 _n
$tg u'$	2,279 750 0 _n	$\log q$	9,990 710 7
u'	90° 18' 3'',107	$\log d q / dt$	9,389 955 3 _n
$\log q$	9,990 710 7	$\log \sqrt{p/k}$	0,822 312 3
$\log \xi$	7,710 954 7 _n	$\log p \cdot q$	8,125 076 7
$\log d \eta / dt$	9,389 968 0 _n	$\log \left(\frac{p}{q} - 1 \right)$	9,994 168 6 _n
$\log \eta$	9,990 704 7	$\log e \sin v$	0,212 267 6 _n
$\log d \xi / dt$	6,856 810 4 _n	$\sin v$	9,932 231 7
$\log \xi \frac{d\eta}{dt}$	7,100 922 7	$\cos v$	9,994 168 6 _n
$\log \eta \frac{d\xi}{dt}$	6,847 515 1 _n	$\log e \cos v$	9,994 168 6 _n
$\xi \frac{d\eta}{dt}$	+ 0,001 261 602 9	$tg v$	0,218 099 0
$-\eta \frac{d\xi}{dt}$	+ 0,000 703 906 7	v	— 121° 10' 56'',807
$k \sqrt{p}$	+ 0,001 965 509 6	$\log e$	0,280 035 9
$\log k \sqrt{p}$	7,293 475 1	$\log e^2$	0,560 071 8
$\log k$	8,235 581 4	$L . G$	0,139 888 1
$\log \sqrt{p}$	9,057 893 7	$\log (e^2 - 1)$	0,420 183 7
$\log p$	8,115 787 4	$\log p$	8,115 787 4
$\log \xi$	7,710 954 7 _n	$\log a$	7,695 603 7 _n
$\log d \xi / dt$	6,856 810 4 _n		
$\log \eta$	9,990 704 7		
$\log d \eta / dt$	9,389 968 0		

Controle für a .

$\log (d\xi/dt)^2$	3,713 620 8
$L. G$	0,000 003 7
$\log (d\eta/dt)^2$	8,779 936 0
$\log \Sigma$	8,779 939 7
$\log k^2$	6,471 162 8
$\log \Sigma/k^2$	2,308 776 9
$L. G$	0,004 380 4
$\log 2/q$	0,310 319 3
$\log 1/a$	2,304 396 5 _n
$\log a$	7,695 603 6 _n
u'	90° 18' 3'',107
v'	— 121° 10' 56'',807
w'	211° 28' 59'',914
$\log \left(\frac{Q}{-a} \right)$	2,295 107 1
$L. G$	0,002 195 8
$\log \left(\frac{Q}{-a} + 1 \right)$	2,297 302 9
$\log e$	0,280 035 9
$\log \cos F$	7,982 733 0
F	— 89° 26' 57'',721
$tg F^1)$	2,017 246 9
$1/2 F$	44° 43' 28'',861
$1/2 v$	60° 35' 28'',404
$tg 1/2 F$	9,995 862 2
$tg 1/2 v$	0,248 972 8
$n = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}$	9,746 853 4
$n^2 = \frac{e-1}{e+1}$	9,493 706 8
$\log (1 + n^2)$	0,117 827 4
$\log (1 - n^2)$	9,837 791 4
$\log e = \log \frac{1+n^2}{1-n^2}$	0,280 036 0
$\log e$	0,280 035 9
$\log \text{Mod.}$	9,637 784 3
$\log e \text{ Mod.}$	9,917 820 2
$\log tg F$	2,017 246 9

$\log e \text{ Mod. } tg F$	1,935 067 1
numerus	86,112 680
$\log tg (45 + 1/2 F)$	2,318 287
Differenz	83,794 393
$\log (\text{Diff.})$	1,923 214 9
$\text{Mod. } k$	1,329 960 3
$(-a)^{3/2}$	
$\log t$	0,593 254 6
t	— 3 ^d ,919 716
Perihel	— 0 ^d ,080 284

Gesamtcontrole.

Epoche	— 4 ^d ,000 000
Perihel	— 0 ^d ,080 284
t	— 3 ^d ,919 716
$\log t^1)$	1,593 254 6
$\text{Mod. } k$	1,329 960 3
$(-a)^{3/2}$	
$\log \frac{\text{Mod. } k t}{(-a)^{3/2}}$	1,923 214 9
numerus	83,794 385
$\log tg (45 + 1/2 F)^3)$	2,318 287
Σ	86,112 672
$\log \Sigma$	1,935 067 1
$\log \frac{1}{e \text{ Mod.}}$	0,082 179 8
$tg F$	2,017 246 9
F	89° 26' 57'',727
$\log \cos F$	7,982 733 0
$\log e$	0,280 035 9
$\log e / \cos F$	2,297 302 9
$L. G$	0,002 195 7
$\log \left(\frac{e}{\cos F} - 1 \right)$	2,295 107 2
$\log (-a)$	7,695 603 6
$\log Q$	9,990 710 8

¹⁾ In den folgenden Zeilen kommen nur die absoluten Werthe in Betracht, weil vor und nach dem Perihel alles symmetrisch ist.

²⁾ Controle.

³⁾ Wir setzen in diesem Gliede F als bekannt voraus und sehen dann, ob wir aus $tg F$ wieder dasselbe F finden.

$\frac{1}{2} F$	44° 43' 28'',863	$-\sin u$	9,717 878 6
$tg \frac{1}{2} F$	9,995 826 2	ek/\sqrt{p}	9,457 723 6
$\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}$	0,253 146 6	$+ \cos u$	9,930 843 3 _n
$tg \frac{1}{2} v$	0,248 972 8	$\log \left(-\frac{k \sin u}{\sqrt{p}} \right)$	9,177 681 7 _n
$\frac{1}{2} v$	60° 35' 28'',394	$\log \left(-\frac{ek \sin u}{\sqrt{p}} \right)$	9,175 602 2
v	— 121° 10' 56'',788		
w	+ 211° 28' 59'',914		
u	90° 18' 3'',126	$\log \left(\frac{k \cos u}{\sqrt{p}} \right)$	6,897 939 5 _n
$\log \cos u$	7,720 251 8 _n	$\log \left(\frac{ek \cos u}{\sqrt{p}} \right)$	9,388 566 9 _n
$\log q$	9,990 710 8		
$\log \sin u$	9,999 994 0		
$\log \xi$	7,710 962 6 _n	$-\frac{k \sin u}{\sqrt{p}}$	— 0,150 550 31
$\log \eta$	9,990 704 8	$-\frac{ek \sin u}{\sqrt{p}}$	+ 0,149 831 17
ξ	— 0,005 140 0	$\Sigma = d\xi/dt$	— 0,000 719 14
η	+ 0,978 824 4		
$\log k$	8,235 581 4	$\frac{k \cos u}{\sqrt{p}}$	— 0,000 790 57
$\log \sqrt{p}$	9,057 893 7	$\frac{ek \cos u}{\sqrt{p}}$	— 0,244 662 20
$\log k/\sqrt{p}$	9,177 687 7		
$\log e$	0,280 035 9	$\Sigma = d\eta/dt$	— 0,245 452 77
$\log ek/\sqrt{p}$	9,457 723 6		
$-\sin u$	9,999 994 0 _n		
k/\sqrt{p}	9,177 687 7		
$+ \cos u$	7,720 251 8 _n		

Man hat demnach:

$$\begin{aligned}
 \log p &= 8,115 787 4 \\
 \log e &= 0,280 035 9 \\
 \log (-a) &= 7,695 603 6 \\
 \omega &= 211^\circ 28' 59'',914 \\
 \log \left(\frac{1}{e \text{ Mod.}} \right) &= 0,082 179 8 \\
 \log \frac{\text{Mod. } k}{(-a)^{\frac{3}{2}}} &= 1,329 960 3.
 \end{aligned}$$

Zeit des Periheldurchganges: — 0^d,080 284

$$\log \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} = 0,253 146 6.$$

Die Geschwindigkeitscomponenten berechnen sich nach den Formeln:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\xi}{dt} &= -\sin u [9,177 687 7] + 0,149 831 17 \\
 \frac{d\eta}{dt} &= +\cos u [9,177 687 7] - 0,244 662 20.
 \end{aligned}$$

Dieses Elementensystem ergibt, wie wir sahen, für die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten bei — 4^d die Werthe:

$$\begin{aligned}\xi &= - 0,005\,140\,0 & \eta &= + 0,978\,824\,4 \\ \frac{d\xi}{dt} &= - 0,000\,719\,14 & \frac{d\eta}{dt} &= - 0,245\,452\,77,\end{aligned}$$

welche mit den obigen Ausgangswerthen sehr gut übereinstimmen.

Um diese Osculation nochmals zu prüfen, rechnen wir die beiden mechanischen Quadraturen, welche die Störungen für die Bahn um die Sonne und um den zweiten Hauptkörper geben, für einige Epochen gleichzeitig.

Obige Quadratur lief bis $-3^d,0$. Daher lassen wir die Quadratur, welche die Bewegung um den zweiten Hauptkörper giebt, schon bei $-4^d,5$ beginnen, und bezeichnen analog dem früheren mit ξ^0 und η^0 die ungestörten Coordinaten des Planeten bezüglich des zweiten Hauptkörpers. Ferner mit $\delta\xi$ und $\delta\eta$ die Störungen, und mit ξ und η die wahren Werthe dieser Coordinaten. Dann ist:

$$\xi = \xi^0 + \delta\xi, \quad \eta = \eta^0 + \delta\eta.$$

Die Bewegungsgleichungen sind:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\delta\xi}{dt^2} &= k^2 \left(\frac{\xi^0}{\varrho^3} - \frac{\xi}{\varrho^3} \right) + k^2 \left\{ -\frac{x}{r^3} + \frac{x^1}{r^3} \right\} \\ \frac{d^2\delta\eta}{dt^2} &= k^2 \left(\frac{\eta^0}{\varrho^3} - \frac{\eta}{\varrho^3} \right) + k^2 \left\{ -\frac{y}{r^3} + \frac{y^1}{r^3} \right\}.\end{aligned}$$

Dieser Quadratur entnehmen wir hier $\delta\xi$ und $\delta\eta$ für einige Epochen und vergleichen die Werthe von x und y , welche sich ergeben, wenn man die Sonne um den zweiten Hauptkörper als Centralkörper betrachtet.

Centralkörper: Sonne.

Epoche	— 4,5	— 3,75	— 3,0
x^0	+ 1,253 359 9	+ 1 253 940 8	+ 1,254 415 9
δx	— 1 424 9	— 1 657 7	— 9,941 5
x	+ 1,251 935 0	+ 1,252 283 1	+ 1,252 474 4
y^0	— 0,069 057 0	— 0,057 556 4	— 0,046 050 9
δy	— 1 639 1	— 2 010 4	— 2 543 3
y	— 0,070 696 1	— 0,059 566 8	— 0,048 594 2

Centralkörper: Zweiter Hauptkörper.

ξ^0	— 0,004 780 3	— 0,005 319 7	— 0,005 857 9
$\delta\xi$	— 133	— 31	— 467
ξ	— 0,004 793 6	— 0,005 322 8	— 0,005 904 6
x^1	+ 1,256 728 6	+ 1,257 606 1	+ 1,258 378 8
x	+ 1,251 935 0	+ 1,252 283 3	+ 1,252 474 2
η^0	+ 1,101 515 0	+ 0,917 451 1	+ 0,733 185 1
$\delta\eta$	— 72	— 19	— 314
η	+ 1,101 507 8	+ 0,917 449 2	+ 0,733 153 7
y^1	— 1,172 203 8	— 0,977 016 4	— 0,781 748 0
y	— 0,070 696 0	— 0,059 567 2	— 0,048 594 3

Wie man sieht, ist die Uebereinstimmung der zwei auf verschiedenem Wege gefundenen Werthe von x und y so gut, als man dies nur bei siebenstelliger Rechnung erwarten kann.

Die hier angewandte Controle scheint uns die einzige wirklich durchgreifende, wenn auch nicht absolut sichere bei Berechnung von Osculationselementen oder Intervallwechseln zu sein. —

Die Berechnung der speciellen Störungen bildet eine der schwierigsten Aufgaben der rechnenden Astronomie. So ist auch bei Anwendung der Encke'schen Methode ganz besonders auf die Richtigkeit der angewandten Formeln und Constanten zu achten, denn der Rechner hat im Allgemeinen nur eine einzige indirecte Controle zur Verfügung, nämlich diejenige durch die Differenzreihen. Wachsen die Störungen zu stark an, so rechnet man ein Osculationselementensystem, und fährt dann fort, bezüglich desselben von Neuem die Coordinatenstörungen zu berechnen.

Man berechnet also für eine gewisse Epoche: ξ, η und ζ , sowie $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}$ und $\frac{d\zeta}{dt}$, und kann nun noch:

$$\frac{dx^0}{dt}, \frac{dy^0}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{dz^0}{dt}$$

(der Genauigkeit halber analytisch) berechnen und dann mittelst:

$$\begin{aligned} x &= x^0 + \xi, & y &= y^0 + \eta, & z &= z^0 + \zeta \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{dx^0}{dt} + \frac{d\xi}{dt}, & \frac{dy}{dt} &= \frac{dy^0}{dt} + \frac{d\eta}{dt}, & \frac{dz}{dt} &= \frac{dz^0}{dt} + \frac{d\zeta}{dt} \end{aligned}$$

ein Osculationselementensystem bezüglich des Centralkörpers ableiten.

Oppolzer hat gesucht, die Genauigkeit der diesbezüglichen Formeln dadurch zu erhöhen, dass er die Differenzen der neuen und der alten Bahnelemente als Functionen von $\xi, \eta, \zeta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}$ und $\frac{d\zeta}{dt}$ darstellt. Da jedoch für unser Sonnensystem die Encke'sche Methode wie gesagt nur für kurze Intervalle angewendet wird (wobei man also nicht gezwungen ist, ein Osculationselementensystem zu rechnen), so glauben wir diese Formeln hier übergehen zu können.

Die Hauptnachtheile der Encke'schen Methode bei Anwendung auf unser Sonnensystem bestehen in Folgendem:

1. Wenn man mehrere störende Körper berücksichtigen will, ist man gezwungen, für alle dasselbe Integrationsintervall anzuwenden. In Folge dessen müsste man eventuell die Coordinaten eines der störenden Körper für engere Intervalle interpoliren, als sie in den astronomischen Jahrbüchern gegeben sind.
2. Die Ersparniss an Arbeit bei Berechnung der Differentialquotienten geht wieder verloren, wenn man gezwungen ist, ein Osculationselementensystem zu berechnen.
3. Die doppelten Summirungen bedingen für grosse Zeiträume eine bedeutende Unsicherheit in den rechtwinkligen Coordinaten.
4. Die Encke'sche Methode ist nicht geeignet, die Massen der grossen Planeten zu bestimmen, besonders wenn man gezwungen war, in der Mitte der Rechnung eine Osculation einzuschalten.
5. Die astronomischen Ephemeriden sind jetzt vorwiegend mit Rücksicht auf die Anwendung der anderen Methoden der speciellen Störungen construiert.

Je weniger aber die Encke'sche Methode auf unser Sonnensystem angewendet wird, um so wichtiger ist sie für rechnerische Untersuchungen über das Dreikörperproblem.

Die rechtwinkligen Coordinaten, die sie unmittelbar giebt, eignen sich vorzüglich zur graphischen Darstellung der Bahncurven. Auch lässt sich in solchen Fällen oft durch geeignete Wahl des Coordinatensystemes und der Zeiteinheit viel gewinnen. —

Während die Encke'sche Methode, wenn man die Störungen nur für einen beschränkten Zeitraum, etwa für die Erscheinung eines Kometen oder für einen Planeten zur Zeit einer Opposition zu berechnen hat, unleugbar den Vorzug verdient, weil sie die wenigsten Rechnungen erfordert, behauptet die Methode der Variation der Constanten, die von Lagrange zur Ermittlung der analytischen Störungen aufgestellt, dann von diesem auch zur Berechnung der speciellen Störungen vorgeschlagen worden ist, im Allgemeinen den Vorrang in allen den Fällen, wo die Störungen für einen längeren Zeitraum zu berechnen sind. Die Hansen'sche Methode dürfte hauptsächlich dann angewendet werden, wenn es sich darum handelt, bei Wiederkehr eines periodischen Kometen schnell eine Aufsuchungsephemeride zu erhalten, denn ihre rechnerische Anwendung ist verhältnissmässig kurz und man ist bei ihr weniger der Gefahr ausgesetzt, durch Berechnung von Osculationselementen aufgehalten zu werden. Die Methode der Variation der Constanten, in numerischer Hinsicht wie in der Analyse diejenige, welche die besten Resultate sichert, ist rechnerisch freilich die mühevollste. Wir gehen jetzt zu ihrer Darstellung über.

Achtundneunzigste Vorlesung.

II. Lagrange's Methode der Variation der Constanten zur Ermittlung der speciellen Störungen (nach Encke).

Wenngleich sich nicht in Abrede stellen lässt, dass durch die Beschränkung auf eine bestimmte Bahn und noch mehr auf einen nicht allzu grossen Zeitraum, der die Methode der speciellen Störungen unterworfen ist, die Uebersicht über die Bewegung der Körper im Allgemeinen nicht erreicht oder wenigstens erschwert wird, so hat doch auch wiederum die Genauigkeit, welche eben diese Beschränkung den numerischen Bestimmungen zu geben erlaubt, ihren allgemeinen sowohl als auch ihren besonderen Nutzen. Es ist auf diesem Wege vorzugsweise möglich, die Grösse der wirkenden Kräfte mit einer Schärfe anzugeben, welche bei der bisherigen allgemeineren Untersuchung nicht erreicht worden. Die sogenannten höheren Potenzen der Masse, oder die genaue Bestimmung der Stärke der Anziehung, sofern sie von dem jedesmaligen wirklichen Stande des anziehenden und angezogenen Körpers abhängt (nicht von einem nur näherungsweise bekannten), werden so gut wie vollständig berücksichtigt werden können, und da wir aus der Vergleichung einer strengen Theorie mit der Beobachtung überhaupt erst die Kräfte finden können, so werden die Massenbestimmungen sich genauer ergeben als auf dem anderen Wege. Ebenso wird es sich schärfer herausstellen, wenn vielleicht noch aussergewöhnliche Einwirkungen ausser diesen störenden Kräften allein berücksichtigt werden müssten. Endlich ist auch die Beschränkung auf eine gewisse Zeit, die Integration innerhalb bestimmter Grenzen statt des allgemeinen Integrals, nicht so zu verstehen, als erlaube die Weitläufigkeit der Rechnung nicht diese

Grenzen so weit auszudehnen, dass es wenigstens für jetzt noch nicht möglich sein sollte, die ganze Zeit zu umfassen, aus welcher wir Beobachtungen von einiger Genauigkeit besitzen. So wenig freilich auch da, wo die bisherigen Methoden eine Anwendung erlauben, die allgemeine rein theoretische Bestimmung, welche für alle Zeiten den gestörten Ort eines Planeten ergibt, nachgesetzt werden darf der speciellen Berechnung für eine beschränkte Zeit, so möchte doch in dem jetzigen Zustande der Analysis die Grenze schwer zu bestimmen sein, bis zu welcher eine solche specielle Berechnung ganz unstatthaft wäre. Die Möglichkeit, in allen Fällen, selbst in den verwickeltsten, welche unser Sonnensystem darbietet, durch Berechnung der speciellen Störungen das Ziel erreichen zu können, vergütet in gewissem Sinne die Beschränkung in Hinsicht auf die Zeit, der diese Methode unterworfen ist, sowie auf der anderen Seite die Allgemeinheit und Wichtigkeit der Resultate, welche die allgemeine Methode gewährt, und wodurch sie in die Constitution unseres Sonnensystems so tiefe Blicke hat thun lassen, den Mangel ersetzt, der sich darin fühlbar macht, dass so viele Wandelsterne sich vermöge der Natur ihrer Bahnen und des jetzigen Standes unserer Kenntnisse ihr entziehen. Es ist gewiss sehr zu wünschen, dass wir einmal dahin gelangen mögen, der speciellen Berechnung ganz entbehren zu können, allein so lange dies nicht der Fall ist, darf man diese wichtige Form der Untersuchung des wahren Laufes der Himmelskörper nicht allein auf Kometen beschränken, da unser Sonnensystem so manche Theile zeigt, in welchen die specielle Berechnung sowohl schon Aufklärung verschafft hat, als noch künftig zu geben verspricht.

Die Berechnung der speciellen Störungen wird am sichersten erhalten durch die Anwendung des in der Mechanik so wichtigen Principes der Variation der Constanten auf die Bewegung der Planeten. Man erreicht dadurch den grossen Vortheil, die doppelten Integrale zu vermeiden und nur durch einfache Integration das Ziel zu erreichen. Zuvörderst müssen deshalb die Gleichungen abgeleitet werden, welche zeigen, wie der Betrag der Störungen ausgedrückt wird durch eine Veränderlichkeit der Elemente, die ohne sie ganz constant wären; oder welche den wahren von den Störungen afficirten Ort jedesmal finden lassen vermittelst eines Systems von Elementen, was strenge genommen nur für einen einzigen Zeitpunkt gilt und mit der Zeit veränderlich ist. Sind diese Gleichungen so weit entwickelt, dass man sie nur noch zu integriren hat, so wird die Anwendung der mechanischen Quadratur jedesmal für eine bestimmte Zeit das zu ihr gehörige System von Elementen finden lassen.

Nimmt man zuerst den einfachen Fall, dass ein materieller Punkt ohne Masse sich um einen festen anderen Punkt, in welchem die anziehende Kraft $\dots k^2 \dots$ ihren Sitz hat, bewegt und legt bei der anziehenden Kraft das Newton'sche Gesetz zu Grunde; setzt man weiter den Anfangspunkt der Coordinaten in den festen Punkt und zerlegt die in der Entfernung r stattfindende Anziehung $\frac{k^2}{r^2}$ in ihre drei, den Coordinatenachsen parallelen Componenten, indem man dabei die Richtung der Kraft, welche die Coordinaten verkleinert, die positive nennt, so hat man die drei Gleichungen ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k^2 x}{r^3} &= 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k^2 y}{r^3} &= 0 \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k^2 z}{r^3} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

¹⁾ Vergl. Abtheilung I, Vorlesung 2.

Bei der Bestimmung der Grösse einer Kraft und ihrer Beziehung auf eine Einheit, muss nothwendig eine Zeiteinheit und eine Raumeinheit angenommen werden. Jene ist für unser Sonnensystem der mittlere Tag, diese die halbe grosse Axe der Erdbahn. In Bezug auf beide ist:

$$\begin{aligned} \text{brigg. log } k &= 8,235\,581\,4 & k &= 0,017\,202\,1 \dots \\ \text{brigg. log } k^2 &= 6,471\,162\,9 & k^2 &= 0,000\,295\,9 \dots \end{aligned}$$

Zahlen, welche ausdrücken, dass, wenn die Sonne auf einen ruhenden materiellen Punkt, dessen Entfernung von der Sonne = 1 angenommen wird, während eines mittleren Tages fortwährend einwirkte und dabei immer mit derselben Kraft (so dass also die relative Entfernung sich nicht änderte), sie am Ende des mittleren Tages dem Punkte eine Geschwindigkeit ertheilt haben würde, welche ihn, wenn er jetzt sich ganz allein selbst überlassen bliebe, in der Zeiteinheit, dem mittleren Tage, um die Länge k^2 , gemessen nach der Längeneinheit, fortreiben würde.

Diesen drei Differentialgleichungen wird Genüge gethan durch folgende Gleichungen¹⁾ für den Werth der Coordinaten, welche, da sie sechs Constanten enthalten, das vollständige Integral derselben sind.

Wenn:

$$\begin{aligned} u &= \frac{k}{a^2} \\ p &= a(1 - e^2) \\ at + \varepsilon &= E - e \sin E \\ \lg \frac{1}{2} v &= \lg \frac{1}{2} E \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 + e} \\ \frac{1}{1 - e} \end{array} \right. \\ r &= \frac{p}{1 + e \cos v}, \end{aligned}$$

so wird:

$$\left. \begin{aligned} x &= r [\cos(v + \omega) \cos \oslash - \sin(v + \omega) \sin \oslash \cos i] \\ y &= r [\cos(v + \omega) \sin \oslash + \sin(v + \omega) \cos \oslash \cos i] \\ z &= r \sin(v + \omega) \sin i. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Die sechs Constanten²⁾ sind hier $a, \varepsilon, e, \omega, \oslash, i$, von denen die anderen Grössen μ, p, E, v, r entweder reine Functionen, bloss der Bequemlichkeit der Bezeichnung wegen eingeführt sind, oder in Verbindung mit t gebildet werden.

Der astronomischen Bedeutung nach sind diese Werthe gemäss Abtheilung I:

- a . . . halbe grosse Axe der Bahn des bewegten Punktes;
- ε . . . Epoche der mittleren Anomalie für $t = 0$;
- e . . . Excentricität der Ellipse;
- ω . . . Winkel zwischen dem Perihel und aufsteigenden Knoten gezählt in der Ebene der Bahn;
- \oslash . . . aufsteigender Knoten der Ebene der Bahn mit der Ebene der xy , wofür gewöhnlich die Ekliptik angenommen wird;
- i . . . Neigung der Ebene der Bahn gegen die Ebene der xy ;
- μ . . . mittlere tägliche siderische Bewegung;
- p . . . halber Parameter;
- E . . . excentrische Anomalie, gezählt vom Perihel an;
- v . . . wahre Anomalie, gezählt vom Perihel an;
- r . . . Radius vector.

¹⁾ Vergl. Abtheilung I, Vorlesung 4.

²⁾ Vergl. Abtheilung I, Vorlesung 3, Schluss von Vorlesung 4 und Vorlesung 10.

Die Ableitung dieser Ausdrücke aus den obigen Differentialgleichungen ist in Abtheilung I gegeben worden. Man kann sich auch durch directe zweimalige Differentiation überzeugen, dass durch sie wirklich den Differentialgleichungen Genüge gethan wird. Man erhält nämlich:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{a}{r} \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{k}{r} \sqrt{p} \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{k}{\sqrt{p}} \cdot e \sin v.\end{aligned}$$

und damit die ersten Differentiale:

$$\left. \begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\frac{k}{\sqrt{p}} \{ [\sin(v + \omega) + e \sin \omega] \cos \varnothing \\ &\quad + [\cos(v + \omega) + e \cos \omega] \sin \varnothing \cos i \} \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{k}{\sqrt{p}} \{ [\sin(v + \omega) + e \sin \omega] \sin \varnothing \\ &\quad - [\cos(v + \omega) + e \cos \omega] \cos \varnothing \cos i \} \\ \frac{dz}{dt} &= +\frac{k}{\sqrt{p}} \{ [\cos(v + \omega) + e \sin \omega] \sin i \}\end{aligned}\right\} \dots (3)$$

bei welchen der blosse Anblick sogleich lehrt, dass:

$$\left. \begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{k}{\sqrt{p}} \cdot \frac{x}{r} \cdot \frac{dv}{dt} = -\frac{k^2 x}{r^3} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{k}{\sqrt{p}} \cdot \frac{y}{r} \cdot \frac{dv}{dt} = -\frac{k^2 y}{r^3} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{k}{\sqrt{p}} \cdot \frac{z}{r} \cdot \frac{dv}{dt} = -\frac{k^2 z}{r^3}\end{aligned}\right\} \dots \dots \dots (4)$$

Wirke jetzt ausser der anziehenden Kraft k^2 noch eine andere störende Kraft, deren Ursprung zunächst noch nicht in Betracht gezogen zu werden braucht, auf die Bewegung des materiellen Punktes ein. Die Grösse dieser störenden Kraft werde durch $\dots P \dots$ bezeichnet, bezogen auf dieselbe Einheit der Kraft, in welcher auch k^2 ausgedrückt ist, oder auf eine Einheit der Kraft, welche in der Zeiteinheit einem Punkte, dessen Entfernung von dem Sitze der Kraft constant gleich der Längeneinheit bliebe, eine Geschwindigkeit mittheilen würde, durch welche er, sich selbst überlassen, die Längeneinheit in der Zeiteinheit durchlaufen würde. Um die Richtung der störenden Kraft P anzugeben, denke man sich um den Anfangspunkt der Coordinaten eine Kugel mit willkürlichem Halbmesser beschrieben. Seien auf der Oberfläche derselben X, Y, Z die Punkte, in welchen die nach der positiven Seite hin verlängerten Coordinatenachsen die Kugel treffen. Sei ebenso Q der Punkt, in welchem eine mit der Richtung der Kraft durch den Anfangspunkt gezogene Parallele die Kugel trifft. Werde ferner, um über das Zeichen der Kraft immer bestimmt zu entscheiden, der Sitz der störenden Anziehungskraft so angenommen, dass sie den Punkt in der Richtung vom Nullpunkte nach Q hin anzieht. Bezeichne man endlich den Winkel zwischen der durch Q bestimmten Richtung, mit der durch X bestimmten, durch QX , und ebenso sei QY, QZ der Theil des grössten Kreises zwischen Q und Y, Q und Z . Hiernach werden die drei Componenten der störenden Kraft:

$$P \cos QX \qquad P \cos QY \qquad P \cos QZ$$

und die Differentialgleichungen der so gestörten Bewegung des Punktes werden sein:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k^2 x}{r^3} &= P \cos Q X \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k^2 y}{r^3} &= P \cos Q Y \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k^2 z}{r^3} &= P \cos Q Z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Wenngleich diese neuen Differentialgleichungen von den früheren darin verschieden sind, dass die rechte Seite derselben nicht mehr $= 0$, sondern die störende Kraft P enthält, so kann man ihnen doch durch dieselbe Form der Coordinaten x, y, z Genüge thun, wenn man nur in dem obigen Ausdrücke für diese Coordinaten, die dort als constant angenommenen Grössen $a, \varepsilon, e, \omega, \Omega, i$ nicht mehr als constant, sondern als Grössen, die ebenfalls mit der Zeit variabel sind, betrachtet. Zu dem Ende denke man sich diese Grössen in dem Ausdrücke von x, y, z als von der Form:

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \Delta a & \varepsilon &= \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon & e &= e_0 + \Delta e \\ \omega &= \omega_0 + \Delta \omega & \Omega &= \Omega_0 + \Delta \Omega & i &= i_0 + \Delta i, \end{aligned}$$

wo $a_0, \varepsilon_0, e_0, \omega_0, \Omega_0, i_0$ wirkliche Constanten sind, $\Delta a, \Delta \varepsilon, \Delta e, \Delta \omega, \Delta \Omega, \Delta i$ aber solche Functionen der Zeit und der Grösse P , welche $= 0$ werden, wenn $P = 0$ gesetzt wird. Um hier des Folgenden wegen die Zeit, insofern sie in $\Delta a, \Delta \varepsilon, \Delta e, \Delta \omega, \Delta \Omega, \Delta i$ enthalten ist, zu unterscheiden von der Zeit, die bei constanten Elementen die Veränderung von x, y, z bewirkt, bezeichne man in $\Delta a, \Delta \varepsilon, \Delta e, \Delta \omega, \Delta \Omega, \Delta i$ die Zeit mit τ , während man sonst dafür das Zeichen t beibehält. So betrachtet, sind x, y, z Functionen von t und τ , und das vollständige Differential von x, y, z in Bezug auf die

Zeit $\dots \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, ohne Parenthese \dots wird sowohl das Differential von x , in Bezug

auf die Zeit bei constant angenommenen Elementen $\dots \left(\frac{dx}{dt}\right), \left(\frac{dy}{dt}\right), \left(\frac{dz}{dt}\right)$, mit Paren-

these \dots als auch das Differential von x in Bezug auf die Veränderlichkeit der Elemente,

sofern diese auch von der Zeit abhängt $\dots \left(\frac{dx}{d\tau}\right), \left(\frac{dy}{d\tau}\right), \left(\frac{dz}{d\tau}\right)$, \dots enthalten. Eben

dasselbe findet auch bei den zweiten Differentialen statt. Man hat folglich die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dx}{d\tau}\right) \\ \frac{dy}{dt} &= \left(\frac{dy}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{d\tau}\right) \\ \frac{dz}{dt} &= \left(\frac{dz}{dt}\right) + \left(\frac{dz}{d\tau}\right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

und daraus:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \left(\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt}\right) + \left(\frac{d\left(\frac{dx}{d\tau}\right)}{d\tau}\right) + \left(\frac{d\left(\frac{dx}{d\tau}\right)}{dt}\right) + \left(\frac{d\left(\frac{dx}{d\tau}\right)}{d\tau}\right) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \left(\frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt}\right) + \left(\frac{d\left(\frac{dy}{d\tau}\right)}{d\tau}\right) + \left(\frac{d\left(\frac{dy}{d\tau}\right)}{dt}\right) + \left(\frac{d\left(\frac{dy}{d\tau}\right)}{d\tau}\right) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \left(\frac{d\left(\frac{dz}{dt}\right)}{dt}\right) + \left(\frac{d\left(\frac{dz}{d\tau}\right)}{d\tau}\right) + \left(\frac{d\left(\frac{dz}{d\tau}\right)}{dt}\right) + \left(\frac{d\left(\frac{dz}{d\tau}\right)}{d\tau}\right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Die Grössen $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ sind hier die oben in (3) hingeschriebenen Werthe, und ebenso $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)$ die Werthe, welche in (4) gefunden sind. Addirt man zu (7) auf beiden Seiten bezüglich $\frac{k^2x}{r^3}$, $\frac{k^2y}{r^3}$, $\frac{k^2z}{r^3}$, so wird die linke Seite vermöge (5) gleich $P \cos QX$, $P \cos QY$, $P \cos QZ$, und auf der rechten Seite wird vermöge (4):

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{k^2x}{r^3} &= 0 \\ \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{k^2y}{r^3} &= 0 \\ \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) + \frac{k^2z}{r^3} &= 0,\end{aligned}$$

folglich werden die Gleichungen (5):

$$\left. \begin{aligned}P \cos QX &= \left(\frac{d\left(\frac{dx}{d\tau}\right)}{d\tau}\right) + \left(\frac{d\left(\frac{dx}{d\tau}\right)}{dt}\right) + \left(\frac{d\left(\frac{dx}{d\tau}\right)}{d\tau}\right) \\ P \cos QY &= \left(\frac{d\left(\frac{dy}{d\tau}\right)}{d\tau}\right) + \left(\frac{d\left(\frac{dy}{d\tau}\right)}{dt}\right) + \left(\frac{d\left(\frac{dy}{d\tau}\right)}{d\tau}\right) \\ P \cos QZ &= \left(\frac{d\left(\frac{dz}{d\tau}\right)}{d\tau}\right) + \left(\frac{d\left(\frac{dz}{d\tau}\right)}{dt}\right) + \left(\frac{d\left(\frac{dz}{d\tau}\right)}{d\tau}\right)\end{aligned}\right\} \dots \dots \dots (8)$$

Die Differentialquotienten $\left(\frac{dx}{d\tau}\right)$, $\left(\frac{dy}{d\tau}\right)$, $\left(\frac{dz}{d\tau}\right)$ enthalten bei ihrer vollständigen Entwicklung sechs von einander unabhängige Functionen und Differentiale, Δa , $\Delta \varepsilon$, Δe , $\Delta \omega$, $\Delta \Omega$, Δi und ihre Differentiale, oder überhaupt $\frac{da}{d\tau}$, $\frac{d\varepsilon}{d\tau}$, $\frac{de}{d\tau}$, $\frac{d\omega}{d\tau}$, $\frac{d\Omega}{d\tau}$, $\frac{di}{d\tau}$. Eben dieselbe Anzahl wird auch in die zweiten Differentiale übergehen, so dass die Endgleichungen, wenn man die Richtung und die Stärke der störenden Kraft als gegeben ansieht, sechs unbekannte Grössen enthalten, während doch nur drei Gleichungen zu ihrer Bestimmung vorhanden sind. Wegen dieser Unbestimmtheit der Aufgabe wird es gestattet sein, noch drei Bedingungen hinzuzufügen, welchen die sechs Unbekannten genügen sollen.

Wenngleich diese drei Bedingungen an sich willkürlich sind, so ist es doch klar, dass, insofern es darauf ankommt, die Functionen Δa , $\Delta \varepsilon$, Δe , $\Delta \omega$, $\Delta \Omega$, Δi aus den Gleichungen (8) zu bestimmen, die vortheilhafteste Form für die Bedingungen eine solche sein wird, welche womöglich alle zweiten Differentiale fortschafft, um zuletzt in jedem Falle nur Differentialgleichungen der ersten Ordnung zu erhalten. Man erreicht diesen Zweck, wenn man die ersten Differentiale $\frac{da}{d\tau}$, $\frac{d\varepsilon}{d\tau}$, $\frac{de}{d\tau}$, $\frac{d\omega}{d\tau}$, $\frac{d\Omega}{d\tau}$, $\frac{di}{d\tau}$ der Bedingung unterwirft, dass, wenn ihr wahrer Werth substituirt wird, die Differentiale $\left(\frac{dx}{d\tau}\right)$, $\left(\frac{dy}{d\tau}\right)$, $\left(\frac{dz}{d\tau}\right)$ nicht bloss für bestimmte Zeiten, sondern für alle gleich Null werden, oder nur solche Glieder enthalten, welche vollkommen identisch sich vernichten. Aus diesen drei Bedingungen, dass:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\tau} \right) &= 0 \\ \left(\frac{dy}{d\tau} \right) &= 0 \\ \left(\frac{dz}{d\tau} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

nach gehöriger Substitution der Endwerthe identische Gleichungen werden, folgt nämlich, dass jedesmal auch ihre Differentiale, sowohl in Bezug auf t als auf $\tau = 0$ werden, oder dass ebenfalls:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d \left(\frac{dx}{d\tau} \right)}{dt} \right) &= 0 & \left(\frac{d \left(\frac{dx}{d\tau} \right)}{d\tau} \right) &= 0 \\ \left(\frac{d \left(\frac{dy}{d\tau} \right)}{dt} \right) &= 0 & \left(\frac{d \left(\frac{dy}{d\tau} \right)}{d\tau} \right) &= 0 \\ \left(\frac{d \left(\frac{dz}{d\tau} \right)}{dt} \right) &= 0 & \left(\frac{d \left(\frac{dz}{d\tau} \right)}{d\tau} \right) &= 0 \end{aligned}$$

identische Gleichungen sein werden. Dagegen werden die Differentiale:

$$\left(\frac{d \left(\frac{dx}{dt} \right)}{d\tau} \right), \quad \left(\frac{d \left(\frac{dy}{dt} \right)}{d\tau} \right), \quad \left(\frac{d \left(\frac{dz}{dt} \right)}{d\tau} \right)$$

bestimmte Werthe erhalten, weil eben vermöge der Bedingungsgleichungen (9) die beiden Variablen τ und t , abgesehen von ihrer ursprünglichen Bedeutung, auch der analytischen Form nach, nicht mehr als von einander unabhängige Variablen zu betrachten sind, es folglich auch nicht gleichgültig ist, in welcher Ordnung man die Differentiationen vornimmt. Substituiert man aber diese letzten Werthe für die zweiten Differentiale in (8), so werden sie:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d \left(\frac{dx}{dt} \right)}{d\tau} \right) &= P \cos Q X \\ \left(\frac{d \left(\frac{dy}{dt} \right)}{d\tau} \right) &= P \cos Q Y \\ \left(\frac{d \left(\frac{dz}{dt} \right)}{d\tau} \right) &= P \cos Q Z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

und in diesen beiden Systemen wird die Auflösung der Aufgabe vollkommen bestimmt enthalten sein. Das erste System giebt, verglichen mit (6):

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt} \right), \quad \frac{dy}{dt} = \left(\frac{dy}{dt} \right), \quad \frac{dz}{dt} = \left(\frac{dz}{dt} \right),$$

oder enthält die Bedingung, dass zu jeder beliebigen Zeit für den Ort, den der bewegte Punkt einnimmt, die Tangente an beiden Bahnen, sowohl an der, in welcher die Elemente als constant betrachtet werden, als an der, in welcher die Elemente als variabel angesehen werden, eine und dieselbe ist, wobei von selbst zu verstehen ist, dass man die als con-

stant angesehenen Elemente so annimmt, wie sie zu der gegebenen Zeit wirklich waren. Durch diese Uebersetzung in Worte verliert auch die Wahl der drei Bedingungen das willkürliche, was sie anscheinend noch hatte. Die drei Coordinaten des Ortes und die drei Componenten der augenblicklichen Geschwindigkeit sind die sechs Constanten, welche die augenblickliche Bahn bestimmen, und aus denen sich die sechs Elemente direct ableiten lassen. Jede störende Kraft kann diese ursprünglichen Daten nicht ändern, sondern wirkt erst in dem zweiten Zeitelemente ein, wenn man es so ausdrücken darf. Hiernach wird es der Natur der Sache allein gemäss sein, die Tangente der gestörten Bahn in dem Augenblicke, von dem an die Störungen zu wirken anfangen, zusammenfallen zu lassen mit der Tangente der Bahn, welche der bewegte Punkt ohne die störende Kraft beschrieben haben würde.

Die oben in (3) vollständig ausgeschriebenen Werthe von $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ mögen der Kürze wegen mit x_1, y_1, z_1 bezeichnet werden. Man erhält dann die Differentialquotienten der variablen Elemente, wenn man die Werthe von x, y, z in (2) differentiirt, indem man nur die Elemente als variabel betrachtet und jeden Quotienten $\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}$ gleich Null setzt; und ferner die oben ausgeschriebenen Werthe von x_1, y_1, z_1 , ebenso differentiirt bloss in Bezug auf die Elemente und die Gleichungen (10) bildet. Führt man jetzt auch für die Differentiation in Bezug auf die Elemente wieder das Zeichen t ein, so sind die vollständigen sechs Gleichungen die folgenden:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{dx}{da}\right) \frac{da}{dt} + \left(\frac{dx}{d\varepsilon}\right) \frac{d\varepsilon}{dt} + \left(\frac{dx}{de}\right) \frac{de}{dt} + \left(\frac{dx}{d\omega}\right) \frac{d\omega}{dt} + \left(\frac{dx}{d\varpi}\right) \frac{d\varpi}{dt} + \left(\frac{dx}{di}\right) \frac{di}{dt} \\ 0 &= \left(\frac{dy}{da}\right) \frac{da}{dt} + \left(\frac{dy}{d\varepsilon}\right) \frac{d\varepsilon}{dt} + \left(\frac{dy}{de}\right) \frac{de}{dt} + \left(\frac{dy}{d\omega}\right) \frac{d\omega}{dt} + \left(\frac{dy}{d\varpi}\right) \frac{d\varpi}{dt} + \left(\frac{dy}{di}\right) \frac{di}{dt} \\ 0 &= \left(\frac{dz}{da}\right) \frac{da}{dt} + \left(\frac{dz}{d\varepsilon}\right) \frac{d\varepsilon}{dt} + \left(\frac{dz}{de}\right) \frac{de}{dt} + \left(\frac{dz}{d\omega}\right) \frac{d\omega}{dt} + \left(\frac{dz}{d\varpi}\right) \frac{d\varpi}{dt} + \left(\frac{dz}{di}\right) \frac{di}{dt} \\ P \cos Q X &= \left(\frac{dx_1}{da}\right) \frac{da}{dt} + \left(\frac{dx_1}{d\varepsilon}\right) \frac{d\varepsilon}{dt} + \left(\frac{dx_1}{de}\right) \frac{de}{dt} + \left(\frac{dx_1}{d\omega}\right) \frac{d\omega}{dt} + \left(\frac{dx_1}{d\varpi}\right) \frac{d\varpi}{dt} + \left(\frac{dx_1}{di}\right) \frac{di}{dt} \\ P \cos Q Y &= \left(\frac{dy_1}{da}\right) \frac{da}{dt} + \left(\frac{dy_1}{d\varepsilon}\right) \frac{d\varepsilon}{dt} + \left(\frac{dy_1}{de}\right) \frac{de}{dt} + \left(\frac{dy_1}{d\omega}\right) \frac{d\omega}{dt} + \left(\frac{dy_1}{d\varpi}\right) \frac{d\varpi}{dt} + \left(\frac{dy_1}{di}\right) \frac{di}{dt} \\ P \cos Q Z &= \left(\frac{dz_1}{da}\right) \frac{da}{dt} + \left(\frac{dz_1}{d\varepsilon}\right) \frac{d\varepsilon}{dt} + \left(\frac{dz_1}{de}\right) \frac{de}{dt} + \left(\frac{dz_1}{d\omega}\right) \frac{d\omega}{dt} + \left(\frac{dz_1}{d\varpi}\right) \frac{d\varpi}{dt} + \left(\frac{dz_1}{di}\right) \frac{di}{dt} \end{aligned} \quad (11)$$

Aus diesen in Bezug auf $\frac{da}{dt}, \frac{d\varepsilon}{dt}$ etc. linearen Gleichungen müssen jetzt durch gehörige Elimination die Werthe jedes einzelnen Differentialquotienten gefunden werden. Die Integration dieser Differentialgleichungen des ersten Grades wird den genauen Werth jedes $\mathcal{A}a, \mathcal{A}e$ etc. oder mit Hinzufügung der Constanten a_0, e_0 etc. jedes Elementes $a, \varepsilon, e, \omega, \varpi, i$ geben.

In den Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften für 1834 hat Encke die Formen für:

$$\left(\frac{dx}{da}\right), \left(\frac{dy}{da}\right), \left(\frac{dz}{da}\right), \left(\frac{dx_1}{da}\right), \left(\frac{dy_1}{da}\right), \left(\frac{dz_1}{da}\right) \text{ etc.,}$$

überhaupt für jeden Coëfficienten der

$$\frac{da}{dt}, \frac{d\varepsilon}{dt}, \frac{de}{dt} \text{ etc.}$$

angegeben, welche diese Elimination ganz direct und mit Leichtigkeit vollführen lassen. Man bedarf dazu gewisser Richtungen, die aber, da sie nur von dem augenblicklichen Orte und der augenblicklichen Geschwindigkeit und ihrer Richtung abhängen, als gegeben angesehen werden müssen.

Bezeichnet man die Richtung der Verlängerung des Radius vectors mit R , in dem Sinne wie oben bei Q , X , Y , Z bemerkt worden ist, die Richtung der Senkrechten auf den Radius vector in der Ebene der Bahn im Sinne der Bewegung genommen mit S , die Richtung der Tangente ebenfalls im Sinne der Bewegung genommen mit T , die Richtung der Normale nach dem Inneren der Ellipse hin mit N , die Richtung der Senkrechten auf der Ebene der Bahn nach dem Nordpole der Ekliptik zu mit W , so hat man für die Cosinus der Winkel, welche diese Richtungen mit X , Y , Z machen, folgende Gleichungen. Zuerst folgt aus (2):

$$\begin{aligned} x &= r \cos RX = r [\cos (v + \omega) \cos \delta - \sin (v + \omega) \sin \delta \cos i] \\ y &= r \cos RY = r [\cos (v + \omega) \sin \delta + \sin (v + \omega) \cos \delta \cos i] \\ z &= r \cos RZ = r \sin (v + \omega) \sin i. \end{aligned}$$

Ferner, wenn man die Liniengeschwindigkeit mit c bezeichnet, so dass:

$$c^2 = \frac{k^2}{p} (1 + 2e \cos v + e^2) = k^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

so wird nach (3):

$$\begin{aligned} x_1 &= c \cos TX = - \frac{k}{\sqrt{p}} \{ [\sin (v + \omega) + e \sin \omega] \cos \delta \\ &\quad + [\cos (v + \omega) + e \cos \omega] \sin \delta \cos i \} \\ y_1 &= c \cos TY = - \frac{k}{\sqrt{p}} \{ [\sin (v + \omega) + e \sin \omega] \sin \delta \\ &\quad - [\cos (v + \omega) + e \cos \omega] \cos \delta \cos i \} \\ z_1 &= c \cos TZ = + \frac{k}{\sqrt{p}} \{ \cos (v + \omega) + e \cos \omega \} \sin i. \end{aligned}$$

Denkt man sich jetzt die Ellipse in ihrer Ebene um 90° gedreht, so dass alle übrigen Elemente dieselben bleiben und allein ω sich verwandelt in $90^\circ + \omega$, so wird in dieser zweiten Lage der Radius vector und die Tangente, welche demselben v wie in der ersten Lage entsprechen, gleiche Grösse behalten, aber eine Richtung haben, welche senkrecht auf R und T in der Ebene der Bahn steht, also oben durch S und N angedeutet wurden. Hiernach giebt die Vertauschung von ω mit $90^\circ + \omega$ in $r \cos RX$ und $c \cos TX$ etc. die Werthe:

$$\begin{aligned} r \cos SX &= - r \{ \sin (v + \omega) \cos \delta + \cos (v + \omega) \sin \delta \cos i \} \\ r \cos SY &= - r \{ \sin (v + \omega) \sin \delta - \cos (v + \omega) \cos \delta \cos i \} \\ r \cos SZ &= r \cos (v + \omega) \sin i. \\ c \cos NX &= - \frac{k}{\sqrt{p}} \{ [\cos (v + \omega) + e \cos \omega] \cos \delta \\ &\quad - [\sin (v + \omega) + e \sin \omega] \sin \delta \cos i \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c \cos NY &= -\frac{k}{\sqrt{p}} \{ [\cos(v + \omega) + e \cos \omega] \sin \delta \\
 &\quad + [\sin(v + \omega) + e \sin \omega] \cos \delta \cos i \} \\
 c \cos NZ &= -\frac{k}{\sqrt{p}} \{ \sin(v + \omega) + e \sin \omega \} \sin i.
 \end{aligned}$$

Um zuletzt die Richtung W zu erhalten, setze man in $\cos RX$, $\cos RY$, $\cos RZ$ zuerst $(v + \omega) = 90^\circ$, so werden die neuen Werthe die Richtung in der Ebene der Bahn senkrecht auf die Knotenlinie angeben, vertauscht man dann noch i mit $90^\circ + i$, so hat man die Richtung W , folglich:

$$\begin{aligned}
 \cos WX &= \sin \delta \sin i \\
 \cos WY &= -\cos \delta \sin i \\
 \cos WZ &= \sin i.
 \end{aligned}$$

Vermöge der bekannten Gleichung, dass für irgend welche zwei Richtungen A und B :

$$\cos AB = \cos AX \cos BX + \cos AY \cos BY + \cos AZ \cos BZ$$

und vermöge der Form aller Ausdrücke für die Cosinus der Winkel, welche sämmtlich die Gestalt haben:

$$\begin{aligned}
 f &= \lambda \cos \delta + \mu \sin \delta \cos i \\
 g &= \lambda \sin \delta - \mu \cos \delta \cos i \\
 h &= -\mu \sin i \\
 f' &= \lambda' \cos \delta + \mu' \sin \delta \cos i \\
 g' &= \lambda' \sin \delta - \mu' \cos \delta \cos i \\
 h' &= \mu' \sin i,
 \end{aligned}$$

wonach folglich:

$$\begin{aligned}
 f^2 + g^2 + h^2 &= \lambda^2 + \mu^2 \\
 f'^2 + g'^2 + h'^2 &= \lambda'^2 + \mu'^2 \\
 ff' + gg' + hh' &= \lambda \lambda' + \mu \mu'
 \end{aligned}$$

lassen sich alle Cosinus der verschiedenen Combinationen der Richtungen unter sich finden, wobei man die bekannte hier vorkommende Gleichung:

$$\cos RX^2 + \cos RY^2 + \cos RZ^2 = 1$$

auch durch $\cos RR = 1$ ausdrücken kann.

$$\begin{array}{ll}
 \cos RR = 1 & c \cos TN = 0 \\
 c \cos RT = \frac{k}{\sqrt{p}} e \sin v & c \cos TW = 0 \\
 \cos RS = 0 & \cos SS = 1 \\
 c \cos RN = -\frac{k \sqrt{p}}{r} & c \cos SN = \frac{k}{\sqrt{p}} e \sin v \\
 \cos RW = 0 & \cos SW = 0 \\
 \cos TT = 1 & \cos NN = 1 \\
 \cos TS = +\frac{k \sqrt{p}}{r} & \cos NW = 0 \\
 & \cos WW = 1
 \end{array}$$

Um vermöge dieser Winkel die Differentialquotienten:

$$\left(\frac{dx}{da}\right), \left(\frac{dx}{d\varepsilon}\right), \left(\frac{dx}{de}\right), \left(\frac{dx}{d\omega}\right), \left(\frac{dx}{d\delta}\right), \left(\frac{dx}{di}\right)$$

darzustellen, bemerke man, dass die Elemente a, ε, e allein in r und v enthalten sind und dass in x, y, z nur die beiden Verbindungen $r \sin(v + \omega)$ und $r \cos(v + \omega)$ vorkommen. Bei der vollständigen Differentiation hat man aber:

$$\left(\frac{dr}{da}\right) = \frac{r}{a} - \frac{3}{2} \frac{kt}{a \sqrt{p}} e \sin v$$

$$\left(\frac{dr}{d\varepsilon}\right) = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}} e \sin v$$

$$\left(\frac{dr}{dv}\right) = -a \cos v$$

$$\left(\frac{dr}{da}\right) = -\frac{3}{2} \frac{kt}{a} \frac{\sqrt{p}}{r}$$

$$\left(\frac{dr}{d\varepsilon}\right) = \frac{a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p}}{r r}$$

$$\left(\frac{dv}{de}\right) = \frac{(p+r)}{r(1-e^2)} \sin v.$$

Wenn man diese Werthe in die Differentialgleichungen:

$$d[r \sin(v + \omega)] = \sin(v + \omega) dr + r \cos(v + \omega) dv$$

$$d[r \cos(v + \omega)] = \cos(v + \omega) dr - r \sin(v + \omega) dv$$

einsetzt und dabei für $\frac{1}{r}$ seinen Werth:

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos v}{p}$$

benutzt, so wird:

$$\left(\frac{d[r \sin(v + \omega)]}{da}\right) = \frac{r \sin(v + \omega)}{a} - \frac{3}{2} \frac{kt}{a \sqrt{p}} \{\cos(v + \omega) + e \cos \omega\}$$

$$\left(\frac{d[r \sin(v + \omega)]}{d\varepsilon}\right) = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}} \{\cos(v + \omega) + e \cos \omega\}$$

$$\left(\frac{d[r \sin(v + \omega)]}{dv}\right) = -a \cos v \sin(v + \omega) + \frac{(p+r) \sin v}{1-e^2} \cos(v + \omega)$$

$$\left(\frac{d[r \cos(v + \omega)]}{da}\right) = \frac{r \cos(v + \omega)}{a} + \frac{3}{2} \frac{kt}{a \sqrt{p}} \{\sin(v + \omega) + e \sin \omega\}$$

$$\left(\frac{d[r \cos(v + \omega)]}{d\varepsilon}\right) = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}} \{\sin(v + \omega) + e \sin \omega\}$$

$$\left(\frac{d[r \cos(v + \omega)]}{dv}\right) = -a \cos v \cos(v + \omega) - \frac{(p+r) \sin v}{1-e^2} \sin(v + \omega)$$

Hiermit wird man:

$$\left(\frac{dx}{da}\right), \left(\frac{dx}{d\varepsilon}\right), \left(\frac{dx}{dr}\right), \left(\frac{dy}{da}\right), \left(\frac{dy}{d\varepsilon}\right), \left(\frac{dy}{dv}\right), \left(\frac{dz}{da}\right), \left(\frac{dz}{d\varepsilon}\right), \left(\frac{dz}{dv}\right)$$

sogleich hinschreiben können. Für die Differentiale in Bezug auf ω sieht man sogleich, dass:

$$\left(\frac{dx}{d\omega}\right) = \left(\frac{d(r \cos R X)}{d\omega}\right) = r \cos S X$$

$$\left(\frac{dy}{d\omega}\right) = \left(\frac{d(r \cos R Y)}{d\omega}\right) = r \cos S Y$$

$$\left(\frac{dz}{d\omega}\right) = \left(\frac{d(r \cos R Z)}{d\omega}\right) = r \cos S Z$$

und in Bezug auf Ω und i ist die Differentiation und der Ausdruck durch $\cos SX$,

$\cos SY, \cos SZ, \cos WX, \cos WY, \cos WZ$, ebenfalls gleich durchgeführt, weil z. B. für die in $\left(\frac{dx}{d\delta\delta}\right)$ vorkommende Grösse:

$$\begin{aligned} \cos(v + \omega) \sin \delta\delta + \sin(v + \omega) \cos \delta\delta \cos i \\ = \{\cos(v + \omega) \sin \delta\delta \cos i + \sin(v + \omega) \cos \delta\delta\} \cos i + \cos(v + \omega) \sin \delta\delta \sin i^2, \end{aligned}$$

folglich: $= -\cos i \cos SX + \cos(v + \omega) \sin i \cos WX$

und analog für die Differentiale $\left(\frac{dy}{d\delta\delta}\right), \left(\frac{dz}{d\delta\delta}\right)$. Die Zusammenstellung für die Differentiale von x, y, z in Bezug auf jedes Element wird damit folgende:

$$\left(\frac{dx}{da}\right) = \frac{r}{a} \cos RX - \frac{3t}{2a} c \cos TX$$

$$\left(\frac{dy}{da}\right) = \frac{r}{a} \cos RY - \frac{3t}{2a} c \cos TY$$

$$\left(\frac{dz}{da}\right) = \frac{r}{a} \cos RZ - \frac{3t}{2a} c \cos TZ$$

$$\left(\frac{dx}{d\varepsilon}\right) = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k} c \cos TX$$

$$\left(\frac{dy}{d\varepsilon}\right) = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k} c \cos TY,$$

$$\left(\frac{dz}{d\varepsilon}\right) = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k} c \cos TZ$$

$$\left(\frac{dx}{de}\right) = -a \cos v \cos RX + \frac{p+r}{1-e^2} \sin v \cos SX$$

$$\left(\frac{dy}{de}\right) = -a \cos v \cos RY + \frac{p+r}{1-e^2} \sin v \cos SY$$

$$\left(\frac{dz}{de}\right) = -a \cos v \cos RZ + \frac{p+r}{1-e^2} \sin v \cos SZ$$

$$\left(\frac{dx}{d\omega}\right) = r \cos SX$$

$$\left(\frac{dy}{d\omega}\right) = r \cos SY$$

$$\left(\frac{dz}{d\omega}\right) = r \cos SZ$$

$$\left(\frac{dx}{d\delta\delta}\right) = r \cos i \cos SX - r \cos(v + \omega) \sin i \cos WX$$

$$\left(\frac{dy}{d\delta\delta}\right) = r \cos i \cos SY - r \cos(v + \omega) \sin i \cos WY$$

$$\left(\frac{dz}{d\delta\delta}\right) = r \cos i \cos SZ - r \cos(v + \omega) \sin i \cos WZ$$

$$\left(\frac{dx}{di}\right) = r \sin(v + \omega) \cos WX$$

$$\left(\frac{dy}{di}\right) = r \sin(v + \omega) \cos WY$$

$$\left(\frac{dz}{di}\right) = r \sin(v + \omega) \cos WZ.$$

Aus diesen Werthen lassen sich sogleich die Werthe von

$$\left(\frac{dx_1}{da}\right), \left(\frac{dy_1}{da}\right), \left(\frac{dz_1}{da}\right), \left(\frac{dx_1}{d\varepsilon}\right), \left(\frac{dy_1}{d\varepsilon}\right), \left(\frac{dz_1}{d\varepsilon}\right) \text{ etc.}$$

ableiten. Denn da diese Differentialquotienten bezeichnen, dass man zuerst jede Coordinate in Bezug auf t so differentiiren soll, dass man alle Elemente als constant ansieht, und den gewonnenen Ausdruck nachher in Bezug auf jedes Element noch einmal so differentiiren, dass man auf die Veränderlichkeit von t keine Rücksicht nimmt, so werden bei der ersten Differentiation die Elemente nicht als Functionen von t betrachtet und in der zweiten ebenfalls t nicht als Function der Elemente. Beide Grössen, t und die Elemente sind deshalb hier als ganz von einander unabhängig anzusehen und auch bei veränderlichen Elementen muss in dem Sinne, wie es hier genommen wird:

$$\left(\frac{dx_1}{da}\right) = \left(\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{da}\right) = \left(\frac{d\left(\frac{dx}{da}\right)}{dt}\right)$$

sein, und ähnlich bei allen übrigen Elementen. Ein Unterschied in der Ordnung der Differentiation könnte nur dann stattfinden, wenn man in x oder $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ auch auf das t , welches in den veränderlichen Elementen enthalten ist, hätte Rücksicht nehmen müssen. Dieses aber würde nach dem Obigen ganz fehlerhaft sein, da x der reine Differentialquotient in Bezug auf t ist, wenn die Elemente als völlig constant angesehen werden.

Hiernach hat man nur die eben gegebenen Werthe von:

$$\left(\frac{dx}{da}\right), \left(\frac{dy}{da}\right), \left(\frac{dz}{da}\right), \left(\frac{dx}{d\varepsilon}\right), \left(\frac{dy}{d\varepsilon}\right), \left(\frac{dz}{d\varepsilon}\right) \text{ etc.}$$

in Bezug auf t so zu differentiiren, dass man die Elemente als constant ansieht, und also auch nur auf die Grössen zu achten, welche t explicite enthalten. Die Functionen von t , welche in den veränderlichen Elementen vorkommen, dürfen nicht berücksichtigt werden. Für die in diesem Sinne nach t veränderlichen Grössen finden sich aber sogleich die folgenden Werthe:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d(r \cos RX)}{dt}\right) &= \left(\frac{dx}{dt}\right) = x_1 = c \cos TX \\ \left(\frac{d(r \cos RY)}{dt}\right) &= \left(\frac{dy}{dt}\right) = y_1 = c \cos TY \\ \left(\frac{d(r \cos RZ)}{dt}\right) &= \left(\frac{dz}{dt}\right) = z_1 = c \cos TZ \\ \left(\frac{d(c \cos TX)}{dt}\right) &= \left(\frac{dx_1}{dt}\right) = -\frac{k^2 x}{r^3} = -\frac{k^2 \cos RX}{r^2} \\ \left(\frac{d(c \cos TY)}{dt}\right) &= \left(\frac{dy_1}{dt}\right) = -\frac{k^2 y}{r^3} = -\frac{k^2 \cos RY}{r^2} \\ \left(\frac{d(c \cos TZ)}{dt}\right) &= \left(\frac{dz_1}{dt}\right) = -\frac{k^2 z}{r^3} = -\frac{k^2 \cos RZ}{r^2}. \end{aligned}$$

Ausserdem ist nach dem Obigen:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d(r \cos RX)}{d\omega}\right) &= r \cos SX \\ \left(\frac{d(r \cos RY)}{d\omega}\right) &= r \cos SY \\ \left(\frac{d(r \cos RZ)}{d\omega}\right) &= r \cos SZ\end{aligned}$$

und wie man bei dem ersten Blicke sieht:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d(c \cos TX)}{d\omega}\right) &= c \cos NX \\ \left(\frac{d(c \cos TY)}{d\omega}\right) &= c \cos NY \\ \left(\frac{d(c \cos TZ)}{d\omega}\right) &= c \cos NZ.\end{aligned}$$

folglich da:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d(r \cos RX)}{dt}\right) &= c \cos TX \\ \left(\frac{d(r \cos RY)}{dt}\right) &= c \cos TY \\ \left(\frac{d(r \cos RZ)}{dt}\right) &= c \cos TZ.\end{aligned}$$

nothwendig auch:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d(r \cos SX)}{dt}\right) &= c \cos NX \\ \left(\frac{d(r \cos SY)}{dt}\right) &= c \cos NY \\ \left(\frac{d(r \cos SZ)}{dt}\right) &= c \cos NZ.\end{aligned}$$

Hierzu kommt noch:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d \cos WX}{dt}\right) &= 0 \\ \left(\frac{d \cos WY}{dt}\right) &= 0 \\ \left(\frac{d \cos WZ}{dt}\right) &= 0\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\left(\frac{d|r \cos(v + \omega)|}{dt}\right) &= -\frac{k}{\sqrt{p}} [\sin(v + \omega) + e \sin \omega] \\ \left(\frac{d|r \sin(v + \omega)|}{dt}\right) &= +\frac{k}{\sqrt{p}} [\cos(v + \omega) + e \cos \omega],\end{aligned}$$

wenn man die früher angeführten Werthe von $\left(\frac{dr}{dt}\right)$ und $\frac{dv}{dt}$ benutzt. Mit Hülfe dieser Differentialquotienten werden sich alle Differentiationen ohne Weiteres hinschreiben lassen, nur mit Ausnahme der Differentiale von $\left(\frac{dx}{de}\right)$, $\left(\frac{dy}{de}\right)$, $\left(\frac{dz}{de}\right)$ in Bezug auf t . Wenn man diese indessen nur etwas anders schreibt, so wird auch hier keine Weitläufigkeit stattfinden. Es ist nämlich:

$$\left(\frac{dx}{de}\right) = -a (\cos v \cos RX - \sin v \cos SX) + \frac{\sin v}{1-e^2} r \cos SX$$

$$\left(\frac{dy}{de}\right) = -a (\cos v \cos RY - \sin v \cos SY) + \frac{\sin v}{1-e^2} r \cos SY$$

$$\left(\frac{dz}{de}\right) = -a (\cos v \cos RZ - \sin v \cos SZ) + \frac{\sin v}{1-e^2} r \cos SZ.$$

Nun aber wird, wenn man die gehörigen Werthe substituirt:

$$\cos v \cos RX - \sin v \cos SX = \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i$$

$$\cos v \cos RY - \sin v \cos SY = \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i$$

$$\cos v \cos RZ - \sin v \cos SZ = \sin \omega \sin i$$

oder sie sind frei von allen mit t variablen Grössen. Wollte man die Richtung von der Sonne nach dem Perihel mit A bezeichnen, so würden sie:

$$\cos AX \quad \cos AY \quad \cos AZ$$

und:

$$\left(\frac{dx}{de}\right) = -a \cos AX + \frac{\sin v}{1-e^2} r \cos SX$$

$$\left(\frac{dy}{de}\right) = -a \cos AY + \frac{\sin v}{1-e^2} r \cos SY$$

$$\left(\frac{dz}{de}\right) = -a \cos AZ + \frac{\sin v}{1-e^2} r \cos SZ,$$

wobei:

$$\left(\frac{d \cos AX}{dt}\right) = 0$$

$$\left(\frac{d \cos AY}{dt}\right) = 0$$

$$\left(\frac{d \cos AZ}{dt}\right) = 0$$

und folglich die Differentiation auch hier auf die obigen Gleichungen zurückgebracht ist. Es folgen hieraus die Werthe:

$$\left(\frac{dx_1}{da}\right) = \frac{3k^2t}{2ar^2} \cos RX - \frac{c}{2a} \cos TX$$

$$\left(\frac{dy_1}{da}\right) = \frac{3k^2t}{2ar^2} \cos RY - \frac{c}{2a} \cos TY$$

$$\left(\frac{dz_1}{da}\right) = \frac{3k^2t}{2ar^2} \cos RZ - \frac{c}{2a} \cos TZ$$

$$\left(\frac{dx_1}{d\varepsilon}\right) = -\frac{a^{\frac{3}{2}}k}{r^2} \cdot \cos RX$$

$$\left(\frac{dy_1}{d\varepsilon}\right) = -\frac{a^{\frac{3}{2}}k}{r^2} \cdot \cos RY$$

$$\left(\frac{dz_1}{d\varepsilon}\right) = -\frac{a^{\frac{3}{2}}k}{r^2} \cdot \cos RZ$$

$$\left(\frac{dx_1}{de}\right) = \frac{k}{\sqrt{p}} \cdot \frac{a \cos v}{r} \cos SX + \frac{\sin v}{1-e^2} c \cos NX$$

$$\left(\frac{dy_1}{de}\right) = \frac{k}{\sqrt{p}} \cdot \frac{a \cos v}{r} \cos SY + \frac{\sin v}{1-e^2} c \cos NY$$

$$\left(\frac{dz_1}{de}\right) = \frac{k}{\sqrt{p}} \cdot \frac{a \cos v}{r} \cos SZ + \frac{\sin v}{1-e^2} c \cos NZ$$

$$\left(\frac{dx_1}{d\omega}\right) = c \cos NX$$

$$\left(\frac{dy_1}{d\omega}\right) = c \cos NY$$

$$\left(\frac{dz_1}{d\omega}\right) = c \cos NZ$$

$$\left(\frac{dx_1}{d\oslash\oslash}\right) = \cos i \, c \cos NX + \frac{k}{\sqrt{p}} [\sin(v + \omega) + e \sin \omega] \sin i \cos WX$$

$$\left(\frac{dy_1}{d\oslash\oslash}\right) = \cos i \, c \cos NY + \frac{k}{\sqrt{p}} [\sin(v + \omega) + e \sin \omega] \sin i \cos WY$$

$$\left(\frac{dz_1}{d\oslash\oslash}\right) = \cos i \, c \cos NZ + \frac{k}{\sqrt{p}} [\sin(v + \omega) + e \sin \omega] \sin i \cos WZ$$

$$\left(\frac{dx_1}{di}\right) = \frac{k}{\sqrt{p}} [\cos(v + \omega) + e \cos \omega] \cos WX$$

$$\left(\frac{dy_1}{di}\right) = \frac{k}{\sqrt{p}} [\cos(v + \omega) + e \cos \omega] \cos WY$$

$$\left(\frac{dz_1}{di}\right) = \frac{k}{\sqrt{p}} [\cos(v + \omega) + e \cos \omega] \cos WZ$$

Bei dieser Form der sämmtlichen Coëfficienten von:

$$\frac{da}{dt}, \quad \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad \frac{de}{dt}, \quad \frac{d\omega}{dt}, \quad \frac{d\oslash}{dt}, \quad \frac{di}{dt}$$

in den Gleichungen (11), wird die Elimination der einzelnen Werthe keine Schwierigkeit haben. Man kann dabei den gewöhnlichen Weg einschlagen, erst eine Grösse, etwa $\frac{da}{dt}$ zu eliminiren, am einfachsten so, dass man in (11) die ersten drei Gleichungen bezüglich mit $-\left(\frac{dx_1}{da}\right)$, $-\left(\frac{dy_1}{da}\right)$, $-\left(\frac{dz_1}{da}\right)$, oder den Coëfficienten in den letzten drei multiplicirt, und ebenfalls die letzten drei Gleichungen mit $\left(\frac{dx}{da}\right)$, $\left(\frac{dy}{da}\right)$, $\left(\frac{dz}{da}\right)$, oder den Coëfficienten von $\frac{da}{dt}$ in den ersten drei Gleichungen. Aus der Summe der Producte wird $\frac{da}{dt}$ verschwunden sein. Der Einfachheit wegen bezeichne man die Coëfficienten von $\frac{d\varepsilon}{dt}$, $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d\oslash}{dt}$, $\frac{di}{dt}$, welche man in dieser summirten Gleichung erhält mit:

$$[a, \varepsilon], \quad [a, e], \quad [a, \omega], \quad [a, \oslash], \quad [a, i],$$

so dass z. B.:

$$[a, \varepsilon] = - \left(\frac{dx_1}{da} \right) \left(\frac{dx}{d\varepsilon} \right) - \left(\frac{dy_1}{da} \right) \left(\frac{dy}{d\varepsilon} \right) - \left(\frac{dz_1}{da} \right) \left(\frac{dz}{d\varepsilon} \right) \\ + \left(\frac{dx}{da} \right) \left(\frac{dx_1}{d\varepsilon} \right) + \left(\frac{dy}{da} \right) \left(\frac{dy_1}{d\varepsilon} \right) + \left(\frac{dz}{da} \right) \left(\frac{dz_1}{d\varepsilon} \right).$$

Eliminirt man nachher aus den ursprünglichen sechs Gleichungen $\frac{d\varepsilon}{dt}$, so werden in der Summe der Producte die Coëfficienten der übrig bleibenden unbekannten fünf Grössen:

$$\frac{da}{dt}, \quad \frac{de}{dt}, \quad \frac{d\omega}{dt}, \quad \frac{d\Omega}{dt}, \quad \frac{di}{dt}$$

respective:

$$[\varepsilon, a], \quad [\varepsilon, e], \quad [\varepsilon, \omega], \quad [\varepsilon, \Omega], \quad [\varepsilon, i],$$

wobei es von selbst klar ist, dass:

$$[\varepsilon, a] = - [a, \varepsilon]$$

und analog bei allen anderen Verbindungen. Setzt man für alle sechs Grössen das Verfahren so fort, so hat man im Ganzen 15 Coëfficienten zu bestimmen. In allen diesen werden überall Formen wie:

$$\cos R X \cos T X + \cos R Y \cos T Y + \cos R Z \cos T Z$$

vorkommen, wofür man sogleich $\cos R T$ schreiben und dabei auch gleich anfangs die Cosinus weglassen kann, welche = 0 sind, nämlich:

$\cos R S = 0$, $\cos R W = 0$, $\cos T N = 0$, $\cos T W = 0$, $\cos S W = 0$, $\cos N W = 0$, ebenso für $\cos R R$, $\cos T T$, $\cos S S$, $\cos N N$, $\cos W W$ den Werth = 1 setzen. Führt man die Rechnung durch, so erhält man:

$$[a, \varepsilon] = - \frac{3k\sqrt{a}}{2r^2} t c \cos R T + \frac{c^2\sqrt{a}}{2k} - \frac{k\sqrt{a}}{r} + \frac{3k\sqrt{a}}{2r^2} t c \cos R T$$

$$[a, e] = + \frac{3k^2 \cos v}{2r^2} t - \frac{\cos v}{2} c \cos R T + \frac{p+r}{2p} \sin v c \cos S T \\ + \frac{r \sin v}{p} c \cos R N - \frac{3kt \cos v}{2r\sqrt{p}} c \cos S T$$

$$[a, \omega] = + \frac{r}{2a} c \cos S T + \frac{r}{a} c \cos R N$$

$$[a, \Omega] = + \frac{r}{2a} \cos i c \cos S T + \frac{r}{a} \cos i c \cos R N$$

$$[a, i] = 0$$

$$[\varepsilon, e] = + \frac{a^{\frac{5}{2}} k \cos v}{r^2} + \frac{a^{\frac{5}{2}} \cos v}{r\sqrt{p}} c \cos S T$$

$$[\varepsilon, \omega] = 0$$

$$[\varepsilon, \Omega] = 0$$

$$[\varepsilon, i] = 0$$

$$[e, \omega] = - \frac{k}{\sqrt{p}} a \cos v - \frac{r \sin v}{1-e^2} c \cos S N - a \cos v c \cos R N \\ + \frac{p+r}{1-e^2} \sin v c \cos S N$$

$$[e, \Omega] = - \frac{k}{\sqrt{p}} a \cos v \cos i - \frac{r \sin v}{1-e^2} \cos i c \cos S N - a \cos v \cos i c \cos R N \\ + \frac{p+r}{1-e^2} \sin v \cos i c \cos S N$$

$$\begin{aligned}
 [e, i] &= 0 \\
 [\omega, \delta] &= -r \cos i \cos SN + r \cos i \cos SN \\
 [\omega, i] &= 0 \\
 [\delta, i] &= -\frac{k}{\sqrt{p}} [\sin(v + \omega) + e \sin \omega] r \sin(v + \omega) \sin i \\
 &\quad - \frac{k}{\sqrt{p}} [\cos(v + \omega) + e \cos \omega] r \cos(v + \omega) \sin i.
 \end{aligned}$$

Substituirt man hier die oben gegebenen Werthe für diese Cosinus und reducirt Alles, so findet sich zuletzt:

$$\begin{aligned}
 [a, \varepsilon] &= -\frac{k}{2\sqrt{a}} & [\varepsilon, a] &= +\frac{k}{2\sqrt{a}} \\
 [a, e] &= 0 & [e, a] &= 0 \\
 [a, \omega] &= -\frac{k\sqrt{p}}{2a} & [\omega, a] &= +\frac{k\sqrt{p}}{2a} \\
 [a, \delta] &= -\frac{k\sqrt{p}}{2a} \cos i & [\delta, a] &= +\frac{k\sqrt{p}}{2a} \cos i \\
 [a, i] &= 0 & [i, a] &= 0 \\
 [\varepsilon, e] &= 0 & [e, \varepsilon] &= 0 \\
 [\varepsilon, \omega] &= 0 & [\omega, \varepsilon] &= 0 \\
 [\varepsilon, \delta] &= 0 & [\delta, \varepsilon] &= 0 \\
 [\varepsilon, i] &= 0 & [i, \varepsilon] &= 0 \\
 [e, \omega] &= +\frac{k}{\sqrt{p}} a e & [\omega, e] &= -\frac{k}{\sqrt{p}} a e \\
 [e, \delta] &= +\frac{k}{\sqrt{p}} a e \cos i & [\delta, e] &= -\frac{k}{\sqrt{p}} a e \cos i \\
 [e, i] &= 0 & [i, e] &= 0 \\
 [\omega, \delta] &= 0 & [\delta, \omega] &= 0 \\
 [\omega, i] &= 0 & [i, \omega] &= 0 \\
 [\delta, i] &= -k\sqrt{p} \sin i & [i, \delta] &= +k\sqrt{p} \sin i.
 \end{aligned}$$

Nachdem so die rechte Seite jeder Endgleichung, wenn immer eine der zu bestimmenden Grössen eliminirt ist, auf eine höchst einfache Form zurückgeführt ist, hat die Behandlung der linken Seite noch weniger Schwierigkeit. Diese ist nämlich überall $P \cos Q X$, $P \cos Q Y$, $P \cos Q Z$, bezüglich multiplicirt mit:

$$\left(\frac{dx}{da}\right), \left(\frac{dy}{da}\right), \left(\frac{dz}{da}\right), \text{ oder mit } \left(\frac{dx}{d\varepsilon}\right), \left(\frac{dy}{d\varepsilon}\right), \left(\frac{dz}{d\varepsilon}\right) \text{ etc.,}$$

wo man also nur die Richtungen Q zu vereinigen hat unter dem Cosinuszeichen mit der Richtung, die in jedem Werthe der Differentialquotienten neben X , Y und Z steht. Die Endgleichungen werden demnach:

$$\left. \begin{aligned} \frac{r}{a} P \cos QR - \frac{3t}{2a} c P \cos QT - \frac{k}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{k\sqrt{p}}{2a} \frac{d\omega}{dt} - \frac{k\sqrt{p}}{2a} \cos i \frac{d\delta}{dt} \\ - \frac{a^2}{k} c P \cos QT = + \frac{k}{2\sqrt{a}} \frac{da}{dt} \\ - a \cos v P \cos QR + \frac{p+r}{1-e^2} \sin v P \cos QS = \frac{k}{\sqrt{p}} a e \frac{d\omega}{dt} + \frac{k}{\sqrt{p}} a e \cos i \frac{d\delta}{dt} \\ r P \cos QS = \frac{k\sqrt{p}}{2a} \frac{da}{dt} - \frac{k}{\sqrt{p}} a e \frac{de}{dt} \\ r \cos i P \cos QS - r \cos(v + \omega) \sin i P \cos QW \\ = \frac{k\sqrt{p}}{2a} \cos i \frac{da}{dt} - \frac{k}{\sqrt{p}} a e \cos i \frac{de}{dt} - k\sqrt{p} \sin i \frac{di}{dt} \\ r \sin(v + \omega) P \cos QW = + k\sqrt{p} \sin i \frac{d\delta}{dt} \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

Wenn, wie bei Lagrange, die nach den Hauptaxen zerlegten störenden Kräfte die Form von partiellen Differentialen in Bezug auf die Coordinaten haben, oder:

$$\begin{aligned} P \cos QX &= \left(\frac{d\Omega}{dx} \right) \\ P \cos QY &= \left(\frac{d\Omega}{dy} \right) \\ P \cos QZ &= \left(\frac{d\Omega}{dz} \right), \end{aligned}$$

so ergibt sich von selbst, dass die linke Seite aller dieser letzten Gleichungen, da sie immer von der Form:

$$\left(\frac{d\Omega}{dx} \right) \frac{dx}{da} + \left(\frac{d\Omega}{dy} \right) \left(\frac{dy}{da} \right) + \left(\frac{d\Omega}{dz} \right) \left(\frac{dz}{da} \right)$$

in Bezug auf jedes Element ist, das partielle Differential von Ω in Bezug auf jedes Element wird, in dem Sinne, wie hier überhaupt die partiellen Differentiale genommen werden. Die linke Seite wird folglich bezüglich:

$$\left(\frac{d\Omega}{da} \right), \left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon} \right), \left(\frac{d\Omega}{de} \right), \left(\frac{d\Omega}{d\omega} \right), \left(\frac{d\Omega}{d\delta} \right), \left(\frac{d\Omega}{di} \right)$$

und die Grössen $\frac{da}{dt}$, $\frac{d\varepsilon}{dt}$ etc. werden allein durch partielle Differentiation der Störungsfunction Ω in Bezug auf jedes Element gefunden, wobei die Factoren der Differentialquotienten ebenfalls nur aus Elementen gebildet sind, ohne dass Grössen vorkommen, in welchen t explicite enthalten wäre.

Diese Gleichungen (12) geben sogleich die reinen Werthe der gesuchten Grössen. Zuerst giebt die zweite $\frac{da}{dt}$, und damit die vierte $\frac{de}{dt}$, aus beiden giebt die fünfte $\frac{di}{dt}$;

die erste, dritte und sechste lassen $\frac{d\delta}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$ und $\frac{d\varepsilon}{dt}$ finden. Es wird:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2a^2}{k^2} c P \cos QT \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= - \frac{1}{k\sqrt{a}} \left\{ 2r - \frac{p \cos v}{e} \right\} P \cos QR - \frac{1}{k\sqrt{a}} \cdot \frac{p+r}{e} \sin v P \cos QS + \frac{3t}{k\sqrt{a}} c P \cos QT \end{aligned}$$

$$\frac{d e}{d t} = -\frac{1}{k \sqrt{p}} \frac{1 - e^2}{e} r P \cos Q S + \frac{p}{e} \cdot \frac{1}{k^2} c P \cos Q T$$

$$\frac{d \omega}{d t} = -\frac{1}{k \sqrt{p}} \cdot \frac{p \cos v}{e} P \cos Q R + \frac{1}{k \sqrt{p}} \cdot \frac{p + r}{e} \sin v P \cos Q S - \cos i \frac{d \delta}{d t}$$

$$\frac{d \delta}{d t} = \frac{1}{k \sqrt{p}} \cdot \frac{r \sin(v + \omega)}{\sin i} P \cos Q W$$

$$\frac{d i}{d t} = \frac{1}{k \sqrt{p}} \cdot r \cos(v + \omega) P \cos Q W.$$

Für die numerische Rechnung ist es angenehm, mit gleichartigen Grössen zu thun zu haben, entweder bloss mit Winkelgrössen, oder bloss mit Längengrössen. Es wird deswegen vorthailhaft sein, statt der beiden Elemente a und e andere Variable einzuführen, welche durch Winkelgrössen ausgedrückt werden. Man kann hier für e nach dem Vorgange von Gauss setzen:

$$e = \sin \Phi,$$

wodurch:

$$\frac{d e}{d t} = \cos \Phi \frac{d \Phi}{d t}$$

oder:

$$\frac{d \Phi}{d t} = \frac{1}{\cos \Phi} \cdot \frac{d e}{d t}.$$

Statt a kann man die mittlere tägliche siderische Bewegung n nehmen, gemäss der Gleichung:

$$n = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d n}{d t} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{n}{a} \cdot \frac{d a}{d t}.$$

Ferner bedarf man nie des Elementes ε allein, sondern wendet es immer nur an in Verbindung mit nt . Wenn also M die mittlere Anomalie bedeutet oder:

$$M = nt + \varepsilon,$$

so kann man durch $\frac{d M}{d t}$ das Differential $\frac{d \varepsilon}{d t}$ ausdrücken. Um die dazu nöthige Transformation deutlicher zu übersehen, gebe man den Elementen die schon oben angenommene Form, wonach sie aus einem von P freien Theile bestehen, und einem von P so abhängigen, dass der letztere mit P verschwindet. Für jede Zeit t wird demnach die mittlere Anomalie sein:

$$M = (n_0 + \Delta n) t + \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon$$

$$= \varepsilon_0 + n_0 t + t \Delta n + \Delta \varepsilon,$$

und wenn man sich das M ableiten wollte, welches ohne die Störungen zur Zeit t stattgefunden hätte, so würde es von der Form sein:

$$\varepsilon_0 + n_0 t,$$

wo ε_0 die Epoche der mittleren Anomalie bezeichnet, welche für den Augenblick $t = 0$ stattfand, von welchem an man die Störungen rechnet, und für welchen auch die constanten Elemente a_0, n_0 u. s. w. gelten. Fügt man diesem Theile noch den anderen, von der störenden Kraft abhängigen Theil hinzu ... ΔM ..., so wird die Gleichung:

$$\varepsilon_0 + n_0 t + \Delta M = \varepsilon_0 + n_0 t + t \Delta n + \Delta \varepsilon,$$

oder wenn man statt $\mathcal{A}M$, $\mathcal{A}n$, $\mathcal{A}\varepsilon$ lieber das wirkliche Integral der obigen Differentialquotienten hinschreibt:

$$\int \frac{dM}{dt} dt = t \int \frac{dn}{dt} \cdot dt + \int \frac{d\varepsilon}{dt} \cdot dt.$$

Differentiirt man diese Gleichungen nach t , so wird:

$$\frac{dM}{dt} = \int \frac{dn}{dt} dt + t \frac{dn}{dt} + \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Es befindet sich nun aber in dem Ausdrücke von $\frac{d\varepsilon}{dt}$ ein Glied:

$$\frac{3t}{k\sqrt{a}} c P \cos Q T = \frac{3kt}{2a^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{da}{dt}$$

oder wenn man für $\frac{da}{dt} \dots \frac{dn}{dt}$ einführt:

$$\frac{3t}{k\sqrt{a}} c P \cos Q T = - \frac{k}{na^{\frac{3}{2}}} t \frac{dn}{dt} = - t \frac{dn}{dt},$$

so dass der vollständige Ausdruck von $\frac{d\varepsilon}{dt}$ geschrieben werden kann:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = - \frac{1}{k\sqrt{a}} \left\{ 2r - \frac{p \cos v}{e} \right\} P \cos QR - \frac{1}{k\sqrt{a}} \cdot \frac{p+r}{e} \sin v P \cos QS - t \frac{dn}{dt}.$$

Substituirt man diese Form in $\frac{dM}{dt}$, so hebt sich:

$$+ t \frac{dn}{dt} - t \frac{dn}{dt} = 0$$

oder t erscheint nicht mehr explicite ausserhalb der sonst von t abhängigen Grössen, und der Werth von $\frac{dM}{dt}$ wird:

$$\frac{dM}{dt} = - \frac{1}{k\sqrt{a}} \left\{ 2r - \frac{p \cos v}{e} \right\} P \cos QR - \frac{1}{k\sqrt{a}} \cdot \frac{p+r}{e} \sin v P \cos QS + \int \frac{dn}{dt} \cdot dt,$$

wobei freilich in M selbst das doppelte Integral $\int \int \frac{dn}{dt} dt^2$ erscheinen wird. Die Grösse, welche nach der doppelten Integration hinzuzufügen sein wird, ist dabei $\varepsilon_0 + n_0 t$.

In dem Werthe von $\frac{d\omega}{dt}$ ist ohnedies schon $\cos i \frac{d\oslash}{dt}$ erhalten. Man kann deshalb noch mehr dem gewöhnlichen astronomischen Gebrauche gemäss, und selbst etwas bequemer und genauer statt des Elementes ω die eigentliche Länge des Perihels $\dots \pi \dots$ einführen, wobei:

$$\begin{aligned} \pi &= \omega + \oslash \\ \frac{d\pi}{dt} &= \frac{d\omega}{dt} + \frac{d\oslash}{dt} \end{aligned}$$

und das Glied in $\frac{d\omega}{dt}$, welches $\frac{d\oslash}{dt}$ enthält, wird für $\frac{d\pi}{dt}$:

$$(1 - \cos i) \frac{d\oslash}{dt} = 2 \sin \frac{1}{2} i^2 \frac{d\oslash}{dt}.$$

Endlich kommt in allen Gliedern der Gleichungen entweder der Factor $\frac{1}{k\sqrt{p}}$ oder

$\frac{1}{k\sqrt{a}}$ vor. Führt man einen von diesen durchgängig ein, etwa $\frac{1}{k\sqrt{p}}$, so wird man für $\frac{1}{k\sqrt{a}}$ schreiben müssen:

$$\frac{1}{k\sqrt{a}} = \frac{\cos \Phi}{k\sqrt{p}}.$$

Mit diesen sämtlichen Veränderungen werden nun die Formeln (12):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d n}{d t} &= - 3 \cos \Phi \frac{c P \cos Q T}{k\sqrt{p}} \\ \frac{d M}{d t} &= - \left\{ 2 r \cos \Phi - p \cotg \Phi \cos v \right\} \frac{P \cos Q R}{k\sqrt{p}} - (p + r) \cotg \Phi \sin v \frac{P \cos Q S}{k\sqrt{p}} \\ &\quad + \int \frac{d n}{d t} \cdot d t \\ \frac{d \Phi}{d t} &= - r \cotg \Phi \frac{P \cos Q S}{k\sqrt{p}} + \frac{p\sqrt{a}}{e} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{c P \cos Q T}{k\sqrt{p}} \\ \frac{d \pi}{d t} &= - \frac{p \cos v}{e} \cdot \frac{P \cos Q R}{k\sqrt{p}} + \frac{p + r}{e} \sin v \frac{P \cos Q S}{k\sqrt{p}} + (1 - \cos i) \frac{d \Omega}{d t} \\ \frac{d \Omega}{d t} &= + \frac{r \sin (v + \pi - \Omega)}{\sin i} \cdot \frac{P \cos Q W}{k\sqrt{p}} \\ \frac{d i}{d t} &= + r \cos (v + \pi - \Omega) \frac{P \cos Q W}{k\sqrt{p}} \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

Wollte man hier, um sich noch näher an den astronomischen Sprachgebrauch anzuschliessen, die mittlere Länge ... L ... statt der mittleren Anomalie einführen, wo also:

$$\begin{aligned} L &= M + \pi \\ \frac{d L}{d t} &= \frac{d M}{d t} + \frac{d \pi}{d t}, \end{aligned}$$

so würde:

$$\begin{aligned} \frac{d L}{d t} &= - \left\{ 2 r \cos \Phi + p \tg \frac{1}{2} \Phi \cos v \right\} \frac{P \cos Q R}{k\sqrt{p}} + (p + r) \tg \frac{1}{2} \Phi \sin v \frac{P \cos Q S}{k\sqrt{p}} \\ &\quad + (1 - \cos i) \frac{d \Omega}{d t} + \int \frac{d n}{d t} d t. \end{aligned}$$

Das nächste Geschäft wird jetzt sein müssen, den wirklichen Ausdruck für die störende Kraft und ihre Richtung, oder die störende Kraft nach drei rechtwinkligen Richtungen zerlegt zu geben. Die Wahl dieser Coordinatenachsen für die Zerlegung der störenden Kraft ist völlig willkürlich, da man in allen Fällen doch aus ihnen wieder auf die Richtungen R , S , T , W übergangen muss, diese letzteren aber nur durch den Ort und die Richtung der Bewegung des gestörten Planeten bestimmt werden. Die bei ω , Ω und i getroffene Wahl der Ebene, welche bei der Bestimmung der Lage der Bahn des gestörten Planeten im Raume zu Grunde gelegt worden, hat auf die Zerlegung der Kraft nach bestimmten Richtungen keinen Einfluss.

Wir beziehen den Ort jedes Planeten immer auf die Sonne, folglich bestimmen wir auch nicht seine wahre Bahn im Raum, sondern nur seine relative in Bezug auf den jedesmaligen Ort der Sonne (cf. Abtheilung I, Vorlesung 2). Da aber die störenden Planeten ebenfalls auf die Sonne einwirken und ihren absoluten Ort ändern, so wird

es nothwendig, zugleich mit der Wirkung, welche sie auf den Planeten äussern, auch die Wirkung zu berücksichtigen, welche sie auf die Sonne ausüben. Sei hierzu irgend ein Punkt im Raum als Anfangspunkt bei drei willkürlichen rechtwinkligen Coordinaten angenommen. Seien die Coordinaten der Sonne in Bezug auf ihn:

$$X, Y, Z, \text{ ihre Masse } = k^2.$$

Die Coordinaten des gestörten Planeten in demselben Sinne seien:

$$\xi, \eta, \zeta, \text{ seine Masse } = m k^2,$$

das letztere, weil wir gewohnt sind, die Masse der Sonne als Einheit bei den Massen zu Grunde zu legen, nicht die Einheit, welche man die absolute nennen könnte. Seien dieselben Grössen bei den störenden Planeten:

$$\begin{aligned} \xi', \eta', \zeta', & \quad \text{Masse} = m' k^2 \\ \xi'', \eta'', \zeta'', & \quad \text{,,} = m'' k^2 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Die Entfernungen von der Sonne bei dem gestörten und den störenden Planeten seien:

$$r, r', r'' \text{ etc.,}$$

wo folglich:

$$\begin{aligned} r^2 &= (X - \xi)^2 + (Y - \eta)^2 + (Z - \zeta)^2 \\ r'^2 &= (X - \xi')^2 + (Y - \eta')^2 + (Z - \zeta')^2 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Und schliesslich seien die Entfernungen des ersten, zweiten und folgenden störenden Planeten von dem gestörten:

$$\varrho, \varrho', \varrho'' \text{ etc.,}$$

wonach:

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= (\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2 \\ \varrho'^2 &= (\xi'' - \xi)^2 + (\eta'' - \eta)^2 + (\zeta'' - \zeta)^2. \end{aligned}$$

Alle Kräfte sind anziehende Kräfte, oder solche, welche jedes Theilchen des angezogenen Körpers zu sich hin zu nähern streben. Hiernach wird die Gesamtwirkung aller Kräfte, sofern sie die Sonne anziehen, dem Newton'schen Gesetze der Anziehung im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernungen folgen und nach den Coordinatenaxen zerlegt sind, in den Gleichungen enthalten sein:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} &= \frac{\xi - X}{r^3} m k^2 + \frac{\xi' - X}{r'^3} m' k^2 + \frac{\xi'' - X}{r''^3} m'' k^2 \dots \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} &= \frac{\eta - Y}{r^3} m k^2 + \frac{\eta' - Y}{r'^3} m' k^2 + \frac{\eta'' - Y}{r''^3} m'' k^2 \dots \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} &= \frac{\zeta - Z}{r^3} m k^2 + \frac{\zeta' - Z}{r'^3} m' k^2 + \frac{\zeta'' - Z}{r''^3} m'' k^2 \dots \end{aligned}$$

und die Gesamtwirkung auf den gestörten Planeten wird die Gleichungen geben:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \frac{X - \xi}{r^3} k^2 + \frac{\xi' - \xi}{\varrho^3} m' k^2 + \frac{\xi'' - \xi}{\varrho'^3} m'' k^2 \dots \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= \frac{Y - \eta}{r^3} k^2 + \frac{\eta' - \eta}{\varrho^3} m' k^2 + \frac{\eta'' - \eta}{\varrho'^3} m'' k^2 \dots \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \frac{Z - \zeta}{r^3} k^2 + \frac{\zeta' - \zeta}{\varrho^3} m' k^2 + \frac{\zeta'' - \zeta}{\varrho'^3} m'' k^2 \dots \end{aligned}$$

Die Verbindung beider Systeme giebt für die Wirkung der sämtlichen Kräfte, in Bezug auf die relativen Coordinaten des gestörten Planeten gegen die Sonne $\xi - X$, $\eta - Y$, $\zeta - Z$, Gleichungen, welche sich so schreiben lassen:

$$\begin{aligned}\frac{d^2(\xi - X)}{dt^2} + \frac{\xi - X}{r^3} k^2 (1 + m) &= \left(\frac{\xi' - \xi}{\varrho^3} - \frac{\xi' - X}{r'^3} \right) m' k^2 \\ &+ \left(\frac{\xi'' - \xi}{\varrho'^3} - \frac{\xi'' - X}{r''^3} \right) m'' k^2 \dots \\ \frac{d^2(\eta - Y)}{dt^2} + \frac{\eta - Y}{r^3} k^2 (1 + m) &= \left(\frac{\eta' - \eta}{\varrho^3} - \frac{\eta' - Y}{r'^3} \right) m' k^2 \\ &+ \left(\frac{\eta'' - \eta}{\varrho'^3} - \frac{\eta'' - Y}{r''^3} \right) m'' k^2 \dots \\ \frac{d^2(\zeta - Z)}{dt^2} + \frac{\zeta - Z}{r^3} k^2 (1 + m) &= \left(\frac{\zeta' - \zeta}{\varrho^3} - \frac{\zeta' - Z}{r'^3} \right) m' k^2 \\ &+ \left(\frac{\zeta'' - \zeta}{\varrho'^3} - \frac{\zeta'' - Z}{r''^3} \right) m'' k^2 \dots\end{aligned}$$

Bezeichnet man also überhaupt die relativen Coordinaten jedes Planeten gegen die Sonne mit $x, y, z; x', y', z'$ etc., wonach

$$\begin{array}{lll}\xi - X = x & \xi' - X = x' & \xi'' - X = x'' \\ \eta - Y = y & \eta' - Y = y' & \eta'' - Y = y'' \\ \zeta - Z = z & \zeta' - Z = z' & \zeta'' - Z = z'' \text{ etc.,}\end{array}$$

folglich auch:

$$\begin{array}{ll}\xi' - \xi = x' - x & \xi'' - \xi = x'' - x \\ \eta' - \eta = y' - y & \eta'' - \eta = y'' - y \\ \zeta' - \zeta = z' - z & \zeta'' - \zeta = z'' - z \text{ etc.,}\end{array}$$

so werden die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)x}{r^3} &= \left(\frac{x' - x}{\varrho^3} - \frac{x'}{r'^3} \right) m' k^2 + \left(\frac{x'' - x}{\varrho'^3} - \frac{x''}{r''^3} \right) m'' k^2 \dots \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)y}{r^3} &= \left(\frac{y' - y}{\varrho^3} - \frac{y'}{r'^3} \right) m' k^2 + \left(\frac{y'' - y}{\varrho'^3} - \frac{y''}{r''^3} \right) m'' k^2 \dots \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)z}{r^3} &= \left(\frac{z' - z}{\varrho^3} - \frac{z'}{r'^3} \right) m' k^2 + \left(\frac{z'' - z}{\varrho'^3} - \frac{z''}{r''^3} \right) m'' k^2 \dots\end{aligned}$$

Die Vergleichung dieser Formeln mit den Formeln (5), welche den Differentialgleichungen der Elemente zu Grunde liegen, zeigt, dass die linke Seite ganz übereinstimmt, wenn man nur überall in den Differentialgleichungen (13) statt:

$$k \dots k \sqrt{1+m}$$

schreibt, wenn nämlich dem gestörten Planeten im Verhältniss zur Sonnenmasse die Masse m zukäme. Es wird indessen nicht nöthig sein, diese Aenderung in die Formeln wirklich einzuführen, da für alle Fälle, auf welche die Methode, wie sie hier angegeben wird, bisher angewendet ist, m als ganz unmerklich und noch nicht bestimmbar, gleich Null gesetzt worden. Sollten Fälle später vorkommen, in welchen es merklich ist, so wird man sich an diese Abänderung erinnern müssen.

Um die rechte Seite übereinstimmend zu machen, wird man setzen müssen:

$$\left. \begin{aligned}P \cos Q X &= \left(\frac{x' - x}{\varrho^3} - \frac{x'}{r'^3} \right) m' k^2 + \left(\frac{x'' - x}{\varrho'^3} - \frac{x''}{r''^3} \right) m'' k^2 \dots \\ P \cos Q Y &= \left(\frac{y' - y}{\varrho^3} - \frac{y'}{r'^3} \right) m' k^2 + \left(\frac{y'' - y}{\varrho'^3} - \frac{y''}{r''^3} \right) m'' k^2 \dots \\ P \cos Q Z &= \left(\frac{z' - z}{\varrho^3} - \frac{z'}{r'^3} \right) m' k^2 + \left(\frac{z'' - z}{\varrho'^3} - \frac{z''}{r''^3} \right) m'' k^2 \dots\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

und mittelst dieser Werthe $P \cos QR$, $P \cos QS$, $P \cos QT$, $P \cos QW$ bestimmen. Allein da die Richtung der ursprünglichen Coordinatenaxen für diese Zerlegung willkürlich ist, und unter den vier Richtungen R , S , T , W , auf welche man die störende Kraft projectiren muss, schon drei auf einander rechtwinklig sich befinden, nämlich R , S , W , so wird man am directesten zum Ziele kommen, wenn man als Coordinatenaxen selbst diese Richtungen wählt, und folglich die Coordinaten x', y', z' ; $x'', y'', z'' \dots$ der störenden Planeten auf eine Axe der x bezieht, welche die Richtung R (Radius vector des gestörten Planeten) hat, eine Axe der Y , welche die Richtung S hat, senkrecht auf R in der Ebene der Bahn des gestörten Planeten, und eine Axe der z , deren Richtung durch W als senkrecht auf der Ebene der Bahn des gestörten Planeten bezeichnet wird. Für die Coordinaten des gestörten Planeten wird in diesem Falle offenbar:

$$x = r \quad y = 0 \quad z = 0.$$

Gewöhnlich wird angenommen werden können, dass der jedesmalige Ort des störenden Planeten für jeden einzelnen gegeben ist durch seine Entfernung von der Sonne r' , r'' etc., seine Länge in der Bahn L' , L'' etc., seinen Knoten Ω' , Ω'' etc., beide letzteren gezählt in der Ekliptik von der Linie der Frühlingsstage- und Nachtgleichen an, und die Neigung seiner Bahn gegen die Ekliptik i' , i'' etc. Bezeichnet man die hierdurch bestimmte Richtung des Radius vectors für jeden Planeten mit R' , R'' etc., so werden die auf die Axen R , S , W bezogenen Coordinaten sein:

$$\begin{aligned} x' &= r' \cos RR' & y' &= r' \cos SR' & z' &= r' \cos WR' \\ x'' &= r'' \cos RR'' & y'' &= r'' \cos SR'' & z'' &= r'' \cos WR'' \text{ etc.} \end{aligned}$$

Man kennt, vermöge der oben gegebenen Ausdrücke, die Coordinaten in Bezug auf die Axen, Linie der Frühlingsstage- und Nachtgleichen, senkrechte darauf in der Ekliptik, senkrechte auf der Ekliptik. Wenn man diese Axen folglich mit X , Y , Z bezeichnet, so hat man, wenn der Kürze wegen:

$$L' - \Omega' = u'$$

gesetzt wird, sofort:

$$\begin{aligned} \cos R' X &= \cos u' \cos \Omega' - \sin u' \sin \Omega' \cos i' \\ \cos R' Y &= \cos u' \sin \Omega' + \sin u' \cos \Omega' \cos i' \\ \cos R' Z &= \sin u' \sin i' \end{aligned}$$

und ähnliche Werthe für $\cos R'' X$, $\cos R'' Y$, $\cos R'' Z$ etc. Ferner hat man wie oben, wenn $v + \omega = u$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \cos R X &= \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i \\ \cos R Y &= \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i \\ \cos R Z &= \sin u \sin i \\ \cos S X &= - \sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i \\ \cos S Y &= - \sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i \\ \cos S Z &= \cos u \sin i \\ \cos W X &= \sin \Omega \sin i \\ \cos W Y &= - \cos \Omega \sin i \\ \cos W Z &= \cos i. \end{aligned}$$

Aus der successiven Verbindung dieser Systeme erhält man:

$$\begin{aligned} \cos R R' &= \cos R X \cos R' X + \cos R Y \cos R' Y + \cos R Z \cos R' Z \\ \cos S R' &= \cos S X \cos R' X + \cos S Y \cos R' Y + \cos S Z \cos R' Z \\ \cos W R' &= \cos W X \cos R' X + \cos W Y \cos R' Y + \cos W Z \cos R' Z \end{aligned}$$

und ähnlich bei $\cos R R''$, $\cos S R''$, $\cos W R''$ etc. Führt man die Multiplicationen wirklich aus, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 \cos R R' &= \cos u \{ \cos(\delta' - \delta) \cos u' - \sin u' \sin(\delta' - \delta) \cos i' \} \\
 &\quad + \sin u \{ \sin i \sin i' + \cos i \cos i' \cos(\delta' - \delta) \} \sin u' \\
 &\quad + \sin u \{ \cos i \sin(\delta' - \delta) \} \cos u' \\
 \cos S R' &= \cos u \{ \sin i \sin i' + \cos i \cos i' \cos(\delta' - \delta) \} \sin u' \\
 &\quad + \cos u \{ \cos i \sin(\delta' - \delta) \} \sin u' \\
 &\quad - \sin u \{ \cos(\delta' - \delta) \cos u' - \sin u' \sin(\delta' - \delta) \cos i' \} \\
 \cos W R' &= - \sin(\delta' - \delta) \sin i \cos u' \\
 &\quad + \{ \sin i' \cos i - \sin i \cos i' \cos(\delta' - \delta) \} \sin u'.
 \end{aligned}$$

Setzt man hier zur Vereinfachung die Coëfficienten, welche allein aus δ, δ', i, i' gebildet sind, dem Sinus und Cosinus verschiedener Hülfswinkel proportional, wobei die Aehnlichkeit mit den Formeln der sphärischen Trigonometrie von selbst darauf führt, dass die Factoren, mit welchen diese neuen Sinus und Cosinus multiplicirt werden müssen, selbst einem Sinus oder Cosinus gleichgenommen werden können, weil sie immer < 1 sind, und sucht man zugleich den Ausdruck des Cosinus, wenn jeder Factor einem Sinus gleichgesetzt ist, so reicht man mit folgenden Hülfswinkeln aus:

$$\begin{aligned}
 \sin a \sin A &= \cos(\delta' - \delta) \\
 \sin a \cos A &= - \sin(\delta' - \delta) \cos i' \\
 \cos a &= \sin(\delta' - \delta) \sin i' \\
 \sin b \sin B &= \sin(\delta' - \delta) \cos i \\
 \sin b \cos B &= \sin i' \sin i + \cos i' \cos i \cos(\delta' - \delta) \\
 \cos b &= \cos i' \sin i - \sin i' \cos i \cos(\delta' - \delta) \\
 \sin c \sin C &= - \sin(\delta' - \delta) \sin i \\
 \sin c \cos C &= \sin i' \cos i - \cos i' \sin i \cos(\delta' - \delta) \\
 \cos c &= \cos i' \cos i + \sin i' \sin i \cos(\delta' - \delta)
 \end{aligned}$$

Dass diese Annahmen gestattet sind, zeigt sich daraus, dass die Summe der Quadrate der drei Gleichungen in jedem Systeme $a A, b B, c C$, auf beiden Seiten identisch gleich 1 wird. Die Einführung dieser Werthe, die so lange wie δ, δ', i, i' als constant betrachtet werden, ebenfalls constant sind, giebt:

$$\begin{aligned}
 \cos R R' &= \sin a \sin(A + u') \cos u + \sin b \sin(B + u') \sin u \\
 \cos S R' &= \sin b \sin(B + u') \cos u - \sin a \sin(A + u') \sin u \\
 \cos W R' &= \sin c \sin(C + u').
 \end{aligned}$$

Die Rechnung hiernach würde hauptsächlich deshalb weitläufig werden, weil man zu u' drei verschiedene constante Winkel A, B, C zu addiren haben würde. Um bloss eine solche Addition nöthig zu haben, wo C des einfachen letzten Ausdruckes den Vorzug verdient, schreibe man für:

$$\begin{aligned}
 A + u' \dots C + u' + A - C \\
 B + u' \dots C + u' + B - C
 \end{aligned}$$

und entwickle $\sin(A + u')$ und $\sin(B + u')$ unter dieser Form wirklich. Man erhält so:

$$\begin{aligned}
 \cos R R' &= \{ \sin b \sin(B - C) \sin u + \sin a \sin(A - C) \cos u \} \cos(C + u') \\
 &\quad + \{ \sin b \cos(B - C) \sin u + \sin a \cos(A - C) \cos u \} \sin(C + u') \\
 \cos S R' &= \{ \sin b \sin(B - C) \cos u - \sin a \sin(A - C) \sin u \} \cos(C + u') \\
 &\quad + \{ \sin b \cos(B - C) \cos u - \sin a \cos(A - C) \sin u \} \sin(C + u').
 \end{aligned}$$

Sucht man jetzt den wahren Werth von $\sin b \sin(B - C)$, $\sin a \sin(A - C)$, $\sin b \cos(B - C)$, $\sin a \cos(A - C)$, als Function von δ, δ', i, i' , so findet sich bei der wirklichen Entwicklung:

$$\begin{aligned}\sin b \sin c \sin (B - C) &= \sin b \sin B \sin c \cos C - \sin b \cos B \sin c \sin C \\ &= \sin (\delta' - \delta) \sin i' \\ &= \cos a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin a \sin c \sin (A - C) &= -\cos i' \sin i + \sin i' \cos i \cos (\delta' - \delta) \\ &= -\cos b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin b \sin c \cos (B - C) &= -\{ \cos i' \sin i - \sin i' \cos i \cos (\delta' - \delta) \} \times \\ &\quad \{ \cos i' \cos i + \sin i' \sin i \cos (\delta' - \delta) \} \\ &= -\cos b \cos c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin a \sin c \cos (A - C) &= -\{ \sin i' \sin (\delta' - \delta) \} \times \\ &\quad \{ \cos i' \cos i + \sin i' \sin i \cos (\delta' - \delta) \} \\ &= -\cos a \cos c.\end{aligned}$$

Es ist folglich, wenn man jede Seite dieser vier Gleichungen quadriert und $\sin(B - C)^2$ mit $\cos(B - C)^2$, $\sin(A - C)^2$ mit $\cos(A - C)^2$ verbindet:

$$\begin{aligned}\sin b^2 \sin c^2 &= \cos a^2 + \cos b^2 \cos c^2 \\ \sin a^2 \sin c^2 &= \cos b^2 + \cos a^2 \cos c^2,\end{aligned}$$

aus welchen beiden Gleichungen auf dieselbe Weise folgt, dass:

$$\sin c^2 = \cos a^2 + \cos b^2.$$

Setzt man also, was gestattet ist, $\cos a$ und $\cos b$ dem Sinus und Cosinus eines Hülfs-
winkels proportional, so muss man den gemeinschaftlichen Factor $\sin c$ einführen. Sei
deshalb:

$$\begin{aligned}\cos a &= \sin (\delta' - \delta) \sin i' = \sin c \sin D \\ -\cos b &= -\cos i' \sin i + \sin i' \cos i \cos (\delta' - \delta) = \sin c \cos D,\end{aligned}$$

so wird:

$$\begin{aligned}\sin b \sin (B - C) &= \sin D \\ \sin a \sin (A - C) &= \cos D \\ \sin b \cos (B - C) &= \cos c \cos D \\ \sin a \cos (A - C) &= -\cos c \sin D\end{aligned}$$

und damit:

$$\begin{aligned}\cos R R' &= \cos (u - D) \cos (u' + C) + \sin (u - D) \sin (u' + C) \cos c \\ \cos S R' &= -\sin (u - D) \cos (u' + C) + \cos (u - D) \sin (u' + C) \cos c \\ \cos W R' &= \sin (u' + C) \sin c.\end{aligned}$$

Setzt man also jetzt noch:

$$\begin{aligned}\cos (u' + C) &= \cos \beta' \cos \lambda' \\ \cos c \sin (u' + C) &= \cos \beta' \sin \lambda' \\ \sin c \sin (u' + C) &= \sin \beta',\end{aligned}$$

was gestattet ist, weil die Summe der Quadrate auf beiden Seiten = 1, so wird:

$$\begin{aligned}\cos R R' &= \cos \beta' \cos [\lambda' - (u - D)] \\ \cos S R' &= \cos \beta' \sin [\lambda' - (u - D)] \\ \cos W R' &= \sin \beta' .\end{aligned}$$

Die ganze Berechnung beschränkt sich folglich auf die Grössen c , C und D , aus
welchen man λ' und β' ableitet. Ueberhaupt sind aber die Constanten a A , b B , c C ,
völlig analog den durch Gauss eingeführten Constanten zur Transformation der Coor-
dinaten eines Planeten von der Ekliptik als Ebene der xy auf den Aequator, und der
geometrischen Bedeutung nach, wenn man die Richtung nach dem Pol der störenden
Planetenbahn mit K bezeichnet, die Richtungen nach dem aufsteigenden Knoten der
Bahn des gestörten Planeten mit δ , die senkrechte darauf in der Ebene der Bahn des
gestörten Planeten mit U , die nach dem Pol der Ekliptik mit E , so sind die Werthe von:

$$\begin{array}{ll} a \dots K \oslash & A \dots \text{Winkel } \oslash KE \\ b \dots KU & B \dots \text{Winkel } UKE \\ c \dots KW & C \dots \text{Winkel } WKE \end{array}$$

die letzteren immer in einem Sinne, so wie wir die Längen zählen, herumgezählt, wobei jedesmal von $\oslash K$, oder UK und WK angefangen wird, bis man zu den Seiten KE gelangt ist. Da nun, wenn man die Richtung nach dem Durchschnittspunkte der beiden Bahnen des störenden Planeten und des gestörten, und zwar dem aufsteigenden Knoten des störenden Planeten in der Bahn des gestörten, mit I , die nach \oslash' mit \oslash' bezeichnet

$$\begin{array}{l} EK \dots \text{senkrecht ist auf } K\oslash' \\ WK \dots \text{senkrecht ist auf } KI, \end{array}$$

so wird der Winkel EKW oder:

$$360^\circ - C = \oslash' KI$$

oder gleich dem Argument der Breite des Durchschnittspunktes beider Bahnen, gezählt auf der störenden Planetenbahn. Ferner ist $c = WK$ gleich der Neigung der beiden Bahnen gegen einander und damit folgt, dass D das Argument der Breite des Durchschnittspunktes, gezählt auf der gestörten Planetenbahn, ist, wie die Betrachtung des sphärischen Dreieckes $KI\oslash$ sogleich ergibt. Endlich wird auch β' und λ' die heliocentrische Breite und Länge des störenden Planeten, in Bezug auf die Bahn des gestörten Planeten, und die Länge dabei von dem Durchschnittspunkte beider Bahnen an gezählt. Um diese geometrische Bedeutung mehr in Erinnerung zu bringen, vertausche man:

$$\begin{array}{l} 360^\circ - C = \oslash' KI \dots \text{mit } N' \\ D = \oslash WI \dots \text{mit } N \\ c \dots \text{mit } I, \end{array}$$

so sind die sämtlichen Formeln, welche hier gebraucht werden, die folgenden:

$$\left. \begin{array}{l} \sin I \sin N = \sin(\oslash' - \oslash) \sin i' \\ \sin I \cos N = -\cos i' \sin i + \sin i' \cos i \cos(\oslash' - \oslash) \\ \sin I \sin N' = \sin(\oslash' - \oslash) \sin i \\ \sin I \cos N' = \sin i' \cos i - \cos i' \sin i \cos(\oslash' - \oslash) \\ \cos I = \cos i' \cos i + \sin i' \sin i \cos(\oslash' - \oslash) \end{array} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

Größen, welche so lange constant sein werden, als man i , i' , \oslash , \oslash' als constant betrachtet. Setzt man für u' seinen Werth $L' - \oslash'$, so hat man dann zu berechnen:

$$\left. \begin{array}{l} \cos \beta' \cos \lambda' = \cos[L' - (\oslash' + N')] \\ \cos \beta' \sin \lambda' = \sin[L' - (\oslash' + N')] \cos I \\ \sin \beta' = \sin[L' - (\oslash' + N')] \sin I \end{array} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

und wenn man ebenso für u seinen Werth $v + \omega$ setzt, so vereinige man unter einer Bezeichnung:

$$\pi - \oslash - N = \omega',$$

dann wird:

$$\left. \begin{array}{l} x = r \quad x' = r' \cos \beta' \cos[\lambda' - (v + \omega')] \\ y = 0 \quad y' = r' \cos \beta' \sin[\lambda' - (v + \omega')] \\ z = 0 \quad z' = r' \sin \beta' \end{array} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

Hieraus muss jetzt noch ϱ gefunden werden, vermöge:

$$\varrho^2 = r'^2 - 2r r' \cos \beta' \cos[\lambda' - (v + \omega')] + r^2.$$

Für die numerische Rechnung nimmt man am bequemsten:

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta' \cos [\lambda' - (v + \omega')] &= \cos \gamma' \\ r' \sin \gamma' &= \varrho \sin l' \\ r - r' \cos \gamma' &= \varrho \cos l' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

wobei man die Winkel γ' und l' nicht wirklich aufzusuchen braucht, sondern unmittelbar bei ihnen von dem Cosinus zum Sinus übergeht, und von der Tangente zum Sinus oder Cosinus, je nachdem die Interpolation am bequemsten ist, oder überhaupt immer die grösste der beiden Functionen anwendet.

Man kann die Berechnung von N und N' einmal durch eingeführte Hilfsgrössen bequemer machen. Wenn:

$$\begin{aligned} \sin i' \cos (\oslash' - \oslash) &= f \sin F & \sin i \cos (\oslash' - \oslash) &= g \sin G \\ \cos i' &= f \cos F & \cos i &= g \cos G, \end{aligned}$$

so ist:

$$\left. \begin{aligned} \sin I \sin N &= \sin (\oslash' - \oslash) \sin i' & \sin I \sin N' &= \sin (\oslash' - \oslash) \sin i \\ \sin I \cos N &= f \sin (F - i) & \sin I \cos N' &= g \sin (i' - G) \\ \cos I &= f \cos (F - i) & \cos I &= g \cos (i' - G) \end{aligned} \right\} \dots \dots (19)$$

Man kann aber auch zweitens, weil diese Formeln eigentlich etwas Ueberflüssiges enthalten, den Werth von $\sin I$ zweimal finden lassen, und weil im Grunde doch die Aufgabe auf die vollständige Auflösung eines sphärischen Dreieckes hinauskommt, in welchem die Seiten sind:

$$\oslash' - \oslash, \quad N, \quad N'$$

und die gegenüberliegenden Winkel:

$$I, \quad 180 - i', \quad i,$$

noch etwas bequemer die Gauss'schen Formeln, aus drei neben einander liegenden Stücken eines sphärischen Dreieckes die übrigen zu finden, hier anwenden. Die Anwendung auf den gegenwärtigen Fall giebt:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} I \sin \frac{1}{2} (N + N') &= \sin \frac{1}{2} (\oslash' - \oslash) \sin \frac{1}{2} (i' + i) \\ \sin \frac{1}{2} I \cos \frac{1}{2} (N + N') &= \cos \frac{1}{2} (\oslash' - \oslash) \sin \frac{1}{2} (i' - i) \\ \cos \frac{1}{2} I \sin \frac{1}{2} (N - N') &= \sin \frac{1}{2} (\oslash' - \oslash) \cos \frac{1}{2} (i' + i) \\ \cos \frac{1}{2} I \cos \frac{1}{2} (N - N') &= \cos \frac{1}{2} (\oslash' - \oslash) \cos \frac{1}{2} (i' - i) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

wodurch man völlig scharf, da jeder Winkel durch die Tangente bestimmt wird, ohne etwas Ueberflüssiges zu rechnen, und mit der Controle, dass der Werth von $\sin \frac{1}{2} I$ und $\cos \frac{1}{2} I$ demselben Winkel entsprechen muss, das Verlangte erhält.

Sind auf diese Weise die Coordinaten auf den Radius vector des gestörten Planeten bezogen worden, so hat man zu berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{x' - x}{\varrho^3} &= \frac{x'}{r'^3} \\ \frac{y' - y}{\varrho^3} &= \frac{y'}{r'^3} \\ \frac{z' - z}{\varrho^3} &= \frac{z'}{r'^3} \end{aligned}$$

welche sich für die hier anzuwendenden Werthe $x = r$, $y = 0$, $z = 0$ bequemer so schreiben lassen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r^3} &= \Delta \\ R' &= \Delta x' - \frac{r}{\varrho^3} \quad S' = \Delta y' \quad W' = \Delta z' \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (21)$$

Führt man für jeden störenden Planeten diese Rechnungen auf gleiche Weise durch, wobei natürlich nicht bloss N' , I' , x' , y' , z' , R' , S' , W' übergehen in N'' , I'' , x'' , y'' , z'' , R'' , S'' , W'' , sondern auch das N sich ändert, so werden endlich die störenden Kräfte projicirt auf den Radius vector des gestörten Planeten, und die damit verbundenen Richtungen:

$$\begin{aligned} P \cos QR &= m' R' k^2 + m'' R'' k^2 + \dots \\ P \cos QS &= m' S' k^2 + m'' S'' k^2 + \dots \\ P \cos QW &= m' W' k^2 + m'' W'' k^2 + \dots \end{aligned}$$

und zum Behufe des vollständigen Ausdrucks der Differentialquotienten $\frac{da}{dt}$, $\frac{d\varepsilon}{dt}$ etc. wird nur noch die Ermittlung von $c P \cos QT$ nöthig sein. Es ist aber wegen:

$$\cos QT = \cos QR \cos RT + \cos QS \cos ST + \cos QW \cos WT,$$

wenn man die oben gegebenen Werthe von $\cos QT$, $\cos ST$, $\cos WT$ substituirt:

$$\begin{aligned} c P \cos QT &= \frac{k}{\sqrt{p}} e \sin v P \cos QR + \frac{k \sqrt{p}}{r} P \cos QS \\ &= m' k^3 \left\{ \frac{e \sin v}{\sqrt{p}} R' + \frac{\sqrt{p}}{r} S' \right\} \\ &\quad + m'' k^3 \left\{ \frac{e \sin v}{\sqrt{p}} R'' + \frac{\sqrt{p}}{r} S'' \right\} \text{ etc.} \end{aligned}$$

Setzt man also der Kürze halber:

$$\begin{aligned} P \cos QR &= R_0 \cdot k^2 \\ P \cos QS &= S_0 \cdot k^2 \\ P \cos QW &= W_0 \cdot k^2, \end{aligned}$$

wodurch:

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= m' R' + m'' R'' + \dots \\ S_0 &= m' S' + m'' S'' + \dots \\ W_0 &= m' W' + m'' W'' + \dots \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (22)$$

und substituirt diese Kräfte in die obigen Werthe von $\frac{dn}{dt}$, $\frac{dM}{dt}$ etc., indem man auch $c P \cos QT$ dadurch ausdrückt, so wird die zur Berechnung fertige Form die folgende:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= - \frac{3k}{\sqrt{a}} e \sin v \frac{k R_0}{\sqrt{p}} - \frac{3k}{\sqrt{a}} \cdot \frac{p}{r} \cdot \frac{k S_0}{\sqrt{p}} \\ \frac{dM}{dt} &= - \left\{ 2r \cos \Phi - p \cotg \Phi \cos v \right\} \frac{k R_0}{\sqrt{p}} - (p + r) \cotg \Phi \sin v \frac{k S_0}{\sqrt{p}} + \int \frac{dn}{dt} \cdot dt. \\ \frac{d\Phi}{dt} &= a \cos \Phi \sin v \frac{k R_0}{\sqrt{p}} + a \cot g \Phi \left(\frac{p}{r} - \frac{r}{a} \right) \frac{k S_0}{\sqrt{p}} \\ \frac{d\pi}{dt} &= - \frac{p \cos v}{e} \cdot \frac{k R_0}{\sqrt{p}} + \frac{p + r}{e} \sin v \frac{k S_0}{\sqrt{p}} + (1 - \cos i) \frac{d\Omega}{dt} \end{aligned}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin(v + \pi - \Omega)}{\sin i} \cdot \frac{k W_0}{\sqrt{p}}$$

$$\frac{di}{dt} = r \cos(v + \pi - \Omega) \frac{k W_0}{\sqrt{p}}$$

oder, wenn man statt $M \dots L$ einführen will:

$$\frac{dL}{dt} = - \left\{ 2 r \cos \Phi + p t g \frac{1}{2} \Phi \cos v \right\} \frac{k R_0}{\sqrt{p}} + (p + r) t g \frac{1}{2} \Phi \sin v \frac{k S_0}{\sqrt{p}}$$

$$+ (1 - \cos i) \frac{d\Omega}{dt} + \int \frac{dn}{dt} dt.$$

Wiewohl es nun bei einer praktischen Arbeit der vorliegenden Art, mit Hülfe dieser Gleichungen die Störungen für einen kleinen Planeten oder Kometen zu berechnen, eigentlich nicht möglich ist, die absolut zweckmässigste Form der Ausführung anzugeben, die Gewöhnung des Einzelnen an gewisse Einrichtungen vielmehr stets Aenderungen herbeiführen wird; so ist es sicherlich von hohem Werth, die Form kennen zu lernen, welche ein so erfahrener und schöpferischer Rechner wie Encke gewählt hat. Daher mögen seine mit dem grössten Detail entwickelten Erwägungen und Vorschriften, sammt dem von ihm gegebenen ausführlichen Beispiel, hier noch Platz finden.

Zuerst wird man sich über die Grösse der Intervalle der Zeit, für welche man die Differentialquotienten berechnet, um sie nachher integriren zu können, eine feste Bestimmung zu machen suchen müssen. Diese hängt sowohl von der störenden als der gestörten Planetenbahn ab, und muss so gewählt werden, dass die berechneten Oerter mit aller erforderlichen Schärfe bei gehöriger Interpolation die dazwischen liegenden geben würden. Für die störenden Planeten, insofern es sich bloss um die älteren handelt, scheint die Erfahrung zu ergeben, dass das Minimum der Grösse der Intervalle etwa ein Zwölftheil der Umlaufszeit beträgt, so dass, wenn man die ganze Periode des Planetenjahres in zwölf Theile theilt, man mit hinlänglicher Genauigkeit den ganzen Lauf bestimmt hat. So z. B. geben heliocentrische Jupiterörter, von 180 zu 180 Tagen berechnet, noch das Zehnthel der Bogensekunde, oder überhaupt alles so scharf, als die Tafeln erlauben. Dieses Intervall entspricht etwa dem vierundzwanzigsten Theile der Umlaufszeit. Bei der Vergrösserung um das Doppelte wird man schwerlich mehr als eine oder einige Secunden fehlen, eine Grösse, welche ganz vernachlässigt werden kann. Bei Mercur können die Fehler etwas stärker sein, immerhin werden sie unmerklich. Denn da der Hauptfehler von der Mittelpunktsgleichung herrühren wird, und man bei der Entwicklung derselben in eine periodische Function, die nach den Vielfachen der mittleren Länge unter dem Sinuszeichen fortschreitet, aus zwölf gleich vertheilten berechneten Werthen der Strenge nach die fünf ersten Glieder, also bis zu $\sin 5M$ erhalten wurde, so können die kleinen möglichen Irrthümer der Rechnung und die kleinen Ungleichheiten der Störungen niemals die Genauigkeit des Ortes wesentlich beeinträchtigen.

Mehr indessen noch als durch den störenden Planeten wird unter übrigens gleichen Umständen die Grösse des Intervalles durch die Bahn des gestörten Planeten bestimmt. Bei jenem geben uns die astronomischen Tafeln die Bestimmung in grösster Schärfe, und ausserdem wirken sie nur auf die Berechnung der Kräfte ein. Die Elemente des gestörten Planeten dagegen sind nur näherungsweise im Voraus bekannt, wenn man die Rechnung nicht doppelt machen, und vermittelst der ersten vorläufigen Integration die Elemente für das definitive Resultat verbessern will. Ausserdem aber kommen sie nicht

bloss bei den Kräften, sondern auch bei den Coëfficienten derselben in den Differentialgleichungen in Betracht. Einen Fehler in der Ermittlung dieser Grössen wegen der nicht absoluten Genauigkeit der Elemente wird man sich jedenfalls gefallen lassen müssen. Er wird sehr verringert durch die Kleinheit aller störenden Kräfte und fast ganz unmerklich, wenn man bei hinlänglich kleinen Intervallen die niemals zu vernachlässigende Vorsicht gebraucht, nach einer nicht zu grossen Anzahl solcher Intervalle die Elemente jedesmal so zu verbessern, wie die vorhergehenden Rechnungen es erfordern. Diese Vorsicht der successiven Verbesserung sollte niemals versäumt werden. Die Differentialgleichungen setzen eigentlich völlige Schärfe der Coëfficienten und Kräfte voraus. Dieser theoretischen Bestimmung sich so viel als möglich zu nähern, muss stets das Augenmerk sein und die kleine Mühe der successiven Correction darf nicht gescheut werden.

Es ist im Allgemeinen nicht wohl möglich, die Grenze zu bestimmen, innerhalb welcher man mit hinreichender Schärfe die Elemente unverändert beibehalten kann. Man könnte dazu zwar etwa den folgenden Weg einschlagen. Man denke sich die Coordinaten in eine Reihe nach Potenzen der Zeit geordnet entwickelt:

$$\begin{aligned}x &= A + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 \dots \\y &= B + B_1 t + B_2 t^2 + B_3 t^3 \dots \\z &= C + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 \dots\end{aligned}$$

Da die Coordinaten und die Projectionen der Lineargeschwindigkeit durch die Störungen nicht geändert werden, so wird, weil:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 2 A_2 + 6 A_3 t \dots \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 2 B_2 + 6 B_3 t \dots \text{etc.},$$

erst der Coëfficient der zweiten Potenz A_2, B_2, C_2 einen Unterschied in der Berechnung des Ortes nach festen und veränderlichen Elementen bewirken können. Giebt man also hier den $\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^2 z}{dt^2}$ die Verbesserung $P \cos Q X, P \cos Q Y, P \cos Q Z$ und bestimmt die P so, dass sie das Maximum ihres Werthes erreichen, so wird man, wenn man die höheren Potenzen vernachlässigt, den Fehler von A_2 im Maximum bestimmen und daraus die Zeit ableiten können, innerhalb welcher x, y oder z um ein Beliebiges fehlerhaft zu werden besorgen lassen. Der Unterschied der Coordinaten, welche nach den gestörten Elementen eigentlich hätten berechnet werden sollen, von denen, welche bei den unverändert gelassenen gefunden sind, beträgt demnach im ersten Gliede, in welchem er sich merklich zeigt:

$$\Delta x = \frac{1}{2} t^2 P \cos Q X + \dots$$

$$\Delta y = \frac{1}{2} t^2 P \cos Q Y + \dots$$

$$\Delta z = \frac{1}{2} t^2 P \cos Q Z + \dots,$$

oder wenn man die Coordinatenaxe in der Richtung R und die Werthe (21) einführt:

$$\Delta x = \frac{1}{2} t^2 \left(\frac{x'}{\varrho^3} - \frac{x'}{r'^3} \right) m' k^2$$

$$\Delta y = \frac{1}{2} t^2 \left(\frac{y'}{\varrho^3} - \frac{y'}{r'^3} \right) m' k^2$$

$$\Delta z = \frac{1}{2} t^2 \left(\frac{z'}{\varrho^3} - \frac{z'}{r'^3} \right) m' k^2,$$

folglich ist für die Zeit t der Abstand beider Oerter von einander:

$$\begin{aligned} \Delta s &= V (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) m' k^2 \\ &= \frac{1}{2} t^2 \sqrt{\left\{ \frac{1}{q^4} + \frac{1}{r'^4} - \frac{2 x' (x' - r) + 2 y' y' + 2 z' z'}{q^3 r'^3} \right\}} \times m' k^2 \\ &= \frac{1}{2} t^2 \sqrt{\left\{ \frac{1}{q^4} + \frac{1}{r'^4} - 2 \cdot \frac{r'^2 - r x'}{q^3 r'^3} \right\}} \times m' k^2. \end{aligned}$$

Für die störenden Planeten kann bei diesem vorläufigen Ueberschlage r' als constant, oder die Bahn derselben als Kreisbahn betrachtet werden. In diesem Falle wird Δs ein Maximum, wenn x' möglichst gross wird, also für $x' = r'$, weil dadurch zugleich der negative Theil entweder am kleinsten, oder selbst positiv, und q am kleinsten wird, nämlich

$$q = \frac{1}{2} (r' - r),$$

je nachdem der störende Planet entfernter oder näher der Sonne ist, als der gestörte. Es wird demnach:

$$\begin{aligned} \Delta s &= \frac{1}{2} t^2 \sqrt{\left(\frac{1}{q^4} + \frac{1}{r'^4} \mp \frac{2}{q^2 r'^2} \right)} \times m' k^2 \\ &= \frac{1}{2} t^2 \left(\frac{1}{q^2} \mp \frac{1}{r'^2} \right) m' k^2. \end{aligned}$$

Will man die Zeit finden, in welcher dieses Δs eine Secunde im heliocentrischen Orte für den gestörten Planeten beträgt, so hat man demnach die Gleichung:

$$\frac{r}{206\,265} = \frac{1}{2} m' k^2 t^2 \left(\frac{1}{q^2} \mp \frac{1}{r'^2} \right)$$

oder:

$$t = \sqrt{\left(\frac{2r}{206\,265\,m'k^2} \right) \left(\frac{q^2 r'^2}{r'^2 \mp q^2} \right)},$$

wo man der Sicherheit halber, um gewiss das Maximum zu bekommen, q so klein annehmen kann, als die Natur der Bahnen überhaupt gestattet. Die Zeit wird dabei von dem Augenblicke an gerechnet, für welchen die unverändert beibehaltenen Elemente gelten.

Für die Vesta z. B. wird ziemlich nahe der möglichst kleinste Werth von q in Bezug auf Jupiter = 2,504 sein, wie er im Januar 1835 wirklich stattfand. Vesta war damals im Aphel, Jupiter nahe dem Perihel. Die correspondirenden Werthe von r und r' sind:

$$\log r = 0,4098 \qquad \log r' = 0,7042.$$

Wenn man also die Jupitersmasse nach Nicolai's Annahme setzt¹⁾:

$$m' = \frac{1}{1053,924},$$

so wird:

$$\log \sqrt{\left(\frac{2}{206\,265\,m'k^2} \right)} = 0,769126$$

und wenn man bei entfernteren störenden Planeten und Anwendung des oberen Zeichens $q = r' - r$ setzt, für den Jupiter:

$$t = 5,877\,q\,r' \sqrt{\left(\frac{1}{r' + q} \right)}$$

also für Vesta t etwa gleich 27 Tagen, so dass man, wenn allein die zweite Potenz von

¹⁾ Den modernen Werth siehe Tafel XX im Anhang. Anmerkung des Herausgebers der 3. Ausgabe.

t berücksichtigt wird, etwa 27 Tage vor der Epoche und 27 nach ihr die Elemente unverändert beibehalten darf, ohne zu befürchten, dass ein Fehler von $1''$ im helio-centrischen Orte dadurch hervorgebracht werde.

Aus dieser Formel geht zugleich hervor, mit welchem Rechte wir bei den Kometen während der meistens kurzen Dauer einer einzelnen Erscheinung die Störungen vernachlässigen können. Betrachtet man nämlich die aus den Beobachtungen abgeleiteten Elemente als diejenigen, welche für die Mitte der Beobachtungszeit gelten, und berücksichtigt man den Umstand, dass die Kometen meistens nahe bei der Sonne gesehen werden, so wird für die unteren Planeten, Jupiter und Saturn, ϱ wenigstens nicht sehr klein gegen r' und folglich wird die Zeit, innerhalb welcher wir ein System unverändert beibehalten können, so gross, dass sie nahe die ganze Dauer der Erscheinung umfasst, wenigstens in Bezug auf die Störungen des Jupiter und Saturn. Für $r = 2$ wird sie mit dem obigen Werthe von r' in Bezug auf Jupiter ± 32 Tage. Die Störungen dieser Planeten werden aber im Allgemeinen die beträchtlicheren sein, so dass, wenn der Komet nicht gerade einem der oberen Planeten, Mercur, Venus, Erde und Mars, allzu nahe gekommen ist, man im Ganzen versichert sein kann, dass die Vernachlässigung der Störungen keinen sehr wesentlichen Einfluss auf die Bahnbestimmung während der Dauer der Erscheinung haben wird.

Diese Grenze ist aber offenbar bei der Berechnung der speciellen Störungen nicht festzuhalten; sie ist viel zu eng, theils weil immer das Maximum des Einflusses genommen ist, theils weil die Fehler in der Bestimmung des Ortes beträchtlich grösser als $1''$ sein können, ohne hier zu schaden. Berücksichtigt man dagegen aber auch den grösseren Einfluss, den Fehler im Orte des gestörten Planeten haben, verglichen mit den Fehlern des störenden Himmelskörpers, so scheint das Resultat, welches die Erfahrung gegeben hat, ziemlich sicher, dass man etwa doppelt so viele Punkte in der Bahn des gestörten Planeten bestimmen muss, als in der Bahn des störenden. Wenn dort also das Minimum der 12. Theil der Umlaufszeit wäre, so würde hier etwa der 24. Theil als Minimum angenommen werden müssen. Hiernach wird man ungefähr die Grösse des anzunehmenden Intervalles zu nehmen haben, und bei der wirklichen Ausführung der Rechnung sich durch die erhaltenen Resultate selbst bestimmen lassen, wie viel man von der ersten Anlage abzuweichen genöthigt wäre. Die Rechnung giebt nämlich zwei Prüfungsmittel, das eine für die angenommene Grösse des Intervalles in Bezug auf die Genauigkeit der davon abhängigen Integration, das andere für die Grösse der Zeiträume, innerhalb welcher man dieselben Elemente unverändert beibehalten darf. Hat man für irgend ein Intervall ω die Differentialquotienten berechnet und integrirt, so integrirte man mit denselben Werthen auch für das doppelt so grosse Intervall 2ω , wozu es nicht nöthig ist, eine andere Rechnung als die leichte Integration noch einmal zu machen. Stimmt das Resultat der letzteren Integration, welches an sich nothwendig ungenauer sein muss, mit dem der ersteren so nahe überein, dass die Unterschiede für die beabsichtigte Schärfe unerheblich sind, so kann man sicher sein, dass das Intervall ω nicht zu gross angenommen ist. So z. B. zeigt es sich bei den Jupiterstörungen der kleineren Planeten, dass ein Intervall von 100 Tagen nicht sehr merklich andere Werthe giebt, als das Intervall von 50 Tagen. Jenes ist etwa der 17. Theil der Umlaufszeit bei Ceres und Pallas, dieses der 34. Theil. Es ist deswegen kein Grund vorhanden, ein noch kleineres zu wählen, da schon dieses sich von dem oben angenommenen Minimum der Anzahl der zu berechnenden Punkte ziemlich entfernt. Macht man es sich ausserdem zur Regel, jedesmal den letzten Ort, den man mit einem constanten Systeme von Elementen berechnet hat, von Neuem als den ersten zu berechnen, mit dem neuen durch die erhaltenen Integrationswerthe verbesserten Systeme, so wird die Vergleichung dieser beiden Resultate

zeigen, ob die Elemente nicht vielleicht allzu lange als constant angesehen worden sind; stimmen beide nahe überein, so kann man, wenn nicht besondere, mehr als Ausnahme zu betrachtende Umstände in der Zeit, während welcher die Elemente beibehalten sind, stattgefunden haben sollten, völlig versichert sein, dass von dieser Seite nichts zu befürchten ist.

Solche Ausnahmen von der allgemeinen Regel hängen ganz allein von der relativen Entfernung des gestörten und störenden Himmelskörpers ab, sowie überhaupt die absolute Grösse von q und das successive Ab- und Zunehmen derselben ganz vorzüglich und verhältnissmässig mehr noch als der Gang der Coordinaten jedes einzelnen Planeten zu berücksichtigen ist. Bei den bekannten Planeten, selbst bei den kleineren, werden sie, so lange man die Störungen der kleinen Planeten unter sich vernachlässigen darf, im Grunde niemals eintreten. Wie gross auch die Veränderung des Abstandes der Pallas vom Jupiter ist, so wird doch, wo ein Minimum eintritt, dieses Minimum nie so plötzlich sich zeigen, dass nicht schon eine beträchtliche Zeit vorher und nachher der Gang der Functionen, welche dadurch besonders afficirt werden, sich so ändert, dass eine Art von Sprung bei sonst nicht zu gross angenommenen Intervallen sich nicht zeigen kann. Immer wird es gut sein, um auch in diesen Fällen keine Vorsicht zu vernachlässigen, in der Gegend eines solchen Minimums häufiger die Elemente zu ändern, oder wenigstens sich so einzurichten, dass an der Stelle, wo die Wirkung desselben am merklichsten hervortritt, oder in der Gegend des Minimums selbst, ein Wechsel des Elementensystemes stattfindet, damit sowohl die oben erwähnte Prüfung ihre Kraft behält, als auch der wahre Werth des Minimums und der davon abhängenden störenden Kraft so nahe als möglich erhalten wird. Bei den kleinen Planeten scheint es, dass man ohne merklichen Fehler, etwa während neun Intervallen von je 50 Tagen oder während fünf Vierteljahren, die Elemente als constant betrachten kann und sie dann erst zu verändern braucht, wenn bei dem Minimum der Entfernung man mit der Aenderung sich nach den Zeiten dieses Minimums richtet. Bei der Vesta hat Encke, um ganz sicher zu gehen, in der Regel nach je sechs Intervallen von je 42 Tagen, oder immer nach je 252 Tagen die Elemente geändert, dafür aber auch auf das Minimum der Entfernung keine weitere Rücksicht genommen. Bei dem oben angeführten kleinstmöglichen Minimum, bei welchem zufällig gerade ein Wechsel der Elemente stattfand, war die Störung der mittleren Länge um $0'',05$, die der mittleren Bewegung um $0'',000\,006$, die Länge des Perihels um $1''$ in der einen Rechnung verschieden von der anderen; Grössen, die unter einer ganz ungewöhnlichen Verbindung von Umständen hervortreten, sich selbst unter gewöhnlichen Verhältnissen vielleicht nicht ganz verbürgen lassen, und bei der Berechnung des Ortes sich noch dazu in gewissem Sinne aufheben. Die beträchtlichere Abweichung der Störung des Perihels erklärt sich durch die Kleinheit der Excentricität und ist in der That ganz unmerklich. Das Bisherige bezieht sich indessen nur auf Bahnen, deren Excentricität so gering ist, wie die der meisten bisher bekannt gewordenen Planeten. Bei Kometen lassen sich selbst solche vorläufige Vorschriften gar nicht geben, und man wird sowohl in der Grösse der Intervalle, als in der Anzahl und Vertheilung der Punkte in der Kometenbahn, welche man durch Rechnung bestimmt, ganz sich nach den jedesmaligen Umständen richten müssen. Abgesehen von allen übrigen Verhältnissen wird schon die blosse Schätzung nach Theilen der Umlaufszeit durchaus nichts mehr über die Grösse der Intervalle bestimmen lassen, denn bei so sehr excentrischen Bahnen wird man, um die Gestalt der Curve in der Rechnung auf eine gleichmässige Art niederzulegen, genöthigt sein, in der Nähe des Perihels die Zeitintervalle sehr stark zu verkürzen. Noch mehr aber wirkt ausserdem der Umstand ein, dass der Abstand des Kometen von den verschiedenen Planeten, in deren Anziehungssphäre

er kommt, so plötzlich sich ändert, dass man immer ein genaues Augenmerk auf solche Ausnahmefälle haben muss, um nicht der Gefahr sich auszusetzen, bei zu grossen Intervallen solche, man könnte sie Spitzen in der Curve der Integrationswerthe nennen, ganz zu übergehen. Die Durchkreuzung der Planetenbahnen (im weiteren Sinne genommen) von der Kometenbahn führt diese geringe Regelmässigkeit unabwendbar herbei, und es giebt dagegen kein anderes Hülfsmittel, als den gegenseitigen Lauf der Himmelskörper mit Aufmerksamkeit zu verfolgen, und die Grösse der Intervalle, sowie auch die Aenderung der Elemente so zu modificiren, dass die Interpolation zwischen den berechneten Werthen von r , ϱ und den Differentialquotienten immer so nahe als möglich die wahren Werthe giebt. Die Vorsicht in Bezug auf schnellere Aenderungen von ϱ und die häufig damit verbundene Nothwendigkeit, weit öfter als sonst die Elemente zu verbessern, ist hier doppelt zu beachten.

Wenn die Störungen mehrerer Planeten zu berücksichtigen sind, so wird die Rechnung am kürzesten, wenn man nach (22) in R_0 die sämtlichen störenden Kräfte in eine Summe vereinigt und den ganzen Ausdruck in (23) substituirt. Allein in der Praxis wird es rathsam sein, von dieser grössten Kürze etwas aufzuopfern und die Störungen durch jeden Planeten abgesondert zu berechnen, oder so viele einzelne Substitutionen zu machen, als verschiedene Glieder $m'k'$, $m''k''$ etc. in R_0 enthalten sind. Unsere Planetenmassen sind sämtlich noch so unsicher, dass man sich bei jeder Rechnung darauf gefasst machen muss, Correctionen der Massen künftig anbringen zu müssen, was nur möglich ist, wenn man für jeden Planeten einzeln den Betrag der Störung vor sich hat. Die Rechnung wird natürlich weitläufiger, weil mehrere einzelne Substitutionen zu machen sind. Doch ist dieser Theil bei Weitem der am wenigsten beschwerliche, und der Nachtheil wird auch dadurch wieder aufgewogen, dass man bei dieser Vereinzelung die Grösse der Intervalle je nach der Bahn des störenden Planeten modificiren kann, so dass z. B., wenn beim Merkur die Intervalle nicht wohl unter sieben Tagen genommen werden können, man für Jupiter und Saturn das Dreifache und Vierfache mit seltenen Ausnahmen immer nehmen kann, und also auch die Substitutionen aus (22) in (23) bei ihnen nur bei dem je dritten oder vierten Orte zu machen nöthig hat. Die successiven Verbesserungen der Elemente des gestörten Planeten müssen deswegen doch aus den Störungen aller Planeten zusammen hergeleitet werden, wie es sich von selbst versteht. Im Folgenden wird nur immer ein störender Körper allein angenommen werden.

Eben diese Verschiedenheit der Grösse der Intervalle, je nach der Gestalt der Bahn des störenden Planeten, würde in den meisten Fällen die Rechnung unendlich weitläufig machen, wenn es immer nöthig wäre, auf alle Planeten, namentlich also auch auf die oberen Planeten, Merkur, Venus, Erde, Rücksicht zu nehmen. Glücklicherweise sind ihre Massen so gering, dass nur bei ungewöhnlicher Annäherung, wo dann auch die kleineren Intervalle nicht zu umgehen sind, ihr Einfluss merklich sein kann, und der noch etwa übrig bleibende Theil durch eine etwas veränderte Form der Rechnung sich ermitteln lässt. Bei den kleinen Planeten, die niemals der Erde, geschweige denn der Venus und dem Merkur nahe kommen können, kann man, wie es bisher immer geschehen ist, entweder ganz darüber hinweggehen, oder wenn man dies nicht wollte, durch eine Reihenentwicklung nach Art der allgemeinen Störungen die Hauptglieder finden. So behandelt, haben bei der Vesta selbst die Mars- und Saturnstörungen, die aus Daussy's Tafeln genommen sind, wie es scheint, sehr wesentlich dazu beigetragen, die Bahn dieses Planeten weit befriedigender, als die der übrigen kleinen Planeten, den Beobachtungen anzuschliessen. Bei Kometen, die für die längere Zeit ihres Laufes von den oberen sehr entfernt bleiben, aber in der Nähe ihrer Sonnennähe ihnen auch

wiederum sehr nahe kommen können, wird die Betrachtung ihrer Bewegung wesentlich erleichtert, wenn man bei den grösseren Abständen die Bahn nicht, wie gewöhnlich, auf den Mittelpunkt der Sonne, sondern auf den gemeinschaftlichen Schwerpunkt des Systemes bezieht, wobei es selbst gestattet ist, nur für einzelne Planeten diese Form, wenn man es so für rathsam hält, gelten zu lassen. Bei der Beziehung auf den Schwerpunkt des Systemes, der durch die gegenseitigen Anziehungen keine Bewegung erleidet, wird der Theil der störenden Kraft, welcher in der gewöhnlichen Form aus der Rückwirkung des störenden Planeten auf die Sonne herrührt, verschwinden, und damit werden auch die Glieder vernichtet oder wenigstens sehr unbedeutend gemacht, in denen die Coordinaten des störenden Planeten unmittelbar vorkommen, abgesehen von dem Einflusse, den sie auf die Bestimmung der Entfernung des gestörten und störenden Körpers haben. Wenn also auch die schnelle Aenderung dieser Coordinaten sehr kleine Intervalle bei der gewöhnlichen Form nöthig machen sollte, so werden sie bei dieser Abänderung in weit grösseren Zeiträumen erst untersucht zu werden brauchen. Man kann selbst in den meisten Fällen diesen schwachen Einfluss ganz übergehen, wenn man bei der Vernachlässigung der Merkurstörungen z. B. die Bahn betrachtet, als um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt der Sonne und des Merkurs beschrieben, und so oft man auf den Merkur Rücksicht nehmen will, die Aenderung der Elemente, welche von der Versetzung des Elementensystemes aus dem gemeinschaftlichen Schwerpunkte in den wahren Mittelpunkt der Sonne und umgekehrt, herrührt, gehörig Rechnung trägt.

Ob es überhaupt eine wesentliche Abkürzung wäre, immer die Störungsrechnungen auf den gemeinschaftlichen Schwerpunkt zu beziehen, kann bezweifelt werden. Bei der Form unserer sämtlichen Planetentafeln würde die Rechnung, wenn die gleiche theoretische Strenge erreicht werden sollte, wieder eine Aenderung des Ortes der sämtlichen störenden Planeten nöthig machen und damit, wenn nicht die grössere Entfernung des gestörten Himmelskörpers eine Abkürzung gestatten sollte, der Vortheil auf der einen Seite gegen den Nachtheil der anderen verschwinden. Wenn ausserdem nicht, wie bei Kometen, erst in sehr grossen Zeitfristen für ein bestimmtes Zeitmoment, den Durchgang durch die Sonnennähe, allein ein Elementensystem nöthig ist und damit also auch nur eine Reduction vom Schwerpunkte des Systemes auf den Sonnenmittelpunkt, sondern wenn, wie bei den kleinen Planeten, gewiss alle Jahre einmal eine für die Form unserer Tafeln geeignete Bestimmung der Elemente gefordert wird, und ausserdem noch es wünschenswerth wird, zu beliebigen Zeiten dazwischen mit gleicher Leichtigkeit und gleicher Schärfe den jedesmaligen Ort bestimmen zu können, so wird die Betrachtung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes ausgeschlossen werden müssen.

Wenn man so durch eine allgemeine Ueberlegung, oder nöthigenfalls durch eine vorläufige Rechnung, über die Wahl der Grössen der Intervalle und über den Zeitpunkt des Anfanges sich eine feste Vorschrift gemacht hat, so theilt sich die Rechnung in folgende fünf Theile:

1. Die Berechnung der Oerter des störenden Planeten für die angenommenen Zeitmomente und ihre Reducirung auf die in den Formeln angenommenen Werthe L', r', ϖ', i' ;

2. Die Berechnung der Oerter des gestörten Planeten und der Werthe, welche zur Bildung der Coëfficienten in den Differentialgleichungen nöthig sind;

3. Die Berechnung der Grösse der störenden Kräfte nach den Richtungen R, S, W ;

4. Die Substitution derselben in die Bedingungsgleichungen und die Berechnung der Werthe der Differentialquotienten selbst;

5. Die Integrirung dieser letzteren oder die Bildung der Tafel, welche die Stelle des allgemeinen Integrales mit Inbegriff der verschiedenen Constanten vertritt.

Unsere Planetentafeln geben unmittelbar die Länge in der Bahn und den Radius vector, also das, was L' und r' bezeichnet ist, sowie auch δ' und i' . Benutzt man also unmittelbar die Tafeln, so wird man bei der Festhaltung an diesen Werthen nur die Breitenstörungen vernachlässigen, welche immer so klein sind, dass ihr Weglassen durchaus nicht von Erheblichkeit ist. In diesem Falle hat man nur nicht zu versäumen, die Längen sämmtlich auf ein festes mittleres Aequinoctium, gewöhnlich das der Zeit des Anfanges, durch Hinzufügung der Präcession zu reduciren.

Interpolirt man dagegen aus den Ephemeriden, welche die Längen und Breiten in der Ekliptik geben, so wird man, dann aber in voller Schärfe, diese erst anwenden müssen, um δ' und i' zu finden, und daraus die L' , Längen in der Bahn, herzuleiten. Wenn l' und b' , die schon auf das feste mittlere Aequinoctium reducirten Längen und Breiten sind, also die Nutation mit entgegengesetztem Zeichen und die Präcession bereits angebracht ist, so hat man aus zwei, so vortheilhaft als die Umstände gestatten, gewählten l'_0 und l'_1 , b'_0 und b'_1 die Formeln zu berechnen:

$$\sin \left[\frac{1}{2} (l'_1 + l'_0) - \delta' \right] \operatorname{tg} i = \frac{\sin (b'_1 + b'_0)}{2 \cos b'_1 \cos b'_0 \cos \frac{1}{2} (l'_1 - l'_0)}$$

$$\cos \left[\frac{1}{2} (l'_1 + l'_0) - \delta' \right] \operatorname{tg} i' = \frac{\sin (b'_1 - b'_0)}{2 \cos b'_1 \cos b'_0 \sin \frac{1}{2} (l'_1 - l'_0)}$$

$$L' = l' + \operatorname{tg} \frac{1}{2} i'^2 \sin 2 (l' - \delta') + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} i'^4 \sin 4 (l' - \delta') \dots$$

die letztere Formel für jedes l' ; aus den beiden ersten wird man δ' und i' mit Inbegriff der Breitenstörungen so scharf finden, als die Tafeln erlauben. Für alle älteren Planeten ist das Glied mit $\operatorname{tg} \frac{1}{2} i'^4$ so gut wie unmerklich. Hierdurch ist der erste Theil der Rechnung in der verlangten Form gegeben.

Für den zweiten, oder den Ort des gestörten Planeten, wird es gut sein, in dem Ausdrücke der Differentialquotienten die Grössen, welche für eine grössere Anzahl von Intervallen constant bleiben (alles, was von den reinen Elementen abhängt), zu sondern von den anderen mit der Zeit veränderlichen Grössen. Bezeichnet man mit R_0 , S_0 , W_0 für jetzt das, was in (23) mit $\frac{kR_0}{\sqrt{p}}$, $\frac{kS_0}{\sqrt{p}}$, $\frac{kW_0}{\sqrt{p}}$ bezeichnet worden ist, und nennt man die Grösse eines Intervalles in mittleren Tagen ausgedrückt . . . ω , berücksichtigt ausserdem, dass zum Behufe der Integration die Differentialquotienten mit ω multiplicirt werden müssen, mit Ausnahme von $\frac{dn}{dt}$, was wegen des doppelten Integrales mit ω^2 multiplicirt sein muss, und führt für die constanten Factoren die Zeichen (1), (2), (3) etc. ein, so wird man folgende Formen nöthig haben:

$$(1) = \frac{kn'}{\sqrt{p}} \omega, \text{ wo } m' \text{ gleich in Secunden ausgedrückt wird, oder } \log m' = 5,3144251 \\ + \text{ dem } \log \text{brigg} \text{ der Masse des störenden Planeten in Theilen der Sonnenmasse, und } \log k = 8,2355814.$$

$$(2) = \frac{1}{\sin i} \quad (5) = \frac{1}{e} \quad (8) = \frac{3k\omega}{\sqrt{a}} p \quad (11) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Phi$$

$$(3) = a \cos \Phi \quad (6) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \quad (9) = p \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Phi \quad (12) = p \cotg \Phi$$

$$(4) = \frac{p}{e} \quad (7) = \frac{3k\omega}{\sqrt{a}} e \quad (10) = 2 \cos \Phi \quad (13) = \cotg \Phi.$$

Damit schreiben sich die Formeln (23) wie folgt:

$$R_0 = (1) R'$$

$$S_0 = (1) S'$$

$$W_0 = (1) W'$$

$$\omega \frac{di}{dt} = r \cos u W_0$$

$$\omega \frac{d\delta}{dt} = (2) r \sin u W_0$$

$$\omega \frac{d\Phi}{dt} = (3) \sin v R_0 + (3) (\cos v + \cos E) S_0$$

$$\omega \frac{d\pi}{dt} = - (4) \cos v R_0 + (5) \left(\frac{p}{r} + 1 \right) r \sin v S_0 + (6) r \sin u W_0$$

$$\omega^2 \frac{dn}{dt} = - (7) \sin v R_0 - (8) \frac{1}{r} S_0$$

$$\omega \frac{dL}{dt} = \{ - (9) \cos v - (10) r \} R_0 + (11) \left(\frac{p}{r} + 1 \right) r \sin v S_0 + (6) r \sin u W_0 + \int \frac{dn}{dt} dt$$

$$\omega \frac{dM}{dt} = \{ + (12) \cos v - (10) r \} R_0 - (13) \left(\frac{p}{r} + 1 \right) r \sin v S_0 + \int \frac{dn}{dt} dt.$$

Diese Formeln sind ganz identisch mit (23), bis auf die kleine Abänderung, dass, weil:

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos v$$

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos E$$

statt $\frac{p}{r} - \frac{r}{a} \dots e (\cos v + \cos E)$ geschrieben ist, wodurch in $\frac{d\Phi}{dt}$ das letzte Glied verwandelt wird in:

$$a \cos \Phi (\cos v + \cos E).$$

Es ist für die numerische Rechnung vorteilhafter, zwei kleinere Grössen, die mit seltenen Ausnahmen gleiche Zeichen haben, zusammenzuaddiren, als zwei grössere, deren Zeichen immer dasselbe ist, von einander zu subtrahiren. Besonders wird diese Addition durch die Gauss'sche Tafel für den Logarithmus einer Summe oder Differenz erleichtert, eine Tafel, welche man bei dieser Rechnung mehrfach mit grossem Vortheile benutzen kann. Wegen der Benutzung dieser Tafel ist auch statt $(p + r) \sin v$ geschrieben $\left(\frac{p}{r} + 1 \right) r \sin v$. Denn da, wenn $p > r$, also $\frac{p}{r}$ ein unechter Bruch, für A in den Gauss'schen Tafeln als $\log \frac{p}{r}$, der nebenstehende Logarithmus in der Columnne C gleich ist $\log \left(\frac{p}{r} + 1 \right)$, und wenn $p < r$ oder $\frac{p}{r}$ ein echter Bruch die Columnne B den $\log \left(\frac{p}{r} + 1 \right)$ giebt für $A = \log \frac{p}{r}$, so geht man mit der Differenz der Logarithmen von p und r jedesmal in A ein, und findet dann in B oder C den $\log \left(\frac{p}{r} + 1 \right)$, je nachdem dieser kleiner oder grösser als der \log der Zahl zwei ist, was sich sogleich beurtheilen lässt.

Im Ganzen hat man also zu berechnen:

$$\sin v, \cos v, \cos E, \sin u, \cos u, \log r,$$

von denen sehr einfache Verbindungen die Coëfficienten bilden. Hierzu kann man verschiedene Formeln anwenden. Die, welchen Encke den Vorzug giebt, sind die folgenden:

Wenn die Elemente in der Form, wie die Rechnung sie verlangt, gegeben sind, also für ein gewisses Zeitmoment T , von welchem an man die Störungen berechnen will, und in Bezug auf ein bestimmtes mittleres Aequinoctium, dasselbe, welches bei dem störenden Planeten angenommen ist, die Grössen:

- L ... mittlere Länge des gestörten Planeten;
- n ... mittlere tägliche siderische Bewegung;
- π ... Länge des Perihels;
- Φ ... Winkel, dessen Sinus gleich der Excentricität;
- \oslash ... aufsteigender Knoten;
- i ... Neigung;

so berechnet man zuvörderst die Constanten:

$$a = \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{2}{3}}, \text{ wo } \log k, \text{ weil } n \text{ in Secunden gegeben ist, hier} = 3,550\,006\,6;$$

$$e'' = \sin \Phi \text{ in Secunden oder zum } \log e \text{ der Logarithmus von}$$

$$2062\,65 = 5,314\,425\,1 \text{ hinzugelegt;}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{a} (1 - e) \\ \sqrt{a} (1 + e) \end{array} \right\} \text{ bei welchen die Prüfung stattfindet, dass } \log \sqrt{a} (1 - e)$$

$$- \log \sqrt{a} (1 + e) = \log \operatorname{tg} (45 - \frac{1}{2} \Phi);$$

$$p = a \cos \Phi^2$$

und die obigen Constanten (1), (2) ... (13).

Man kann, um alle Constanten zu vereinigen, hier zugleich die Reduction der Bahn des störenden Planeten auf die des gestörten hinzufügen, welche zur Berechnung der Kräfte nöthig ist, oder die Berechnung der Grössen J , N , N' nach den Formeln (20):

$$\sin \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} (N + N') = \sin \frac{1}{2} (\oslash' - \oslash) \sin \frac{1}{2} (i' + i)$$

$$\sin \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{2} (N + N') = \cos \frac{1}{2} (\oslash' - \oslash) \sin \frac{1}{2} (i' - i)$$

$$\cos \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} (N - N') = \sin \frac{1}{2} (\oslash' - \oslash) \cos \frac{1}{2} (i' + i)$$

$$\cos \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{2} (N - N') = \cos \frac{1}{2} (\oslash' - \oslash) \cos \frac{1}{2} (i' - i),$$

wo wiederum in der Uebereinstimmung von $\sin \frac{1}{2} J$ und $\cos \frac{1}{2} J$ eine Prüfung liegt.

Fangen dann für T die Störungsrechnungen überhaupt erst an, so muss man für:

$$T - \frac{5}{2} \omega, T - \frac{3}{2} \omega, T - \frac{1}{2} \omega, T + \frac{1}{2} \omega \dots T + \left(i + \frac{1}{2}\right) \omega$$

die Oerter berechnen, wenn man die bequemste Integration für die am häufigsten vorkommenden einfachen Integrale haben will. Weiter als bis $T - \frac{5}{2} \omega$ braucht man,

bei zweckmässiger Grösse der Intervalle, nicht zurückzugehen. Will man die kleine Unbequemlichkeit der Bildung bei der ersten Constante nicht achten, so kann man auch für $T - 3 \omega, T - 2 \omega, T - \omega, T, T + \omega \dots T + i \omega$ rechnen. Schliesst sich aber für eine spätere Zeit T' die neue Rechnung an eine frühere, so sucht man erst das Elementensystem, welches aus der früheren Rechnung so nahe als möglich dem T' liegt, und berechnet jedesmal mit dem neuen Systeme den letzten Ort der vorigen Rechnung

noch einmal, um die Prüfung zu haben, aus welcher man sehen kann, ob die Elemente auch in der früheren Rechnung zu lange Zeit als constant beibehalten sind.

Zur Berechnung von v , r etc. dienen dann für jeden Ort die Formeln:

$$M = L - \pi + n(t - T)$$

$$M = E - e'' \sin E$$

$$\sin \frac{1}{2} v \sqrt{r} = \sin \frac{1}{2} E \sqrt{a} (1 + e)$$

$$\cos \frac{1}{2} v \sqrt{r} = \cos \frac{1}{2} E \sqrt{a} (1 - e).$$

Zur Auflösung der transcendenten Gleichung, welche E aus M finden lässt, nimmt man irgend welchen möglichst genäherten Werth von E an $\dots E'$, und berechnet:

$$M' = E' - e'' \sin E'.$$

Dann wird:

$$\begin{aligned} M - M' &= E - E' - e'' (\sin E - \sin E') \\ &= (E - E') (1 - e \cos E'), \end{aligned}$$

wenn man $E' - E$ als eine kleine Grösse der ersten Ordnung ansieht, und die der zweiten Ordnung einstweilen vernachlässigt, so dass ein neuer genäherter Werth von E ist:

$$E' + \frac{M - M'}{1 - e \cos E'},$$

mit dem man ebenso verfährt, bis man den wahren Werth erreicht hat. Es ist dabei fast immer unnöthig $1 - e \cos E'$ mehrere Male zu berechnen. In der Regel, wenn das erste E' nicht gar zu irrig war, wird man den einmal berechneten Werth von $1 - e \cos E'$ bei allen Versuchen beibehalten können.

Dieses Verfahren, welches für die erste Näherung am schnellsten und sichersten scheint, ist ganz identisch mit der Vorschrift von Gauss, sich der logarithmischen Differenz bei $\sin E \dots \lambda \dots$ zu bedienen, und der logarithmischen Differenz bei der Zahl $e'' \sin E \dots n \dots$, beide natürlich auf dieselbe Einheit bezogen, und dann als folgenden Näherungswerth anzunehmen:

$$E' + (M - M') \cdot \frac{n}{n \pm \lambda}.$$

Denn da λ nichts Anderes ist als:

$$\lambda = \frac{d \log \sin E}{d E} = \frac{\cos E}{\sin E},$$

wenn man den Modulus des Brigg'schen Systems weglässt, der nachher von selbst sich aufhebt, und:

$$n = \frac{d \log (e'' \sin E)}{d (e'' \sin E)} = \frac{1}{e \sin E},$$

so wird:

$$\frac{n}{n \pm \lambda} = \frac{1}{1 \pm \frac{\lambda}{n}} = \frac{1}{1 - e \cos E'},$$

so dass das doppelte Zeichen $n \pm \lambda$ immer so zu nehmen ist, dass es dem Zeichen von $\cos E$ entspricht, wenn λ immer als positiv betrachtet wird. Beide Formeln würden ganz identisch sein, wenn in der Praxis nicht die Unsicherheit der logarithmischen Differenzen, falls die Näherung noch nicht sehr gross ist, die letzte Form etwas schwankender machte als die erste. Man wird diese zweite Form aber mit Vortheil bei dem letzten Versuche anwenden, um die Uebereinstimmung bis auf die letzte Stelle der Loga-

rithmen zu bewirken. Uebrigens werden, wenn man mehrere auf einander folgende Oerter berechnet, die Versuche durch Differenzen, die man aus den früheren Resultaten bildet und für das neue Datum fortsetzt, so abgekürzt, dass man nach vier oder fünf Oertern fast ohne allen Versuch die Wahrheit findet. Es wird deshalb auch nicht rathsam sein, die Versuche in der wirklichen Rechnung aufzuführen. Nur das Endresultat und seine Prüfung darf hier Platz finden.

Die Addition von den constanten Logarithmen $\sqrt{a} (1 + e)$ u. s. w. wird durch ein über den anderen Logarithmen gehaltenes Papier, auf dessen unterem Rande der constante Logarithmus steht, im Kopfe gemacht, wie überhaupt jede Verbindung dieser Art von Constanten mit Variabeln.

Die Bildung der anderen Grössen:

$$u = v + \pi - \Omega,$$

$$r \sin u, r \cos u, \sin v, \cos v, (\cos E + \cos v), \left(\frac{p}{r} + 1\right), r \sin v$$

bedarf keiner Erläuterung. Die letzte Grösse $r \sin v$ gewährt eine zweckmässige Prüfung, weil:

$$r \sin v = a \cos \Phi \sin E,$$

also um einen constanten Logarithmus verschieden ist, von dem schon hingeschriebenen $\log \sin E$.

Wenn man $\frac{dM}{dt}$ und $\frac{dL}{dt}$ zusammen berechnen will, der Prüfung wegen, da sonst ein Werth hinreicht, so wird man bei:

$$-(2r \cos \Phi - p \cotg \Phi \cos v) \quad - \left(2r \cos \Phi + p \tg \frac{1}{2} \Phi \cos v\right)$$

oder bei:

$$-(10)r + (12)\cos v \quad - (10)r - (9)\cos v$$

nicht die Gauss'schen Logarithmen anwenden, sondern lieber die Zahlen aufsuchen. Berechnet man nur einen der beiden Werthe, so kann man auch hier sie mit Bequemlichkeit gebrauchen.

Die gehörige Verbindung der Werthe mit den verschiedenen Constanten (2) bis (13) giebt die *log.* der Coëfficienten von R_0, S_0, W_0 in den Differentialgleichungen, womit auch ein Theil der vierten Abtheilung beendigt ist.

Es folgt dann die dritte Abtheilung, die Berechnung der Kräfte, für welche die nöthigen Werthe N, N', J schon gefunden sind. Die sämmtlichen Formeln nach (16), (17), (18), (21) sind:

$$\sin \beta' = \sin [L' - (\Omega' + N')] \sin J$$

$$\tg \lambda' = \tg [L' - (\Omega' + N')] \cos J,$$

wo $\cos \lambda'$ immer einerlei Zeichen haben muss mit $\cos [L' - (\Omega' + N')]$,

$$z' = r' \sin \beta'$$

$$y' = r' \cos \beta' \sin [\lambda' - (v + \omega')]$$

$$x' = r' \cos \beta' \cos [\lambda' - (v + \omega')],$$

wo:

$$\omega' = \pi - \Omega - N,$$

ferner:

$$\cos \beta' \cos [\lambda' - (v + \omega')] = \cos \gamma'$$

$$r' \sin \gamma' = q \sin l'$$

$$r = r' \cos \gamma' = r - x' = q \cos l',$$

ohne die Winkel γ' und l' wirklich anzugeben. Dann:

$$\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r'^3} = \mathcal{A},$$

wo die Gauss'schen Logarithmen mit grossem Vortheile gebraucht werden. Endlich:

$$W_0 = (1) \mathcal{A} z'$$

$$S_0 = (1) \mathcal{A} g'$$

$$R_0 = (1) \left\{ \mathcal{A} x' - \frac{r}{\varrho^3} \right\}.$$

Diese Kräfte müssen mit den gehörigen Coëfficienten verbunden werden. Nämlich für:

$$\begin{array}{ll} di \dots r \cos u & \dots \dots \dots \text{mit } W_0 \\ d\varnothing \dots (2) r \sin u & \dots \dots \dots \text{,, } W_0 \\ d\Phi \dots \begin{cases} (3) \sin v & \dots \dots \dots \text{,, } R_0 \\ (3) (\cos v + \cos E) & \dots \dots \dots \text{,, } S_0 \end{cases} \\ \left. \begin{array}{l} d\pi \dots \\ dn \dots \end{array} \right\} \begin{cases} - (4) \cos v & \dots \dots \dots \text{,, } R_0 \\ + (5) \left(\frac{p}{r} + 1 \right) r \sin v & \dots \dots \dots \text{,, } S_0 \\ + (6) r \sin u & \dots \dots \dots \text{,, } W_0 \end{cases} \\ \left. \begin{array}{l} dL \dots \\ dM \dots \end{array} \right\} \begin{cases} - (7) \sin v & \dots \dots \dots \text{,, } R_0 \\ - (8) \frac{1}{r} & \dots \dots \dots \text{,, } S_0 \\ - (9) \cos v - (10) r & \dots \dots \dots \text{,, } R_0 \\ + (11) \left(\frac{p}{r} + 1 \right) r \sin v & \dots \dots \dots \text{,, } S_0 \\ + (6) r \sin u & \dots \dots \dots \text{,, } W_0 \\ + (12) \cos v - (10) r & \dots \dots \dots \text{,, } R_0 \\ - (13) \left(\frac{p}{r} + 1 \right) r \sin v & \dots \dots \dots \text{,, } S_0 \end{cases} \end{array}$$

Das doppelte Integral:

$$\int \int \frac{dn}{dt} dt^2$$

bei L und M wird abgesondert nach der Integration hinzugefügt. So sind die numerischen Werthe der Differentialquotienten gegeben, von deren Integration ausführliche Beispiele in der früheren Darstellung über mechanische Quadratur enthalten sind. Bei den Elementen $i, \varnothing, \pi, \Phi$ sind die hinzuzufügenden Constanten die ursprünglichen für eine bestimmte Zeit T angenommenen Werthe, und die Integration giebt unmittelbar den Zuwachs, weil der Factor ω schon in (1) enthalten ist. Bei n giebt das erste Integral $\omega \mathcal{A} n$, weil in dem Differentialquotienten der quadratische Factor ω^2 vorkommt; eine Multiplication von ω wird durch die Constante (1) bewirkt, die andere durch die Constanten (7) und (8). Bei L und M ist ausser dem doppelten Integrale und dem Resultate der Integration von $\frac{dL}{dt}$ noch hinzuzufügen $L_0 + n_0 (t - T)$ und $M_0 + n_0 (t - T)$. Endlich darf nicht vergessen werden, dass alle Längen sich auf ein bestimmtes mittleres Aequinoctium beziehen, und daher die Präcession und Nutation für eine andere Epoche angebracht werden muss.

In Bezug auf die Genauigkeit, welche in diese Rechnung gelegt werden muss, scheinen Logarithmen von fünf Decimalen völlig hinzureichen. Wenn die Störungen so gross werden sollten, dass diese bei einem bestimmten Intervall nicht Genüge thäten, so würde es auch aus anderen Gründen rathsam sein, das Intervall so zu verringern, dass

die fünf Decimalen alles Verlangte gewähren. Vorzugsweise sind sie auch zu wählen, weil die Rechnung sich mit ihnen sehr rasch durchführen lässt. In einem Tage lässt sich, bei einiger Anstrengung, die vollständige Störungsrechnung für etwa 10 Intervalle beendigen, selbst dann noch, wenn man, wie es in der Regel fast rathsam sein möchte, v , r und alle Constanten mit sechs Decimalen rechnet, um der letzten fünften Stelle sicher zu sein, und bei der Auflösung der transcendentes Gleichung für E nicht Resultate zu erhalten, welche an sich hinreichend genau, doch in den Differenzen nicht die Regelmässigkeit haben möchten, durch welche eine feste Prüfung der Richtigkeit möglich gemacht wird. Diese Prüfung durch Differenzen sollte, am Ende besonders, nie vernachlässigt werden. Das Anschliessen der späteren Rechnung an die frühere sichert vor constanten Fehlern, die Regelmässigkeit der Differenzen vor zufälligen.

In dem folgenden ausführlichen Beispiele, in welchem keine einzige Zahl fehlt, welche etwa nebenbei berechnet wäre, mit Ausnahme der unbedeutenden Berechnung von Ω' und i' und der Versuche bei E , und wodurch die verhältnissmässig geringe Weitläufigkeit und Schwierigkeit dieser Rechnung am deutlichsten hervortritt, ist die Rechnung der Kürze wegen nur mit vier Decimalen angeführt. Doch scheint der Zeitgewinn nicht erheblich genug, um den Vortheil, die sämmtlichen Winkel bis auf wenige Secunden sicher zu erhalten, was bei fünf Decimalen möglich ist, aufzuopfern, während bei vier Decimalen nur Theile von Minuten angegeben werden können.

Als Beispiel der Integration können dabei die vorausgesetzten Elemente für 1836. Juni 12. dienen, welche aus den Anfangszahlen, der früheren Rechnung zufolge, hergeleitet waren¹⁾.

¹⁾ In diesem Beispiele hat Encke, wie er selbst bemerkt, die Glieder, welche von der säcularen Aenderung der Schiefe der Ekliptik herrühren, übergangen. Die strengen Formeln, die bei den speciellen Störungen in Betracht kommen, sind die folgenden.

Wenn χ den Winkel zwischen der beweglichen Ekliptik und der festen Ekliptik bezeichnet, für welche letztere die Ekliptik zur Zeit der Epoche . . . T . . ., auf welche die festen Elemente sich beziehen, genommen wird, und ψ_1 den Betrag der allgemeinen Präcession von der Epoche bis zu einem beliebigen Zeitpunkte t bezeichnet, wobei nach Bessel für $1750 + t'$:

$$\begin{aligned}\chi &= 0'',488\,92\,t' - 0'',000\,003\,071\,9\,t'^2 \\ \psi_1 &= 50'',211\,29\,t' + 0'',000\,122\,148\,3\,t'^2;\end{aligned}$$

wenn ferner unter $\Delta\Omega$, $\Delta\omega$, Δi , $\Delta\pi$, ΔL der Betrag der Störungen verstanden wird, wie die Berechnung der speciellen Störungen ihn unmittelbar ergiebt, so wird für jede Zeit t bezogen auf das mittlere Aequinoctium von t :

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega_0 + \Delta\Omega + \psi_1 - \chi \cot \chi i_0 \sin (\Omega_0 + \Pi) \\ \omega &= \omega_0 + \Delta\omega + \chi \operatorname{cosec} i_0 \sin (\Omega_0 + \Pi) \\ \pi &= \pi_0 + \Delta\pi + \psi_1 + \chi \operatorname{tg} \frac{1}{2} i_0 \sin (\Omega_0 + \Pi) \\ i &= i_0 + \Delta i + \chi \cos (\Omega_0 + \Pi) \\ L &= L_0 + \Delta L + \psi_1 + \chi \operatorname{tg} \frac{1}{2} i_0 \sin (\Omega_0 + \Pi) + \mu_0 (t - T),\end{aligned}$$

wo nach Bessel für $1750 + t'$:

$$\Pi = 8^\circ 23' 50'' + 5'',21\,t'$$

ist. Die im folgenden Rechenbeispiel vernachlässigten Glieder mit dem Factor χ haben aber bei Vesta und ebenso z. B. bei Ceres nur einen ganz unbedeutenden Einfluss, während sie z. B. bei Juno, Pallas und dem Pons'schen Kometen in der Neigung der Bahn merklich werden. Daher wurde von einer nachträglichen Berücksichtigung der betreffenden Glieder und Umrechnung des Encke'schen Beispieles, das nur den einzuschlagenden Gang der Rechnung veranschaulichen soll, hier abgesehen. —

Störungen der Vesta durch Jupiter.

1836. Juli 3. bis December 18.

Oerter des Jupiter.

Die Interpolation aus dem Jahrbuche ergibt für den scheinbaren Ort:

1836 0 ^h M. P. Zt.	Länge 2	Breite 2	Rad. vector
Juli 3.	115° 58' 35",8	0° 23' 19",9	5,254 33
Aug. 14.	119 23 6 ,1	27 45 ,6	5,269 16
Sept. 25.	122 46 26 ,2	32 4 ,0	5,283 71
Nov. 6.	126 8 40 ,4	36 14 ,3	5,297 94
Dec. 18.	129 29 53 ,1	40 16 ,1	5,311 79

Der Abzug der Nutation und der Präcession seit 1810. Jan. 0., um alles auf das mittlere Aequinoctium dieser Epoche zu bringen, giebt die reducirten Längen:

1836 0 ^h M. P. Zt.	1810	Correction wegen der		Reducirte Längen
		Nutation	Präcession	
Juli 3.	9681	+ 11",6	— 22' 11",3	115° 36' 36",1
Aug. 14.	9723	10 ,4	22 17 ,1	119 0 59 ,4
Sept. 25.	9765	11 ,3	22 22 ,9	122 24 14 ,6
Nov. 6.	9807	12 ,1	22 28 ,7	125 46 23 ,8
Dec. 18.	9849	10 ,4	22 34 ,5	129 7 29 ,0

Aus den Oertern:

$$\text{Juli 3. } 115^{\circ} 36' 36'',1 + 0^{\circ} 23' 19'',9$$

$$\text{Dec. 18. } 129 \quad 7 \quad 29,0 \quad 40 \quad 16,1$$

folgt:

$$\Omega' = 98^{\circ} 22' 56'',0 \quad i = 1^{\circ} 18' 45'',9,$$

woraus die Reduction auf die Längen in der Bahn wird:

$$+ 27'',073 \sin 2 (\text{Red. Länge} - \Omega').$$

Man erhält folglich:

1836 8 ^h M. P. Zt.	Reduction	L'	$\log r'$
Juli 3.	+ 15",3	115° 36' 51",4	0,720 517
Aug. 14.	17 ,9	119 1 17 ,3	0,721 741
Sept. 25.	20 ,1	122 24 34 ,7	0,722 939
Nov. 6.	22 ,1	125 46 45 ,9	0,724 107
Dec. 18.	23 ,8	129 7 52 ,8	0,725 241

Elemente der Vesta.

1836. Juni 12. 0^h Mittl. Par. Zt.

$M = 319^{\circ} 13' 1'',8$	$\pi = 250^{\circ} 7' 56'',4$
$n = 977'',831\,72$	$\oslash = 102\ 59\ 1,6$
$\Phi = 5^{\circ} 2' 33'',6$	$i = 7\ 8\ 15,7$
2,990 264	8,943 977
3,550 007	5,314 425
0,559 743	4,258 402
0,186 581	$\log e''$
0,373 162	$\log p$
$\log a$	$\log \sqrt{a} (1 + e) \dots 0,204\,875$
	$\log \sqrt{a} (1 + e) \dots 0,166\,603$
$\log \frac{42\,k}{\sqrt{p}} = 9,673\,934$	$\log \frac{126\,k}{\sqrt{a}} = 0,149\,371$
$\log m' = 2,291\,616$ Jupitermasse in Sekunden	
$\log (1) \dots \frac{42\,k \cdot m'}{\sqrt{p}} \dots 1,965\,550$	$\log (7) \dots \frac{126\,k}{\sqrt{a}} e \dots 9,093\,348$
$\log (2) \dots \frac{1}{\sin i} \dots 0,905\,688$	$\log (8) \dots \frac{126\,k}{\sqrt{a}} p \dots 0,519\,165$
$\log (3) \dots a \cos \Phi \dots 0,371\,478$	$\log (9) \dots p \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Phi \dots 9,013\,582$
$\log (4) \dots \frac{p}{e} \dots 1,425\,817$	$\log (10) \dots 2 \cos \Phi \dots 0,299\,346$
$\log (5) \dots \frac{1}{e} \dots 1,056\,023$	$\log (11) \dots \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Phi \dots 8,643\,788$
$\log (6) \dots \operatorname{tg} \frac{1}{2} i \dots 8,794\,967$	
$\oslash' \dots 98^{\circ} 22' 56'',0$	$i' \dots 1^{\circ} 18' 45'',9$
$\oslash \dots 102\ 59\ 1,6$	$i \dots 7\ 8\ 15,7$
	$\frac{1}{2} (\oslash' - \oslash) \dots 177^{\circ} 41' 57'',2$
	$\frac{1}{2} (i' + i) \dots 4\ 13\ 30,8$
	$\frac{1}{2} (i' - i) \dots 2\ 54\ 44,9$
8,867 333	8,705 952 n
8,603 635	9,999 650 n
9,998 818	9,999 439
7,470 968	8,602 453
8,705 602	9,999 089 n
9,999 264	9,999 651
8,706 338	9,999 438
$\frac{1}{2} (N + N') = 3^{\circ} 20' 3'',3$	
$\frac{1}{2} (N - N') = 177\ 42\ 9,0$	
$N \dots 181\ 2\ 12,3$	
$\pi - \oslash \dots 147\ 8\ 54,8$	
$\omega' \dots 326\ 6\ 42,5$	
$N' \dots 185\ 37\ 54,3$	
$\oslash' \dots 98\ 22\ 56,0$	
$\frac{1}{2} I \dots 2^{\circ} 54' 54'',2$	$I \dots 5^{\circ} 49' 48'',4$
$\log \sin I \dots 9,006\,804$	$\log \cos I \dots 9,997\,747$

Gestörter Planet . . . Vesta.

1836 0 ^h M. P. Zt.	Juli 3.	Aug. 14.	Sept. 25.	Nov. 6.	Dec. 18.
M	324° 55',3	336° 19',8	347° 44',2	359° 8',7	10° 33',2
E	321° 48',4	334° 8',0	346° 34',0	359° 3',8	11° 33',8
$\log \sin E$	9,7913 <i>n</i>	9,6397 <i>n</i>	9,3661 <i>n</i>	8,2134 <i>n</i>	9,3020
$e \sin E$	— 3° 6',9	— 2° 11',8	— 1° 10',2	— 4',9	+ 1° 0',6
$\frac{1}{2} E$	160° 54',2	167° 4',0	173° 17',0	179° 31',9	5° 46',9
$\log \sin \frac{1}{2} E$	9,5147	9,3499	9,0680	7,9124	9,0032
$\log \cos \frac{1}{2} E$	9,9754 <i>n</i>	9,9888 <i>n</i>	9,9970 <i>n</i>	0,0000 <i>n</i>	9,9978
$\log \sin \frac{1}{2} v \sqrt{r}$	9,7196	9,5548	9,2729	8,1173	9,2081
$\log \cos \frac{1}{2} v \sqrt{r}$	0,1420 <i>n</i>	0,1554 <i>n</i>	0,1636 <i>n</i>	0,1666 <i>n</i>	0,1644
$\frac{1}{2} v$	159° 17',4	165° 55',1	172° 40',3	179° 29',3	6° 18',6
$\cos \frac{1}{2} v$	9,9710 <i>n</i>	9,9867, <i>n</i>	9,9964 <i>n</i>	0,0000 <i>n</i>	9,9973
$\log \sqrt{r}$	0,1710	0,1686, <i>s</i>	0,1672	0,1666	0,1671
v	318° 34',8	331° 50',2	345° 20',6	358° 58',6	12° 37',2
$\log r$	0,3420	0,3373	0,3344	0,3332	0,3342
u	105° 43',7	118° 59',1	132° 29',5	146° 7',5	159° 46',1
$\log \cos u$	9,4331 <i>n</i>	9,6854 <i>n</i>	9,8296 <i>n</i>	9,9192 <i>n</i>	9,9723 <i>n</i>
$\log \sin u$	9,9835	9,9419	9,8677	9,7462	9,5388
$\log r \sin u$	0,3255	0,2792	0,2021	0,0794	9,8730
$\log \sin v$	9,8206 <i>n</i>	9,6740 <i>n</i>	9,4032 <i>n</i>	8,2519 <i>n</i>	9,3394
$\log \cos v$	9,8750	9,9453	9,9856	9,9999	9,9894
$\log \cos E$	9,8953	9,9542	9,9879	9,9999	9,9911
	0,2911	0,2966	0,2999	0,3010	0,3002
$\log (\cos v + \cos E)$	0,1864	0,2508	0,2878	0,3009	0,2913
$\log \frac{p}{r}$	0,0278	0,0325	0,0354	0,0366	0,0356
$\log \left(\frac{p}{r} + 1 \right)$	0,3152	0,3176	0,3191	0,3197	0,3192
$\log r \sin v$	0,1626 <i>n</i>	0,0113 <i>n</i>	9,7376 <i>n</i>	8,5851 <i>n</i>	9,6736
$\log (p + r) \sin v$	0,4778 <i>n</i>	0,3289 <i>n</i>	0,0567 <i>n</i>	8,9048 <i>n</i>	9,9928
$-p \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Phi \cos v$	— 0,0774	— 0,0910	— 0,0998	— 0,1032	— 0,1007
$-2r \cos \Phi$	— 4,3780	— 4,3310	— 4,3020	— 4,2900	— 4,3000
$\log \operatorname{Coeff.} dL$	0,6489 <i>n</i>	0,6456 <i>n</i>	0,6437 <i>n</i>	0,6428 <i>n</i>	0,6436 <i>n</i>

Störender Planet . . . Jupiter.

1836 0 ^h M. P. Zt.	Juli 3.	Aug. 14.	Sept. 25.	Nov. 6.	Dec. 18.
u'	191° 36',0	195° 0',4	198° 23',7	201° 45',9	205° 7',0
$\log \sin u'$	9,3034 <i>n</i>	9,4132 <i>n</i>	9,4991 <i>n</i>	9,5691 <i>n</i>	9,6278 <i>n</i>
$\log \operatorname{tg} u'$	9,3123	9,4283	9,5219 <i>n</i>	9,6013	9,6710
λ'	191° 32',3	194° 55',9	198° 18',3	201° 39',7	205° 0',0
$v + \omega'$	284° 41',5	297° 56',9	311° 27',3	325° 5',3	338° 43',9
$\lambda' - (v + \omega')$	266° 50',8	256° 59',0	246° 51',0	236° 34',4	226° 16',1
$\log \sin \beta'$	8,3102 <i>n</i>	8,4200 <i>n</i>	8,5059 <i>n</i>	8,5759 <i>n</i>	8,6346 <i>n</i>
$\log \cos [\lambda' - (v + \omega')]$	8,7405 <i>n</i>	9,3526 <i>n</i>	9,5945 <i>n</i>	9,7411 <i>n</i>	9,8396 <i>n</i>
$\log \cos \beta'$	9,9999	9,9999	9,9998	9,9997	9,9996
$\log \sin [\lambda' - (v + \omega')]$	9,9994 <i>n</i>	9,9887 <i>n</i>	9,9636 <i>n</i>	9,9215 <i>n</i>	9,8589 <i>n</i>
$\log \frac{y'}{r'}$	9,9993 <i>n</i>	9,9886 <i>n</i>	9,9634 <i>n</i>	9,9212 <i>n</i>	9,8585 <i>n</i>
$\log \cos \gamma'$	8,7404 <i>n</i>	9,3525 <i>n</i>	9,5943 <i>n</i>	9,7408 <i>n</i>	9,8392 <i>n</i>
$\log \sin \gamma'$	9,9994	9,9887	9,9636	9,9216	9,8593
$\log r$	0,3420	0,3373	0,3344	0,3332	0,3342
$\log x'$	9,4609 <i>n</i>	0,0742 <i>n</i>	0,3172 <i>n</i>	0,4649 <i>n</i>	0,5644 <i>n</i>
	0,0537	0,1891	0,2926	0,2402	0,2010
$\log \varrho \cos l'$	0,3957	0,5264	0,6270	0,7051	0,7654
$\log \varrho \sin l'$	0,7199	0,7104	0,6865	0,6457	0,5845
$\log \cos l'$	9,9560	9,9226	9,8772	9,8772	9,9216
$\log \varrho$	0,7639	0,7878	0,8093	0,8279	0,8438
$\log \frac{1}{\varrho^3}$	7,7083	7,6366	7,5721	7,5163	7,4686
	7,8384 <i>n</i>	7,8348 <i>n</i>	7,8312 <i>n</i>	7,8277 <i>n</i>	7,8243 <i>n</i>
$\log \left(-\frac{1}{r'^3} \right)$	0,5870	0,4360	0,3475	0,2910	0,2525
$\log A$	7,2514 <i>n</i>	7,3988 <i>n</i>	7,4837 <i>n</i>	7,5367 <i>n</i>	7,5718 <i>n</i>
$\log y'$	0,7198 <i>n</i>	0,7103 <i>n</i>	0,6863 <i>n</i>	0,6453 <i>n</i>	0,5837 <i>n</i>
$\log (1) A$	9,2169 <i>n</i>	9,3643 <i>n</i>	9,4492 <i>n</i>	9,5022 <i>n</i>	9,5373 <i>n</i>
$\log z'$	9,0307 <i>n</i>	9,1417 <i>n</i>	9,2288 <i>n</i>	9,3000 <i>n</i>	9,3598 <i>n</i>
$\log Ax'$	6,7123	7,4730	7,8009	8,0016	8,1362
$\log \left(-\frac{r}{\varrho^3} \right)$	8,0503 <i>n</i>	7,9739 <i>n</i>	7,9065 <i>n</i>	7,8495 <i>n</i>	7,8028 <i>n</i>
	0,0204	0,1647	0,6656	0,5294	0,2709
$\log R'$	8 0299 <i>n</i>	7,8092 <i>n</i>	7,2409 <i>n</i>	7,4722	7,8653

Kräfte und Aenderungen der Elemente.

1836 0 ^h M. P. Zt.	Juli 3.	Aug. 14.	Sept. 25.	Nov. 6.	Dec. 18.
$\log R_0$ } $\frac{42 k}{\sqrt{a}}$	9,9954 <i>n</i>	9,7747 <i>n</i>	9,2064 <i>n</i>	9,4377	9,8308
$\log S_0$ }	9,9367	0,0746	0,1355	0,1475	0,1210
$\log W_0$ }	8,2476	8,5060	8,6780	8,8022	8,8971
$\frac{di}{d\varnothing}$ <i>W</i>	9,7751 <i>n</i>	0,0227 <i>n</i>	0,1640 <i>n</i>	0,2524 <i>n</i>	0,3065 <i>n</i>
$\frac{d\varnothing}{d\varnothing}$ <i>W</i>	1,2312	1,1849	1,1078	0,9851	0,7787

1836 0 ^h M. P. Zt.		Juli 3.	Aug. 14.	Sept. 25.	Nov. 6.	Dec. 18.
$d\Phi$	$\left\{ \begin{array}{l} R \\ S \end{array} \right.$	$0,1921\ n$ $0,5579$	$0,0455\ n$ $0,6223$	$9,7747\ n$ $0,6593$	$8,6234\ n$ $0,6724$	$9,7109$ $0,6628$
$d\pi$	$\left\{ \begin{array}{l} R \\ S \\ W \end{array} \right.$	$1,3008\ n$ $1,5338\ n$ $9,1205$	$1,3711\ n$ $1,3849\ n$ $9,0742$	$1,4114\ n$ $1,1127\ n$ $8,9971$	$1,4257\ n$ $9,9608\ n$ $8,8744$	$1,4152\ n$ $1,0488$ $8,6680$
dn	$\left\{ \begin{array}{l} R \\ S \end{array} \right.$	$8,9139$ $0,1772\ n$	$8,7673$ $0,1819\ n$	$8,4965$ $0,1848\ n$	$7,3452$ $0,1860\ n$	$8,4327\ n$ $0,1850\ n$
dL	$\left\{ \begin{array}{l} R \\ S \\ W \end{array} \right.$	$0,6489\ n$ $9,1216\ n$ $9,1205$	$0,6456\ n$ $8,9727\ n$ $9,0742$	$0,6437\ n$ $8,7005\ n$ $8,9971$	$0,6428\ n$ $7,5486\ n$ $8,8744\ n$	$0,6436\ n$ $8,6366$ $8,6680$
$42\ di$		$- 0'',011$	$- 0'',034$	$- 0'',070$	$- 0'',113$	$- 0'',160$
$42\ d\Omega$		$+ 0'',301$	$+ 0'',491$	$+ 0'',611$	$+ 0'',613$	$+ 0'',474$
$42\ d\Phi$	$\left\{ \begin{array}{l} + \\ + \\ + \end{array} \right.$	$1'',540$ $3'',123$ $4'',663$	$0'',661$ $4'',976$ $5'',637$	$0,096$ $6'',234$ $6'',330$	$- 0'',012$ $+ 6'',606$ $+ 6'',594$	$+ 0'',348$ $+ 6'',079$ $+ 6'',427$
$42\ d\pi$	$\left\{ \begin{array}{l} + \\ - \\ + \\ - \end{array} \right.$	$19'',777$ $29'',547$ $0'',002$ $9'',768$	$13'',990$ $28'',807$ $0'',004$ $14'',813$	$4'',148$ $17'',708$ $0'',005$ $13'',555$	$- 7'',302$ $- 1'',283$ $+ 0'',005$ $- 8'',580$	$- 17'',620$ $+ 14'',783$ $+ 0'',004$ $- 2'',833$
$(42)^s dn$	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ - \\ - \end{array} \right.$	$0'',0811$ $1'',3000$ $1'',3811$	$- 0'',0348$ $- 1'',8050$ $- 1'',8398$	$- 0'',0050$ $- 2'',0910$ $- 2'',0960$	$+ 0'',0006$ $- 2'',1552$ $- 2'',1546$	$- 0'',0183$ $- 2'',0229$ $- 2'',0412$
$42\ dL$	$\left\{ \begin{array}{l} + \\ - \\ + \\ + \end{array} \right.$	$4'',409$ $0'',114$ $0'',002$ $4'',297$	$+ 2'',632$ $- 0'',111$ $+ 0'',004$ $+ 2'',525$	$+ 0'',708$ $- 0'',069$ $+ 0'',005$ $+ 0'',644$	$- 1'',204$ $- 0'',005$ $+ 0'',005$ $- 1'',204$	$- 2'',981$ $+ 0'',057$ $+ 0'',004$ $- 2'',920$

Für die Integration.

$$i = 7^\circ 8' 11'',64$$

$$\Omega = 103^\circ 8' 20'',48.$$

1836 0 ^h M. P. Zt.	$t - 1810$	$42\ di$	Δi	$42\ d\Omega$	$\Delta\Omega$
Mai 22.	9339	$0'',000$	$+ 4'',083$	$+ 0'',102$	$- 558'',916$
Juli 3.	9681	$- 0'',011$	$+ 4'',072$	$+ 0'',301$	$- 558'',615$
August 14.	9723	$- 0'',034$	$+ 4'',038$	$+ 0'',491$	$- 558'',124$
September 25.	9765	$- 0'',070$	$+ 0'',611$	$+ 0'',611$	$- 557'',513$
November 6.	9807	$0'',113$	$+ 3'',968$	$+ 0'',613$	$- 556'',900$
December 18.	9849	$- 0'',160$	$+ 3'',855$	$+ 0'',474$	

$$\Phi = 5^{\circ} 9' 39'',17$$

$$\pi = 249^{\circ} 48' 26'',91.$$

1836 0 ^h M. P. Zt.	$t - 1810$	$42 \, d \, \Phi$	$\Delta \Phi$	$42 \, d \, \pi$	$\Delta \pi$
Mai 22.	9639	+ 3'',624	— 425'',567	+ 3'',886	+ 1170'',016
Juli 3.	9681	+ 4'',663	— 420'',904	— 9'',763	+ 1160'',248
August 14.	9723	+ 5'',637	— 415'',267	— 14'',813	+ 1145'',435
September 25.	9765	+ 6'',330	— 408'',937	— 13'',555	+ 1131'',880
November 6.	9807	+ 6'',594	— 402'',343	— 8'',580	+ 1123'',300
December 18.	9849	+ 6'',427		— 2'',833	

$$n = 978'',29671$$

$$L = 105^{\circ} 53' 15'',63.$$

1836 0 ^h M. P. Zt.	$t - 1810$	$(42)^2 \, d n$	$42 \, \Delta n$	ΔM	$42 \, d L$	ΔL
Mai 22.	9639	— 0'',7115	— 19'',5017	— 4802'',3339	+ 5'',825	— 1071'',572
Juli 3.	9681	— 1'',3811	— 20'',8828	— 4821'',8356	+ 4'',297	— 1067'',275
August 14.	9723	— 1'',8398	— 22'',7226	— 4842'',7184	+ 2'',525	— 1064'',750
September 25.	9765	— 2'',0960	— 24'',8186	— 4865'',4410	+ 0'',644	— 1064'',106
November 6.	9807	— 2'',1546	— 26'',9732	— 4890'',2596	+ 1'',204	— 1065'',310
December 18.	9849	— 2'',0412		— 4917'',2328	+ 2'',920	

Die constanten Elemente gelten für 1810. Jan. 0. Mittl. Par. Zeit. Die Längen beziehen sich auf das mittlere Aequinoctium derselben Epoche.

Bemerkung zur Berechnung der störenden Kräfte (vergl. S. 611 ff.).

Die jetzigen Berliner Jahrbücher geben unter dem Titel „Heliocentrische Planetencoordinaten“ für jeden Planeten (bezogen auf das Aequinoctium des Anfanges eines bestimmten Jahrzehntes) für gewisse Epochen den Logarithmus seines Radius vectors und seine Länge in der Bahn. Am Fusse der Seiten findet man neben einer Angabe über die Masse des Planeten die Elemente Ω und i , welche im Allgemeinen ein Jahr als constant betrachtet werden können.

An demselben Orte findet sich die heliocentrische Breite des Planeten und die „Reduction auf die Ekliptik“, d. h. der Winkel, den man zur Länge in der Bahn hinzufügen muss, um die heliocentrische Länge des Planeten zu erhalten. Für die grossen Planeten ist diesen Angaben noch der Winkel B_0 beigefügt, welchen der Radius vector mit derjenigen Bahnebene bildet, welche durch die anbei folgenden Werthe von Ω' und i' definiert ist. Um diese kleinen Correctionen zu berücksichtigen, hat man an Stelle der Formeln (16) der vorstehenden Encke'schen Darstellung (vergl. S. 614), die folgenden zu verwenden:

$$\begin{aligned} \cos \beta' \cos \lambda' &= \cos [L' - (\Omega' + N')] \\ \cos \beta' \sin \lambda' &= \sin [L' - (\Omega' + N')] \cos J - B_0 \sin 1'' \sin J \\ \sin \beta' &= \sin [L' - (\Omega' + N')] \sin J + B_0 \sin 1'' \cos J. \end{aligned}$$

Neunundneunzigste Vorlesung.

III. Die Hansen-Tietjen'sche Methode zur Berechnung der speciellen Störungen in Polarcoordinaten (nach Tietjen)¹⁾.

Den Berechnern der kleinen Planeten, besonders denjenigen Astronomen, welche beginnen, sich in diese Rechnungen einzuarbeiten, dürfte es erwünscht sein, diejenigen Formeln, welche für die Rechnungen zur Zeit als die zweckmässigsten gelten können, in Kürze abgeleitet und nebst einem Rechnungsschema und Beispiel zusammengestellt zu finden. Im Folgenden ist versucht, dies in Bezug auf die Berechnung der speciellen Störungen für Polarcoordinaten auszuführen.

Diejenige Ebene der Bahn, in welcher der Planet sich zur Zeit eines gewissen Anfangspunktes, z. B. des der Rechnung bewegt, werde als Grundebene, als Ebene der xy , angenommen; ferner sei für den gestörten Körper:

- m die Masse, die Sonnenmasse als Einheit genommen;
- x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten, deren Anfang im Mittelpunkte der Sonne sich befindet;
- r der Radius vector, also $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$;
- b der Winkel, welchen r mit der angeführten Grundebene bildet;
- ϱ die Projection von r auf diese Grundebene, also $\varrho = r \cos b$;
- l der Winkel, welchen ϱ mit der x -Axe bildet.

Die ähnlichen Grössen für den störenden Körper mögen mit $m_1; x_1, y_1, z_1, r_1, B_1, L_1$ bezeichnet werden.

Für die rechtwinkligen Coordinaten des gestörten Körpers erhält man:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varrho \cos l = r \cos b \cos l \\ y &= \varrho \sin l = r \cos b \sin l \\ z &= \varrho \operatorname{tg} b = r \sin b \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

b ist ebenso wie z eine Grösse von der Ordnung der Störungen, welche wir als Grössen erster Ordnung betrachten wollen. ϱ unterscheidet sich daher von r nur um eine Grösse zweiter Ordnung.

Für den störenden Körper erhält man in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos B_1 \cos L_1 \\ y_1 &= r_1 \cos B_1 \sin L_1 \\ z_1 &= r_1 \sin B_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Wird die Entfernung beider Planeten mit Δ bezeichnet, so ist noch:

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 \\ &= \varrho^2 + z^2 + r_1^2 - 2[r_1 \varrho \cos B_1 \cos (L_1 - l) + z r_1 \sin B_1]. \end{aligned}$$

Die Gleichungen, welche die Bewegung des gestörten Körpers um den Sonnenmittelpunkt ausdrücken, sind nun bekanntlich:

$$\left. \begin{aligned} x'' + \frac{k^2 (1+m) x}{r^3} &= k^2 m_1 \left(\frac{x_1 - x}{\Delta^3} - \frac{x_1}{r_1^3} \right) \\ y'' + \frac{k^2 (1+m) y}{r^3} &= k^2 m_1 \left(\frac{y_1 - y}{\Delta^3} - \frac{y_1}{r_1^3} \right) \\ z'' + \frac{k^2 (1+m) z}{r^3} &= k^2 m_1 \left(\frac{z_1 - z}{\Delta^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

¹⁾ Die folgenden Ausführungen sind mit freundl. Genehmigung seitens der Erben des Professor Tietjen, sowie Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung in Berlin aus dem Berliner Astronom. Jahrbuche für 1877 entnommen.

worin k die bekannte Constante unseres Sonnensystems, deren Logarithmus = 8,2355814, wenn der mittlere Sonnentag als Zeiteinheit genommen wird.

Ferner ist hier x'' für $\frac{d^2 x}{dt^2}$, y'' für $\frac{d^2 y}{dt^2}$ und z'' für $\frac{d^2 z}{dt^2}$ gesetzt, so wie wir überhaupt den ersten Differentialquotienten nach der Zeit mit einem, den zweiten mit zwei Accenten oben rechts bezeichnen wollen.

Sind mehrere störende Körper in Rechnung zu ziehen, so ist für jeden ein ähnlicher Ausdruck wie die rechte Seite dieser Gleichungen (3) zu bilden und die Summe dieser Ausdrücke einzusetzen. Der Kürze wegen halten wir uns an einen einzigen störenden Körper, und da man specielle Störungen wohl nur für Asteroiden und Kometen berechnen wird, so wollen wir dabei $m = 0$ annehmen.

Um die Gleichungen (3) durch Polarcoordinaten ausgedrückt zu erhalten, sind darin die Werthe der rechtwinkligen Coordinaten aus (1) und (2) zu substituiren. Wird zunächst die zweite der Gleichungen (3) mit x , die erste mit y multiplicirt, so giebt die Subtraction beider Producte:

$$x y'' - y x'' = k^2 m_1 (x y_1 - y x_1) K,$$

wo:

$$K = \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r_1^3}.$$

Die linke Seite wird:

$$\frac{d(x y' - y x')}{dt} = \frac{d(\varrho^2 l')}{dt},$$

und die rechte Seite giebt:

$$k^2 m_1 \cdot \varrho r_1 \cos B_1 \sin(L_1 - l) \cdot K = U,$$

so dass:

$$\frac{d(\varrho^2 l')}{dt} = U,$$

oder:

$$\varrho^2 l' = \text{Const.} + \int U dt.$$

Die Werthe, welche ϱ und l in der ungestörten Bewegung, für welche $U = 0$ und $\int U dt = 0$ ist, annehmen, seien r_0 und $v_0 + N_0$, wo v_0 die ungestörte wahre Anomalie und N_0 eine Constante bezeichnet. Es wird dann:

$$r_0^2 v_0' = k \sqrt{p_0},$$

wenn $p_0 =$ Parameter der ungestörten Bahn.

Folglich wird obige Const. = $k \sqrt{p_0}$ und es ist:

$$\varrho^2 l' = k \sqrt{p_0} + \int U dt. \quad \dots \dots \dots \text{(I)}$$

Um eine zweite Gleichung zwischen ϱ und l zu erhalten, multiplicire man die erste der Gleichungen (3) mit x , die zweite mit y und addire die Producte. Dies giebt:

$$x x'' + y y'' + \frac{k^2 \varrho^2}{r^3} = k^2 m_1 \left[(x x_1 + y y_1) K - \frac{\varrho^2}{\Delta^3} \right].$$

Mit Rücksicht auf Gleichung (1) und (2) wird die rechte Seite:

$$k^2 m_1 \left[K r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - l) - \frac{\varrho}{\Delta^3} \right] \cdot \varrho = R \cdot \varrho$$

und die linke Seite giebt:

$$\frac{d(x x' + y y')}{dt} - (x'^2 + y'^2) + \frac{k^2 \varrho^2}{r^3} = \frac{d(\varrho \varrho')}{dt} - (\varrho'^2 + \varrho^2 l'^2) + \frac{k^2 \varrho^2}{r^3},$$

also:

$$= \varrho \varrho'' - \varrho^2 l'^2 + \frac{k^2 \varrho^2}{r^3}.$$

Folglich haben wir:

$$\varrho'' - \varrho l'^2 + \frac{k^2 \varrho}{r^3} = R. \quad \text{. (II)}$$

Durch die Gleichungen (I) und (II) und die letzte der Gleichungen (3) also durch:

$$z'' + \frac{k^2 z}{r^3} = k^2 m_1 \left(\frac{z_1 - z}{\Delta^3} - \frac{z_1}{r_1^3} \right) = k^2 m_1 \left(z_1 \cdot K - \frac{z}{\Delta^3} \right) = Z. \quad \text{. . . (III)}$$

ist der Ort des gestörten Körpers vollständig bestimmt.

Wollte man den Radius vector r und den beschriebenen Bogen u statt der resp. Projectionen dieser Grössen ϱ und l einführen, so ist zu bemerken, dass sich r von ϱ und u von l — gleichen Anfangspunkt der Zählung vorausgesetzt — nur um Grössen zweiter Ordnung unterscheiden. Verändert man daher jedesmal die Lage der Ebene der xy , sobald diese Unterschiede merklich werden, oder besser, geht man in jedem Augenblick auf die jedesmalige Bahnebene über, d. h. auf diejenige Ebene, welche durch zwei unmittelbar auf einander folgende Radienvectoren r und $r + r' dt$ geht, so kann man in (I) und (II) ϱ durch r und l durch u ersetzen. Die Grössen R und U sind dann natürlich auch für die jedesmalige Bahnebene zu bestimmen. Letzterer Umstand hauptsächlich giebt die Veranlassung, statt der veränderlichen Ebene eine feste Ebene, nämlich die Bahnebene für den Zeitpunkt des Anfanges der Rechnung beizubehalten. Diese Ebene möge kurz „ungestörte Bahnebene“ genannt werden, sowie wir überhaupt der Kürze wegen die für diesen Zeitpunkt osculirenden Elemente mit „ungestörten Elementen“ bezeichnen wollen. Wir werden daher bei den folgenden Entwicklungen die Gleichungen (I), (II), (III) zu Grunde legen. Da:

$$r^2 = \varrho^2 + z^2,$$

so wird:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{\varrho^3} \left(1 + \frac{z^2}{\varrho^2} \right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\varrho^3} - \frac{3}{2} \frac{z^2}{\varrho^5} \dots,$$

wo es wohl in allen Fällen ausreichen wird, die Reihe mit dem zweiten Gliede abzubrechen. Die Substitution dieses Werthes in (II) und (III) giebt:

$$\varrho'' - \varrho l'^2 + \frac{k^2}{\varrho^2} = R + \frac{3}{2} \frac{k^2 z^2}{\varrho^4} = R_1 \quad \text{. (IV)}$$

$$z'' + \frac{k^2 z}{\varrho^3} = Z + \frac{3}{2} \frac{k^2 z^3}{\varrho^5} = Z_2 \quad \text{. (V)}$$

In den meisten Fällen wird man $Z_2 = Z$ setzen können.

Aus den Gleichungen (I), (II), (III) oder aus (I), (IV), (V) lassen sich unzählige Methoden zur Berechnung der speciellen Störungen ableiten. Wir wollen uns hier auf drei, die besonders für unsere Zwecke geeignet erscheinen, beschränken.

Bei allen drei Methoden werden wir die Gleichung, welche z giebt, in einer und derselben Form anwenden, die man sofort aus (V) erhält, wenn man darin für Z seinen Werth aus (III) setzt. Es wird dann:

$$z'' + \left(\frac{k^2}{\varrho^3} + \frac{k^2 m_1}{\Delta^3} \right) z = k^2 m_1 K z_1 + \frac{3}{2} \frac{k^2 z^3}{\varrho^5},$$

oder:

$$z'' + \beta z = Z_1,$$

wenn:

$$\frac{k^2}{\varrho^3} + \frac{k^2 m_1}{\Delta^3} = \beta \quad \text{und} \quad k^2 m_1 K z_1 + \frac{3}{2} \frac{k^2 z^3}{\varrho^5} = Z_1$$

gesetzt wird, wo wohl in den meisten Fällen $\frac{3}{2} \frac{k^2 z^3}{\varrho^5}$ vernachlässigt werden kann.

I.

Es sei:

$$\varrho = r_0 + \delta \varrho \quad \text{und} \quad l = u_0 + \delta u,$$

wo r_0 und u_0 der ungestörten Bewegung entsprechen und auf gewöhnliche Weise aus den ungestörten Elementen erhalten werden, nämlich aus:

$$\begin{aligned} E_0 - e_0 \sin E_0 &= M_0 \\ r_0 \sin v_0 &= a_0 \cos \varphi_0 \sin E_0 \\ r_0 \cos v_0 &= a_0 (\cos E_0 - e_0) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$u_0 = v_0 + N_0.$$

N_0 ist der Abstand des Perihels der ungestörten Bahn vom Durchschnittspunkte dieser Bahn mit der Bahn des störenden Körpers.

Da man die Gleichungen für die ungestörte Bewegung erhält, wenn man in denen für die gestörte Bewegung alle die Masse des störenden Planeten enthaltenden Ausdrücke Null setzt, so folgt aus:

$$\varrho'' - \varrho l'^2 + \frac{k^2}{\varrho^2} = R_1$$

zunächst, wenn für:

$$\varrho l'^2 = \frac{(\varrho^2 l')^2}{\varrho^3} = \frac{(k \sqrt{p_0} + \int U dt)^2}{\varrho^3}$$

substituiert wird:

$$\varrho'' - \frac{k^2 p_0}{\varrho^3} + \frac{k^2}{\varrho^2} = R_1 + \frac{2k \sqrt{p_0}}{\varrho^3} \int U dt + \frac{1}{\varrho^3} (\int U dt)^2 = \Re. \quad . \quad . \quad (5)$$

und es ist also auch:

$$r_0'' = \frac{k^2 p_0}{r_0^3} + \frac{k^2}{r_0^2} = 0.$$

Die Subtraction beider Gleichungen giebt:

$$(\delta \varrho)'' - k^2 \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_0^3} \right) p_0 + k^2 \left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) = \Re,$$

oder:

$$(\delta \varrho)'' + \frac{k^2 r_0}{\varrho^3} \left\{ \left[\left(\frac{\varrho}{r_0} \right)^3 - 1 \right] \frac{p_0}{r_0} - \frac{\varrho}{r_0} \left[\left(\frac{\varrho}{r_0} \right)^2 - 1 \right] \right\} = \Re.$$

Nun ist:

$$\frac{p_0}{r_0} = 1 + e_0 \cos v_0,$$

also:

$$\left[\left(\frac{\varrho}{r_0} \right)^3 - 1 \right] \frac{p_0}{r_0} - \frac{\varrho}{r_0} \left(\frac{\varrho^2}{r_0^2} - 1 \right) = \frac{\varrho}{r_0} - 1 + e_0 \cos v_0 \left(\frac{\varrho^3}{r_0^3} - 1 \right).$$

erhält. Um dann ϱ zu finden, wollen wir mit Hansen eine Grösse w so bestimmen, dass $\varrho = \bar{r} c^w$, wo c die Basis des natürlichen Logarithmensystems ist. Wir haben daher jetzt folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \bar{M} &= M_0 + \delta M \\ \bar{E} - e_0 \sin \bar{E} &= \bar{M} \\ \bar{r} \sin \bar{v} &= a_0 \cos \varphi_0 \sin \bar{E} \\ \bar{r} \cos \bar{v} &= a_0 (\cos \bar{E} - e_0) \\ l &= \bar{v} + N_0 \\ \varrho &= \bar{r} c^w. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Bezieht man alle Grössen auf die gestörte Bahnebene, so gelangt man zu den von Hansen zuerst aufgestellten Formeln. Aus:

$$\varrho = \bar{r} c^w$$

folgt:

$$\varrho' = \varrho w' + c^w \bar{r}'$$

oder, da:

$$\bar{r} = \frac{p_0}{1 + e_0 \cos \bar{v}} \quad \text{und} \quad \bar{v}' = l'$$

ist:

$$\varrho' = \varrho w' + c^w \frac{e_0 \sin \bar{v}}{p_0} (\bar{r}^2 \bar{v}') = \varrho w' + c^w S,$$

wo der Kürze wegen:

$$S = \frac{e_0 \sin \bar{v}}{p_0} (\varrho^2 l')$$

gesetzt ist.

Differentiirt man ϱ' noch einmal nach t , so wird:

$$\begin{aligned} \varrho'' &= \varrho w'' + w' (\varrho w' + c^w S) - c^w S w' + c^w S' \\ &= \varrho w'' + \varrho w'^2 + c^w S'. \end{aligned}$$

Nun ist:

$$S' = \frac{e_0 \cos \bar{v}}{p_0} \varrho^2 l'^2 + \frac{e_0 \sin \bar{v}}{p_0} (\varrho^2 l')',$$

oder mit Berücksichtigung der früheren Gleichungen:

$$\begin{aligned} S' &= \left(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{p_0} \right) \varrho^2 l'^2 + \frac{e_0 \sin \bar{v}}{p_0} \cdot U \\ &= c^w \varrho l'^2 - \frac{(\varrho^2 l')^2}{p_0 \varrho^2} + \frac{e_0 \sin \bar{v}}{p_0} U \\ &= c^w \varrho l'^2 - \frac{k^2}{\varrho^2} - \frac{[2k\sqrt{p_0} f U dt + (f U dt)^2]}{p_0 \varrho^2} + \frac{e_0 \sin \bar{v}}{p_0} U, \end{aligned}$$

also:

$$\varrho'' - \varrho l'^2 + \frac{k^2 c^w}{\varrho^2} = \varrho w'' + \varrho w'^2 + \frac{e_0 \sin \bar{v} c^w}{p_0} U - \frac{2k\sqrt{p_0} f U dt + (f U dt)^2}{p_0 \varrho^2} c^w.$$

Dieser Ausdruck, von:

$$\varrho'' - \varrho l'^2 + \frac{k^2}{\varrho^2} - R_1$$

subtrahirt, giebt:

$$\frac{k^2}{\varrho^2} (1 - e^{-w}) = - \varrho w'' - \varrho w'^2 + R_1 + \frac{2k\sqrt{p_0} f U dt + (f U dt)^2}{p_0 \varrho^2} e^{-w} - \frac{c_0 \sin v}{p_0} e^{-w} U,$$

oder:

$$w'' + \frac{k^2}{\varrho^3} (1 - e^{-w}) = \frac{R_1}{\varrho} + \frac{2k\sqrt{p_0} f U dt + (f U dt)^2}{p_0 \varrho^3} e^{-w} - \frac{c_0 \sin v}{p_0 \varrho} e^{-w} U - w'^2 \quad (7)$$

Um eine Gleichung für δM zu erhalten, bemerke man, dass:

$$\varrho^2 l' = \varrho^2 \bar{v}' = \varrho^2 \frac{d\bar{v}}{d\bar{M}} \cdot \frac{d\bar{M}}{dt},$$

also, da:

$$\frac{d\bar{v}}{d\bar{M}} = \frac{a_0^2 \cos \varphi_0}{r^2} = \frac{k\sqrt{p_0}}{n_0 r^2} = \frac{k\sqrt{p_0}}{n_0 \varrho^2} e^{2w} \quad \text{und} \quad \frac{d\bar{M}}{dt} = n_0 + \frac{d(\delta M)}{dt}$$

$$\varrho^2 l' = k\sqrt{p_0} \cdot e^{2w} \left(1 + \frac{1}{\mu_0} (\delta M)' \right).$$

Nach (I) ist auch:

$$\varrho^2 l' = k\sqrt{p_0} + f U dt,$$

folglich:

$$e^{2w} + \frac{e^{2w}}{n_0} (\delta M)' = 1 + \frac{1}{k\sqrt{p_0}} f U dt,$$

oder:

$$(\delta M)' = \frac{n_0 e^{-2w}}{k\sqrt{p_0}} f U dt - (1 - e^{-2w}) n_0. \quad (8)$$

Sei:

$$\frac{n_0}{k\sqrt{p_0}} U = F' \quad \text{also} \quad \frac{n_0}{k\sqrt{p_0}} f U dt = F,$$

so folgt aus (7) und (8):

$$w'' + \frac{k^2}{\varrho^3} (1 - e^{-w}) = \frac{R_1}{\varrho} + \frac{2k^2}{n_0} \frac{F}{\varrho^3} \left(1 + \frac{F}{2n_0} \right) e^{-w} - \frac{c_0 \sin v}{p_0 \varrho} e^{-w} U - w'^2. \quad (9)$$

$$(\delta M)' = F e^{-2w} - (1 - e^{-2w}) n_0. \quad (E)$$

Setzt man $w_1 = \mathfrak{M} w$, wo \mathfrak{M} der Modul des Brigg'schen Logarithmensystems, so geht (9) über in:

$$w_1'' + \frac{k^2}{\varrho^3} \mathfrak{M} (1 - e^{-w}) = \mathfrak{M} \frac{R_1}{\varrho} + \frac{2k^2 \mathfrak{M}}{n_0} \frac{F}{\varrho^3} \left(1 + \frac{F}{2n_0} \right) 10^{-w_1} - \frac{c_0 \sin v \mathfrak{M} 10^{-w_1}}{p_0 \varrho} U - \frac{w_1'^2}{\mathfrak{M}} \quad (D)$$

Setzt man in (D) zur Abkürzung:

$$G_1 = \frac{2k^2 \mathfrak{M}}{n_0} \cdot \frac{F}{\varrho^3} \left(1 + \frac{F}{2n_0} \right) 10^{-w_1}$$

$$b_1 \gamma w_1 = \frac{k^2 \mathfrak{M}}{\varrho^3} (1 - e^{-w}), \quad \text{wo } b_1 = \frac{k^2}{\varrho^3},$$

III.

Vorstehende Methoden lassen sich leicht combiniren, wodurch die Rechnung etwas vereinfacht wird. Setzt man nämlich:

$$l = V + N \quad \text{und} \quad \varrho^2 N' = f U dt,$$

so erhält man aus (I):

$$\varrho^2 V' = k \sqrt{p_0}.$$

V folge wieder aus den Gleichungen (4) statt v_0 , wenn darin $M_0 + \triangle M$ statt M_0 gesetzt wird; statt r_0 ergebe sich dann r , so dass:

$$E - e_0 \sin E = M_0 + \triangle M$$

$$r \sin V = a_0 \cos \varphi_0 \sin E$$

$$r \cos V = a_0 (\cos E - e_0)$$

und es sei:

$$\varrho = r c^w = \frac{p_0 c^w}{1 + e_0 \cos V}.$$

Hieraus folgt:

$$\left. \begin{aligned} \varrho' &= r c^w w' + \frac{p_0 c^w}{(1 + e_0 \cos V)^2} \cdot e_0 \sin V \cdot V' \\ &= \varrho w' + \frac{e_0 \sin V}{p_0 c^w} \cdot \varrho^2 V' = \varrho w' + \frac{k e_0}{\sqrt{p_0}} c^{-w} \sin V \end{aligned} \right\} \dots \dots (12)$$

und

$$\begin{aligned} \varrho'' &= \varrho w'' + \left(\varrho w' + \frac{k c^{-w}}{\sqrt{p_0}} e_0 \sin V \right) w' - \frac{k c^{-w} e_0 \sin V}{\sqrt{p_0}} w' + \frac{k c^{-w}}{\varrho^2 \sqrt{p_0}} e_0 \cos V (\varrho^2 V') \\ &= \varrho w'' + \varrho w'^2 + \frac{k^2 c^{-w}}{\varrho^2} e_0 \cos V, \end{aligned}$$

oder:

$$\varrho'' = \varrho w'' + \frac{k^2 p_0}{\varrho^3} - \frac{k^2 c^{-w}}{\varrho^2} + \varrho w'^2,$$

folglich:

$$\varrho'' - \frac{k^2 p_0}{\varrho^3} + \frac{k^2}{\varrho^2} = \varrho w'' + \frac{k^2 (1 - c^{-w})}{\varrho^2} + \varrho w'^2.$$

Nach (5) ist aber:

$$\varrho'' - \frac{k^2 p_0}{\varrho^3} + \frac{k^2}{\varrho^2} = \mathfrak{H},$$

also:

$$w'' + \frac{k^2 (1 - c^{-w})}{\varrho^3} = \frac{\mathfrak{H}}{\varrho} - w'^2,$$

oder wieder:

$$w_1 = \mathfrak{M} w$$

gesetzt und den Werth für \mathfrak{H} aus (5) eingetragen:

$$w_1'' + \frac{k^2 \mathfrak{M} (1 - c^{-w})}{\varrho^3} = \mathfrak{M} \left(\frac{R_1}{\varrho} + \frac{2k \sqrt{p_0}}{\varrho^4} f U dt + \frac{1}{\varrho^4} (f U dt)^2 \right) - \frac{w_1'^2}{\mathfrak{M}} \dots (G)$$

Um eine Gleichung für $\triangle M$ zu erhalten, hat man wieder:

$$r^2 V' = k \sqrt{p_0} \left[1 + \frac{1}{n_0} (\triangle M)' \right],$$

Für die Anfangslage der Bahnebene des gestörten Planeten seien die ähnlichen Grössen \varnothing_0 und i_0 ; ferner sei für dieselbe ω_0 der Abstand des Perihels von \varnothing_0 . Bezeichnet man noch den Winkel, welchen die Durchschnittslinie der beiden angeführten Bahnebenen mit der vom Mittelpunkte der Sonne nach \varnothing_0 gerichteten Linie bildet, durch Φ , und den Winkel, welchen diese Durchschnittslinie mit der Richtung nach \varnothing_1 bildet, durch Φ_1 — alle Grössen in der Richtung der Bewegung, Φ von \varnothing_0 und Φ_1 von \varnothing_1 aus gezählt — und nennt man schliesslich J die Neigung beider Bahnebenen gegen einander, so ergeben sich Φ , Φ_1 und J aus:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} (\Phi + \Phi_1) &= \sin \frac{1}{2} (\varnothing_1 - \varnothing) \sin \frac{1}{2} (i_1 + i) \\ \sin \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{2} (\Phi + \Phi_1) &= \cos \frac{1}{2} (\varnothing_1 - \varnothing) \sin \frac{1}{2} (i_1 - i) \\ \cos \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} (\Phi - \Phi_1) &= \sin \frac{1}{2} (\varnothing_1 - \varnothing) \cos \frac{1}{2} (i_1 + i) \\ \cos \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{2} (\Phi - \Phi_1) &= \cos \frac{1}{2} (\varnothing_1 - \varnothing) \cos \frac{1}{2} (i_1 - i) \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (13)$$

und es sei ferner (siehe Fig. 62):

$$u_0 = v_0 + (\omega_0 - \Phi) = v_0 + N_0, \quad \text{wo } N_0 = \omega_0 - \Phi.$$

Für den störenden Körper ist im Jahrbuche die Länge in der Bahn λ_1 gegeben. Nennt man u_1 den Winkel, welchen der Radius vector r_1 dieses Körpers mit der erwähnten Durchschnittslinie bildet, so ist:

$$\lambda_1 = \varnothing_1 + \Phi_1 + u_1,$$

also:

$$u_1 = \lambda_1 - (\varnothing_1 + \Phi_1) = \lambda_1 + P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

wenn:

$$P = 360^\circ - (\varnothing_1 + \Phi_1).$$

Der Radius vector r_1 ist gleichfalls im Jahrbuche gegeben, die Grössen B_1 und L_1 erhält man auf bekannte Weise aus u_1 und J nach:

$$\left. \begin{aligned} \cos B_1 \sin L_1 &= \sin u_1 \cos J \\ \cos B_1 \cos L_1 &= \cos u_1 \\ \sin B_1 &= \sin u_1 \sin J \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Sei:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= r_1 \cos B_1 \cos (L_1 - l) \\ \eta_1 &= r_1 \cos B_1 \sin (L_1 - l) \\ \zeta_1 &= r_1 \sin B_1 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

¹⁾ Im Berliner Jahrbuch (vergl. Bemerkung S. 636) sind mittlere Elemente i_1 und \varnothing_1 für jeden Planeten gegeben und die dort angegebene Länge in der Bahn ist die Länge in dieser mittleren Bahn. Ausserdem giebt das Berliner Jahrbuch noch für die grossen Planeten den Winkel B_0 , den der Planet mit dieser idealen Bahn bildet (der positiv zählt, wenn sich der Planet nördlich, negativ, wenn er sich südlich von der idealen Bahn befindet). Will man dann die störenden Kräfte streng berechnen (ohne Vernachlässigung von B_0), so hat man an Stelle der Formeln (15) die folgenden zu setzen:

$$\begin{aligned} \cos B_1 \sin L_1 &= \sin u_1 \cos J - B_0 \sin 1'' \sin J \\ \cos B_1 \cos L_1 &= \cos u_1 \\ \sin B_1 &= \sin u_1 \sin J + B_0 \sin 1'' \cos J. \end{aligned}$$

Anmerkung des Herausgebers der zweiten Auflage.

so wird:

$$\Delta^2 = (\xi_1 - \varrho)^2 + \eta^2 + (\xi_1 - z)^2,$$

und wenn, wie oben:

$$\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r_1^3} = K$$

gesetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} U &= k^2 m_1 K \eta_1 \varrho \\ R &= k^2 m_1 K \xi_1 - k^2 m_1 \frac{\varrho}{\Delta^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

Δ berechnet sich am bequemsten aus:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \cos B \cos L &= \xi_1 - \varrho \\ \Delta \cos B \sin L &= \eta_1 \\ \Delta \sin B &= \xi_1 - z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

wobei man die Winkel L und B selbst nicht aufzuschreiben braucht.

V. Mechanische Quadratur.

Es seien gegeben die Functionswerthe:

$$f(a), \quad f(a + \omega), \quad f(a + 2\omega) \dots f(a + m\omega).$$

Die ersten Differenzen bezeichne man mit f'_0 , die zweiten mit f''_0 etc., so dass:

$$f'_0 \left[a + \left(m + \frac{1}{2} \right) \omega \right] = f[a + (m + 1)\omega] - f(a + m\omega)$$

$$f''_0(a + m\omega) = f'_0 \left[a + \left(m + \frac{1}{2} \right) \omega \right] - f'_0 \left[a + \left(m - \frac{1}{2} \right) \omega \right]$$

etc. Ferner bezeichne man die summirten Reihen mit ${}^I f$, ${}^II f$ etc., und zwar so, dass:

$${}^I f \left[a + \left(m + \frac{1}{2} \right) \omega \right] = {}^I f \left[a + \left(m - \frac{1}{2} \right) \omega \right] + f(a + m\omega)$$

$${}^II f(a + m\omega) = {}^II f[a + (m - 1)\omega] + {}^I f \left[a + \left(m - \frac{1}{2} \right) \omega \right].$$

Die Integralformeln sind alsdann:

$$\left. \begin{aligned} \int_{a + \left(m + \frac{1}{2} \right) \omega}^{a + \left(m + \frac{1}{2} \right) \omega} f(x) dx &= \omega \left\{ {}^I f \left[a + \left(m + \frac{1}{2} \right) \omega \right] + \frac{1}{24} f'_0 \left[a + \left(m + \frac{1}{2} \right) \omega \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{17}{5760} f'''_0 \left[a + \left(m + \frac{1}{2} \right) \omega \right] \dots \right\} \\ \int \int_{a + \left(m + \frac{1}{2} \right) \omega}^{a + \left(m + \frac{1}{2} \right) \omega} f(x) dx^2 &= \omega^2 \left\{ {}^{II} f_{\frac{1}{2}} \left[a + \left(m + \frac{1}{2} \right) \omega \right] - \frac{1}{24} f'_{\frac{1}{2}} \left[a + \left(m + \frac{1}{2} \right) \omega \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{17}{1920} f'''_{\frac{1}{2}} \left[a + \left(m + \frac{1}{2} \right) \omega \right] \dots \right\} \\ \int_{a + m\omega}^{a + m\omega} f(x) dx &= \omega \left\{ f_{\frac{1}{2}}(a + m\omega) - \frac{1}{12} f'_{\frac{1}{2}}(a + m\omega) \right. \\ &\quad \left. + \frac{11}{720} f'''_{\frac{1}{2}}(a + m\omega) \dots \right\} \\ \int \int_{a + m\omega}^{a + m\omega} f(x) dx^2 &= \omega^2 \left\{ {}^{II} f(a + m\omega) + \frac{1}{12} f(a + m\omega) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{240} f''_0(a + m\omega) \dots \right\} \end{aligned} \right\} (19)$$

worin:

$$f_{\frac{1}{2}} \left[a + \left(m + \frac{1}{2} \right) \omega \right] = \frac{1}{2} \{ f[a + (m + 1) \omega] + f(a + m \omega) \}$$

$$f'_{\frac{1}{2}}(a + m \omega) = \frac{1}{2} \left\{ f'_0 \left[a + \left(m + \frac{1}{2} \right) \omega \right] + f'_0 \left[a + \left(m - \frac{1}{2} \right) \omega \right] \right\}$$

etc.

bezeichnet.

Um die einfachen und doppelten Summen ${}^I f$ und ${}^II f$ bilden zu können, muss für die Anfangswerthe irgend eine Bedingung gegeben sein, z. B. die, dass das Integral für einen bestimmten Werth von m , z. B. $m = m_1$ (wo $m_1 < 1$ vorausgesetzt werden kann), gegeben ist. Es sei:

$$\int_{a+m_1\omega}^{a+m_1\omega} f(x) dx = C_1,$$

also:

$$C_1 = \omega \left[{}^I f(a + m_1 \omega) + \frac{1}{24} f'_0(a + m_1 \omega) - \frac{17}{5760} f'''_0(a + m_1 \omega) \dots \right].$$

Nun ist nach der Interpolationsrechnung, wenn $m_1 = m_2 + \frac{1}{2}$ gesetzt wird:

$${}^I f(a + m_1 \omega) = {}^I f \left(a + \frac{1}{2} \omega + m_2 \omega \right) = {}^I f \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) + m_2 f(a + \omega) -$$

$$+ \frac{m_2(m_2 - 1)}{1 \cdot 2} f'_0 \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) + \dots$$

$$\frac{1}{24} f'_0(a + m_1 \omega) = \frac{1}{24} f'_0 \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) + \dots$$

etc.

Sei also:

$$A_0 = m_2$$

$$A_1 = \frac{m_2(m_2 - 1)}{1 \cdot 2} + \frac{1}{24}$$

$$A_2 = \frac{(m_2 + 1) m_2 (m_2 - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{24} m_2$$

$$A_3 = \frac{(m_2 + 1) m_2 (m_2 - 1) (m_2 - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{24} \frac{m_2(m_2 - 1)}{1 \cdot 2} - \frac{17}{5760}$$

etc.,

so wird:

$$f'_0 \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) = \frac{C_1}{\omega} - \left[A_0 f(a + \omega) + A_1 f'_0 \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) + A_2 f'''_0(a + \omega) \right.$$

$$\left. + A_3 f'''_0 \left(a + \frac{1}{2} \omega \right) + \dots \right].$$

Auf gleiche Weise findet man, wenn das Doppelintegral:

$$\iint_{a+m_1\omega}^{a+m_1\omega} f(x) dx^2 = C_2 = \omega^2 \left[{}^{II} f(a + m_1 \omega) + \frac{1}{12} f''(a + m_1 \omega) + \dots \right]$$

gegeben ist, und man setzt:

$$B_{-1} = m_1$$

$$B_1 = \frac{(m_1 + 1) m_1 (m_1 - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{12} m_1$$

$$B_3 = \frac{(m_1 + 2) (m_1 + 1) m_1 (m_1 - 1) (m_1 - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{12} \frac{(m_1 + 1) m (m_1 - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{240} m_1$$

⋮

$$B_0 = \frac{m_1 (m_1 - 1)}{1 \cdot 2} + \frac{1}{12}$$

$$B_2 = \frac{(m_1 + 1) m_1 (m_1 - 1) (m_1 - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{12} \frac{m_1 (m_1 - 1)}{1 \cdot 2} - \frac{1}{240}$$

etc.

$${}^n f(a) = \frac{C_2}{\omega^2} - \left[B_{-1} f\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) + B_0 f(a) + B_1 f_0'\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) + B_2 f_0''(a) + \dots \right].$$

Sollen z. B. beide Integrale verschwinden für $m = \frac{1}{2}$, so wird:

$$m_1 = \frac{1}{2} \quad m_2 = 0 \quad C_1 = 0 \quad C_2 = 0$$

und folglich:

$$\left. \begin{aligned} f\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) &= - \left[\frac{1}{24} f_0'\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) - \frac{17}{5760} f_0''' \left(a + \frac{1}{2} \omega\right) \dots \right] \\ {}^n f(a) &= - \left[\frac{1}{2} f\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) - \frac{1}{24} f(a) - \frac{1}{48} f'\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) + \frac{17}{1920} f_0''(a) \dots \right] \\ \text{oder:} \\ {}^n f(a) &= - \frac{1}{2} f\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) + \frac{1}{24} f_{\frac{1}{2}}\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) - \frac{17}{1920} f_{\frac{1}{2}}''\left(a + \frac{1}{2} \omega\right) \dots \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Diese beiden Werthe erhält man auch sofort aus den beiden ersten Integralformeln.

ω drückt hier das Zeitintervall aus, für welches die Werthe $f(a + m \omega)$ berechnet sind; nimmt man daher dies Zeitintervall als Einheit an, so fällt der Factor ω bei dem einfachen, und ω^2 bei dem Doppelintegrale fort. Bei den Störungsrechnungen ist im Allgemeinen das Intervall von 40 Tagen eine bequeme Einheit, es wird daher im Folgenden diese Einheit zu Grunde gelegt werden.

Das Doppelintegral kommt hier bei Differentialgleichungen von der Form:

$$x = \iint (X - bx) dx^2$$

zur Anwendung, worin b eine kleine Grösse ist. Da hier also:

$$f(a + m) = X - bx,$$

so giebt die Integralformel:

$$x = \iint^{(a+m)} f(x) dx^2 = {}^n f(a + m) + \frac{1}{12} f(a + m) - \frac{1}{240} f_0''(a + m) \dots$$

Hiernach wird man für x einen Näherungswerth annehmen, diesen in $f(a + m) = X - bx$ einsetzen und damit nach vorstehender Formel einen genaueren Werth von x erhalten u. s. w. — ${}^n f(a + m)$ kann man schon mit dem vorletzten Werthe von x

bilden und ebenso wird man $\frac{1}{240} f_0''(a + m)$ durch Extrapolirung stets genau genug erhalten können. Kann man gleich auch x schon in den meisten Fällen genau genug erhalten, um $\frac{1}{12} f(a + m)$ damit zu bilden, so scheint es doch bequemer, die indirecte Rechnung auf folgende Weise zu vermeiden. Da:

$$x = {}''f(a + m) + \frac{1}{12} X - \frac{1}{12} b x - \frac{1}{240} f_0''(a + m) \dots$$

oder:

$$\left(1 + \frac{1}{12} b\right) x = {}''f(a + m) + \frac{1}{12} X - \frac{1}{240} f_0''(a + m) \dots = S_x,$$

so wird:

$$b x = \frac{b}{1 + \frac{1}{12} b} \cdot S_x = b_1 S_x \dots \dots \dots (21)$$

Der Factor $b_1 = \frac{b}{1 + \frac{1}{12} b}$ kann leicht mit Hülfe der Zech'schen Tafeln be-

rechnet werden. Mit $b x$ erhält man $f(a + m) = X - b x$, hiermit bildet man:

$${}'f\left(a + m + \frac{1}{2}\right) \quad {}''f(a + m + 1) \quad \text{etc.}$$

Es wird ferner vorkommen, dass eine Gleichung von der Form:

$$w_1'' = X - b \mathfrak{M}(1 - c^{-w})$$

zu integrieren ist. Sei:

$$\mathfrak{M}(1 - c^{-w}) = w_1 \gamma,$$

wo:

$$\log \gamma = -\frac{1}{2} w_1 + \eta,$$

so wird hier:

$$b \mathfrak{M}(1 - c^{-w}) = \frac{b \gamma}{1 + \frac{1}{12} b \gamma} S_w = b_2 S_w \dots \dots \dots (22)$$

$\log \gamma$ wird man für mehrere Werthe im Voraus hinreichend genau bilden können.

VI. Verwandlung der für die Zeit t berechneten Coordinatenstörungen, welche sich auf osculirende Elemente für den Zeitpunkt t_0 beziehen, in Elementenstörungen oder Ableitung neuer osculirender Elemente für die Zeit t .

Unter „osculirende Elemente eines Körpers für eine Zeit t “ werden diejenigen elliptischen Elemente desselben verstanden, welche seinen Ort sowohl für die Zeit t als auch für die Zeit $t + dt$ strengte wiedergeben. Wir bezeichnen diese Elemente mit:

$$M, \quad \omega, \quad \delta\delta, \quad i, \quad \varphi, \quad n, \quad a.$$

Bei der Ableitung derselben aus den für die Zeit t_0 osculirenden Elementen, die wir mit $M_0, \omega_0, \delta\delta_0, i_0, \varphi_0, n_0, a_0$ bezeichnen werden, und den für die Zeit t geltenden Coordinatenstörungen nebst deren ersten Differentialquotienten nach der Zeit, werden wir zunächst:

$$p = a (1 - e^2) = a \cos \varphi^2$$

bestimmen, womit sich dann ergibt:

$$e \sin v = \frac{\sqrt{p}}{k} r'$$

$$e \cos v = \left(\frac{p}{r} - 1 \right)$$

$$\sin \varphi = e \quad a = \frac{p}{1 - e^2} \quad n = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$$

$$\sin \frac{1}{2} (v - E) = \sqrt{\frac{r}{p}} \cdot \sin \frac{1}{2} \varphi \sin v$$

$$M = E - e \sin E.$$

Die beiden letzten Formeln kann man mit Hülfe siebenstelliger Logarithmen genau genug berechnen, während es sich bei den anderen Formeln empfiehlt, die Differenz zwischen den für die Zeit t_0 und den für die Zeit t osculirenden Elementen aufzusuchen.

Bezeichnet man den aufsteigenden Knoten der für t geltenden osculirenden Bahnebene in Bezug auf die für t_0 gültige mit K , wo K von demselben Anfangspunkte O wie l gezählt wird (siehe Figur 62) und die Neigung beider Ebenen gegen einander mit I , so ist:

$$\operatorname{tg} I \sin (l - K) = \frac{z}{\varrho}.$$

Da I und K auch für die Zeit $t + dt$ gelten, so erhält man durch Differentiation:

$$\operatorname{tg} I \cos (l - K) = \frac{\varrho z' - z \varrho'}{\varrho^2 l'} = \frac{\varrho z' - z \varrho'}{k \sqrt{p_0} + \int U dt}$$

Nachdem man aus diesen beiden Gleichungen I und K bestimmt hat, und zwar so, dass $I < 90^\circ$, erhält man für das Argument der Breite u , vom Knotenpunkte K aus gezählt:

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} (l - K) \sec I$$

oder:

$$u = l - K + \operatorname{tg} \frac{1}{2} I^2 \sin 2 (l - K) + \dots = l - K + \Delta u.$$

Ferner wird:

$$k \sqrt{p} = r^2 u' = \varrho^2 l' \cdot \sec I = (k \sqrt{p_0} + \int U dt) \sec I,$$

also, wenn:

$$\sqrt{p} = \sqrt{p_0} + \delta \sqrt{p}$$

gesetzt wird:

$$\delta \sqrt{p} = \left(\frac{1}{k} \int U dt + 2 \sqrt{p_0} \sin \frac{1}{2} I^2 \right) \sec I$$

und:

$$p - p_0 = \delta p = 2 \delta \sqrt{p} \left(\sqrt{p_0} + \frac{1}{2} \delta \sqrt{p} \right).$$

Sei ferner:

$$r - r_0 = \delta r,$$

so erhält man:

$$e \cos v = \frac{p}{r} - 1 = \frac{p_0}{r_0} - 1 + \left(\frac{p}{r} - \frac{p_0}{r_0} \right)$$

$$e \cos v = e_0 \cos v_0 + \frac{1}{r} \left(\delta p - \frac{p_0}{r_0} \delta r \right).$$

Aus:

$$e \sin v = \frac{\sqrt{p} \cdot r'}{k}$$

erhält man leicht:

$$e \sin v = e_0 \sin v_0 + \frac{1}{k} [\sqrt{p} \cdot (\delta r)' + r'_0 \delta \sqrt{p}].$$

Setzt man daher:

$$\frac{1}{k} [\sqrt{p} (\delta r)' + r'_0 \delta \sqrt{p}] = n \sin N$$

$$\frac{1}{r} \left(\delta p - \frac{p_0}{r_0} \delta r \right) = n \cos N,$$

so wird:

$$e \sin v = e_0 \sin v_0 + n \sin N$$

$$e \cos v = e_0 \cos v_0 + n \cos N$$

oder:

$$e \sin (v - v_0) = n \sin (N - v_0)$$

$$e \cos (v - v_0) = e_0 + n \cos (N - v_0).$$

Hieraus folgt noch:

$$e^2 - e_0^2 = 2 e_0 n \cos (N - v_0) + n^2 = \delta (e^2)$$

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = a_0 + \frac{p}{1 - e^2} - \frac{p_0}{1 - e_0^2},$$

also wenn:

$$a = a_0 (1 + \Delta a)$$

gesetzt wird:

$$\Delta a = \frac{1}{p_0} [\delta p + a \delta (e^2)].$$

Endlich wird:

$$n = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0}{(1 + \Delta a)^{\frac{3}{2}}} = \mu_0 (1 - \Delta \mu),$$

wenn:

$$\Delta n = 1 - (1 + \Delta a)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \left(1 - \frac{\Delta a}{1 + \Delta a} \right)^{+\frac{3}{2}}$$

oder:

$$\frac{\Delta a}{1 + \Delta a} = \frac{\delta p + a_0 \delta (e^2)}{p} = \beta$$

gesetzt:

$$\Delta n = \frac{3}{2} \beta \left(1 - \frac{1}{4} \beta - \frac{1}{24} \beta^2 - \frac{1}{64} \beta^3 \dots \right).$$

Setzt man:

$$n = n_0 - \frac{3}{2} n_0 \beta \cdot C \cdot D,$$

wo:

$$C = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \beta},$$

so wird D nahe $= 1$. Der Logarithmus von D kann aus Tafel II entnommen werden.

Um diese Formeln bei den verschiedenen Methoden anwenden zu können, hat man zunächst δr und $(\delta r)'$ zu bestimmen. Es ist:

$$r^2 = q^2 + z^2 \quad r r' = q q' + z z',$$

also:

$$r = q \left(1 + \frac{1}{2} \frac{z^2}{q^2} - \frac{1}{8} \frac{z^4}{q^4} \dots \right)$$

$$r' = \varrho' \left(1 - \frac{1}{2} \frac{z^2}{\varrho^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{z^4}{\varrho^4} \cdots \right) + \frac{z z'}{r}.$$

Nach der obigen ersten Methode hat man nun sofort:

$$\begin{aligned} \delta r = r - r_0 &= \delta \varrho + \varrho \left(\frac{1}{2} \frac{z^2}{\varrho^2} - \frac{1}{8} \frac{z^4}{\varrho^4} \right) = \delta \varrho + \xi \\ (\delta r)' &= r' - r'_0 = \delta \varrho' + \frac{z z'}{r} - \left(\frac{1}{2} \frac{z^2}{\varrho^2} - \frac{3}{8} \frac{z^4}{\varrho^4} \right) \varrho' = (\delta \varrho)' + \xi' \end{aligned}$$

Bei der zweiten Methode war:

$$\varrho = \bar{r} c^w \quad \varrho' = c^w \bar{r}' + \varrho w',$$

also:

$$r = \varrho + \xi = \bar{r} + \bar{r} (c^w - 1) + \xi = \bar{r} + \delta \bar{r},$$

wo:

$$\log (c^w - 1) = \log w + \frac{1}{2} w_1 + \eta \quad (\text{s. Tafel I}).$$

Ferner wird:

$$r' = \varrho' + \xi' = \bar{r}' + \bar{r}' (c^w - 1) + \varrho w' + \xi',$$

oder da:

$$\bar{r}' = \frac{d\bar{r}}{d\bar{M}} \cdot \frac{d\bar{M}}{dt} = \frac{k e_0 \sin \bar{v}}{\sqrt{p_0}} (1 + \varepsilon),$$

wo:

$$\varepsilon = \frac{1}{n_0} (\delta M)',$$

also:

$$\begin{aligned} \bar{r}' &= \frac{k e_0 \sin \bar{v}}{\sqrt{p_0}} + \varepsilon \frac{k e_0 \sin \bar{v}}{\sqrt{p_0}} \\ &= \frac{k e_0 \sin \bar{v}}{\sqrt{p}} + \frac{k e_0 \sin \bar{v}}{\sqrt{p_0}} \left(\frac{\delta \sqrt{p}}{\sqrt{p}} + \varepsilon \right), \end{aligned}$$

so wird:

$$r' = \frac{k e_0 \sin \bar{v}}{\sqrt{p}} + \frac{k e_0 \sin \bar{v}}{\sqrt{p_0}} \left[\frac{\delta \sqrt{p}}{\sqrt{p}} + \varepsilon + (c^w - 1) (1 + \varepsilon) \right] + \varrho w' + \xi'.$$

Es ist aber auch wieder:

$$r' = \frac{k e \sin v}{\sqrt{p}},$$

folglich:

$$e \sin v = e_0 \sin \bar{v} + \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p_0}} e_0 \sin \bar{v} \left[\frac{\delta \sqrt{p}}{\sqrt{p}} + \varepsilon c^w + (c^w - 1) \right] + \frac{\sqrt{p}}{k} (\varrho w' + \xi').$$

Setzt man daher:

$$\begin{aligned} n_1 \sin N_1 &= \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p_0}} e_0 \sin \bar{v} \left(\frac{\delta \sqrt{p}}{\sqrt{p}} + \varepsilon c^w + c^w - 1 \right) + \frac{\sqrt{p}}{k} (\varrho w' + \xi') \\ n_1 \cos N_1 &= \frac{1}{r} \left(\delta p - \frac{p_0}{r} \delta \bar{r} \right), \end{aligned}$$

so erhält man hier ähnlich wie früher:

$$\begin{aligned} e \sin (v - \bar{v}) &= n_1 \sin (N_1 - \bar{v}) \\ e \cos (v - \bar{v}) &= e_0 + n_1 \cos (N_1 - \bar{v}) \\ e^2 - e_0^2 &= n_1 [2 e_0 \cos (N_1 - \bar{v}) + n_1] = \delta (e^2). \end{aligned}$$

Ferner:

$$\begin{aligned}\vee \oslash_0 &= \oslash_0, & \vee \oslash &= \oslash, & \vee \oslash_1 &= \oslash_1, \\ \oslash_0 O &= \Phi, & \oslash_1 O &= \Phi_1, \\ OK &= K, & KP_1 &= l - K, & KP &= u, \\ \oslash_0 K \oslash &= PKP_1 = I.\end{aligned}$$

In dem sphärischen Dreieck $\oslash_0 K \oslash$ ist nun bekannt:

Winkel $K \oslash_0 \oslash = i_0$, Winkel $\oslash_0 K \oslash = I$, $\oslash_0 K = K + \Phi = \Psi_0$
und es werden gesucht:

$$\oslash K = \Psi, \quad \oslash_0 \oslash = \oslash - \oslash_0 = \triangle \oslash, \quad \text{Winkel } \oslash_0 \oslash K = 180 - i.$$

Setzt man daher:

$$\begin{aligned}\cos q \sin Q &= \sin I \cos \Psi_0 \\ \cos q \cos Q &= \cos I \\ \sin q &= \sin I \sin \Psi_0,\end{aligned}$$

worin $\cos q$ positiv zu nehmen ist, so wird:

$$\begin{aligned}\sin i \sin \triangle \oslash &= \sin I \sin \Psi_0 = \sin q \\ \sin i \cos \triangle \oslash &= \cos q \sin (i_0 + Q) \\ \cos i &= \cos q \cos (i_0 + Q).\end{aligned}$$

Es ist dann $\oslash = \oslash_0 + \triangle \oslash$. Zur Bestimmung von i ist hinreichend genau:

$$i = i_0 + Q + \frac{2 \sin \frac{1}{2} q^2}{\sin 1''} \cotg (i_0 + Q).$$

Berechnet man ferner:

$$\sin \frac{1}{2} \triangle \Psi = - \cos \left(\frac{i + i_0}{2} \right) \sin \frac{1}{2} \triangle \oslash \sec \frac{1}{2} I,$$

so wird:

$$\oslash K = \Psi = \Phi + K + \triangle \Psi.$$

Für den Abstand des Perihels vom \oslash folgt noch:

$$\omega = \pi_1 + \Psi = u - v + \Phi + K + \triangle \Psi,$$

wo:

$$u = l - K + \triangle u.$$

Nun war aber bei der ersten Methode:

$$l = v_0 + \omega_0 - \Phi + \delta u,$$

also:

$$\omega = \omega_0 - (v - v_0) + \triangle u + \delta u + \triangle \Psi.$$

Bei der zweiten Methode war:

$$l = \bar{v} + \omega_0 - \Phi,$$

also:

$$\omega = \omega_0 - (v - \bar{v}) + \triangle u + \triangle \Psi$$

und bei der dritten findet sich:

$$\omega = \omega_0 - (v - V) + \triangle u + \delta \omega + \triangle \Psi.$$

VII. Zusammenstellung der Formeln nebst Rechnungsbeispiel.

Als Beispiel werde die Berechnung der Jupiterstörungen der $\textcircled{87}$ Sylvia während der ersten bis dritten Erscheinung gewählt, weil hier die Störungen besonders beträchtlich werden.

Als genäherte Elemente werden folgende zu Grunde gelegt:

$$\begin{array}{l} \text{Oscul. und Epoche 1866. Mai 22,0.} \\ M_0 \quad 272^\circ 22' 2'',4 \\ \omega_0 \quad 263^\circ 14' 45'',1 \\ \varpi_0 \quad 76^\circ 22' 43'',2 \\ i_0 \quad 10^\circ 55' 30'',4 \\ \varphi_0 \quad 4^\circ 30' 9'',1 \\ \mu_0 \quad 514'',0605 \\ \log a_0 \quad 0,5429063. \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} M_0 \\ \omega_0 \\ \varpi_0 \\ i_0 \\ \varphi_0 \\ \mu_0 \\ \log a_0 \end{array}} \right\} \text{mittl. Aequin. 1870,0.}$$

Nimmt man für den Jupiter:

$$\Omega_1 = 99^\circ 4' 36'',0 \quad i_1 = 1^\circ 18' 39'',0 \quad m_1 = \frac{1}{1047,879}$$

an, so sind zunächst Φ , Φ_1 und J zu berechnen aus Formel (13):

$$\sin \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} (\Phi + \Phi_1) = \sin \frac{1}{2} (\Omega_1 - \Omega) \sin \frac{1}{2} (i_1 + i)$$

$$\sin \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{2} (\Phi + \Phi_1) = \cos \frac{1}{2} (\Omega_1 - \Omega) \sin \frac{1}{2} (i_1 - i)$$

$$\cos \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} (\Phi - \Phi_1) = \sin \frac{1}{2} (\Omega_1 - \Omega) \cos \frac{1}{2} (i_1 + i)$$

$$\cos \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{2} (\Phi - \Phi_1) = \cos \frac{1}{2} (\Omega_1 - \Omega) \cos \frac{1}{2} (i_1 - i).$$

$$\frac{1}{2} \Omega_1 = 49^\circ 32' 18'',0 \quad \frac{1}{2} i_1 = 0^\circ 39' 19'',5 \quad \frac{1}{2} (\Omega_1 - \Omega) = 11^\circ 20' 56'',4$$

$$\frac{1}{2} \Omega = 38^\circ 11' 21'',6 \quad \frac{1}{2} i = 5^\circ 27' 45'',2 \quad \frac{1}{2} (i_1 + i) = 6^\circ 7' 4'',7$$

$$\frac{1}{2} (i_1 - i) = -4^\circ 48' 25'',7$$

$$\sin \frac{1}{2} (\Omega_1 - \Omega) \quad 9,293991 \quad \cos \frac{1}{2} (\Omega_1 - \Omega) \quad 9,991422 \quad \frac{1}{2} (\Phi + \Phi_1) \quad 165^\circ 40' 50'',7$$

$$\sin \frac{1}{2} (i_1 + i) \quad 9,027659 \quad \sin \frac{1}{2} (i_1 - i) \quad 8,923254_n \quad \frac{1}{2} (\Phi - \Phi_1) \quad 11^\circ 19' 29'',5$$

$$\cos \frac{1}{2} (i_1 + i) \quad 9,997519 \quad \cos \frac{1}{2} (i_1 - i) \quad 9,998470$$

$$\sin \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} (\Phi + \Phi_1) \quad 8,321650 \quad \cos \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} (\Phi - \Phi_1) \quad 9,291510 \quad \Phi \quad 177^\circ 0' 20'',2$$

$$\sin \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{2} (\Phi + \Phi_1) \quad 8,914676_n \quad \cos \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{2} (\Phi - \Phi_1) \quad 9,989892 \quad \Phi_1 \quad 154^\circ 21' 21'',2$$

$$\cos \frac{1}{2} (\Phi + \Phi_1) \quad 9,986293_n \quad \cos \frac{1}{2} (\Phi - \Phi_1) \quad 9,991460$$

$$\frac{1}{2} J \quad 4^\circ 51' 51'',8 \quad \sin J \quad 9,227847 \quad N_0 = \omega_0 - \Phi \quad - \quad 86^\circ 14' 24'',9$$

$$J \quad 9^\circ 43' 43'',6 \quad \cos J \quad 9,993709 \quad P = 360 - (\Omega_1 + \Phi_1) \quad - \quad 106^\circ 34' 2'',8.$$

$$K = \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r_1^3}$$

$$g = \omega^2 k^2 m_1,$$

	1866. Mai 2,0.	Juni 11,0.	Juli 21,0.
u_1	37° 15' 50'',1	40° 38' 59'',6	44° 3' 17'',6
$\sin u_1$	9,782105	9,813871	9,842202
$\cos B_1 \sin L_1$	9,775814	9,807580	9,835911
$\cos B_1 \cos L_1$	9,900834	9,880073	9,856532
$\cos L_1$	9,903119	9,882720	9,859551
L_1	36° 51' 53'',2	40° 14' 24'',4	43° 38' 25'',0
l	346° 38' 11'',0	352° 37' 41'',0	358° 43' 12'',9
$L_1 - l$	50° 13' 42'',2	47° 36' 43'',4	44° 55' 12'',1
$\sin B_1$	9,009952	9,041718	9,070049
$\cos B_1$	9,997715	9,997353	9,996981
r_1	0,712514	0,711295	0,710083
$\sin (L_1 - l)$	9,885701	9,868407	9,848878
$\cos (L_1 - l)$	9,805996	9,828754	9,850091
$r_1 \cos B_1$	0,710229	0,708648	0,707064
$\delta \varrho$	4,2049 _n	4,1550 _n	5,04383 _n
r_0	0,545947	0,542375	0,538749
ν	3,6590 _n	3,6126 _n	4,50508 _n
ξ_1	9,722466	9,753013	9,780132
z	—	—	—
ξ_1	0,516225	0,537402	0,557155
ϱ	0,545947	0,542375	0,538748
$\xi_1 - \varrho$	9,366464 _n	8,598725 _n	9,175183
η_1	0,595930	0,577055	0,555942
$\sin L$	9,999246	9,999976	9,999624
$\xi_1 - z$	9,722466	9,753013	9,780132
$\Delta \cos B$	0,596684	0,577079	0,556318
$\cos B$	9,996159	9,995172	9,993997
$\frac{1}{\Delta}$	9,399475	9,418093	9,437679
$g \varrho$	4,200919	4,197347	4,193720

wo ω das bei der Rechnung angewandte Zeitintervall bezeichnet, also hier:

$$g = (40 k)^2 m_1.$$

Um die störenden Kräfte in Einheiten der siebenten Stelle zu erhalten, ist:

$$\log (40 k)^2 = 6,675283$$

zu setzen, und für den Jupiter, also:

$$\log (40 k)^2 m_1 = 3,654972$$

$$U = g \eta_1 \varrho \cdot K$$

$$R = g \xi_1 K - g \varrho \cdot \frac{1}{\Delta^3}$$

$$Z = g \xi_1 K$$

$$R_2 \varrho^3 = 80 k \sqrt{p_0} \int U dt \left[1 + \frac{\int U dt}{(80 k \sqrt{p_0})} \right]$$

$$R_1 = R + \frac{3}{2} \frac{k^2 z^2}{\varrho^4}$$

$$\mathfrak{R} = R_1 + R_2$$

$$\alpha_0 = 1 + 3 e_0 \cos v_0$$

$$\alpha = \alpha_0 \left[1 + \frac{v \left(1 + \frac{1}{3} v \right) 3 e_0 \cos v_0}{\alpha_0} \right]$$

$$b = \frac{(40 k)^2}{\varrho^3} \alpha, \text{ wo } \log(40 k)^2 = 9,675283 - 10, \quad b_1 = \frac{b}{1 + \frac{1}{12} b}$$

$$(\delta \varrho)'' = \mathfrak{R} - b_1 S_r$$

$$W = \int U dt - 80 k \sqrt{p_0} v \left(1 + \frac{1}{2} v \right)$$

$$(\delta u)' = \frac{1}{\varrho^2 \sin 1''} \cdot W.$$

Da W in Einheiten der siebenten Stelle gefunden ist, so hat man, um δu in Bogen-secunden zu erhalten:

$$\log \frac{1}{\varrho^2 \sin 1''} = (8,3144251 - 10) - 2 \log \varrho$$

zu setzen:

$$\beta = \frac{(40 k)^2}{\varrho^3} + \frac{g}{\Delta^3} \quad \beta_1 = \frac{\beta}{1 + \frac{1}{12} \beta}$$

$$z'' = Z - \beta_1 S_r.$$

	1866. Mai 2,0.	Juni 11,0.	Juli 21,0.
$\frac{1}{\Delta^3}$	8,198425	8,254279	8,313037
$\frac{1}{r_1^3}$	7,862458	7,866115	7,869751
$\eta_1 \varrho$	1,141877	1,119430	1,094690
$g \eta_1 \varrho$	4,796849	4,774402	4,749662
$g \xi_1$	4,171197	4,192374	4,212127
K	7,929730	8,025788	8,118985
$g \xi_1$	3,377438	3,407985	3,435104

	1866. Mai 2,0.	Juni 11,0.	Juli 21,0.
$\varrho^3 \cdot R_2$	2,853353 _n	2,890115	3,403226
ϱ^3	1,637841	1,627125	1,616244
$g \xi_1 K$	+ 126,16	+ 165,26	+ 214,34
$- g \varrho \frac{1}{\Delta^3}$	— 250,81	— 282,90	— 321,19
R_2	— 16,43	+ 18,32	+ 61,23
\mathfrak{K}	— 141,08	— 99,32	— 45,62
$b_1 S_r$	— 0,17	— 0,16	— 1,28
α_0	9,982592	9,993508	0,004403
$\nu \left(1 + \frac{1}{3} \nu\right) 3 e_0 \cos v_0$			2,51 _n
α	9,982592	9,993508	0,004403
$(40 k)^2 \frac{1}{\varrho^3}$	8,037442	8,048158	8,059039
$g \frac{1}{\Delta^3}$	4,8534	4,9092	4,9680
b	8,020034	8,041666	8,063441
$1 + \frac{1}{12} b$	379	398	419
b_1	8,01965	8,04127	8,06302
S_r	1,2041 _n	1,1553 _n	2,0441 _n
ϱ^2	1,091894	1,084750	1,077496
$\frac{1}{\varrho^2 \sin 1''}$	7,222531	7,229675	7,236929
W	2,425942 _n	2,496141	3,029084
Z	+ 20,28	+ 27,15	+ 35,82
$\beta_1 S_z$	+ 0,03	+ 0,03	+ 0,35
β	8,03773	8,04847	8,05939
$1 + \frac{1}{12} \beta$	39	40	41
β_1	8,03734	8,04807	8,05898
S_z	0,4487	0,4900	1,4864

In dem obigen Schema und Rechnungsbeispiel wird man mehrere Grössen hingeschrieben finden, die erst später berechnet werden könnten. Dies ist geschehen, damit die Zahlen, mit denen sie verbunden werden, nicht zweimal hingeschrieben zu werden brauchten.

In Bezug auf die angewandten Constanten ist noch zu bemerken, dass sie so gewählt sind, um $\delta \varrho$ und δz in Einheiten der siebenten Stelle und δu in Bogensekunden zu erhalten.

Die Integrationen führt man am besten auf besonderen Blättern aus. Im Folgenden sind die ersten Werthe mitgetheilt, die nach Abschnitt V unmittelbar verständlich sein werden. Der Anfangspunkt der Störungen liegt 1866. Mai 22,0.; bezeichnet man also die zu integrirenden Functionswerthe für Mai 2,0. mit $f(a)$, die für Juni 11,0. mit $f(a + 1)$, so sind die Anfangsconstanten ${}^I f\left(a + \frac{1}{2}\right)$ und ${}^{II} f(a)$ gebildet nach:

$$\begin{aligned} {}^I f\left(a + \frac{1}{2}\right) &= -\left[\frac{1}{24} f_0^I\left(a + \frac{1}{2}\right) - \frac{17}{5760} f_0^{III}\left(a + \frac{1}{2}\right) \cdots\right] \\ {}^{II} f(a) &= -\frac{1}{2} {}^I f_{\frac{1}{2}}\left(a + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{24} f_{\frac{1}{2}}^I\left(a + \frac{1}{2}\right) - \frac{17}{1920} f_{\frac{1}{2}}^{II}\left(a + \frac{1}{2}\right) \cdots \end{aligned}$$

1866	f_0^{II}	f_0^I	$U = f_0$	${}^I f$	$f U dt$	$\log f U dt$	$\log \left[f U dt + \frac{(f U dt)^2}{80 k \sqrt{p_0}} \right]$
Mai 2.	(+ 8,56)	(+ 89,85)	+ 532,82	— 536,91	— 278,34	2,444 576 _n	2,444 571 _n
		+ 98,41		— 4,10	[— 11,69]		
Juni 11.	+ 9,36	107,77	631,23	+ 627,13	+ 302,92	2,481 328	2,481 333
					[— 10,51]		
Juli 21.	+ 9,66	117,43	739,00	1366,13	+ 987,25	2,994 427	2,994 444
					[— 82,01]		
Aug. 30.	+ 9,44	126,87	856,43	2222,56	+ 1784,16	3,251 434	3,251 464
					[— 186,94]		
Oct. 9.			983,30	3205,86			

Die in () eingeschlossenen Zahlen, welche unter f_0^I und f_0^{II} stehen, sind ergänzt. $f U dt$ wird erhalten aus:

$$f U dt = {}^I f_{\frac{1}{2}}(a + m) - \frac{1}{12} f_{\frac{1}{2}}^I(a + m) + \frac{11}{720} f_{\frac{1}{2}}^{III}(a + m).$$

Die arithmetischen Mittel:

$$\begin{aligned} {}^I f_{\frac{1}{2}}(a + m) &= \frac{1}{2} \left[{}^I f\left(a + m + \frac{1}{2}\right) + {}^I f\left(a + m - \frac{1}{2}\right) \right] \\ f_{\frac{1}{2}}^I(a + m) &= \frac{1}{2} \left[f_0^I\left(a + m + \frac{1}{2}\right) + f_0^I\left(a + m - \frac{1}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

kann man mit Bleistift oder gefärbter Dinte zwischen die zugehörigen Functionswerthe schreiben, in vorstehendem Schema sind dieselben fortgelassen. Mit Juli 21. würde z. B. auf derselben Zeile zu stehen kommen:

$${}^I f_{\frac{1}{2}} = + 996,63 \qquad f_{\frac{1}{2}}^I = + 112,60,$$

woraus für dasselbe Datum:

$$f U dt = + 996,63 - \frac{1}{12} \cdot 112,60 = + 987,25.$$

Nachdem $f U dt$ gefunden, wurde mit Hülfe der Zech'schen Tafeln:

$$\log \left[f U dt + \frac{(f U dt)^2}{(80 k \sqrt{p_0})} \right]$$

gebildet, wobei das Argument der Tafeln:

$$\log 80 k \sqrt{p_0} - \log f U dt$$

sein wird. Da letzterer Werth in Einheiten der siebenten Stelle gefunden, so ist hier $\log 80 k = 7,138671$ und also für Sylvia nach den angeführten Elementen $\log(80 k \sqrt{p_0}) = 7,408782$. Addirt man zu:

$$\log \left[\int U dt + \frac{(f U dt)^2}{(80 k \sqrt{p_0})} \right]$$

noch $\log 80 k \sqrt{p_0} = 0,408782$, so erhält man $\log(q^3 R_2)$ in Einheiten der siebenten Stelle.

Die unter $\int U dt$ stehenden, in [] eingeschlossenen Zahlen sind:

$$W_1 = 80 k \sqrt{p_0} \cdot \nu \left(1 + \frac{1}{2} \nu \right),$$

welche erst nach der Integration von $(\delta q)''$ berechnet werden können. Indem man dieselben von $\int U dt$ subtrahirt, erhält man W .

Im Folgenden sind die ersten Werthe von δq abgeleitet, wobei die Anfangswerthe ${}^1f\left(a + \frac{1}{2}\right)$ und ${}^1f(a)$ nach den oben angegebenen Formeln gebildet sind.

1866	f_0'''	f_0''	f_0'	$(\delta q)''$	1f	1f	δq
Mai 2.	(+ 1,81)	(+ 11,26)	+ 41,75	— 140,91	— 1,73	— 4,24	— 16,03
Juni 11.		+ 13,07		— 99,16		— 5,97	14,29
Juli 21.	+ 1,78	14,85	54,82	— 44,34	100,89	106,86	110,62
Aug. 30.	+ 1,75	+ 16,60	69,67	+ 25,33	145,23	252,09	— 250,05
Oct. 9.			+ 86,27	+ 111,60	— 119,90	— 371,99	

Es ist hier:

$$\delta q = {}^1f(a + m) + \frac{1}{12} (\delta q)'' - \frac{1}{240} f_0''(a + m)$$

und:

$$(\delta q)'' = \mathfrak{R} - b_1 S_r.$$

Hat man die Rechnung z. B. bis Aug. 30. beendigt, so kann man mit dem gefundenen $(\delta q)'' = + 25,33$ schon 1f für das folgende Datum Oct. 9. bilden und erhält dann $S_r = {}^1f + \frac{1}{12} \left(\mathfrak{R} - \frac{1}{20} f_0'' \right)$. Für Oct. 9. findet sich nun $\mathfrak{R} = + 106,96$ und da, wie man mit einem Blicke sieht, f_0'' etwa $= + 18,3$, so wird:

$$S_r = {}^1f + \frac{1}{12} \left(\mathfrak{R} - \frac{1}{20} f_0'' \right) = - 371,99 + \frac{1}{12} \cdot 106,05 = - 363,15.$$

Es ist ferner für Oct. 9.:

$$\log b_1 = 8,105986,$$

also:

$$(\delta q)'' = \mathfrak{R} - b_1 S_r = + 106,96 + 4,64 = + 111,60.$$

Mit diesem Werthe bildet man wieder 1f für das folgende Datum u. s. w.

Nachdem δq und hieraus $\nu = \frac{\delta q}{r_0}$ gefunden, berechne man $\nu \left(1 + \frac{1}{2} \nu \right)$ und:

$$W_1 = 80 k \sqrt{p_0} \cdot \nu \left(1 + \frac{1}{2} \nu \right).$$

Für Aug. 30. ist z. B.:

$$\begin{array}{l|l|l} \log \delta \varrho = 2,398027_n & \log \nu = 1,862921_n & \log \nu \left(1 + \frac{1}{2} \nu\right) = 1,862919_n \\ \log r_0 = 0,535106 & \log \left(1 + \frac{1}{2} \nu\right) = -2 & \log (80 k \sqrt{p_0}) = 0,408782, \end{array}$$

also:

$$W_1 = -186,94.$$

$1 + \frac{1}{2} \nu$ wird mit Hülfe der Zech'schen Tafeln berechnet, das Argument ist hier:
 $7,301030 - \log \nu,$

weil ν in Einheiten der siebenten Stelle gegeben ist.

Den Werth von W_1 kann man, wie oben erläutert, gleich unter $\int U dt$ schreiben und erhält dann $W = \int U dt - W_1$.

Die Integration von:

$$(\delta u)' = \frac{1}{\varrho^2 \sin 1''} \cdot W$$

ist ähnlich der von $\int U dt$, ebenso wird z in ähnlicher Weise erhalten wie $\delta \varrho$.

1866	f_0''	f_0'	$(\delta u)'$	f	δu
Mai 2.			$- 0'',445$	$+ 0'',404$	$+ 0'',115$
Juni 11.	$+ 0'',336$	$+ 0'',977$	$+ 0'',532$	$- 0'',041$	$+ 0'',130$
Juli 21.	$0'',301$	$+ 1'',313$	$+ 1'',845$	$+ 0'',491$	$+ 1'',291$
Aug. 30.		$+ 1'',614$	$+ 3'',459$	$+ 2'',336$	$+ 3'',921$
				$+ 5'',795$	

1866	f_0''	f_0	z''	f	$''f$	z
Mai 2.	$(+ 1,16)$		$+ 20,25$		$+ 1,12$	$+ 2,80$
Juni 11.	$+ 1,48$	$+ 6,87$	$27,12$	$- 0,29$	$0,83$	$3,08$
Juli 21.	$+ 1,80$	$8,35$	$35,47$	$+ 26,83$	$27,66$	$30,61$
Aug. 30.	$(+ 2,1)$	$10,15$	$45,62$	$62,30$	$89,96$	$93,85$
		$(+ 12,2)$				

Die weitere Rechnung gestaltet sich wie folgt:

Nachdem man z. B. die vier ersten Werthe gefunden, extrapolire man $\delta \varrho$, δu und z für weitere Daten. Um z. B. z weiter zu bilden, würde man etwa die dritte Differenz als constant und $= + 0,3$ annehmen. Damit ergäbe sich:

	f_0^{II}	f_0^{I}	z''	1f	$^{\text{II}}f$	z
1866. Aug. 30.	+ 2,1		+ 45,6		+ 90,0	
Oct. 9.	2,4	+ 12,2	57,8	+ 107,9	197,9	+ 203
Nov. 18.	2,7	14,6	72,4	165,7	363,6	370
Dec. 28.	3,0	17,3	89,7	238,1	601,7	609
1867. Febr. 6.		20,3	110,0	327,8	929,5	939

Für $\delta \varrho$ und δu würde man etwa annehmen:

	$\delta \varrho$	δu
1866. Oct. 9. . . .	— 362	+ 8'',3
Nov. 18. . . .	— 362	14'',6
Dec. 28. . . .	— 144	23'',0
1867. Febr. 6. . . .	+ 417	33'',7

Diese Werthe sind nun bei der Berechnung der störenden Kräfte zu benutzen, aus denen man dann $\delta \varrho$, δu und z strenge erhält. Darauf ist wieder für weitere Daten $\delta \varrho$, δu und z durch Extrapoliren genähert zu bestimmen u. s. w. Es lässt sich nicht leugnen, dass diese Art der Rechnung nicht angenehm ist, doch ist dies der kürzeste Weg, um die Störungen strenge zu erhalten.

Verwandlung der Coordinatenstörungen in Elementenstörungen für die neue Osculationsepoche 1868. Nov. 27,0.

Um die für die Verwandlung nothwendigen Grössen bilden zu können, mögen zunächst die bei der mechanischen Quadratur benutzten Endwerthe folgen:

1868	f_0^{III}	f_0^{II}	f_0^{I}	U	1f	$\int U dt$
Sept. 28.		+ 82,67		— 2045,63		+ 10430,47
Nov. 7.	— 28,02	54,65	+ 37,54	2008,09	+ 9407,79	8397,98
Dec. 17.	(— 18,8)		92,19	1915,90	7399,70	6432,79
					5483,80	

1868	f_0^{IV}	f_0^{III}	f_0^{II}	f_0^{I}	$(\delta \varrho)''$	1f	$^{\text{II}}f$	$\delta \varrho$
Sept. 28.	— 10,2		+ 55,46		— 920,68		+ 135431,06	+ 135354,1
Nov. 7.	(— 9,7)	+ 10,46	+ 65,92	— 388,49	1309,17	+ 13950,66	149381,72	149272,4
Dec. 17.	(— 9,0)	(+ 0,8)	(+ 66,7)	— 322,57	1631,74	12641,49	162023,21	161887,0

1868	f_0^{III}	f_0^{II}	f_0^{I}	$(\delta u)'$	${}^{\text{I}}f$	δu
Sept. 28.		+ 2'',565		— 178'',524		— 604'',29
Nov. 7.	+ 0'',580	3'',145	— 19'',810	— 198'',334	— 695'',327	— 792'',97
Dec. 17.	(+ 0'',303)	(+ 3'',448)	— 16'',665	— 214'',999	— 893'',661	— 999'',92
					— 1108'',660	

1868	f_0^{III}	f_0^{II}	f_0^{I}	z''	${}^{\text{I}}f$	${}^{\text{II}}f$	z
Sept. 28.		+ 10,12		— 148,44		+ 33599,76	+ 33587,3
Nov. 7.	+ 2,17	12,29	— 86,67	— 235,11	+ 3487,50	37087,26	37067,6
Dec. 17.	(0,00)	(+ 12,3)	— 74,38	— 309,49	3252,61	40339,87	40314,0

Aus vorstehenden Daten sind nun zunächst $f U dt$; $\delta \varrho$, $(\delta \varrho)'$; δu , z , z' für 1868. Nov. 27. abzuleiten nach:

$$\int^{a+m+\frac{1}{2}} f(x) dx = {}^{\text{I}}f \left(a+m+\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{24} \left[f_0' \left(a+m+\frac{1}{2} \right) - \frac{17}{240} f_0^{\text{III}} \left(a+m+\frac{1}{2} \right) \dots \right]$$

$$\iint^{a+m+\frac{1}{2}} f(x) dx^2 = {}^{\text{II}}f_{\frac{1}{2}} \left(a+m+\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{24} \left[f_{\frac{1}{2}}' \left(a+m+\frac{1}{2} \right) - \frac{17}{80} f_{\frac{1}{2}}^{\text{III}} \left(a+m+\frac{1}{2} \right) + \frac{367}{8064} f_{\frac{1}{2}}^{\text{IV}} \dots \right].$$

Es wird z. B.:

$$\delta \varrho = + 155702,47 - \frac{1}{24} \left(- 1470,46 - \frac{17}{80} \cdot 66,3 \right) = + 155764,33$$

$$(\delta \varrho)' = f(\delta \varrho)'' dt = + 12641,49 + \frac{1}{24} \left(- 322,57 - \frac{17}{240} \cdot 0,8 \right) = + 12628,05.$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Zeiteinheit 40 Tage beträgt.

Nachdem man nun noch r_0 und v_0 für 1868. Nov. 27. berechnet, kommen folgende Formeln zur Anwendung:

$k_1 = \omega k$, wenn ω das der Rechnung zu Grunde liegende Zeitintervall, also hier:

$$k_1 = 40 k \quad \log \frac{1}{k_1} = 0,1623586$$

$$(U_1) = \frac{1}{k_1} f U dt$$

$$s' = \frac{1}{k_1} (\delta \varrho)' \quad (z') = \frac{1}{k_1} z'$$

$$E_0 = M_0 + e_0 \sin E_0$$

$$\frac{r_0}{a_0} = 1 - e_0 \cos E_0 \left(\text{Argument der Zech'schen Tafeln} = \log \frac{1}{e_0 \cos E_0} \right)$$

$$\sin \frac{1}{2} (v_0 - E_0) = \sqrt{\frac{a_0}{r_0}} \sin \frac{1}{2} \varphi_0 \sin E_0$$

$$l = r_0 + N_0 + \delta u$$

$$\begin{aligned}
 (r'_0) &= \frac{e_0 \sin v_0}{\sqrt{p_0}} & (q') &= (r'_0) + s' \\
 q &= r_0 + \delta q = r_0 (1 + v), \quad \text{wo } v = \frac{\delta q}{r_0} \\
 \xi &= q \left(\frac{1}{2} \frac{z^2}{q^2} - \frac{1}{8} \frac{z^4}{q^4} \dots \right) \\
 r &= q + \xi = r_0 + \delta r, \quad \text{wo } \delta r = \xi + \delta q \\
 \xi' &= \frac{z(z')}{r} - \left(\frac{1}{2} \frac{z^2}{q^2} - \frac{3}{8} \frac{z^4}{q^4} \dots \right) (q') \\
 (\delta r)' &= \xi' + s'. \\
 tg \, I \sin (l - K) &= \frac{z}{q} \\
 tg \, I \cos (l - K) &= \frac{q(z') - z(q')}{\sqrt{p_0} + (U_1)} \\
 \triangle u &= \left[tg \, \frac{1}{2} I^2 \sin 2(l - K) \dots \right] \frac{1}{\sin 1''} \\
 \delta \sqrt{p} &= \left[(U_1) + 2 \sqrt{p_0} \sin \frac{1}{2} I^2 \right] \sec I \\
 p - p_0 = \delta p &= 2 \sqrt{p_0} \cdot \delta \sqrt{p} \left(1 + \frac{\delta \sqrt{p}}{2 \sqrt{p_0}} \right) \\
 n \sin N &= \sqrt{p} \cdot (\delta r)' + (r'_0) \delta \sqrt{p} \\
 n \cos N &= \frac{1}{r} \left(\delta p - \frac{p_0}{r_0} \delta r \right) \\
 e \sin (v - v_0) &= n \sin (N - v_0) \\
 e \cos (v - v_0) &= e_0 + n \cos (N - v_0)
 \end{aligned}$$

1868. Nov. 27,0.		1868. Nov. 27,0.	
δq	+ 155764,33	$\sin E_0$	9,9138609
z	+ 38725,02	$\cos E_0$	9,7575753
δu	— 894'',36	$\frac{1}{e_0 \cos E_0}$	1,3475380
$\int U dt$	+ 7403,60	$\log \frac{r_0}{a_0}$	— 0,0199613
$(\delta q)'$	+ 12628,05		
z'	+ 3249,51		
(U_1)	7,031802	$\sin \frac{1}{2} \varphi \sin I_0$	8,5080529
$\frac{1}{k_1} (\delta q)'$	7,263696	$\log \sqrt{\frac{a_0}{r_0}}$	+ 0,0099806
(z')	6,674177	$\frac{1}{2} (v_0 - E_0)$	1° 53' 20'',445
M_0	51° 24' 18'',07	$v_0 - E_0$	3° 46' 40'',89
E_0	55° 5' 37'',29		

	1868. Nov. 27,0.		1968. Nov. 27,0.
v_0	58° 52' 18'',18	(ϱ')	8,578 804
N_0	86° 14' 24'',90	$\frac{1}{2} (\varrho')$	8,277 774
$v_0 + N_0$	145° 6' 43'',08	$\left(\frac{z}{\varrho}\right)^2$	4,126 044
δu	— 14' 54'',36	$\frac{1}{2} \varrho$	0,223 939
l	144° 51' 48'',72		
r_0	0,522 945 0	$z (z'_1)$	4,262 168
$\delta \varrho$	8,192 468	r	0,524 969 8
ξ	4,349 98		
z	7,587 991	$\frac{z (z')}{r}$	3,737 20
ϱ	0,524 969 4	$\frac{1}{2} (\varrho') \frac{z^2}{\varrho^2}$	2,403 82
$\frac{z}{\varrho}$	7,063 022		
$\sin v_0$	9,932 480	$\sqrt{p_0}$	0,270 111
$\frac{e_0}{\sqrt{p_0}}$	8,624 776	(U_1)	7,031 802
(r'_0)	8,557 256	$\varrho (z')$	7,199 146
$\alpha \left(\delta \frac{1}{2} \varrho \right)'$	7,263 696	$z (\varrho')$	6,166 795
ξ'	3,716 56	$\varrho (z') - z (\varrho')$	7,156 839
		$\sqrt{p_0} + (U_1)$	0,270 362
		$tg I \sin (l - K)$	7,063 022
		$tg I \cos (l - K)$	6,886 477

$$e^2 - e_0^2 = \delta (e^2) = 2 e_0 n \cos (N - v_0) + n^2$$

$$\sin (\varphi - \varphi_0) = \frac{\delta (e^2)}{\sin (\varphi + \varphi_0)}$$

$$\beta = \frac{\delta p + a_0 \delta (e^2)}{p} \quad a = \frac{a_0}{1 - \beta}$$

$$\log \frac{a}{a_0} = - \log (1 - \beta)$$

$$n = n_0 - \frac{3}{2} n_0 \beta \cdot C \cdot D,$$

wo $C = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \beta}$ und D aus Tafel II zu entnehmen, wofür meistens genügt:

$$n = n_0 - \frac{3}{2} n_0 \beta \sqrt{1 - \frac{1}{2} \beta}.$$

$$W_2 = l + \Phi = v_0 + \omega_0 + \delta u$$

$$\psi_0 = W_2 - (l - K)$$

$$\cos q \sin Q = \sin I \cos \psi_0$$

$$\cos q \cos Q = \cos I$$

$$\sin q = \sin I \sin \psi_0,$$

also :

$$tg\ Q = tg\ I\ cos\ \psi_0$$

$$\sin i\ \sin\ \triangle\ \varnothing = \sin I\ \sin\ \psi_0 = \sin q$$

$$\sin i\ \cos\ \triangle\ \varnothing = \cos q\ \sin(i_0 + Q)$$

$$\cos i\ \qquad\qquad = \cos q\ \cos(i_0 + Q)$$

$$\varnothing = \varnothing_0 + \triangle\ \varnothing$$

$$i = i_0 + Q + \triangle\ \varnothing,$$

wo :

$$\triangle\ Q = \frac{2\ sin\ \frac{1}{2}\ q^2}{\sin\ 1''}\ cotg(i_0 + Q)$$

$$\sin\ \frac{1}{2}\ \triangle\ \psi = -\cos\ \frac{1}{2}\ (i_0 + i)\ \sin\ \frac{1}{2}\ \triangle\ \varnothing\ sec\ I$$

$$\triangle\ \varpi = -\ (v - v_0) + \delta\ u + \triangle\ \psi + \triangle\ u$$

$$\varpi = \varpi_0 + \triangle\ \varpi.$$

1868. Nov. 27,0.		1868. Nov. 27,0.	
$\sin(l - K)$	9,920289	$\delta\ p$	7,603794
$l - K$	56° 20' 15'',2	$-\frac{p_0}{r_0}\ \delta\ r$	8,209807 _n
$tg\ I$	7,142733		
$\sin 2\ (l - K)$	9,96506	$\delta\ p - \frac{p_0}{r_0}\ \delta\ r$	8,086178 _n
$tg\ \frac{1}{2}\ I^2$	3,68341	r	0,524970
$\frac{1}{\sin\ 1''}$	5,31443	$(\delta\ r)'$	7,263819
$\triangle\ u$	+ 0'',092	$\sqrt{p} \cdot (\delta\ r)'$	7,534181
		$(r'_0)\ \delta\ \sqrt{p}$	5,589783
$2\ \sqrt{p_0}\ \sin\ \frac{1}{2}\ I^2$	4,25455	$n\ \sin\ N$	7,539089
$2\ \sqrt{p_0}\ \sin\ \frac{1}{2}\ I^2 + (U_1)$	7,032527	$n\ \cos\ N$	7,561208 _n
$sec\ I$	0,000000	$\cos\ N$	9,860262 _n
$\delta\ \sqrt{p}$	7,032527	N	136° 27' 30'',2
$2\ \sqrt{p_0}$	0,571141	$N - v_0$	77° 35' 12'',0
$1 + \frac{\delta\ \sqrt{p}}{2\ \sqrt{p_0}}$	126	$\sin(N - v_0)$	9,989727
		$\cos(N - v_0)$	9,332363
		n	7,700946
$\delta\ r$	8,192530	e_0	8,8948867
$\frac{p_0}{r_0}$	0,017277	$n\ \cos(N - v_0)$	7,033309
\sqrt{p}	0,270362	$e\ \sin(v - v_0)$	7,690673
		$e\ \cos(v - v_0)$	8,9008192
		$\cos(v - v_0)$	9,9991766
		$v - v_0$	3° 31' 37''85

	1868. Nov. 27,0.		1868. Nov. 27,0.
e	8,9016426	$\cos q \sin Q$	6,034324 _n
φ	4° 34' 23'',76	$\cos q \cos Q$	0,000000
$\varphi + \varphi_0$	9° 4' 32'',86	Q	— 22'',322
$2 e_0 n \cos (N - v_0)$	6,229226	$i_0 + Q$	10° 55' 8'',08
n^2	5,401892	$\sin (i_0 + Q)$	9,277425
$\delta (e^2)$	6,289479	$\cos q$	0,000000
$\sin (\varphi + \varphi_0)$	9,197944	$\sin i \sin \triangle \oslash$	7,141411 _n
a_0	0,542906	$\sin i \cos \triangle \oslash$	9,277425
$\triangle \varphi$	+ 4, 14'',66	$\cos \triangle \oslash$	9,999988
δp	7,603794	$\triangle \oslash$	— 25' 8'',01
$a_0 \delta (e^2)$	6,832385	$\sin \frac{1}{2} q^2$	3,68076
$\delta p + a_0 \delta (e^2)$	7,671710	$\frac{2}{\sin 1''}$	5,61546
p	0,540724	$\cot g (i_0 + Q)$	0,71464
β	7,130986	$\triangle Q$	+ 1'',03
$\log \frac{a}{a_0}$	0,0005876	i	10° 55' 9'',11
a	0,5434939	$\frac{1}{2} (i + i_0)$	10° 55' 19'',7
$3 n_0$	3,212768	$\cos \frac{1}{2} (i + i_0)$	9,992061
$\frac{1}{2} \beta$	6,829956	$\sin \frac{1}{2} \triangle \oslash \sec I$	7,562948 _n
$\sqrt{1 - \frac{1}{2} \beta}$	— 147	$\frac{1}{2} \triangle \psi$	+ 12' 20'',347
$\log \triangle n$	0,042577 _n	$-(v - v_0)$	— 3° 31' 37'',85
$\triangle n$	— 1'',10300	$\triangle \psi$	+ 24' 40'',69
n	542'',95750	δu	— 14' 54'',36
$v_0 + \omega_0 + \delta u$	321° 52' 8'',92	$\triangle u$	+ 0'',09
ψ_0	265° 31' 53'',7	$\triangle \omega$	— 3° 21' 51'',43
$\sin \psi_0$	9,998678 _n	ω	259° 52' 53'',67
$\cos \psi_0$	8,891591 _n		
$\sin I$	7,142733		

Mit Hülfe der gefundenen Werthe ist nun noch M zu rechnen.

v	62° 23' 56'',03	$\frac{1}{2} (v - E)$	1° 59' 23'',464
$\sin v$	9,9475291	$v - E$	3° 58' 46'',93
$\sin \frac{1}{2} \varphi$	8,6009586	E	58° 25' 9'',10
$\sin \frac{1}{2} \varphi \cdot \sin \varphi$	8,5484877	$\sin E$	9,9303898
$\sqrt{\frac{r}{p}}$	9,9921229	e''	4,2160678
		$E - M$	3° 53' 30'',63
		M	54° 31' 38'',47

Die neuen Elemente sind also:

$$\begin{array}{l} \text{Oscul. und Epoche 1868. Nov. 27,0.} \\ M \quad 54^{\circ} 31' 38'',47 \\ \omega \quad 259^{\circ} 52' 53'',67 \\ \oslash \quad 75^{\circ} 57' 35'',19 \\ i \quad 10^{\circ} 55' 9'',11 \\ \varphi \quad 4^{\circ} 34' 23'',76 \\ n \quad 542'',95750 \\ \log a \quad 0,5434939. \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} M \\ \omega \\ \oslash \\ i \\ \varphi \\ n \end{array}} \right\} \text{mittl. Aequ. 1870,0}$$

Zweite Methode.

Man rechne Φ , Φ_1 , J , N_0 , P ganz wie auf S. 657 erläutert, darauf \bar{v} , \bar{r} nach den Formeln (6), womit $l = \bar{v} + N_0$, $\log \varrho = \log \bar{r} + w_1$ wird. (Unter \log werden wie früher stets Brigg'sche Logarithmen verstanden.)

Für den Anfang der Rechnung, wo δM und w_1 noch nicht bekannt sind, können diese Grössen vernachlässigt werden, sie sind aber in Rechnung zu ziehen, sobald sie merklichen Einfluss gewinnen.

Im Folgenden ist zugleich die Reihenfolge angegeben, wie etwa die numerischen Werthe bei der Rechnung unter einander zu schreiben wären:

$\frac{u_1 = \lambda_1 + P}{\sin u_1}$	$\eta_1 = \triangle \cos B \sin L = r_1 \cos B_1 \sin(L_1 - l)$
$\frac{\cos B_1 \sin L_1 = \sin u_1 \cos J}{\cos B_1 \cos L_1 = \cos u_1}$	$\xi_1 - \varrho = \triangle \cos B \cos L$
$\frac{\cos L_1}{L_1}$	$\sin L \text{ oder } \cos L$
$\frac{L_1 - N_0}{\bar{v}}$	$\xi_1 - z = \triangle \sin B$
$\frac{L_1 - l = L_1 - N_0 - \bar{v}}{\sin B_1 = \sin u_1 \sin J}$	$\triangle \cos B$
$\frac{\cos B_1}{r_1}$	$\cos B$
$\frac{\sin(L_1 - l)}{\cos(L_1 - l)}$	$\frac{1}{\triangle}$
$\frac{r_1 \cos B_1}{\cos(L_1 - N_0)}$	$\frac{1}{\triangle^3}$
$\xi_2 = r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - N_0)$	$\frac{1}{r_1^3}$
$\xi_1 = r_1 \cos B_1 \cos(L_1 - l)$	$\eta_1 \varrho$
ϱ	$\frac{n_0}{k \sqrt{p_0}} g \eta_1 \varrho \quad (\text{wo } g = \omega^2 k^2 m_1)$
$\xi_1 = r_1 \sin B_1$	$(2) = h \xi_1$
z	$(3) = h e_0 \xi_2$
	$\left(\text{wo } h = \frac{g \mathfrak{M}}{p_0} 10^{-w_1} \right)$
	$K = \frac{1}{\wedge^3} - \frac{1}{r_1^3}$
	$g(\xi_1 - z)$

$$\left(F' = \frac{n_0}{k \sqrt{p_0}} g \eta_1 \varrho K \right)$$

$$G_1 = \frac{2k^2 \mathfrak{M}}{n_0} \frac{F}{\varrho^3} \left(1 + \frac{F}{2n_0} \right) 10^{-w_1}$$

$$G_2 = (2) K$$

$$G_3 = (3) K$$

$$G_4 = - \frac{g \mathfrak{M}}{\Delta^3}$$

$$G_0 = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$$

$$\delta G = - \frac{w_1'^3}{\mathfrak{M}} + \frac{3}{2} \frac{\mathfrak{M} \omega^2 k^2 z^2}{\varrho^5}$$

$$G = G_0 + \delta G$$

$$b_2 S_w$$

$$[w_1'' = G - b_2 S_w]$$

$$\varrho^3$$

$$b = \frac{k^2 \omega^2}{\varrho^3}$$

$$g$$

$$\Delta^3$$

$$\log \gamma = - \frac{1}{2} w_1 + \eta$$

$$b \gamma$$

$$1 + \frac{1}{12} b \gamma$$

$$b_2 = \frac{b \gamma}{1 + \frac{1}{12} b \gamma}$$

$$S_w \quad (\text{siehe S. 651})$$

$$(4) = F c^{-2w}$$

$$(5) = (1 - c^{-2w}) n_0$$

$$(\delta M)' = (4) + (5)$$

$$\beta = b + \frac{g}{\Delta^3}$$

$$1 + \frac{1}{12} \beta$$

$$\beta_1$$

$$S_z \quad (\text{siehe S. 651})$$

$$Z$$

$$\beta_1 S_z$$

Ueber die Integration von w_1'' siehe S. 651 und die dritte Methode.

Verwandlung der Elemente.

$$(w') = \frac{w_1'}{\omega k \mathfrak{M}},$$

wo ω das Intervall bezeichnet, für welches man gerechnet hat. Ist $\omega = 40$ Tage, so wird:

$$\log \frac{1}{\omega k \mathfrak{M}} = 0,5245743.$$

$$(z') = \frac{z'}{\omega k}$$

$$\log \frac{1}{40 k} = 0,1623586.$$

$$(U_1) = \frac{\sqrt{p_0}}{\omega n_0} F.$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\omega n_0} (\delta M)'.$$

Die Grössen w_1' , z' , F , $(\delta M)'$ sind unmittelbar aus der Rechnung zu entnehmen, sie beziehen sich also auf das Intervall ω .

$$\alpha_1 = c^w - 1, \quad \log \alpha_1 = 0,3622157 + \log w_1 + \frac{1}{2} w_1 + \eta$$

$$\log \varrho = \log \bar{r} + w_1 \quad \xi = \varrho \left(\frac{1}{2} \frac{z^2}{\varrho^2} - \frac{1}{8} \frac{z^4}{\varrho^4} \cdot \cdot \cdot \right)$$

$$(\varrho') = (1 + \varepsilon) \frac{e_0 \sin \bar{v}}{\sqrt{p_0}} 10^{w_1} + \varrho(w')$$

$$\xi' = \varrho \frac{z(z')}{r} - \left(\frac{1}{2} \frac{z^2}{\varrho^2} - \frac{3}{8} \frac{z^4}{\varrho^4} \right) (\varrho')$$

$$\delta r = \alpha_1 r + \xi$$

$$\operatorname{tg} I \sin(l - K) = \frac{z}{q}$$

$$\operatorname{tg} I \cos(l - K) = \frac{q(z') - z(q')}{\sqrt{p_0} + (t_1)}$$

$$\Delta u = \left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} I^2 \sin 2(l - K) \dots \right] \frac{1}{\sin l''}$$

$$\delta \sqrt{p} = \left[(U_1) + 2 \sqrt{p_0} \sin \frac{1}{2} I^2 \right] \sec I$$

$$p - p_0 = \delta p = 2 \sqrt{p_0} \delta \sqrt{p} \left(1 + \frac{\delta \sqrt{p}}{2 \sqrt{p_0}} \right)$$

$$\frac{\delta \sqrt{p}}{\sqrt{p'}} + \varepsilon 10^{w_1} + \alpha_1 = a$$

$$n_1 \sin N_1 = \sqrt{\frac{p}{p_0}} \cdot e_0 \sin \bar{v} \cdot a + \sqrt{p} [q(w') + \xi']$$

$$n_1 \cos N_1 = \frac{1}{r} \left(\delta p - \frac{p_0}{r} \delta r \right)$$

$$e \sin(v - \bar{v}) = n_1 \sin(N_1 - \bar{v})$$

$$e \cos(v - \bar{v}) = e_0 + n_1 \cos(N_1 - \bar{v})$$

$$e^2 - e_0^2 = \delta(e^2) = n_1 [2 e_0 \cos(N_1 - \bar{v}) + n_1]$$

$$\sin \triangle \varphi = \frac{\delta(e^2)}{\sin(\varphi + \varphi_0)}$$

$$\beta = \frac{\delta p + a_0 \delta(e^2)}{p}$$

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1}{1 - \beta}$$

$$n = n_0 - \frac{3}{2} n_0 \beta C . D \quad (\text{siehe Tafel II})$$

$$\cos q \sin Q = \sin I \cos \psi_0$$

$$\cos q \cos Q = \cos I$$

$$\sin q = \sin I \sin \psi_0$$

wo:

$$\sin i \sin \triangle \oslash = \sin q$$

$$\sin i \cos \triangle \oslash = \cos q \sin(i_0 + Q)$$

$$\cos i = \cos q \cos(i_0 + Q)$$

$$i = i_0 + Q + \frac{2 \sin \frac{1}{2} q^2}{\sin l''} \cot g(i_0 + Q) + \dots$$

$$\sin \frac{1}{2} \triangle \psi = -\cos \frac{1}{2} (i + i_0) \sin \frac{1}{2} \triangle \oslash \sec I$$

$$\triangle \omega = - (v - v) + \triangle u + \triangle \psi$$

$$\oslash = \oslash_0 + \triangle \oslash \quad \omega = \omega_0 + \triangle \omega.$$

Dritte Methode.

Nach dieser Methode wurden ebenfalls die Jupiterstörungen der Sylvia für denselben Zeitraum wie nach der ersten Methode berechnet. Das folgende Beispiel giebt die Rechnung für den letzten Ort 1868. Dec. 17. Die Elemente der Sylvia sind dieselben wie S. 657. Die genäherten Störungswerthe für diesen Ort wurden mittelst Extrapolirung wie folgt erhalten:

$$\begin{aligned}\triangle M &= -20' 50'',7 & \delta \omega &= +8' 5'',0 \\ w_1 &= +23040 & w'_1 &= +1839 & z &= +40314.\end{aligned}$$

Letztere drei Werthe sind in Einheiten der siebenten Stelle angegeben und w'_1 bezogen auf das Intervall von 40 Tagen. Die Rechnung ergab ferner:

$$V = 61^\circ 45' 0'',3 \qquad \log r = 0,524378,$$

also:

$$\begin{aligned}l &= V + N_0 + \delta \omega = 61^\circ 53' 5'',3 + N_0 \\ \log \varrho &= \log r + w_1 = 0,526682.\end{aligned}$$

Zunächst werden Φ , Φ_1 , J , N_0 , P wie auf S. 657 berechnet, darauf wieder:

$$\begin{aligned}u_1 &= \lambda_1 + P \\ \cos B_1 \sin L_1 &= \sin u_1 \cos J \\ \cos B_1 \cos L_1 &= \cos u_1 \\ \sin B_1 &= \sin u_1 \sin J \\ \xi_1 &= r_1 \cos B_1 \cos (L_1 - l) \\ \eta_1 &= r_1 \cos B_1 \sin (L_1 - l) \\ \zeta_1 &= r_1 \sin B_1 \\ \triangle \cos B \cos L &= \xi_1 - \varrho \\ \triangle \cos B \sin L &= \eta_1 \\ \triangle \sin B &= \zeta_1 - z \\ K &= \frac{1}{\triangle^3} - \frac{1}{r_1^3}.\end{aligned}$$

$g = \omega^2 k^2 m_1$ oder, da das Intervall ω hier wieder zu 40 Tagen angenommen wird und m_1 die Jupitermasse bezeichnet:

$$\log g = 3,654972 \text{ in Einheiten der siebenten Stelle.}$$

$$U = g K \eta_1 \varrho$$

$$H_1 = \mathfrak{M} g \frac{\xi_1}{\varrho} \cdot K \qquad \log \mathfrak{M} g = 3,292756$$

$$H_2 = - \frac{\mathfrak{M} g}{\triangle^3}$$

$$H_3 = \frac{1}{\varrho^4} \cdot c(f U dt),$$

wo:

$$(f U dt) = f U dt \left(1 + \frac{f U dt}{80 k \sqrt{p_0}} \right)$$

$$c = \mathfrak{M} \cdot 80 k \sqrt{p_0} \qquad \log \mathfrak{M} \cdot 80 k = 9,7764556$$

$$\log c = 0,046566$$

$$H_0 = H_1 + H_2 + H_3.$$

	1868. Dec. 17.		1868. Dec. 17.
λ_1	16° 12' 51",2	$\frac{1}{\Delta}$	9,613402
u_1	122° 46' 54",0	$\frac{1}{\Delta^3}$	8,840206
$\sin u_1$	9,924662	$\frac{1}{r_1^3}$	7,916086
$\cos u_1$	9,733550 _n		
$\cos B_1 \sin L_1$	9,918371		
$\sin L_1$	9,922799	$\frac{\xi_1}{\varrho}$	0,120929
L_1	123° 9' 38",0	$\eta_1 \varrho$	0,842263 _n
l	148° 7' 30",2		
$L_1 - l$	335° 2' 7",8	$\mathfrak{M} g \frac{\xi_1}{\varrho}$	3,413685
$\sin B_1$	9,152509	$g \eta_1 \varrho$	4,497235 _n
$\cos B_1$	9,995572	K	8,785137
r_1	0,694638	$g \xi_1$	3,502119
$\sin(L_1 - l_1)$	9,625371 _n	$(\int U dt)$	3,808508
$\cos(L_1 - l_1)$	9,957401	$c(\int U dt)$	3,855074
$r_1 \cos B_1$	0,690210	ϱ^4	2,106728
ξ_1	9,847147	H_1	+ 158,060
z	7,605456	H_2	— 135,819
ξ_1	0,647611	H_3	+ 56,020
ϱ	0,526682	H_0	+ 78,261
$\xi_1 - \varrho$	0,033295	ΔH	— 0,662
η_1	0,315581 _n	H	+ 77,599
$\cos L$	9,947664 _n	$-b_2 S_{wv}$	— 286,134
$\xi_1 - z$	9,844650	ϱ^3	1,580046
$\Delta \cos B$	0,367917	b	8,095237
$\cos B$	9,981319	γ	— 1152
		$b \gamma$	8,094085
		$1 + \frac{1}{12} b \gamma$	449

$$\Delta H = \frac{3}{2} \omega^2 k^2 \frac{\mathfrak{M} z^2}{\varrho^5} - \frac{(w'_1)^2}{\mathfrak{M}} \quad H = H_0 + \Delta H$$

$$\log \frac{3}{2} (40k)^2 \mathfrak{M} = \log h = 6,48916 \quad (\text{Einheit der siebenten Stelle}).$$

Hier ist z. B.:

$$\log z^2 = 5,2109$$

$$\log \varrho^5 = 2,6334$$

$$\log \frac{z^2}{\varrho^5} = 2,5775$$

$$\log h \frac{z^2}{\varrho^5} = 9,0667$$

also:

$$h \frac{z^2}{\varrho^5} = + 0,117.$$

Mit $w'_1 = + 1839$ erhält man aus Tafel III:

$$\frac{(w'_1{}^2)}{\mathfrak{M}} = + 0,779,$$

folglich:

$$\triangle H = 0,117 - 0,779 = - 0,662.$$

Das Glied $\frac{3}{2} \frac{\omega^2 k^2 z^3}{\varrho^5}$ in Z_1 , wo $\log \frac{3}{2} (40 k)^2 = 6,8514$, giebt hier erst eine Einheit der zehnten Stelle und kann also vernachlässigt werden.

$$Z = g \xi_1 K$$

$$b = \frac{(40 k)^2}{\varrho^3} \quad \beta = \frac{(40 k)^2}{\varrho^3} + \frac{g}{\triangle^3}$$

$$\log \gamma = - \frac{1}{2} w_1 + \eta$$

$$b_2 = \frac{b \gamma}{1 + \frac{1}{12} b \gamma} \quad \beta_1 = \frac{\beta}{1 + \frac{1}{12} \beta}$$

$$w''_1 = H - b_2 S_w$$

$$z'' = Z - \beta_1 S_z$$

$$(\triangle M)' = - \gamma_2 n_0,$$

wo:

$$\log \gamma_2 n_0 = \log w_1 + \log \frac{80 n_0}{\mathfrak{M}} - w_1 + \eta$$

$$\log \frac{80}{\mathfrak{M}} = 2,2653057,$$

da:

$$\log n_0 = 2,7356472 \quad \text{so wird } \log \frac{80 n_0}{\mathfrak{M}} = 5,000953.$$

Endlich ist noch:

$$(\delta \omega)' = \frac{1}{\varrho^2 \sin 1''} \int U dt.$$

	1868. Dec. 17.		1868. Dec. 17.
b_2	8,093636	$\log w_1$	7,362484
S_w	4,362934	w_1	2304
Z	+ 193,76	$(\log w_1) - w_1$	7,360180
$-\beta_1 S_z$	- 503,25	$\log (\triangle M)'$	2,361133 _n
β	8,095237	$(\triangle M)'$	= - 229'',685
$\frac{g}{\triangle^3}$	5,49518	$\frac{1}{\sin 1''} \int U dt$	2,122824
β	8,096326	ϱ^2	1,053364
$1 + \frac{1}{12} \beta$	452	$(\delta \omega)'$	+ 17'',734
β_1	8,095874		
S	4,605908		

Es mag noch wieder daran erinnert werden, dass nach S. 651:

$$S = {}^u f(a + m) + \frac{1}{12} X - \frac{1}{240} f_0''(a + m) \dots$$

also:

$$S_w = {}^u f + \frac{1}{12} H - \frac{1}{240} f_0''$$

$$S_z = {}^u f + \frac{1}{12} Z - \frac{1}{240} f_0''.$$

Wie aus den obigen und folgenden Werthen hervorgeht, ist in obigem Beispiele also:

$$S_w = + 23057,499 + \frac{1}{12} (77,599) - \frac{1}{240} (7,91) = + 23063,93$$

$$S_z = + 40339,87 + \frac{1}{12} (193,76) - \frac{1}{240} (12,3) = + 40355,97.$$

Ableitung osculirender Elemente für 1868. Nov. 27,0.

Als Beispiel möge auch hier die Ableitung osculirender Elemente für 1868. Nov. 27,0 gewählt werden. Die Grössen $f U dt$, z , z' sind dann dieselben, wie die S. 668 angeführten, die Werthe für w_1 , w_1' , $\triangle M$ und $\delta \omega$ sind aus Folgendem zu entnehmen:

1868	f_0'''	f_0''	f_0'	w_1''	${}^1 f$	${}^u f$
November 7	(+ 0,37)	+ 7,54	— 49,536	— 158,999	+ 1931,782	+ 21125,717
December 17		(+ 7,91)		— 208,535		+ 23057,499

1868	f_0'''	f_0''	f_0'	$(\triangle M)'$	${}^1 f$
November 7	(+ 0,48)	+ 1,591	— 19,123	— 210'',562	— 1249'',936
December 17		(+ 2,07)		— 229'',685	

1868	f_0'''	f_0''	f_0'	$(\delta \omega)'$	${}^1 f$
November 7	(+ 0,20)	+ 0,220	— 3,829	+ 15'',563	+ 473'',312
December 17		(+ 0,42)		+ 11'',734	

Die eingeklammerten Zahlen sind extrapolirt.

Sind w_1' , z' , $f U dt$ die Werthe, wie sie unmittelbar aus den Integrationstabellen erhalten werden, so ist wieder zu beachten, dass sie sich auf die der Rechnung zu Grunde liegende Zeiteinheit — die hier 40 Tage beträgt — beziehen. Setzt man daher $k_1 = 40 k$, so kommen hier folgende Formeln zur Anwendung:

$$(w') = \frac{w_1'}{k_1 \mathfrak{M}} \quad \log \frac{1}{k_1 \mathfrak{M}} = 0,5245743$$

$$(z') = \frac{z'}{k_1} \quad \log \frac{1}{k_1} = 0,1623586 \quad (U_1) = \frac{1}{k_1} f U dt.$$

r und V werden nach den bekannten Formeln aus $M + \triangle M = M_1$, e_0 und a_0 berechnet.

$$\begin{aligned} \log \varrho &= \log r + w_1 \\ A &= e_0 \sin V 10^{-w_1} & \log A &= \log e_0 \sin V - w_1 \\ (\varrho') &= \frac{A}{\sqrt{p_0}} + \varrho(w') \\ \xi &= \left(\frac{1}{2} \frac{z^2}{\varrho^2} - \frac{1}{8} \frac{z^4}{\varrho^4} \right) \varrho & r &= \varrho + \xi \\ \xi' &= - \left(\frac{1}{2} \frac{z^2}{\varrho^2} - \frac{3}{8} \frac{z^4}{\varrho^4} \right) (\varrho') + \frac{z(z')}{r} & (r') &= (\varrho') + \xi' \\ \alpha_1 &= c^w - 1 & \log \alpha_1 &= 0,3622157 + \log w_1 + \frac{1}{2} w_1 + \eta \text{ (siehe Tafel I).} \end{aligned}$$

	1868. Nov. 27,0.		1868. Nov. 27,0.
w_1	+ 22099,33	$\sin V$	9,930728
z	+ 38725,02	$e_0 \sin V$	8,825615
$\triangle M$	— 20' 50'',734	10^{-w_1}	— 2210
$\delta \omega$	+ 473'',152	A	8,823405
w'_1	+ 1929,717	(U_1)	7,031802
z'	+ 3249,51	$l - K$	56° 20' 15'',2
$\int U dt$	+ 7403,60	$tg I$	7,142733
M_0	51° 24' 18'',07	$\triangle u$	+ 0'',092
$\triangle M$	— 20' 50'',73	$\delta \sqrt{p}$	7,032527
M_1	51° 3' 27'',34	δp	7,603794
E_1	54° 43' 47'',46	$\sqrt{p_0}$	0,270111
V	58° 29' 30'',68	Siehe	Seite 670
N_0	86° 14' 24'',90	$\delta \sqrt{p}$	6,762416
$V + N_0$	144° 43' 55'',58	$\sqrt{p_0}$	
$\delta \omega$	+ 7' 53'',15	α_1	7,707700
l	144° 51' 48'',73	ξ	7,655415 _n
$\log r$	0,5227595	w'_1	6,285494
w_1	+ 22099	(w')	6,810068
$\log \varrho$	0,5249694	$\varrho(w')$	7,335037
ξ	4,34998	ξ'	3,71656
ξ'	3,71656	$\varrho(w') + \xi'$	7,335142
$\log w_1$	7,344379	\sqrt{p}	0,270362
$\log w$	7,706595	B	7,605504
1 w_1	1105	$A \xi$	6,478820 _n
2 w_1	0	v_1	7,707757
η	7,707700	$p_0 v_1$	8,247979
α_1	3,82722	δp	7,603794
$\frac{\xi}{r}$		$\delta p - p_0 v_1$	8,136220 _n
		r	0,524970

$$\operatorname{tg} I \sin(l - K) = \frac{z}{\varrho}$$

$$\operatorname{tg} I \cos(l - K) = \frac{\varrho(z') - z(\varrho')}{\sqrt{p_0} + (U_1)}$$

$$\triangle u = \operatorname{tg} \frac{1}{2} I^2 \sin 2(l - K) \frac{1}{\sin 1''}$$

$$\delta \sqrt{p} = \left[(U_1) + 2 \sqrt{p_0} \sin \frac{1}{2} I^2 \right] \sec I$$

$$p - p_0 = \delta p = 2 \sqrt{p_0} \delta \sqrt{p} \left(1 + \frac{\delta \sqrt{p}}{2 \sqrt{p_0}} \right)$$

$$\xi = \frac{\delta \sqrt{p}}{\sqrt{p_0}} \alpha_1$$

$$R = \sqrt{p} [\varrho(w') + \xi']$$

$$v_1 = \alpha_1 + \frac{\xi}{r}. \quad (\text{Es ist } \delta r = v_1 r)$$

$$n_2 \sin N_2 = A \xi + B$$

$$n_2 \cos N_2 = \frac{1}{r} (\delta p - p_0 v_1)$$

$$e \sin(v - V) = n_2 \sin(N_2 - V)$$

$$e \cos(v - V) = e_0 + n_2 \cos(N_2 - V)$$

$$e^2 - e_0^2 = \delta(e^2) = 2 e_0 n_2 \cos(N_2 - V) + n_2^2$$

$$\sin \triangle \varphi = \frac{\delta(e^2)}{\sin(\varphi + \varphi_0)}$$

$$\beta = \frac{\delta p + a_0 \delta(e^2)}{p} \quad \frac{a}{a_0} = \frac{1}{1 - \beta}$$

$$n = n_0 - \frac{3}{2} n_0 \beta \cdot C \cdot D,$$

wo $C = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \beta}$ und D mit dem Argument $\log C$ aus Tafel II zu entnehmen ist.

$$\psi_0 = l + \Phi - (l - K)$$

$$\cos q \sin Q = \sin I \cos \psi_0$$

$$\cos q \cos Q = \cos I$$

$$\sin q = \sin I \sin \psi_0$$

$$\sin i \sin \triangle \oslash = \sin q$$

$$\sin i \cos \triangle \oslash = \cos q \sin(i_0 + Q)$$

$$\cos i = \cos q \cos(i_0 + Q)$$

$$\oslash = \oslash_0 + \triangle \oslash$$

$$i = i_0 + Q + \frac{2 \sin \frac{1}{2} q^2}{\sin 1''} \cot g(i_0 + Q)$$

$$\sin \frac{1}{2} \triangle \psi = - \cos \frac{1}{2} (i + i_0) \sin \frac{1}{2} \triangle \oslash \sec I$$

$$\triangle \omega = - (v - V) + \delta \omega + \triangle u + \triangle \psi.$$

	1868. Nov. 27,0.		1868. Nov. 27,0.
$n_2 \sin N_2$	7,571787	$2e_0 n_2 \cos(N_2 - V)$	6,215224
$n_2 \cos N_2$	7,611250 _n	n_2^2	5,485858
$\cos N_2$	9,868321 _n	$\delta(e^2)$	6,289485
N_2	137° 35' 58",4	$\sin(\varphi + \varphi_0)$	9,197944
$N_2 - V$	79° 6' 27",7	$\Delta \varphi$	+ 254",66
$\sin(N_2 - V)$	9,992104	$a_0 \delta(e^2)$	6,832391
$\cos(N_2 - V)$	9,276378	δp	7,603794
n_2	7,742929	$\delta p + a_0 \delta(e^2)$	7,671711
e_0	8,8948867	p	0,540724
$n_2 \cos(N_2 - V)$	7,019307	β	7,130987
$e \sin(v - V)$	7,735033	$\log \frac{a}{a_0}$	0,0005876
$e \cos(v - V)$	8,9006322	$3n_0$	3,212768
$\cos(v - V)$	9,9989895	$\frac{1}{2} \beta$	6,829957
$v - V$	+ 3° 54' 25",42	$\sqrt{1 - \frac{1}{2} \beta}$	— 147
e	8,9016427	$\log \Delta n$	0,042578 _n
φ	4° 34' 23",8	Δn	— 1",10301

$i, \Omega, \Delta \psi$ finden sich genau so wie S. 670:

$-(v - V)$	— 3° 54' 25",42
$\delta \omega$	+ 7' 53",15
Δu	+ 0",09
$\Delta \psi$	+ 24' 40",69
$\Delta \omega$	— 3° 21' 51",49

Berechnet man nun M aus:

$$v = V + (v - V) = 62^\circ 23' 56'',10 \quad \text{und} \quad \varphi = 4^\circ 34' 23'',76,$$

so erhält man:

$$M = 54^\circ 31' 38'',54,$$

so dass die neuen Elemente sind:

Osculat. und Epoche 1868. Nov. 27,0.

M	54° 31' 38",54	} Mittl. Aequin. 1870,0.
ω	259° 52' 53",61	
Ω	75° 57' 35",19	
i	10° 55' 9",11	
φ	4° 34' 23",76	
n	542",95749	
$\log a$	0,5434939	

Vergleicht man diese Elemente mit den auf S. 671 gefundenen, so findet man eine völlige Uebereinstimmung, denn die kleine Abweichung in M von $0'',07$ hebt sich mit der entgegengesetzten in ω von $0'',06$ fast vollständig auf. Bei der Grösse der Störungen war übrigens die Berechnung mit sechsstelligen Logarithmen an der Grenze des Ausreichenden.

Es dürfte noch interessiren, den Betrag der Glieder höherer Ordnung zu erfahren. Zu diesem Zwecke wurden nach der ersten Methode die Störungen erster Ordnung berechnet, die sich im Folgenden für den letzten Ort 1868. Dec. 17. zusammengestellt finden:

erster Ordnung	strengere Werthe	Differenz
$\int U dt + 6627,52$	$+ 6432,79$	$+ 194,7$
$\delta \varphi + 161456,2$	$+ 161887,0$	$- 430,8$
$\delta u - 1003'',39$	$- 999'',92$	$- 3'',47$

Hätte man die Grösse z bei der Berechnung der störenden Kräfte vernachlässigt, also:

$$\Delta^2 = (\xi_1 - \varphi)^2 + \eta_1^2 + \xi_1^2$$

gesetzt, statt:

$$\Delta^2 = (\xi_1 - \varphi)^2 + \eta_1^2 + (\xi_1 - z)^2,$$

so hätte dies für den letzten Ort eine Abweichung von 50,9 Einheiten der siebenten Stelle in φ oder 6,6 Einheiten der siebenten Stelle in $\log \varphi$ hervorgebracht. Der Einfluss des Gliedes $\frac{1}{\mathfrak{M}} w_1'^2$, welches bei obiger Rechnung mit in w_1'' enthalten ist, wurde noch besonders nach Gleichung (K) S. 646 berechnet und für 1868. Dec. 27. gefunden:

$$\delta w_1 = - 40,38 \text{ (Einheiten der siebenten Stelle).}$$

Sind nun auch die Störungswerthe nicht immer so beträchtlich, als die hier als Beispiel gewählten, so wird man sich bei Vernachlässigungen doch stets durch numerische Prüfungen, etwa in grösseren Intervallen, versichern müssen, dass dabei das Endresultat innerhalb der vorgesteckten Grenze sicher erhalten werde.

Die Anwendung der strengen Formeln ist besonders bei der Berechnung der störenden Kräfte unbequem, da man diese Rechnung nur successive ausführen kann. Die erste Methode hat vor den beiden anderen den Vortheil, dass man den Radius vector und die wahre Anomalie gleich für den ganzen Zeitraum der Störungsrechnung berechnen und durch Differenzen prüfen kann, während bei den beiden anderen Methoden die Berechnung dieser Grössen schon eine genäherte Kenntniss der Störungen voraussetzt. Dass $\delta \varphi$ viel grösser wird, als w_1 oder w_1 , ist nur ein scheinbarer Nachtheil, denn da $d(\log \varphi) = \frac{\mathfrak{M}}{\varphi} d\varphi$, so braucht man $\delta \varphi$ wegen des kleinen Factors $\frac{\mathfrak{M}}{\varphi}$ nicht so genau zu kennen, als $d(\log \varphi)$. Die strengen Formeln für $(\delta \varphi)''$ und w_1'' bei den beiden ersten Methoden sind nicht so einfach, als die für w_1'' bei der dritten Methode, dagegen ist es bei dieser Methode wieder ein Nachtheil, dass $\delta \omega$ getrennt berechnet werden muss. — Es muss dem Rechner überlassen bleiben, welche Methode er anwenden will, denn verglichen in Bezug auf Zeit und Mühe, welche jede in Anspruch nimmt, sind sie nicht sehr verschieden. Eine vielfache Anwendung aller drei Methoden hat uns jedoch zu Gunsten der dritten gestimmt.

Hat man die Störungen eines neuen Planeten zu berechnen, dessen Elemente nicht für einen bestimmten Zeitpunkt osculirende sind, sondern sich vielmehr während eines

gewissen Zeitraumes möglichst nahe an die Beobachtungen anschliessen, so ist es richtiger, die störenden Kräfte mit diesen Elementen direct zu berechnen, und dabei also nicht die gestörten Coordinaten anzuwenden. Da man im Allgemeinen diese Störungsrechnungen mit den verbesserten Elementen zu wiederholen haben wird, so braucht man auch während der ersten Rechnung bei den Integrationen nur die Glieder erster Ordnung zu berücksichtigen, so dass man in diesem Falle von folgenden Gleichungen Gebrauch machen wird:

I.

$$(\delta \varrho)'' + \frac{k^2 \alpha_0}{r_0^3} \delta \varrho = R + \frac{2k\sqrt{p_0}}{r_0^3} f U dt$$

$$(\delta u)' = \frac{1}{\varrho^2} f U dt - \frac{2k\sqrt{p_0}}{r_0^3} \delta \varrho.$$

II.

$$w_1'' + \frac{k^2 w_1}{r^3} = \frac{\mathfrak{M} k^2 m_1}{p_0} (\xi_1 + e_0 \xi_2) K - \frac{\mathfrak{M} k^2 m_1}{\Delta^3} + \frac{2 \mathfrak{M} k^2}{n_0} \frac{F}{r^3}$$

$$(\delta M)' = F - \frac{2 n_0}{\mathfrak{M}} \cdot w_1.$$

III.

$$w_1'' + \frac{k^2 w_1}{r^3} = \frac{\mathfrak{M} R}{r} + \frac{2 \mathfrak{M} k \sqrt{p_0}}{r^4} f U dt$$

$$(\Delta M)' = - \frac{2 n_0 w_1}{\mathfrak{M}} \quad (\delta \omega)' = \frac{1}{r^2} f U dt.$$

Bei vorstehenden Formeln sind k und n_0 wieder auf diejenige Zeiteinheit zu beziehen, die bei der Rechnung als Intervall zu Grunde gelegt ist.

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass man überhaupt zunächst die Störungen erster Ordnung berechnen und darauf den Einfluss der vernachlässigten Glieder in grösseren Intervallen ermitteln und für sich berechnen kann, ähnlich wie dies S. 653 für $\frac{w_1'^2}{\mathfrak{M}}$ angegeben ist. Die Formeln dafür werden allerdings etwas weitläufig, doch genügen wenige Decimalen zu ihrer Berechnung.

Tafel I.

$$\log (1 - e^{-nw}) = 0.3622157 + \log n w_1 - \frac{1}{2} n w_1 + \eta$$

$$\log (e^{nw} - 1) = 0.3622157 + \log n w_1 + \frac{1}{2} n w_1 + \eta.$$

$n w_1$	η	$n w_1$	η
10 000	+ 1 3	60 000	+ 35 12
20 000	4 5	70 000	47 14
30 000	9 6	80 000	61 17
40 000	15 9	90 000	78 18
50 000	+ 24 11	100 000	+ 96

$n w_1$ und η sind in Einheiten der siebenten Stelle ausgedrückt.

Tafel II.

$$n = n_0 - \frac{3}{2} n_0 \beta \cdot C \cdot D; \quad \text{wo } C = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \beta}.$$

$\log C$	$\log D$	$\log C$	$\log D$
+ 0,0000	— 0	— 0,0000	— 0
0,0005	1	0,0005	1
0,0010	4	0,0010	3
0,0015	9	0,0015	5
0,0020	15	0,0020	6
0,0025	24	0,0025	9
0,0030	34	0,0030	11
0,0035	46	0,0035	13
0,0040	60	0,0040	15
0,0045	76	0,0045	16
+ 0,0050	— 94	— 0,0050	— 98

$\log D$ bezieht sich auf Einheiten der siebenten Stelle.

Tafel III.

w'_1	$\frac{w'^2_1}{\mathfrak{M}}$	w'_1	$\frac{w'^2_1}{\mathfrak{M}}$	w'_1	$\frac{w'^2_1}{\mathfrak{M}}$
± 100	+ 0,002	± 1600	+ 0,589	± 3100	+ 2,213
200	0,009	1700	0,665	3200	2,358
300	0,021	1800	0,746	3300	2,508
400	0,037	1900	0,831	3400	2,662
500	0,058	2000	0,921	3500	2,821
600	0,083	2100	1,015	3600	2,984
700	0,113	2200	1,114	3700	3,152
800	0,147	2300	1,218	3800	3,325
900	0,186	2400	1,326	3900	3,502
1000	0,230	2500	1,439	4000	3,684
1100	0,279	2600	1,557	4100	3,871
1200	0,332	2700	1,679	4200	4,062
1300	0,389	2800	1,805	4300	4,257
1400	0,451	2900	1,936	4400	4,458
1500	0,518	3000	2,072	4500	4,663
± 1600	+ 0,589	± 3100	+ 2,213	± 4600	+ 4,872

w'_1 und $\frac{w'^2_1}{\mathfrak{M}}$ beziehen sich auf Einheiten der siebenten Stelle.

Tafel IV ¹⁾.

	Ω_1	$\Delta \Omega_1$	i_1	Δi_1
Mercur	46° 54',47	+ 7',11	7° 0',16	+ 0',01
Venus	75° 36',31	+ 5',48	3° 23',60	+ 0',01
Mars	48° 37',88	+ 4',67	1° 51',03	— 0',00
Jupiter	99° 11',50	+ 5',72	1° 18',56	— 0',03
Saturn	112° 37',10	+ 5',12	2° 29',42	— 0',03
Uranus	73° 23',42	+ 3',10	0° 46',34	— 0',04
Neptun	130° 27',40	+ 6',63	1° 46',86	— 0',05

Ω_1 und i_1 beziehen sich auf das Aequinoctium und die Epoche 1880,0.
 $\Delta \Omega_1$ und Δi_1 geben die Aenderung von Ω_1 und i_1 in 10 Jahren.

	$\frac{1}{m_1}$	$10 + \log m_1$	$1600 k^2 m_1$ in Einheiten der siebenten Stelle
Mercur	3 271 742	3,48522	0,16050
Venus	401 839	4,39595	1,07123
Erde	355 499	4,44916	1,12444
Mars	2 680 337	3,57181	0,24709
Jupiter	1047,879	6,979689	3,654972
Saturn	3501,6	6,455733	3,131016
Uranus	22000	5,65758	2,33286
Neptun	19700	5,70553	2,38082

¹⁾ Diese Werthe werden jetzt vortheilhafter dem Berliner Jahrbuche entnommen. Vergl. Bemerkung auf S. 636, Anmerkung des Herausgebers der zweiten Auflage.

Siebente Abtheilung.

Die Berechnung einer Bahn aus einer grösseren Zahl von Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Hundertste Vorlesung.

Einleitende Bemerkungen, Bildung von Normalörtern.

Wir haben im Vorhergehenden gesehen, wie man die störende Einwirkung der Planeten berechnen kann.

Bevor wir nun zur Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate übergehen, bleibt noch kurz die Bildung der Normalorte zu erläutern.

Es lagen für den Kometen 1890 III folgende Differenzen im Sinne Beobachtung minus Rechnung vor, welche in einen Normalort vereinigt werden sollen:

Epoche	Sternwarte	$\Delta \alpha$	$\Delta \alpha \cos \delta$	$\Delta \delta$	Vergleichungen
Juli					
22,400	Nice	+ 0 ^s ,06	+ 0 ^s ,045	+ 8'',6	5
22,406	Marseille	— 0 ,13	— 0 ,097	+ 7 ,8	5,5
(22,415)	Padua	(+ 1 ,81)	—	—	—
(22,415)	Padua	(+ 0 ,77)	(+ 0 ,574)	(+ 26 ,7)	8,4
22,439	Toulouse	+ 0 ,29	+ 0 ,216	+ 9 ,5	10,12
22,457	Kiel	+ 0 ,62	+ 0 ,463	+ 16 ,9	5
22,457	Paris	— 0 ,36	— 0 ,269	+ 10 ,5	6,4
22,617	Cambridge	— 0 ,56	— 0 ,419	+ 7 ,4	4
23,371	Rom	— 0 ,42	— 0 ,317	+ 5 ,1	4,3
23,386	Nice	+ 0 ,05	+ 0 ,038	+ 5 ,5	5
23,399	Marseille	— 0 ,43	— 0 ,325	— 2 ,4	5,5
23,411	Kremsmünster	+ 0 ,35	+ 0 ,264	— 0 ,6	3
23,453	Paris	— 0 ,39	— 0 ,295	+ 4 ,7	12,8
23,612	Cambridge	— 0 ,45	— 0 ,341	+ 8 ,5	5

Die Epochen dieser Beobachtungen (in mittlerer Berl. Ortszeit) sind bis auf $\frac{1}{1000}$ Tag angegeben, was für den vorliegenden Zweck weitaus genügend ist. Neben $\Delta \alpha$ (im Sinne

Beobachtung minus Rechnung) geben wir $\Delta\alpha \cos \delta$ (d. h. $\Delta\alpha$ multiplicirt mit dem Cosinus des der Beobachtungszeit entsprechenden δ); endlich in der letzten Colonne, wie oft der Beobachter den Kometen mit dem Vergleichssterne verglichen hat. Steht in dieser Colonne nur eine Ziffer, so war die Anzahl der Vergleichen in Rectascension und Declination gleich derselben. Stehen in dieser Colonne zwei Zahlen durch einen Punkt getrennt, so giebt die erste die Anzahl der Vergleichen in Rectascension, die zweite die Anzahl derjenigen in Declination. Sei n_i die jeder Beobachtung entsprechende Anzahl der Vergleichen in Rectascension, so könnte man das mittlere $\Delta\alpha$ wie folgt bilden:

$$\Delta\alpha = \frac{\sum (n_i \Delta\alpha_i)}{\sum n_i}.$$

So würde man die Verschiedenheit der Zahl der gemachten Vergleichen bei der Mittelbildung berücksichtigen. Dieses Verfahren wäre aber ungerechtfertigt. Wenn nämlich ein Beobachter eine sehr grosse Zahl von Vergleichen macht, so geschieht das gewöhnlich deshalb, weil ihm bei der Beobachtung Schwierigkeiten entgegentraten. (Mondlicht, Nebel oder dergl.)

Man hat daher gar keinen Grund, von vornherein anzunehmen, dass die Beobachtungen mit einer grösseren Zahl von Vergleichen genauer sind.

Was die Verschiedenheit unter den Angaben der einzelnen Beobachter bedingt, ist hauptsächlich ihr Auge. Der eine Beobachter glaubt den Kern des Kometen an einem anderen Punkte des Himmels zu sehen, als der andere. Sehr häufig sieht man, dass gerade einer der allergeübtesten Beobachter von den anderen in constanter Weise abweicht. Während z. B. in einem gewissen Stücke der Bahn alle übrigen positive $\Delta\alpha$ finden, findet er negative. Manche Bahnrechner pflegen dann „eine systematische Correction“ an die Resultate anzubringen. Dieses Verfahren kommt aber im Wesentlichen darauf hinaus, die Beobachtungen überhaupt wegzustreichen. Man thut jedenfalls besser, die systematisch abweichenden Beobachtungen in ihrer ursprünglichen Form stehen zu lassen. Manche Bahnrechner geben ferner einer Beobachtung ein um so grösseres „Gewicht“, je mehr sie sich an eine möglichst genau bestimmte vorläufige Bahn anschliesst. Aber auch dieses Verfahren ist zu verwerfen, da auf diese Weise die definitive Bahn künstlich der vorläufigen näher gebracht wird. Es ist daher meistens zu empfehlen, alle Beobachtungen in gleicher Weise zu berücksichtigen. Im vorliegenden Falle weichen die Beobachtungen von Padua (22. Juli) stark von der Wahrheit ab. Da sie nach Angabe des Beobachters unter sehr ungünstigen Verhältnissen stattfanden, so lassen wir sie weg, was durch die Klammer angedeutet ist; indem man nun aus den noch übrig bleibenden zwölf Beobachtungen das Mittel nimmt, ergibt sich:

Epoche: Juli 22,951

$$\Delta\alpha = - 0^s,114$$

$$\Delta\delta = + 6'',79.$$

Wenn die Bewegung des Kometen in Declination stark ist, so pflegt man $\Delta\alpha$ in etwas anderer Weise zu berechnen. Man nimmt das Mittel von $\Delta\alpha \cos \delta$ (wo δ die zur Beobachtungszeit gehörige Declination des Objectes) und erhält so im vorliegenden Falle:

$$\Delta\alpha \cos \delta = - 0^s,086.$$

Zur Zeit Juli 22,951 war δ ungefähr gleich $+ 41^\circ 19'$. Somit erschliesst man:

$$\Delta\alpha = - 0^s,115.$$

In diesem Falle, wie in fast allen übrigen ist es mithin völlig belanglos, ob man das Mittel der $\Delta\alpha$ oder der $\Delta\alpha \cos \delta$ bildet und aus letzterem $\Delta\alpha$ schliesst. Die Epoche Juli 22,951 fällt in die Nähe von Juli 23,0. Für diese letztere gab die Ephemeride:

$$\begin{aligned}\alpha &= 140^{\circ} 38' 29'',04 \\ \delta &= + 41^{\circ} 18' 39'',76.\end{aligned}$$

Wir nehmen nun an, dass die Correctionen $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ der Epoche Juli 22,951 auch noch für Juli 23,0 gelten und erhalten so folgenden Normalort:

$$\begin{aligned}\text{Juli 23,0: } \alpha &= 140^{\circ} 38' 27'',33 \\ \delta &= + 41^{\circ} 18' 46'',55.\end{aligned}$$

Man pflegt dabei, wie hier geschehen, als Epoche des Normalortes die des nächstliegenden Ephemeridenortes zu wählen, um α und δ direct der Ephemeride entnehmen zu können.

Es ist ersichtlich, dass zur Bildung des Normalortes an sich die Kenntniss der Störungen nicht unbedingt nöthig ist. In der That könnte man ja die Beobachtungen mit einem beliebigen Elementensysteme vergleichen, welches sich der Bewegung gut anschliesst. Dasselbe hebt sich dann bei Bildung des Normalortes wieder vollständig heraus.

Die Differenzen $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$, die man bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate braucht, hingegen sind natürlich von dem Ausgangselementensystem abhängig. Sind die Störungen durch die Planeten merklich (was unter normalen Verhältnissen erst nach zwei Monaten oder noch längerer Zeit eintritt), so bringt man sie an der Ephemeride an, bevor man sie mit den Beobachtungen vergleicht. Hat man die Störungen z. B. in den rechtwinkligen Coordinaten berechnet, so bringt man dieselben (nach Reduction auf die Fundamentalebene des Aequators) an die rechtwinkligen heliocentrischen Aequatorialcoordinaten des Objectes als Correctionen an. Hat man hingegen die Störungen nach der Methode der Variation der Constanten berechnet, so muss man die verschiedenen Theile der Ephemeride mit langsam variirenden Elementen rechnen. Man kann natürlich auch die Beobachtungen zunächst mit der ursprünglichen Kepler'schen Bewegung vergleichen und die Störungen dann nachträglich an $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ anbringen.

Im Allgemeinen sollte man nur Beobachtungen, welche sich über einen Zeitraum von etwa zehn Tagen erstrecken, in einen Normalort vereinigen. Für längere Zeiträume könnte die Voraussetzung, dass $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ der Zeit proportional sind, zu merklichen Ungenauigkeiten führen.

Hundertunderste Vorlesung.

Differentialformeln für die directe Verbesserung äquatorialer Elemente.

Wir haben in der vorhergehenden Vorlesung gesehen, wie man mehrere Beobachtungen in einen Normalort vereinigt und die Correctionen $d\alpha$ und $d\delta$ für die Epoche des Normalortes (im Sinne Beobachtung minus Rechnung) erhält.

Bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate setzt man nun voraus, dass die an dem Ausgangselementensystem (den Osculationselementen) anzubringenden Correctionen so klein sind, dass sie die Werthe der Störungen nicht merklich beeinflussen können. Man setzt mit anderen Worten die Störungen als vollständig bekannt voraus und beschäftigt sich nur mit den an dem Ausgangselementensystem anzubringenden Correctionen. Sollten jedoch nach vollendeter Ausgleichung diese Correctionen so gross

ausfallen, dass eine Veränderung der für die Störungen vorausgesetzten Werthe stattfindet, so bliebe weiter nichts übrig, als die ganze Rechnung wieder von vorn anzufangen.

Um eine derartige, ungeheure Vermehrung der Arbeit möglichst zu vermeiden, muss man sich so einrichten, dass die vorläufigen Elemente schon der Wahrheit so nahe kommen, als nur irgend möglich. Unter allen Umständen sollte man zur Bestimmung einer definitiven Bahn Elementensysteme verwenden, welche die Normalorte auf circa 5" darstellen. Noch besser aber ist es mit Hülfe von drei oder vier Normalörtern, die man für die allergeaucesten hält, ein neues vorläufiges Elementensystem zu rechnen, das man dann der definitiven Bahnbestimmung als Ausgangspunkt zu Grunde legt. Man vergleicht also die Normalörter mit einem möglichst genauen Ausgangselementensystem, und bildet $d\alpha$, respective $d\alpha \cos \delta$ und $d\delta$ im Sinne Beobachtung minus Rechnung.

Nun fragt man, um wie viel ändert sich z. B. ein für die Epoche eines Normalortes durch die Ephemeride gegebenes δ (Declination), wenn statt der vorausgesetzten Länge des Knotens Ω eine wenig verschiedene $\Omega + d\Omega$ angenommen wird; mit anderen Worten, man sucht die Differentialquotienten von Rectascension und Declination nach den Bahnelementen für die Epochen der Normalorte zu bestimmen. Liegen nur drei Normalorte vor, so könnte man auf diesem Wege sechs Bahnelemente finden, welche die Beobachtungen vollständig darstellen. In diesem Falle hätte man sechs Bedingungsgleichungen (nämlich, dass die drei $d\alpha$ und die drei $d\delta$ gleich Null sein sollen) und dementsprechend die Zuwüchse der sechs Bahnelemente, z. B. di , zu bestimmen. Diese Aufgabe wäre also vollständig streng lösbar. Liegen aber mehr als drei Normalorte vor (und das ist überhaupt für jede einigermaassen gute, definitive Bahnbestimmung nothwendig), so übersteigt offenbar die Zahl der Bedingungsgleichungen die der Unbekannten. Es ist dann also unmöglich, alle Beobachtungen vollständig darzustellen. In diesem Falle präcisirt man nach dem Vorgange von Gauss, Legendre und Bessel die Aufgabe dahin, dass für die zu suchenden (definitiven) Bahnelemente die Summe der übrigbleibenden Fehlerquadrate:

$$\Sigma[(d\alpha \cos \delta)^2 + (d\delta)^2]$$

ein Minimum wird (Methode der kleinsten Quadrate).

In dem vorliegenden Falle ist es leicht genug, sich über die geometrische Bedeutung dieser Minimalbedingung Rechenschaft zu geben. Es sind nämlich $d\alpha \cos \delta$ und $d\delta$ die wirklichen sphärischen Abweichungen der Ephemeride von dem Normalorte in beiden Coordinatenrichtungen. Obige Minimalbedingung besagt also mit anderen Worten Folgendes aus: Es wird ein Elementensystem von der Beschaffenheit gesucht, dass die Summe der Quadrate der sphärischen Abstände zwischen berechneten und beobachteten Oertern (von der Erde aus gesehen) ein Minimum wird. Es ist von vornherein klar, dass sich ein auf diese Weise bestimmtes Elementensystem sehr gut an die Beobachtungen anschliessen muss. Die theoretischen Gründe, aus denen man diese Bedingung gewählt hat, werden wir später kennen lernen.

Der erste Schritt, um diese Bedingung zu verwirklichen, ist die Aufstellung der Differentialquotienten von Rectascension und Declination nach den Bahnelementen. Bedeuten x, y und z die heliocentrischen Aequatorialcoordinaten des Objectes, X, Y und Z die geocentrischen Aequatorialcoordinaten der Sonne, ρ den Abstand des Objectes von der Erde, und schliesslich α und δ seine geocentrische Rectascension und Declination, so ist:

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \alpha \cos \delta &= x + X \\ \rho \sin \alpha \cos \delta &= y + Y \\ \rho \sin \delta &= z + Z \end{aligned} \right\} (A)$$

Aus diesen Formeln ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y + Y}{x + X} \\ \operatorname{tg} \delta &= \frac{z + Z}{\sqrt{(x + X)^2 + (y + Y)^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (B)$$

Wenn sich die Bahnelemente verändern, so bleiben die Sonnenkoordinaten X , Y und Z constant. Demnach hängen $d\alpha$ und $d\delta$ nur von den Variationen von x , y und z ab. Aus (B) und (A) folgt jetzt:

$$\left. \begin{aligned} \varrho d\alpha \cos \delta &= dy \cos \alpha - dx \sin \alpha \\ \varrho d\delta &= dz \cos \delta - \sin \delta [\cos \alpha dx + \sin \alpha dy] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (C)$$

Die Fundamentalgleichungen (C) stellen die Zuwächse von α und δ als Functionen von dx , dy und dz dar. Wir müssen also jetzt noch die Zuwächse der heliocentrischen Aequatorialkoordinaten des Objectes (dx , dy und dz) als Functionen der Zuwächse der Bahnelemente ausdrücken.

Hierzu wählen wir der Einfachheit halber die äquatorialen Bahnelemente des Objectes. Es ist alsdann:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos(\omega + v) \cos \Omega - r \cos i \sin(\omega + v) \sin \Omega \\ y &= r \cos(\omega + v) \sin \Omega + r \cos i \sin(\omega + v) \cos \Omega \\ z &= r \sin i \sin(\omega + v) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (D)$$

In diesen Formeln sind die äquatorialen Bahnelemente im Gauss'schen Sinne gezählt. Für rückläufige Bewegungen (bezüglich des Aequators) ist also $i > 90^\circ$; Ω ist wie immer die Rectascension des aufsteigenden Knotens; ω der Winkel vom aufsteigenden Knoten bis zum Perihel, gezählt im Sinne der heliocentrischen Bewegung des Objectes. Dieser Winkel kann also in allen vier Quadranten liegen.

Wir leiten nun zunächst mit Hülfe der Formeln (D) und (C) die Differentialquotienten der geocentrischen Rectascension α und Declination δ nach den Bahnelementen der Lage (Ω , i und ω) ab; r und v hängen von diesen Grössen nicht ab und sind daher bei den Differentiationen als constant zu betrachten.

Es ergibt sich:

$$\frac{d\alpha}{d\Omega} \varrho \cos \delta = r \cos(\omega + v) \cos(\alpha - \Omega) + r \cos i \sin(\omega + v) \sin(\alpha - \Omega) \dots (1)$$

$$\varrho \frac{d\delta}{d\Omega} = -\sin \delta [r \cos(\omega + v) \sin(\alpha - \Omega) - r \cos i \sin(\omega + v) \cos(\alpha - \Omega)] \dots (2)$$

$$\frac{d\alpha}{di} \varrho \cos \delta = -r \sin i \sin(\omega + v) \cos(\alpha - \Omega) \dots \dots \dots (3)$$

$$\varrho \frac{d\delta}{di} = r \sin(\omega + v) [\cos \delta \cos i + \sin \delta \sin i \sin(\alpha - \Omega)] \dots \dots \dots (4)$$

$$\varrho \cos \delta \frac{d\alpha}{d\omega} = +r \sin(\omega + v) \sin(\alpha - \Omega) + r \cos i \cos(\omega + v) \cos(\alpha - \Omega) \dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \varrho \frac{d\delta}{d\omega} &= +r \sin(\omega + v) \cos(\alpha - \Omega) \sin \delta \\ &+ r \cos(\omega + v) [-\cos i \sin(\alpha - \Omega) \sin \delta + \sin i \cos \delta] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Diese Formeln können leicht durch Einführung von Hilfsgrössen auf eine für die logarithmische Rechnung bequemere Form gebracht werden. Wir betrachten aber zunächst die Differentialquotienten nach den sogenannten phoronomischen Elementen,

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}$$

oder:

$$\cos v = \frac{a(1 - e^2)}{er} - \frac{1}{e}$$

ist. Nämlich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dT} &= - \frac{k \sqrt{a(1 - e^2)}}{r^2} \\ \frac{dv}{da} &= - \frac{3}{2} k(t - T) \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{a} r^2} \\ \frac{dv}{de} &= \frac{\sin v}{1 - e^2} (2 + e \cos v) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (F)$$

Wir setzen ferner:

$$\frac{da}{a} = d\mathfrak{A}, \quad \frac{de}{1 - e^2} = d\mathfrak{E} \dots \dots \dots (G)$$

Nach dieser Substitution werden die obigen Gleichungen in endgültiger Gestalt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dT} &= - \frac{ek \sin v}{\sqrt{p}} \\ \frac{dr}{d\mathfrak{A}} &= r - \frac{3}{2} \frac{e \sin v k(t - T)}{\sqrt{p}} \\ \frac{dr}{d\mathfrak{E}} &= - p \cos v \\ \frac{dv}{dT} &= - \frac{k \sqrt{p}}{r^2} \\ \frac{dv}{d\mathfrak{A}} &= - \frac{3}{2} k(t - T) \frac{\sqrt{p}}{r^2} \\ \frac{dv}{d\mathfrak{E}} &= \sin v (2 + e \cos v) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (H)$$

Es erübrigt nun noch zu zeigen, wie man die Differentialquotienten von Rectascension und Declination nach den phoronomischen Elementen erhält. Zu diesem Zwecke betrachten wir zunächst den Differentialquotienten einer heliocentrischen Coordinate, z. B. x , nach einem dieser Elemente, z. B. T . Man hat:

$$\frac{dx}{dT} = \frac{dx}{dr} \frac{dr}{dT} + \frac{dx}{dv} \frac{dv}{dT}.$$

Die Sonnenkoordinaten sind von der Form:

$$x = r \xi(v + \omega, \Omega, i).$$

Vergl. die Gleichungen (D). Also wird:

$$\frac{dx}{dT} = \xi \frac{dr}{dT} + r \frac{d\xi}{dv} \cdot \frac{dv}{dT}.$$

Wir setzen nun:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dT} &= g_T \cos G_T \\ r \frac{dv}{dT} &= g_T \sin G_T \end{aligned}$$

und analog für die anderen phoronomischen Elemente. Dann wird:

$$\frac{dx}{dT} = \xi g_T \cos G_T + \frac{d\xi}{dv} g_T \sin G_T.$$

Nun ist aber nach (D):

$$\xi = \cos(\varpi + v) \cos \delta - \cos i \sin(\varpi + v) \sin \delta.$$

Man erhält also:

$$\frac{dx}{dT} = g_T \cos \delta \cos(\varpi + v + G_T) - g_T \cos i \sin \delta \sin(\varpi + v + G_T).$$

Setzt man mithin allgemein:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \xi(\varpi + v, \delta, i) \\ y &= r \eta(\varpi + v, \delta, i) \\ z &= r \zeta(\varpi + v, \delta, i) \end{aligned} \right\} \text{und:}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dT} &= g_T \cos G_T & r \frac{dv}{dT} &= g_T \sin G_T \\ \frac{dr}{d\mathcal{U}} &= g_{\mathcal{U}} \cos G_{\mathcal{U}} & r \frac{dv}{d\mathcal{U}} &= g_{\mathcal{U}} \sin G_{\mathcal{U}} \\ \frac{dr}{d\mathcal{E}} &= g_{\mathcal{E}} \cos G_{\mathcal{E}} & r \frac{dv}{d\mathcal{E}} &= g_{\mathcal{E}} \sin G_{\mathcal{E}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (I)$$

so ergibt sich ganz einfach:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dT} &= g_T \xi(\varpi + v + G_T, \delta, i) \\ \frac{dy}{dT} &= g_T \eta(\varpi + v + G_T, \delta, i) \\ \frac{dz}{dT} &= g_T \zeta(\varpi + v + G_T, \delta, i) \\ \frac{dx}{d\mathcal{U}} &= g_{\mathcal{U}} \xi(\varpi + v + G_{\mathcal{U}}, \delta, i) \\ \frac{dy}{d\mathcal{U}} &= g_{\mathcal{U}} \eta(\varpi + v + G_{\mathcal{U}}, \delta, i) \\ \frac{dz}{d\mathcal{U}} &= g_{\mathcal{U}} \zeta(\varpi + v + G_{\mathcal{U}}, \delta, i) \\ \frac{dx}{d\mathcal{E}} &= g_{\mathcal{E}} \xi(\varpi + v + G_{\mathcal{E}}, \delta, i) \\ \frac{dy}{d\mathcal{E}} &= g_{\mathcal{E}} \eta(\varpi + v + G_{\mathcal{E}}, \delta, i) \\ \frac{dz}{d\mathcal{E}} &= g_{\mathcal{E}} \zeta(\varpi + v + G_{\mathcal{E}}, \delta, i) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (M)$$

Mit Hülfe der Formeln (M), (C) und (D) ist es leicht, die Differentialquotienten von α und δ nach den phonomischen Bahnelementen zu erhalten. Man hat z. B.:

$$\begin{aligned} \varrho \frac{d\alpha}{dT} \cos \delta &= \frac{dy}{dT} \cos \alpha - \frac{dx}{dT} \sin \alpha \\ &= g_T \cos \alpha [\cos(\varpi + v + G_T) \sin \delta + \cos i \sin(\varpi + v + G_T) \cos \delta] \\ &\quad - g_T \sin \alpha [\cos(\varpi + v + G_T) \cos \delta - \cos i \sin(\varpi + v + G_T) \sin \delta] \end{aligned}$$

oder:

$$\varrho \frac{d\alpha}{dT} \cos \delta = g_T \left\{ \begin{aligned} &-\cos(\varpi + v + G_T) \sin(\alpha - \delta) \\ &+ \cos i \sin(\varpi + v + G_T) \cos(\alpha - \delta) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (N')$$

Zur Bildung von $\varrho \frac{d\delta}{dT}$ hat man:

$$\begin{aligned} \cos \alpha \frac{dx}{dT} + \sin \alpha \frac{dy}{dT} &= g_T \{ \cos(\omega + v + G_T) \cos(\alpha - \delta) \\ &\quad + \cos i \sin(\omega + v + G_T) \sin(\alpha - \delta) \} \\ \frac{dz}{dT} &= g_T \sin i \sin(\omega + v + G_T). \end{aligned}$$

Woraus sich mittelst (C) ergibt:

$$\left. \begin{aligned} \varrho \frac{d\delta}{dT} &= -g_T \cos(\omega + v + G_T) \cos(\alpha - \delta) \sin \delta \\ &\quad + g_T \sin(\omega + v + G_T) \{ -\sin \delta \cos i \sin(\alpha - \delta) + \cos \delta \sin i \} \end{aligned} \right\} \quad (N'')$$

Die Gleichungen (N') und (N'') geben zur Einführung gewisser Hilfsgrößen Veranlassung.

Setzt man:

$$\left. \begin{aligned} m \sin M &= \sin(\alpha - \delta) \\ m \cos M &= \cos i \cos(\alpha - \delta) \\ n \sin N &= \sin \delta \cos i \sin(\alpha - \delta) - \sin i \cos \delta \\ n \cos N &= \sin \delta \cos(\alpha - \delta) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (O)$$

Dann folgt:

$$\left. \begin{aligned} \varrho \frac{d\alpha}{dT} \cos \delta &= m g_T \sin(\omega + v + G_T - M) \\ \varrho \frac{d\delta}{dT} &= -n g_T \cos(\omega + v + G_T - N) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (N)$$

und entsprechend für $d\mathfrak{H}$ und $d\mathfrak{E}$.

Wir werfen nun noch einen Blick auf die Formeln (1) bis (6).

Die Formel (2) wird mittelst der durch die Gleichungen (O) gegebenen Hilfsgrößen:

$$\varrho \frac{d\delta}{d\delta} = + r m \sin \delta \sin(-M + \omega + v) \dots \dots \dots (2')$$

Formel (3) hat eine für die logarithmische Rechnung hinlänglich bequeme Form. Aus (5) folgt:

$$\varrho \cos \delta \frac{d\alpha}{d\omega} = m r \cos(\omega + v - M) \dots \dots \dots (5')$$

Aus (6) ergibt sich:

$$\varrho \frac{d\delta}{d\omega} = r n \sin(\omega + v - N) \dots \dots \dots (6')$$

Es sind also nur noch die Gleichungen (1) und (4) in geeigneter Weise umzuformen:

Wir setzen dazu:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\alpha - \delta) &= \varrho \cos \Phi \\ \cos i \sin(\alpha - \delta) &= \varphi \sin \Phi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1')$$

In Folge dieser Substitution ergibt sich aus (1):

$$\frac{d\alpha}{d\delta} \varrho \cos \delta = r \varphi \cos(\omega + v - \Phi) \dots \dots \dots (1'')$$

Schliesslich sei:

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta &= \psi \cos \Psi \\ \sin \delta \sin(\alpha - \delta) &= \psi \sin \Psi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (Q)$$

Dann wird (4):

$$\varrho \frac{d\delta}{di} = r \psi \sin(\omega + v) \cos(\Psi - i) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

Die dritte der Gleichungen (O) wird schliesslich:

$$n \sin N = \psi \sin(\Psi - i) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (O')$$

Die im Vorhergehenden entwickelten Formeln lassen sich natürlich leicht auch auf Planeten anwenden. Liegen Beobachtungen mehrerer Oppositionen vor, so hat man den Periheldurchgang für eine derselben als T zu bezeichnen. Die Grösse $(t - T)$ wird also mit der Zeit immer grösser und wächst von einer Opposition zur folgenden um die Umlaufszeit des Planeten. In Folge dessen wird die Grösse $\frac{dv}{da}$ mit der Zeit immer grösser. In der That, man weiss, dass ein kleiner Fehler in der Halbhaxe der Bahn bei periodischen Objecten im Laufe der Zeit bedeutende Abweichungen im scheinbaren Orte hervorbringen kann.

Stellen wir zum Schlusse die gewonnenen Gleichungen zusammen, so hat man also folgende Formeln:

Zur Variation der äquatorialen Bahnelemente für nicht parabolische Bahnen.

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dT} &= - \frac{ek \sin v}{\sqrt{p}} = g_T \cos G_T \\ \frac{dv}{dT} &= - \frac{k\sqrt{p}}{r^2} = \frac{g_T}{r} \sin G_T \\ \frac{dr}{d\mathfrak{A}} &= r - \frac{3}{2} \frac{e \sin v k (t - T)}{\sqrt{p}} = g_{\mathfrak{A}} \cos G_{\mathfrak{A}} \\ \frac{dv}{d\mathfrak{A}} &= - \frac{3}{2} k (t - T) \frac{\sqrt{p}}{r^2} = \frac{g_{\mathfrak{A}}}{r} \sin G_{\mathfrak{A}} \\ \frac{dr}{d\mathfrak{E}} &= - p \cos v = g_{\mathfrak{E}} \cos G_{\mathfrak{E}} \\ \frac{dv}{d\mathfrak{E}} &= \sin v [2 + e \cos v] = \sin v \left[1 + \frac{p}{r} \right] = \frac{g_{\mathfrak{E}}}{r} \sin G_{\mathfrak{E}} \\ \psi \cos \Psi &= \cos \delta \\ \psi \sin \Psi &= \sin \delta \sin(\alpha - \delta) \\ m \sin M &= \sin(\alpha - \delta) \\ m \cos M &= \cos i \cos(\alpha - \delta) \\ n \sin N &= \psi \sin(\Psi - i) \\ n \cos N &= \sin \delta \cos(\alpha - \delta). \end{aligned}$$

Setzt man dann:

$$u = v + \omega,$$

so ist:

$$\frac{d\alpha \cos \delta}{d\delta} = \frac{r}{\varrho} [\cos u \cos(\alpha - \delta) + \cos i \sin u \sin(\alpha - \delta)] \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Oder wenn man noch φ und Φ einführen will:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \delta) &= \varphi \cos \Phi \\ \cos i \sin(\alpha - \delta) &= \varphi \sin \Phi \end{aligned}$$

und es ergab sich:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\mathfrak{A}} &= r - \frac{3}{2} \frac{e(t-T)k \sin v}{\sqrt{p}} \\ \frac{dr}{d\mathfrak{E}} &= -p \cos v \\ \frac{dv}{d\mathfrak{A}} &= -\frac{3}{2} (t-T) \frac{k}{r^2} \sqrt{p} \\ \frac{dv}{d\mathfrak{E}} &= \sin v \{2 + e \cos v\}.\end{aligned}$$

Diese vier Differentialquotienten werden nun keineswegs für die Parabel unendlich. Um die wirkliche Schwierigkeit, welche besteht, besser zu erkennen, setzen wir, wie das für die Parabel der Fall ist:

$$\begin{aligned}e &= 1 & r &= \frac{q}{\cos^{1/2} v^2} \\ \frac{k(t-T)}{\sqrt{2q^{3/2}}} &= \operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} v^3\end{aligned}$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\mathfrak{A}} &= q \cos v \\ \frac{dr}{d\mathfrak{E}} &= -2q \cos v \\ \frac{dv}{d\mathfrak{A}} &= -\frac{1}{2} \sin v (2 + \cos v) \\ \frac{dv}{d\mathfrak{E}} &= \sin v (2 + \cos v).\end{aligned}$$

Jetzt wird die Schwierigkeit, welche sich der Lösung des Problems im Falle nahezu parabolischer Bahnen entgegenstellt, deutlicher ersichtlich.

Es ist nämlich nahezu:

$$\frac{dr}{d\mathfrak{A}} : \frac{dr}{d\mathfrak{E}} = \frac{dv}{d\mathfrak{A}} : \frac{dv}{d\mathfrak{E}} = -\frac{1}{2}.$$

Hieraus folgt z. B. für $d\delta$:

$$\begin{aligned}d\delta &= \frac{d\delta}{dr} \cdot \frac{dr}{d\mathfrak{A}} \cdot d\mathfrak{A} + \frac{d\delta}{dr} \cdot \frac{dr}{d\mathfrak{E}} \cdot d\mathfrak{E} \\ &+ \frac{d\delta}{dv} \cdot \frac{dv}{d\mathfrak{A}} \cdot d\mathfrak{A} + \frac{d\delta}{dv} \cdot \frac{dv}{d\mathfrak{E}} \cdot d\mathfrak{E} \\ &= \left(\frac{d\delta}{dr} \frac{dr}{d\mathfrak{E}} + \frac{d\delta}{dv} \frac{dv}{d\mathfrak{E}} \right) \left(-\frac{1}{2} d\mathfrak{A} + d\mathfrak{E} \right),\end{aligned}$$

d. h. mit anderen Worten: im Falle nahezu parabolischer Bahnen kommen $d\mathfrak{A}$ und $d\mathfrak{E}$ fast in der Combination $-\frac{1}{2} d\mathfrak{A} + d\mathfrak{E}$ vor und sind daher nur schwer von einander abzutrennen.

Man könnte dann, wie das auch zum Theil geschehen ist, an Stelle von da und de respective $d\mathfrak{A}$ und $d\mathfrak{E}$ andere Unbekannte einführen, und für die Behandlung derartiger Fälle besondere Vorschriften entwickeln. Demgegenüber ist aber zu bemerken, dass, wenn die Bestimmung von $d\mathfrak{A}$ und $d\mathfrak{E}$ schwierig ist, dies ganz einfach in der Natur des Problems liegt. Durch Einführung anderer Unbekannten an Stelle von $d\mathfrak{A}$ und $d\mathfrak{E}$ kann die schliesslich zu erhaltende Bahn nicht genauer werden.

Wir sahen, dass am sichersten die Combination:

$$-\frac{1}{2} d\mathfrak{A} + d\mathfrak{E}$$

bestimmt ist.

Es ist aber:

$$\begin{aligned} q &= a(1 - e) \\ dq &= da(1 - e) - ade \\ &= d\mathfrak{A}a(1 - e) - ad\mathfrak{E}(1 - e^2) \\ &= q[d\mathfrak{A} - d\mathfrak{E}(1 + e)]. \end{aligned}$$

Da nun e nahezu gleich eins ist, so treten $d\mathfrak{A}$ und $d\mathfrak{E}$ in dq fast in derjenigen Verbindung auf, welche, wie wir sehen, gut bestimmt ist, nämlich:

$$-\frac{1}{2} d\mathfrak{A} + d\mathfrak{E}.$$

Für die Bestimmung von dq erwächst also im Falle nahezu parabolischer Bahnen aus den in der vorigen Vorlesung gegebenen Vorschriften kein wesentlicher Nachtheil. Hingegen ist $d\mathfrak{E}$ selbst nicht gut bestimmt. Wenn man aber nach Schluss der Rechnung hieraus de nach der Formel:

$$de = (1 - e^2) d\mathfrak{E}$$

bestimmt, so wird diese Grösse mit dem kleinen Factor $(1 - e^2)$ multiplicirt, wodurch der erlittene Genauigkeitsverlust wieder ausgeglichen wird.

Man kann also die in der vorigen Vorlesung gegebenen Formeln ohne wesentlichen Nachtheil auf nahezu parabolische Bahnen anwenden. Die Bemerkung über die schwere „Trennbarkeit“ von $d\mathfrak{A}$ und $d\mathfrak{E}$ gilt übrigens nicht mehr, wenn es sich um Beobachtungen verschiedener Oppositionen eines langperiodischen Kometen handelt. Bezeichnet alsdann T die für eine dieser Oppositionen angenommene Periheldurchgangszeit, so hätte man für die folgende Opposition näherungsweise:

$$t - T = U + \frac{\sqrt{2} q^{3/2}}{k} \left(tg \frac{v}{2} + \frac{1}{3} tg \frac{1}{2} v^3 \right),$$

wobei U die Umlaufszeit des Kometen repräsentirt. Die schwere Abtrennbarkeit von $d\mathfrak{A}$ und $d\mathfrak{E}$ besteht dann also nicht mehr. In der That, die Erfahrung lehrt, dass die Bahnelemente eines langperiodischen Kometen erst dann gut bestimmt sind, wenn Beobachtungen aus mindestens zwei Oppositionen vorliegen.

Ist jedoch das Ausgangselementensystem parabolisch, so gelten die in der vorigen Vorlesung gegebenen Formeln nicht mehr.

Wir wählen in diesem Falle q und e als Unbekannte.

Die Differentialquotienten von v und r nach q sind leicht zu bilden. Für die Parabel ist ja:

$$\left. \begin{aligned} \frac{k(t - T)}{\sqrt{2} q^{3/2}} &= tg \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} tg \frac{1}{2} v^3 \\ r &= \frac{q}{\cos \frac{1}{2} v^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (A)$$

Wir halten nun zunächst e constant und differenziren nach q . Die parabolische Form der Bahn und die Gleichungen (A) bleiben also bestehen, nur variirt der Perihelabstand.

So erhält man:

$$\frac{dv}{dq} = -\frac{3}{\sqrt{2}} \frac{k(t - T)}{q^{5/2}} \cos^4 \frac{1}{2} v \left\} \dots \dots \dots (I)$$

Dieser Formel kann man auch eine andere Gestalt geben, indem man statt $(t - T)$ seinen Werth aus der Barker'schen Gleichung (A) einführt. So ergibt sich:

$$\frac{dv}{dq} = -\frac{1}{q} \sin v \left(1 + \frac{\cos v}{2}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1')$$

Andererseits erhält man durch Differentiation der Gleichung, welche r ergibt, nach q :

$$\frac{dr}{dq} = \frac{1}{\cos^{1/2} v^2} + q \frac{\sin^{1/2} v}{\cos^{1/2} v^3} \frac{dv}{dq}.$$

Substituirt man in diese letztere Gleichung den Werth von $\frac{dv}{dq}$ nach (1'), so folgt unmittelbar:

$$\frac{dr}{dq} = \cos v \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$$

Nicht ganz so einfach gestaltet sich die Ableitung der Differentialquotienten nach e .

Wir gehen zu diesem Zwecke von der Gleichung aus, welche in nahezu parabolischen Bahnen (vergl. Vorlesung 7, Abth. I)¹⁾, die Kepler'sche Gleichung vertritt

$$\frac{k(t-T) \sqrt{1+e}}{2q^{3/2}} = \tau \left\{ 1 - \frac{2}{3} \varepsilon \tau^2 \dots \right\} + \frac{\tau^3}{3} \left\{ 1 - \frac{6}{5} \varepsilon \tau^2 \right\} \cdot \cdot \cdot (B)$$

worin $\varepsilon = \frac{1-e}{1+e}$, $\tau = tg \frac{1}{2} v$ ist.

Die höheren Glieder in ε sind für den vorliegenden Zweck ohne Bedeutung, denn nach der Differentiation nach e müssen wir offenbar $\varepsilon = 0$ setzen, wodurch alle Glieder, die noch ε als Factor enthalten, wegfallen.

Lässt man also diese Glieder gleich von vornherein weg, so ergibt sich durch Differentiation von (B) nach e :

$$\frac{k(t-T)}{4q^{3/2} \sqrt{1+e}} = \frac{d\tau}{de} \left(1 + \tau^2\right) - 2\tau^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{\tau^2}{5}\right) \frac{d\varepsilon}{de}$$

und es ist:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{de} &= -\frac{2}{(1+e)^2} \\ \frac{d\tau}{de} &= \frac{1}{\cos^{1/2} v^2} \frac{dv}{de} \end{aligned}$$

Setzt man jetzt nach vollendeter Differentiation $e = 1$, so folgt zunächst:

$$\frac{k(t-T)}{4q^{3/2} \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \frac{dv}{dc} + \tau^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{\tau^2}{5}\right).$$

Nun besteht aber (da wir ja den Grenzfall der Parabel behandeln) die Barker'sche Gleichung:

$$\frac{k(t-T)}{\sqrt{2} q^{3/2}} = \tau + \frac{\tau^3}{3}.$$

Man hat also:

$$\frac{\tau}{4} + \frac{\tau^3}{12} = \frac{1}{2} \frac{dv}{dc} + \frac{\tau^3}{3} + \frac{\tau^5}{5}$$

¹⁾ In dieser Vorlesung bedeutete t die seit dem Periheldurchgange verflossene Zeit.

oder:

$$\frac{dv}{de} = 2 \cos \frac{1}{2} v^4 \left\{ \frac{\tau}{4} - \frac{\tau^3}{4} - \frac{\tau^5}{5} \right\} \left. \vphantom{\frac{dv}{de}} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

$$= \frac{\sin v \cos^{1/2} v^2}{4} \left\{ 1 - \tau^2 - \frac{4}{5} \tau^4 \right\} \left. \vphantom{\frac{dv}{de}} \right\}$$

Diese Formel lassen wir in dieser Gestalt und suchen die entsprechende für $\frac{dr}{de}$ auf.

Es ist ja:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} = \frac{q (1 + e)}{1 + e \cos v}.$$

Wenn man also, wie das hier vorausgesetzt wird, q constant hält und nach e differenzirt, so folgt:

$$\frac{dr}{de} = \frac{q}{1 + e \cos v} - \frac{q (1 + e) \cos v}{(1 + e \cos v)^2} + \frac{q (1 + e) e \sin v \frac{dv}{de}}{(1 + e \cos v)^2}$$

oder, wenn $e = 1$ ist:

$$\frac{dr}{de} = \frac{q}{2 \cos^2 \frac{v}{2}} - \frac{q \cos v}{2 \cos^4 \frac{v}{2}} + \frac{q \sin v \frac{dv}{de}}{2 \cos^4 \frac{v}{2}}$$

$$= \frac{q \sin \frac{v}{2}}{2 \cos^4 \frac{v}{2}} \left\{ \sin \frac{v}{2} + 2 \cos \frac{v}{2} \frac{dv}{de} \right\}.$$

Oder, wenn man für $\frac{dv}{de}$ seinen Werth aus (3') setzt:

$$\frac{dr}{de} = \frac{q \sin \frac{v^2}{2}}{2 \cos \frac{v^4}{2}} \left\{ 1 + \cos \frac{v^4}{2} \left[1 - \tau^2 - \frac{4}{5} \tau^4 \right] \right\}.$$

Wir setzen nun die erste 1 in der geschweiften Klammer { } gleich:

$$\left(\cos \frac{v^2}{2} + \sin \frac{v^2}{2} \right)^2$$

und erhalten so:

$$\frac{dr}{de} = \frac{q \sin \frac{v^2}{2}}{2 \cos \frac{v^4}{2}} \left\{ 2 \cos \frac{v^4}{2} + \sin \frac{v^2}{2} \cos \frac{v^2}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{v^4}{2} \right\} \left. \vphantom{\frac{dr}{de}} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

$$= \frac{q \sin \frac{v^2}{2}}{2} \left\{ 2 + \tau^2 + \frac{1}{5} \tau^4 \right\}$$

Die Berechnung der Klammergrößen in (3) und (4) ist wegen der Einfachheit der Coëfficienten ziemlich kurz.

Es besteht aber zwischen den beiden Klammern noch eine Beziehung, welche ihre Richtigkeit prüft, nämlich:

$$\left\{2 + \tau^2 + \frac{1}{5} \tau^4\right\} - \left\{1 - \tau^2 - \frac{4}{5} \tau^4\right\}$$

$$= 1 + 2 \tau^2 + \tau^4 = (1 + \tau^2)^2 = \left(\frac{1}{\cos \frac{\nu^2}{2}}\right)^2 = \frac{1}{\cos \frac{\nu^4}{2}}$$

Wir setzen nun in ähnlicher Weise, wie in der vorigen Vorlesung:

$$\frac{dr}{dq} = g_q \cos G_q \qquad r \frac{dv}{dq} = g_q \sin G_q$$

$$\frac{dr}{de} = g_e \cos G_e \qquad r \frac{dv}{de} = g_e \sin G_e$$

Dann wird ähnlich wie früher:

$$\frac{d\alpha}{dq} = \frac{g_q m}{\varrho \cos \delta} \sin (u + G_q - M)$$

$$\frac{d\delta}{dq} = -\frac{g_q n}{\varrho} \cos (u + G_q - N)$$

$$\frac{d\alpha}{de} = \frac{g_e m}{\varrho \cos \delta} \sin (u + G_e - M)$$

$$\frac{d\delta}{de} = -\frac{g_e n}{\varrho} \cos (u + G_e - N),$$

wobei $u = v + \omega$.

Es ergibt sich also folgendes Formelsystem für die

P a r a b e l:

$$\frac{dr}{dq} = \cos v \qquad = g_q \cos G_q$$

$$\frac{dv}{dq} = -\frac{3}{\sqrt{2}} \frac{k(t-T)}{q^{3/2}} \cos \frac{1}{2} v^4 \qquad = \frac{g_q}{r} \sin G_q$$

$$\frac{dr}{de} = \frac{q \sin \frac{v^2}{2}}{2} \left\{2 + \tau^2 + \frac{1}{5} \tau^4\right\} \qquad = g_e \cos G_e$$

$$\frac{dv}{de} = \frac{\sin v \cos \frac{1}{2} v^2}{4} \left\{1 - \tau^2 - \frac{4}{5} \tau^4\right\} = \frac{g_e}{r} \sin G_e$$

Controle: $\left\{2 + \tau^2 + \frac{1}{5} \tau^4\right\} - \left\{1 - \tau^2 - \frac{4}{5} \tau^4\right\} = \frac{1}{\cos \frac{\nu^4}{2}}$

$$\frac{d\alpha}{dq} = \frac{m g_q}{\varrho \cos \delta} \sin (u + G_q - M)$$

$$\frac{d\delta}{dq} = -\frac{n g_q}{\varrho} \cos (u + G_q - N)$$

$$\frac{d\alpha}{de} = \frac{m g_e}{\varrho \cos \delta} \sin (u + G_e - M)$$

$$\frac{d\delta}{de} = -\frac{n g_e}{\varrho} \cos (u + G_e - N)$$

$$u = v + \omega.$$

Hundertund dritte Vorlesung.

Ausführliches Beispiel zur Bildung der einem Normalorte entsprechenden Bedingungsgleichungen.

Da die in den vorhergehenden Vorlesungen entwickelten Formeln zum Theil neu sind, so schien es uns am Platze, dieselben durch ein ausführliches Beispiel zu erläutern. Wir wählen hierzu einen Fall, in welchem in erster Annäherung ein parabolisches Elementensystem gegeben ist, das durch Einführung einer Excentricität verbessert werden soll.

Für den Coggia'schen Kometen 1890 III lag folgendes Elementensystem vor, bezogen auf die Ekliptik 1890,0:

$$\left. \begin{aligned} i &= 63^{\circ} 18' 23'',80 \\ \Omega &= 14^{\circ} 20' 31'',60 \\ \lg q &= 9,883\,408\,6 \\ \omega &= 85^{\circ} 42' 50'',90 \\ T &= \text{Juli } 8,601\,360 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{mittl. Berl.} \\ \text{Ortszeit} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} (N_1)$$

Der Vollständigkeit halber sei noch hinzugefügt:

$$\lg \left(q^{-\frac{3}{2}} \right) = 0,174\,887\,1,$$

sowie der Werth der mittleren Schiefe der Ekliptik zu Jahresanfang (d. h. der Winkel zwischen der Ekliptik und dem mittleren Aequator im Augenblicke 1890,0):

$$\varepsilon = 23^{\circ} 27' 12'',79.$$

Aus diesem Elementensysteme ergeben sich nach den Vorschriften von Abtheilung I. folgende Werthe für die Gauss'schen Constanten:

$$\begin{aligned} \lg a &= 9,989\,095\,1 \\ \lg b &= 9,364\,371\,7 \\ \lg c &= 9,999\,005\,5 \\ A &= 96^{\circ} 33' 7'',27 \\ B &= 79^{\circ} 7' 17'',62 \\ C &= 5^{\circ} 40' 15'',67 \end{aligned}$$

und mithin:

$$\begin{aligned} A' &= 182^{\circ} 15' 58'',17 \\ B' &= 164^{\circ} 50' 8'',52 \\ C' &= 91^{\circ} 23' 6'',57 \end{aligned}$$

Die rechtwinkligen heliocentrischen Aequatorialecoordinaten des Kometen berechnen sich also nach den Formeln:

$$\begin{aligned} x &= r [9,989\,095\,1] \sin [182^{\circ} 15' 58'',17 + v] \\ y &= r [9,364\,371\,7] \sin [164^{\circ} 50' 8'',52 + v] \\ z &= r [9,999\,005\,5] \sin [91^{\circ} 23' 6'',57 + v] \end{aligned}$$

Da sich die in den vorigen Vorlesungen entwickelten Formeln auf äquatoriale Elemente beziehen, so müssen wir obiges Elementensystem zunächst auf den Aequator umformen.

Wir bezeichnen hier vorübergehend die äquatorialen Elemente durch:

$$i', \Omega' \text{ und } \omega',$$

im Gegensatze zu den ekliptikalischen Elementen:

$$i, \Omega \text{ und } \omega.$$

Setzen wir ferner vorübergehend:

$$a'' \sin A'' = \sin i \cos \Omega$$

$$a'' \cos A'' = \cos i$$

$$b'' \sin B'' = \sin i$$

$$b'' \cos B'' = \cos i \cos \Omega$$

so ergibt sich:

$$\sin i' \sin \Omega' = \sin i \sin \Omega$$

$$\sin i' \cos \Omega' = a'' \sin (A'' + \varepsilon)$$

$$\sin i' \sin \sigma = \sin \varepsilon \sin \Omega$$

$$\sin i' \cos \sigma = b'' \sin (B'' + \varepsilon)$$

$$\cos i' = a'' \cos (A'' + \varepsilon)$$

$$\omega' = \omega + \sigma.$$

Die Rechnung gestaltet sich nun wie folgt:

$\sin i$	9,951 057 2	b''	9,997 294 4
$\sin B''$	9,953 762 8	$\sin (B'' + \varepsilon)$	9,999 580 3
\cos			
$\cos i \cos \Omega$	9,638 704 4	$\sin i \sin \Omega'$	9,345 002 8
		$\sin \Omega'$	9,989 043 8
$\cos \Omega$	9,986 249 3	\cos	
		$a'' \sin (A'' + \varepsilon)$	9,988 049 2
$\sin i \cos \Omega$	9,937 306 5	$\sin \Omega \sin \varepsilon$	8,993 834 7
$\sin A''$	9,948 211 4	$\sin \sigma$	9,997 869 2
\cos		\cos	
$\cos i$	9,652 455 1	$b'' \sin (B'' + \varepsilon)$	9,996 874 7
A''	62° 34' 18'',12	$\sin i'$	9,999 005 5
ε	23° 27' 12'',79	$\cos i'$	8,829 933 6
B''	64° 1' 40'',00		
$A'' + \varepsilon$	86° 1' 30'',91	σ	5° 40' 15'',67
$B'' + \varepsilon$	87° 28' 52'',79	ω	85° 42' 50'',90
$\sin i$	9,951 057 2	Ω'	12° 48' 57'',07
$\sin \Omega$	9,393 945 6	ω'	91° 23' 6'',57
$\sin \varepsilon$	9,599 889 1		
$\sin (A'' + \varepsilon)$	9,998 954 1	i'	86° 7' 26'',28
a''	9,989 095 1		
$\cos (A'' + \varepsilon)$	8,840 838 5		

Man hat also jetzt das folgende, auf den mittleren Aequator 1890,0 bezogene Elementensystem:

$$i' = 86^\circ 7' 26'',28$$

$$\Omega' = 12^\circ 48' 57'',07$$

$$\omega' = 91^\circ 23' 6'',57$$

$$l_g q = 9,883 408 6$$

$$T = \text{Juli } 8,601 36$$

und als Hilfsgrößen:

$$\lg q^{\frac{3}{2}} = 0,174\,887\,1$$

$$\varepsilon = 23^{\circ}\,27'\,12'',79.$$

Um diese äquatorialen Elemente zu controliren, berechnen wir aus ihnen von Neuem die Gauss'schen Constanten.

Vorübergehend setzen wir wieder:

$$\begin{aligned} a \sin A''' &= \cos \delta' \\ a \cos A''' &= -\sin \delta' \cos i' \\ b \sin B''' &= \sin \delta' \\ b \cos B''' &= \cos \delta' \cos i' \\ c &= \sin i' \\ A' &= A''' + \omega' \\ B' &= B''' + \omega' \\ C' &= \omega' \end{aligned}$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} x &= r a \sin (A' + v) \\ y &= r b \sin (B' + v) \\ z &= r c \sin (C' + v) \end{aligned}$$

Die Rechnung gestaltet sich wie folgt:

$\sin \delta'$	9,345 997 4	$\lg A'''$	1,813 112 9 _n
$\sin B'''$	9,981 625 7	$\lg B'''$	0,527 020 1
$\cos \delta' \cos i'$	8,818 977 3	A'''	90° 52' 51'',60
$\cos i'$	8,829 933 5	B'''	73° 27' 1'',92
$\cos \delta'$	9,989 043 8	$A' = A''' + \omega'$	182° 15' 58'',17
$\sin A'''$	9,999 948 7	$B' = B''' + \omega'$	164° 50' 8'',49
$\cos A'''$		$C' = \omega'$	91° 23' 6'',57
$-\sin \delta' \cos i'$	8,175 930 9 _n	a	9,989 095 1
		b	9,364 371 7
		$c = \sin i'$	9,999 005 5

Die hier gefundenen Werthe der Gauss'schen Constanten stimmen vorzüglich mit den obigen überein. Wir wollen nun die Differentialquotienten von Rectascension und Declination nach den Elementen für die Epoche des zweiten Normalortes, Juli 23,0, berechnen.

Zunächst wollen wir die Berechnung des Ortes des Kometen für diese Epoche wiedergeben, weil hierbei gleichzeitig alle für das Folgende nöthigen Hilfsgrößen erhalten werden.

$t = \text{Epoche}$	Juli 23,0	x	— 0,409 539 1
$t - T$	14,398 64	X	— 0,515 426 7
$\log (t - T)$	1,158 321 5		
$\log M$	1,293 336 3	y	— 0,044 316 4
		Y	+ 0,802 973 3
v	+ 28° 45' 29'',54	z	+ 0,703 008 4
$\frac{v}{2}$	14° 22' 44'',77	Z	+ 0,348 371 2
$\cos \frac{v}{2}$	9,986 177 5	$\xi = x + X$	— 0,924 965 8
$\cos \frac{v^2}{2}$	9,972 355 0	$\eta = y + Y$	+ 0,758 656 9
$\sec \frac{v^2}{2}$	0,027 645 0	$\zeta = z + Z$	+ 1,051 379 6
$\log r$	9,911 053 6	$\log \eta$	9,880 045 4
$A' + v$	211° 1' 27'',71	$\sin \alpha$	9,888 287 3 _n
$B' + v$	193° 35' 38'',06	$\cos \alpha$	9,966 125 7 _n
$C' + v$	120° 8' 36'',11	$\log \xi$	
$\sin (A' + v)$	9,712 146 6 _n	α	140° 38' 29'',04
ar	9,900 148 7	$\log \zeta$	0,021 759 6
$\sin (B' + v)$	9,371 139 4 _n	$\sin \delta$	9,875 719 1
br	9,275 425 3	$\cos \delta$	0,077 838 4
$\sin (C' + v)$	9,936 901 4	$\varrho \cos \delta$	
cr	9,910 059 1	δ	+ 41° 18' 39'',76
$\log x$	9,612 295 3 _n	$\log \varrho$	0,202 119 3
$\log y$	8,646 564 7 _n		
$\log z$	9,846 960 5		

Die hier gefundenen Grössen α und δ wurden in der 100. Vorlesung benutzt, um den zweiten Normalort zu bilden, und es waren an dieselben nach den Beobachtungen noch die Correctionen:

$$\Delta \alpha = - 1'',71 \quad \Delta \delta = + 6'',79$$

anzubringen, um den folgenden Normalort zu erhalten:

$$\begin{aligned} \text{Juli 23,0 : } \alpha &= 140^\circ 38' 27'',33 \\ \delta &= + 41^\circ 18' 46'',55. \end{aligned}$$

Diese Coordinaten beziehen sich auf das mittlere Aequinoctium des Jahresanfanges.

Bei Vergleichung der Ephemeride mit den Beobachtungen bildet man: beobachteter wahrer Ort minus berechneter wahrer Ort. Bei Bildung der Normalorte hingegen setzt man voraus, dass diese Differenz gleich ist: beobachteter mittlerer Ort minus berechneter mittlerer Ort.

Man fügt sie also zu dem berechneten mittleren Ort hinzu und erhält so den Normalort, bezogen auf das Aequinoctium des Jahresanfanges.

Die Berechnung der Differentialquotienten kann wohl ausnahmslos fünfstellig durchgeführt werden. Man erhält:

v	$+ 28^{\circ} 45',49$	$\frac{dr}{dq} = g_q \cos G_q = \cos v$	9,94283
$\frac{v}{2}$	$+ 14^{\circ} 22',75$	$\frac{\cos G_q}{\sin G_q}$	9,88380
$\sin \frac{v}{2}$	9,39504	$r \frac{dv}{dq} = g_q \sin G_q$	9,86775 _n
$\cos \frac{v}{2}$	9,98618	$tg G_q$	9,92492 _n
$-\frac{3}{\sqrt{2}} k$	8,56218 _n	G_q	$- 40^{\circ} 4',31$
$\log(t - T')$	1,15832	g_q	0,05903
$\cos \frac{v^4}{2}$	9,94472	$\frac{dr}{de} = g_e \cos G_e$	8,68771
$\log \text{Product}$	9,66522 _n	$\frac{\cos G_e}{\sin G_e}$	9,93906
$q^{\frac{v}{2}}$	9,70852	$g_e \sin G_e$	8,93246
$\frac{dv}{dq}$	9,95670 _n	$\frac{dv}{de} = \frac{g_e}{r} \sin G_e$	9,02141
r	9,91105	$\log r$	9,91105
$\tau = tg \frac{v}{2}$	9,40887	$tg G_e$	0,24475
τ^2	8,81774	G_e	$60^{\circ} 21',14$
τ^4	7,63548	$\log g_e$	8,99340
$\frac{\tau^4}{5}$	6,93651	$\log k$	8,23558
numeri: $2 + \tau^2$	2,06573	$\log \sqrt{p}$	0,09222
$+ \frac{1}{5} \tau^4$	0,00086	$- k \sqrt{p}$	8,32780 _n
Σ_1	2,06659	r^2	9,82210
$1 - \tau^2$	0,93427	$-\frac{ke}{\sqrt{p}}$	8,14336 _n
$-\frac{4}{5} \tau^4$	$- 346$	$\sin v$	9,68225
Σ_2	0,93081	$\frac{dr}{dT} = \left. \begin{array}{l} \frac{ek \sin v}{\sqrt{p}} \\ = g_T \cos G_T \end{array} \right\}$	7,82561 _n
Controle:		$\frac{\cos G_T}{\sin G_T}$	9,98618
$\Sigma_1 - \Sigma_2$	1,13578	$g_T \sin G_T$	8,41675 _n
$\frac{1}{v^4}$	1,13574	$\frac{dv}{dT} = \left. \begin{array}{l} -\frac{k \sqrt{p}}{r^2} \\ = \frac{g_T}{r} \sin G_T \end{array} \right\}$	8,50570 _n
$\cos \frac{v^4}{2}$		G_T	$255^{\circ} 37',26$
$\log \frac{q}{2}$	9,58238	g_T	8,43057
$\sin \frac{v^2}{2}$	8,79008		
$\log \Sigma_1$	0,31525		
$\sin v$	9,68225		
$\cos \frac{1}{2} v^2$	9,97236		
$\log \frac{1}{4}$	9,39794		
$\log \Sigma_2$	9,96886		

Man hat jetzt also:

G_T	255° 37',26
G_q	— 40° 4',31
G_e	60° 21',14
g_T	8,43057
g_q	0,05903
g_e	8,99340

Die weitere Rechnung gestaltet sich nun wie folgt:

δ	+ 41° 18',66	Ψ	34° 46',07
$\alpha - \delta$	127° 49',53	M	93° 0',25
$\psi \cos \Psi = \cos \delta$	9,87572	N	240° 27',20
$\cos \Psi$	9,91459	Φ	175° 1',44
$\sin \Psi$	9,71720	ψ	9,96113
$\psi \sin \Psi$	9,81964	m	9,89816
$\sin \delta$	9,81964	n	9,91432
$m \cos M$	8,61757 _n	φ	9,78928
$\cos M$	9,99940	v	28° 45',49
$\sin M$	9,89756	ω	91° 23',11
$\sin (\alpha - \delta)$	9,89756	u	120° 8',60
$\cos i$	8,82993	$u - M$	27° 8',35
$\cos (\alpha - \delta)$	9,78764 _n	$u - N$	239° 41',40
$\sin \delta$	9,81964	$u - \Phi$	— 54° 52',84
$\sin \delta \cos (\alpha - \delta) = n \cos N$	9,60728 _n	$u - M + G_T$	282° 45',61
$\cos N$	9,93949	$u - N + G_T$	135° 18',66
$\sin N$	9,85381 _n	$u - M + G_q$	— 12° 55',96
$n \sin N = \psi \sin (\Psi - i)$	9,85381 _n	$u - N + G_q$	199° 37',09
Ψ	34° 46',07	$u - M + G_e$	87° 29',49
i	86° 7',44	$u - N + G_e$	300° 2',54
$\Psi - i$	— 51° 21',37	φ	9,78928
$\sin (\Psi - i)$	9,89268 _n	$\cos (u - \Phi)$	9,75988
ψ	9,96113	m	9,89816
$\cos (\Psi - i)$	9,79552	$\sin \delta$	9,81964
$\varphi \cos \Phi$	9,78764 _n	$\sin (u - M)$	9,65911
$\cos \Phi$	9,99836	$— \sin i$	9,99901 _n
$\sin \Phi$	8,72749	$\sin u$	9,93690
$\varphi \sin \Phi$	8,72749	$\cos (\alpha - \delta)$	9,78764 _n
$tg \Psi$	9,84148	ψ	9,96113
$tg M$	1,27999 _n	$\sin u$	9,93690
$tg N$	0,24653	$\cos (\Psi - i)$	9,79552
$tg \Phi$	8,93985 _n		

$\cos (u - M)$	$\begin{matrix} m \\ 9,89816 \\ 9,94934 \end{matrix}$	$\frac{d \alpha \cos \delta}{d \delta}$	9,25809
$\sin (u - N)$	$\begin{matrix} u \\ 9,91432 \\ 9,93617_n \end{matrix}$	$\frac{d \delta}{d \delta}$	9,08584
$\sin (u - M + G_T)$	$\begin{matrix} G_T \\ 9,98914_n \\ 8,43057 \end{matrix}$	$\frac{d \alpha \cos \delta}{d i}$	9,43248
$\cos (u - N + G_T)$	$\begin{matrix} G_T \\ 9,85183_n \end{matrix}$	$\frac{d \delta}{d i}$	9,40248
$\sin (u - M + G_q)$	$\begin{matrix} G_q \\ 9,34987_n \\ 0,05903 \end{matrix}$	$\frac{d \alpha \cos \delta}{d \omega}$	9,55643
$\cos (u - N + G_q)$	$\begin{matrix} G_q \\ 9,97403_n \end{matrix}$	$\frac{d \delta}{d \omega}$	9,55942 _n
$\sin (u - M + G_e)$	$\begin{matrix} G_e \\ 9,99958 \\ 8,99340 \end{matrix}$	m	9,89816
$\cos (u - N + G_e)$	$\begin{matrix} G_e \\ 9,69952 \end{matrix}$	q	0,20212
r	9,91105	$- n$	9,91432 _n
q	0,20212	$\frac{m}{q}$	9,69604
$\frac{r}{q}$	9,70893	$-\frac{n}{q}$	9,71220 _n

Schliesslich ergibt sich für die Differentialquotienten nach den phoronomischen Elementen:

	in Linearmaass	in Bogenmaass
$\frac{d \alpha \cos \delta}{d T}$	8,11575 _n	3,43018 _n
$\frac{d \alpha \cos \delta}{d q}$	9,10494 _n	4,41937 _n
$\frac{d \alpha \cos \delta}{d e}$	8,68902	4,00345
$\frac{d \delta}{d T}$	7,99460	3,30903
$\frac{d \delta}{d q}$	9,74526	5,05969
$\frac{d \delta}{d e}$	8,40512 _n	3,71955 _n

Die ersten sechs der so erhaltenen Differentialquotienten:

$$\frac{d \alpha \cos \delta}{d \delta} \quad \dots \quad \frac{d \delta}{d \omega}$$

haben die für die praktische Anwendung wünschenswerthe Form. In der That, ist $d \omega$ in Bogensekunden gegeben, so erhält man auch $d \delta$ in Bogensekunden, weil $\frac{d \delta}{d \omega}$, so wie wir es berechnet haben, eine Zahl ist.

Anders verhält es sich mit den letzten sechs Differentialquotienten:

$$\frac{d\alpha \cos \delta}{dT} \dots \frac{d\delta}{de}.$$

Diese Grössen müssen augenscheinlich noch mit 206264,8 multiplicirt werden, damit sie z. B. bei einem gegebenen Werthe von de die Grösse $d\delta$ in Bogensecunden ergeben.

Nach dieser verhältnissmässig kurzen Rechnung haben wir also jetzt die Werthe der 12 Differentialquotienten erlangt. Dieselben bilden die Grundlage für alle weiteren Rechnungen und müssen daher auf das Sorgfältigste geprüft werden. Zu diesem Zwecke bildet man meist für die Epochen der Normalorte die α und δ mit zwei Elementensystemen, welche sich von dem Ausgangselementensysteme nur wenig unterscheiden, und muss alsdann haben:

$$\begin{aligned} d\alpha \cos \delta = & \frac{d\alpha \cos \delta}{dT} dT + \frac{d\alpha \cos \delta}{dq} \cdot dq + \frac{d\alpha \cos \delta}{de} de \\ & + \frac{d\alpha \cos \delta}{di} di + \frac{d\alpha \cos \delta}{d\Omega} d\Omega + \frac{d\alpha \cos \delta}{d\omega} d\omega, \end{aligned}$$

analog für $d\delta$.

Man kennt nun z. B. $d\alpha$ als Differenz zwischen dem α des neuen Elementensystemes und dem des ursprünglichen. Andererseits kennt man die entsprechenden Zuwächse der Elemente, z. B. $d\Omega$, und kann somit durch Bildung von $d\alpha \cos \delta$ und $d\delta$ durch directe Rechnung sowohl, wie mittelst der Differentialquotienten diese letzteren einigermaassen controliren.

Um die eventuell zu suchenden Fehler besser zu localisiren, kann man die Vergleichselementensysteme so wählen, dass in dem einen nur die Bahnelemente der Lage, in dem anderen die phoronomischen Elemente von denjenigen des Ausgangselementensystemes verschieden sind. Trotzdem aber dürfte diese Controle nicht vollständig genügen, da sich hierbei Fehler in verschiedenen Differentialquotienten gegenseitig verdecken können. Wir wollen daher im Folgenden Verfahren geben, mit Hülfe deren man, ohne zu beträchtliche Arbeit, jeden einzelnen der obigen Differentialquotienten prüfen kann. Hierbei wird der Vortheil, der in der Anwendung äquatorialer Bahnelemente besteht, bald hervortreten. Wir beginnen mit der Prüfung der Differentialquotienten nach ω und setzen:

$$d\omega = + 2' = + 120''.$$

Auf Grund obiger Differentialformeln ergibt sich:

$$d\alpha = + 57'',53 \qquad d\delta = - 43'',51.$$

Die ursprünglichen Werthe von α und δ waren:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 140^\circ 38' 29'',04 \\ \delta_0 &= + 41^\circ 18' 39'',76. \end{aligned}$$

In Folge dessen hat man für ein Elementensystem, in dem ω nun $2'$ grösser ist als in dem Ausgangselementensysteme, folgende Werthe zu erwarten:

$$\begin{aligned} \alpha &= 140^\circ 39' 26'',57 \\ \delta &= + 41^\circ 17' 56'',25. \end{aligned}$$

In der ursprünglichen Ephemeride (siehe Beginn dieser Vorlesung) kann man nun den Anfang ganz beibehalten; r und v haben offenbar dieselben Werthe, desgleichen ar , br und cr . Nur hat man $A' + v$, $B' + v$ und $C' + v$ um $2'$ zu vermehren.

Die Rechnung gestaltet sich dann wie folgt:

$A' + v$	211° 3' 27'',71	z	+ 0,702 770 8
$B' + v$	193° 37' 38'',06	Z	+ 0,348 371 2
$C' + v$	120° 10' 36'',11		
$\sin (A' + v)$	9,712 566 4 _n	$\xi = x + X$	— 0,925 361 8
$a r$	9,900 148 7	$\eta = y + Y$	+ 0,758 550 3
		$\xi = z + Z$	+ 1,051 142 0
$\sin (B' + v)$	9,372 183 0 _n	$\log \eta$	9,879 984 4
$b r$	9,275 425 3	$\sin \alpha$	9,888 386 6
$\sin (C' + v)$	9,936 754 6	$\cos \alpha$	9,966 311 5 _n
$c r$	9,910 059 1	$\log \xi$	
$\log x$	9,612 715 1 _n	$tg \alpha$	9,913 672 9 _n
$\log y$	8,647 608 3 _n	α	140° 39' 26'',51
$\log z$	9,846 813 7	$\log \xi$	0,021 661 4
		$\log \varrho \cos \delta$	0,077 924 9
x	— 0,409 935 1	$tg \delta$	9,943 736 5
X	— 0,515 426 7	δ	+ 41° 17' 56'',26
y	— 0,044 423 0		
Y	+ 0,802 973 3		

Die so durch directe Rechnung gefundenen Werthe von α und δ stimmen in genügender Weise mit den oben gefundenen überein. Man kann natürlich keine allgemeine Regel angeben, welche Zuwächse man den einzelnen Bahnelementen zuzuertheilen hat. Sind dieselben zu gross gewählt, so können sich Glieder höherer Ordnung fühlbar machen, und dann stimmt die Controle nicht mehr. Wählt man andererseits die Zuwächse zu klein, so sind die Differentialquotienten nicht mehr genügend controlirt. Es dürfte im Allgemeinen vortheilhaft sein, sich so einzurichten, dass die Zuwächse von α und δ nicht wesentlich eine Bogenminute übersteigen.

Wir gehen nun zur Prüfung der Differentialquotienten nach Ω über und setzen hierzu:

$$d\Omega = + 10' = + 600''.$$

Aus den Differentialformeln folgt dann:

$$d\alpha = + 2' 24'',72$$

$$d\delta = + 1' 13'',11$$

und mithin:

$$\alpha = 140^\circ 40' 53'',76$$

$$\delta = + 41^\circ 19' 52'',87.$$

Der Zuwachs von $d\Omega$ ist also etwas gross gewählt, wie auch aus den entsprechenden $d\alpha$ und $d\delta$ hervorgeht. Wir können daher von vornherein erwarten, dass hier die Uebereinstimmung zwischen den beiden Rechnungen eine weniger befriedigende sein wird. Die Verification der Differentialquotienten nach Ω und i könnte auf Grund der Neubestimmung der Gauss'schen Constanten für die betreffenden neuen Werthe von i und Ω stattfinden. Man kann aber einfacher wie folgt verfahren:

Werde vorübergehend die Projection des heliocentrischen Radius vectors auf den Aequator mit r , die heliocentrische Rectascension mit R bezeichnet. Dann sind die heliocentrischen Coordinaten x und y gleich:

$$x = r \cos R$$

$$y = r \sin R.$$

Wenn nun die Rectascension des Knotens Ω wächst, so dreht sich Alles um die z -Axe, oder mit anderen Worten, man kann an Stelle von Ω auch R um $d\Omega$ wachsen lassen. Man erhält also:

$$\begin{aligned} dx &= -r \sin R \, d\Omega = -y \, d\Omega \\ dy &= +r \cos R \, d\Omega = +x \, d\Omega. \end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Formeln ist es leicht, die an x und y anzubringenden Correctionen zu berechnen und aus den verbesserten x und y von Neuem α und δ zu berechnen. Im vorliegenden Falle gestaltet sich die Rechnung wie folgt:

$d\Omega$	600"	y	— 0,045 507 7
$\log d\Omega$	2,77815	Y	+ 0,802 973 3
$\log 206\,264,8$	5,31443		
$\log d\Omega^1)$	7,46372	ξ	— 0,924 836 9
		η	+ 0,757 465 6
— y	8,64656	$\log \eta$	9,879 362 9
$d\Omega$	7,46372	$\sin \alpha$	9,888 537 3
+ x	9,61230 _n	$\cos \alpha$	
		$\log \xi$	9,966 065 1 _n
$\log dx$	6,11028	$\log \alpha$	9,913 297 8 _n
$\log dy$	7,07602 _n	α	140° 40' 53",85
dx	+ 0,000 128 9	$\log \xi$	0,021 759 6
x_0	— 0,409 539 1	$\rho \cos \delta$	0,077 527 8
dy	— 0,001 191 3		
y_0	— 0,044 316 4	$\log \delta$	9,944 231 8
		δ	+ 41° 19' 52",92
x	— 0,409 410 2		
X	— 0,515 426 7		

Die durch directe Rechnung gefundenen Werthe von α und δ stimmen in völlig genügender Weise mit den aus den Differentialquotienten geschlossenen überein, besonders wenn man die Grösse von $d\Omega$ in Betracht zieht.

In ebenfalls einfacher Weise kann man die Differentialquotienten nach i prüfen. Wir hatten:

$$\begin{aligned} x &= r \{ \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i \} \\ y &= r \{ \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i \} \\ z &= r \sin u \sin i. \end{aligned}$$

In Folge dessen ist:

$$\begin{aligned} dx &= + r \sin u \sin \Omega \sin i \, di \\ dy &= - r \sin u \cos \Omega \sin i \, di \\ dz &= + r \sin u \cos i \, di. \end{aligned}$$

Wir nehmen nun an, dass $di = + 3' = + 180''$ sei.

Die Differentialformeln ergeben alsdann:

$$\begin{aligned} d\alpha &= + 1' \, 4'',87 \\ d\delta &= + 45'',47 \end{aligned}$$

und mithin hat man zu erwarten:

¹⁾ In Linearmaass.

$$\alpha = 140^{\circ} 39' 33'',91$$

$$\delta = + 41^{\circ} 19' 25'',23$$

Die Rechnung gestaltet sich wie folgt:

r	9,91105	x	— 0,409 403 0
$\sin u$	9,93690	X	— 0,515 426 7
di in Linearmaass	6,94084	y	— 0,044 914 6
$di r \sin u$	6,78879	Y	+ 0,802 973 3
i	86° 7',44	z	+ 0,703 050 0
Ω	12° 48',95	Z	+ 0,348 371 2
$\sin \Omega$	9,34599	ξ	— 0,924 829 7
$\sin i$	9,99900	η	+ 0,758 058 7
— $\cos \Omega$	9,98904 _n	ζ	+ 1,051 421 2
$\sin \Omega \sin i$	9,34499	$\log \eta$	9,879 702 9
— $\cos \Omega \sin i$	9,98804 _n	$\sin \alpha$	9,888 399 4
$\cos i$	8,82993	$\cos \alpha$	9,966 061 8 _n
$\log dx$	6,13378	$\log \xi$	9,913 641 1 _n
$\log dy$	6,77683 _n	α	140° 39' 33'',91
$\log dz$	5,61872	$\log \zeta$	0,021 776 8
x_0	— 0,409 539 1	$\log \varrho \cos \delta$	0,077 662 4
dx	+ 136 1	$\log \delta$	9,944 114 4
y_0	— 0,044 316 4	δ	+ 41° 19' 25'',26
dy	— 598 2		
z_0	+ 0,703 008 4		
dz	+ 416		

Da auch diese Werthe mit den oben gefundenen genügend übereinstimmen, so sind hiermit die Differentialquotienten nach den Bahnelementen der Lage geprüft.

Wir gehen nun dazu über, die Differentialquotienten nach den phoronomischen Elementen zu prüfen und setzen dazu zunächst:

$$dT = + 0^d,02.$$

Dann ergibt sich:

$$d\alpha = - 1' 11'',69 \quad d\delta = + 40'',74$$

und man hat demnach zu erwarten:

$$\alpha = 140^{\circ} 37' 17'',35 \quad \delta = + 41^{\circ} 19' 20'',50.$$

Die Periheldurchgangszeit T um $0^d,02$ zu vermehren, kommt aber offenbar darauf hinaus, die Werthe von $(t - T)$ um $0^d,02$ zu vermindern. Man könnte also die helio-centrischen Coordinaten aus der Ephemeride selbst durch Interpolation für eine um $0^d,02$ frühere Epoche entnehmen.

Da sich aber in den x, y, z meistens Differenzreihen höherer Ordnung fühlbar machen, so ist es einfacher, die Rechnung mit dem veränderten Werthe von T noch einmal durchzuführen. So ergibt sich:

$t - T$	14,378 64	$\log x$	9,611 760 7 _n
$\log (t - T)$	1,157 717 8	$\log y$	8,645 340 6 _n
$\log M$	1,292 732 6	$\log z$	9,847 050 6
M	19,621 518	x	— 0,409 035 2
v	28° 43' 17'',34	X	— 0,515 426 7
$\frac{v}{2}$	14° 21' 38'',67	y	— 0,044 191 7
$\cos \frac{v}{2}$	9,986 213 2	Y	+ 0,802 973 3
$\cos \frac{v^2}{2}$	9,972 426 4	z	+ 0,703 154 2
$\log r$	9,910 982 2	Z	+ 0,348 371 2
$A' + v$	210° 59' 15'',51	ξ	— 0,924 461 9
$B' + v$	193° 33' 25'',86	η	+ 0,758 781 6
$C' + v$	120° 6' 23'',91	ξ	+ 1,051 525 4
$\sin (A' + v)$	9,711 683 4 _n	$\log \eta$	9,880 116 8
$a r$	9,900 077 3	$\sin \alpha$	9,888 163 4
$\sin (B' + v)$	9,369 986 7 _n	$\cos \alpha$	9,965 889 0 _n
$b r$	9,275 353 9	$\log \xi$	9,914 227 8 _n
$\sin (C' + v)$	9,937 062 9	α	140° 37' 17'',28
$c r$	9,909 987 7	$\log \xi$	0,021 819 8
		$\log \varrho \cos \delta$	0,077 725 6
		$\log \delta$	9,944 094 2
		δ	+ 41° 19' 20'',50

Es sollen nun die Differentialquotienten nach q geprüft werden. Wir setzen hierzu:

$$dq = + 0,0005 [6,69897].$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \delta \alpha &= - 17'',48 & d\delta &= + 57'',37 \\ \alpha &= 140^\circ 38' 11'',56 & \delta &= + 41^\circ 19' 37'',13. \end{aligned}$$

Nun war aber:

$$\log q_0 = 9,883 408 6.$$

Um aus $\log q_0$ und dq , jetzt $\log q$ zu berechnen, bilden wir:

$$d \log q_0 = 0,43429 \frac{dq}{q_0} = [9,63778] \frac{dq}{q_0}.$$

Die Zahl 0,43429 ist, wie man weiss, der Modul der Brigg'schen Logarithmen. Es folgt so:

dq	6,69897	$\log d \log q_0$	6,45334
q_0	9,88341	$d \log q_0$	+ 0,000 284 0
$\frac{dq}{q_0}$	6,81556	$\log q_0$	9,883 408 6
$\log \text{Mod.}$	9,63778	$\log q$	9,883 692 6

$\frac{v}{2}$	14° 23' 17",28
$\tau = tg \frac{v}{2}$	9,409 147 6
τ^2	8,818 295 2
ε	7,175 440 4 _n
$log \varepsilon \tau^2$	5,993 735 6 _n
$\varepsilon \tau^2$	— 0,000 098 568

Mit diesem Werthe entnimmt man nun aus Tafel IX die Grössen:

$$log D = 9,960 110 6 \quad log C = 9,999 988 6.$$

Nach Vorlesung (7) ist:

$$M = \frac{D (t - T)}{q^{3/2} \sqrt{1 + \varepsilon}}$$

zu setzen. Es wird also:

$log D$	9,960 110 6	$log M$	1,293 644 6
$log (t - T)$	1,158 321 5	M	19,662 765
$q^{3/2}$	9,825 112 9	w	28° 46' 37",11
$\sqrt{1 + \varepsilon}$	9,999 674 6	$1/2 w$	14° 23' 18",56
$D (t - T)$	1,118 432 1	$tg 1/2 w$	9,409 158 8
$q^{3/2} \sqrt{1 + \varepsilon}$	9,824 787 5	C	9,999 988 6
		$tg 1/2 v$	9,409 147 4
		$1/2 v$	14° 23' 17",25
		v	28° 46' 34",50

Dieser Werth stimmt in genügender Weise mit dem oben gefundenen überein und wir setzen mit ihm die Rechnung fort.

Die jetzt zu betrachtende Bahn ist nicht mehr parabolisch. Es wird:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} = \frac{q (1 + e)}{1 + e \cos v}.$$

$1 + e$	2,003 000 0	$\sin (A' + v)$	9,712 373 8 _n
$log (1 + e)$	0,301 680 9	$a r$	9,900 226 4
$log q$	9,883 408 6	$\sin (B' + v)$	9,371 704 6 _n
$loge$	0,001 300 9	$b r$	9,275 503 0
$log \cos v$	9,942 755 0	$\sin (C' + v)$	9,936 822 0
$log e \cos v$	9,944 055 9	$e r$	9,910 136 8
$log q (1 + e)$	0,185 089 5	$log x$	9,612 600 2 _n
$log (1 + e \cos v)$	0,273 958 2	$log y$	8,647 207 6 _n
$log r$	9,911 131 3	$log z$	9,846 958 8
$A' + v$	211° 2' 32",67	x	— 0,409 826 7
$B' + v$	193° 36' 43",02	X	— 0,515 426 7
$C' + v$	120° 9' 41",07	y	— 0,044 382 1
		Y	+ 0,802 973 3

z	$+ 0,703\ 005\ 6$	$tg\ \alpha$	$9,913\ 747\ 1_n$
Z	$+ 0,348\ 371\ 2$	α	$140^\circ\ 39'\ 9'',23$
ξ	$- 0,925\ 253\ 4$	$log\ \xi$	$0,021\ 758\ 4$
η	$+ 0,758\ 591\ 2$	$\rho\ cos\ \delta$	$0,077\ 903\ 9$
ξ	$+ 1,051\ 376\ 8$	$tg\ \delta$	$9,943\ 854\ 5$
$log\ \eta$	$9,880\ 007\ 8$	δ	$41^\circ\ 18'\ 24'',05$
$\sin\ \alpha$	$9,888\ 356\ 8$		
$\cos\ \alpha$			
$log\ \xi$	$9,966\ 260\ 7_n$		

Diese Werthe stimmen genügend mit den aus den Differentialquotienten gefundenen überein.

Sollten sich bei Verification desselben Differentialquotienten (z. B. $\frac{d\delta}{dc}$) für eine grössere Zahl von Normalorten Glieder höherer Ordnung fühlbar machen, weil man das Increment (dc) zu gross gewählt hat, so genügt es eventuell, sich von der Regelmässigkeit des Ganges der Differenz:

$$\delta_{\text{Direct}} - \delta_{\text{Differentiell}}$$

von einem Normalorte zum anderen zu überzeugen. Man kann dann der Sicherheit halber noch für einen der Normalorte nachsehen, ob diese Differenz bei Verminderung des Incrementes schnell abnimmt. Die hier vorgeschlagene Methode zur Prüfung jedes einzelnen Differentialquotienten ist zweifellos etwas zeitraubend. Indessen lässt sich die Rechnung, wenn es sich um Controlirung desselben Differentialquotienten für mehrere Normalorte handelt, gewissermaassen ephemeridenartig anordnen.

Andererseits erfordert die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate einen so grossen Arbeitsaufwand, dass es sich wohl der Mühe lohnt, ihre Grundlagen auf das Sorgfältigste zu prüfen.

Wir sahen in der 100. Vorlesung, dass für den hier behandelten Normalort im Sinne Beobachtung minus Rechnung:

$$d\alpha\ cos\ \delta = - 1'',29$$

$$d\delta = + 6'',79$$

ist.

Er ergibt also folgende Bedingungsgleichungen in äquatorialen Elementen:

$$\begin{aligned} - 1'',29 &= [9,25809] d\varpi + [9,55643] d\omega + [9,43248] di \\ &\quad + [3,43018_n] dT + [4,41937_n] dq + [4,00345] de \\ + 6'',79 &= [9,08584] d\varpi + [9,55942_n] d\omega + [9,40248] di \\ &\quad + [3,30903] dT + [5,05969] dq + [3,71955_n] de. \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen sind $d\varpi$, $d\omega$ und di in Bogensecunden, dT in mittleren Sonnentagen, und dq in Erdbahnraden auszudrücken.

Bevor wir zeigen, wie man derartige Systeme von Bedingungsgleichungen weiter behandelt, soll zunächst Einiges über die theoretischen Grundlagen der Methode der kleinsten Quadrate vorausgeschickt werden.

Hundertundvierte Vorlesung.

Entwicklung der Grundvoraussetzungen für die Methode der kleinsten Quadrate.

Um die Fehler der Beobachtungen möglichst unschädlich zu machen, ist es nothwendig, zwei Arten von Fehlern streng zu unterscheiden, nämlich diejenigen, welche unter ganz gleichen Bedingungen der Beobachtung in gleicher Grösse und in demselben Sinne wiederkehren werden, die sich daher, wenn man einmal ihren Ursprung kennt, für jeden einzelnen Fall vorausberechnen lassen, und zweitens diejenigen Fehler, welche unter ganz gleichen Umständen in verschiedener Grösse und ebenso oft in dem einen wie in dem anderen Sinne begangen werden. Die erstere Art nennt man die gesetzmässigen Fehler (was in speciellen Fällen gleichbedeutend sein kann mit constanten Fehlern), die zweite Art die zufälligen, auch wohl unvermeidlichen Beobachtungsfehler. Um Beispiele gesetzmässiger Fehler zu haben, denke man an Messungen, mit einem metallenen Maassstabe ohne Rücksicht auf die Temperatur ausgeführt, oder auch Bestimmungen von Längenunterschieden, bei denen die Verschiedenheit der Beobachter in der Auffassung der Uhrschläge (die sogenannte persönliche Gleichung) nicht eliminirt ist, oder auch an den Gebrauch von nicht kalibrierten Thermometern und Barometern. Hier würden offenbar die begangenen Fehler unter ganz gleichen Umständen in derselben Grösse wieder begangen werden, soweit nicht die dabei ausserdem begangenen zufälligen Fehler dieses Verhalten stören. Es ist nun eine Grundvoraussetzung der unter der Benennung „Methode der kleinsten Quadrate“ zum Unschädlichmachen der Fehler und Bestimmen der wahrscheinlichsten Werthe begriffenen Vorschriften, dass die Fehler ebenso oft das positive als das negative Vorzeichen haben, und dies auch noch, wenn man sie ihrer absoluten Grösse nach in Gruppen theilt; demnach wird vorausgesetzt, dass die Beobachtungen, welche man jenen Vorschriften unterwirft, von den gesetzmässigen Fehlern schon befreit seien. Ob die Beobachtungen dieser Anforderung wirklich genügen, ist, wenn auch meistens nicht a priori, doch immer a posteriori zu erkennen, da man die Fehler, welche nach dem Resultate der Rechnung begangen sein sollen, nach dem eben genannten Kriterium in Betreff ihrer reinen Zufälligkeit prüfen kann. Auf diesem Wege kann man auch die Grösse der begangenen gesetzmässigen Fehler, und wenn die Beobachtungen mit hinreichender Mannigfaltigkeit vorhanden sind, die Gesetze, nach denen sie sich richten, kennen lernen und etwaige noch unbekannte Fehlerquellen entdecken.

Nehmen wir demnach an, dass wir aus einer grossen Zahl von Beobachtungen von gleicher Zuverlässigkeit, die nur durch die unvermeidlichen zufälligen Fehler etwas von der Wahrheit abweichen, ein System von Unbekannten, deren Zahl aber weit hinter der Anzahl der angestellten Beobachtungen zurückbleibt, bestimmen sollen, mit der Anforderung zugleich, dass die nach der Substitution der zu findenden Werthe in der Darstellung der Beobachtungen übrig bleibenden Fehler und das ganze System Wahrscheinlichkeit für sich haben sollen, so muss vor allen Dingen nach dem Vorhergehenden das arithmetische Mittel aller Fehler sich auf Null reduciren. Jede wahrscheinliche Lösung muss diese Bedingung erfüllen, aber offenbar ist nicht jede Lösung, welche das thut, wahrscheinlich, weil ja auch sehr grosse Fehler mit verschiedenem Vorzeichen die Summe Null bilden könnten. Man hat deshalb noch einen besonderen Grundsatz nöthig, um

unter den unzähligen wahrscheinlichen Lösungen die wahrscheinlichste bezeichnen zu können. Man hat festgestellt, dass als das wahrscheinlichste System von Unbekannten, welche aus einer grossen Zahl von Beobachtungen gleicher Güte zu ermitteln sind, dasjenige zu gelten hat, bei welchem die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler so klein als möglich wird.

Die Frage nach der Berechtigung zur Aufstellung dieses Satzes ist eine überflüssige, da er auf eine Definition des Begriffes „Wahrscheinlichstes System“ hinausläuft, die, wie jede Definition, willkürlich ist; man hätte z. B. auch die vierte Potenz der Fehlerquadrate anstatt der zweiten wählen können. Wir werden indessen sehen, dass die Erfahrung die unter Anwendung des obigen Grundsatzes gewonnenen Resultate in allen Theilen bestätigt und dass die auf diesem Wege zu findenden wahrscheinlichen Fehler ihrer Grösse nach mit denen, welche eine mehr unmittelbare Untersuchung ergibt, durchaus übereinstimmen. In der folgenden Vorlesung wird sich, wenn wir die einfachsten Folgerungen des obigen Princips machen, die Harmonie zwischen dieser Theorie und der Erfahrung deutlicher nachweisen lassen.

Hundertundfünfte Vorlesung.

Einfachste Folgerung aus dem Grundsatz der Methode der kleinsten Quadrate. Gesetz der Beobachtungsfehler.

Betrachten wir uns den besonderen Fall, dass das zu suchende System von Unbekannten x, y, z etc. sich auf eine einzige Unbekannte x reducirt, für welche letztere man durch eine Reihe von Messungen die folgenden mit den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern behafteten Bestimmungen:

$$\begin{aligned} x &= n, \\ x &= n', \\ x &= n'', \\ x &= n''' \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

erhalten hat; es wird dabei noch vorausgesetzt, dass alle diese Messungen das gleiche Vertrauen verdienen. Nach dem Grundsatz der Methode der kleinsten Quadrate wird nun derjenige Werth von x der wahrscheinlichste sein, welcher die Summe der Fehlerquadrate:

$$(x - n)^2 + (x - n')^2 + (x - n'')^2 + (x - n''')^2 + \dots$$

zu einem Minimum macht. Nach den bekannten Regeln aus der Lehre der Maxima und Minima muss also das Differential dieser Summe nach x genommen und der Null gleich gesetzt werden; man erhält:

$$(x - n) + (x - n') + (x - n'') + (x - n''') + \dots = 0,$$

oder, wenn die Anzahl der Beobachtungen mit p bezeichnet wird:

$$x = \frac{n + n' + n'' + n''' + \dots}{p},$$

d. h. also das arithmetische Mittel aus den einzelnen Bestimmungen als wahrschein-

sten Werth von x . Dasselbe lehrt aber auch für diesen gewöhnlichsten aller Fälle die tägliche Erfahrung.

Wir können das eben erhaltene Resultat sogleich noch zu weiteren wichtigen Folgerungen benutzen. Die unvermeidlichen Fehler fallen sämtlich innerhalb zweier zu beiden Seiten von der Null gleich weit abliegenden, für die angewandten Hilfsmittel nicht mehr oder eben noch zu unterscheidenden Grenzen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler ausserhalb der Grenzen fällt, wird daher gleich Null, die, dass er innerhalb fällt, gleich der Gewissheit, d. h. gleich 1 gesetzt werden müssen. Ueberhaupt werden die grösseren Fehler seltener vorkommen als die kleinen; es wird sich daher eine Formel dafür finden lassen, welchen Theil von der Gesamtheit aller begangenen Fehler die zwischen zwei Grenzen $-\xi$ und $+\xi$ enthaltenen ausmachen oder, was auf dasselbe hinauskommt, ein Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dass ein begangener Fehler zwischen 0 und ξ liege, während die Wahrscheinlichkeit, dass überhaupt ein Fehler begangen sei, gleich 1 zu setzen ist. Der Einfachheit halber können wir dabei die Einheit, in welcher die ξ auszudrücken sind, so wählen, dass der grösste Fehler, der überhaupt begangen werden kann, ebenfalls gleich 1 wird, demnach ξ ein echter Bruch bleibt. Dies vorausgeschickt, ist klar, dass die Anzahl der zwischen 0 und ξ der Wahrscheinlichkeit nach vorkommenden Fehler durch dasjenige Segment einer Curve repräsentirt werden kann, welches den Abschnitt der Abscissen von 0 bis ξ zur Basis hat. Werden mit x die laufenden Abscissen, mit y oder $f(x)$ die Ordinaten der gesuchten Curve bezeichnet, so wird ferner die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen ξ und ξ' begangen sei, durch das bestimmte Integral:

$$\int_{\xi}^{\xi'} y dx \quad \text{oder} \quad \int_{\xi}^{\xi'} f(x) dx$$

vorgestellt. Lässt man in diesem Integrale die Grenzen einander unendlich nahe rücken, so erhält man die Wahrscheinlichkeit, dass gerade der Fehler ξ oder ξ' begangen ist. Diese ihrer Natur nach unendlich geringe Wahrscheinlichkeit wird hiernach ausgedrückt durch:

$$f(\xi) dx.$$

Ausserdem bemerken wir noch gleich, dass nach den obigen Vereinbarungen:

$$\int_{-1}^1 y dx = 1$$

werden muss; da jedoch für Werthe von x zwischen $-\infty$ und -1 , sowie zwischen $+1$ und $+\infty$ keine Fehler mehr begangen werden sollen, so wird für diese Abschnitte y überall gleich der Null werden; es wird also:

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

gesetzt werden dürfen.

Es seien nun ferner bei einer Reihe von Messungen oder Beobachtungen die Fehler ξ, ξ', ξ'', ξ''' u. s. w. begangen; die Function $y = f(x)$ können wir jetzt so bestimmen, dass ein anderer, aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung entnommener Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dass gerade diese Fehler vorgekommen seien, zu einem Maximum wird. Es ist nämlich die Wahrscheinlichkeit, dass unter allen möglichen Fehlern sich gerade die begangenen ξ, ξ', ξ'', ξ''' u. s. w. vereinigt finden, nach einem bekannten Satze und nach den obigen Bemerkungen gleich:

$$f(\xi) \cdot f(\xi') \cdot f(\xi'') \cdot f(\xi''') \dots dx \cdot dx \cdot dx \cdot dx \dots,$$

demnach soll das Product:

$$f(\xi) \cdot f(\xi') \cdot f(\xi'') \cdot f(\xi''') \dots$$

oder auch die Summe:

$$\log f(\xi) + \log f(\xi') + \log f(\xi'') + \log f(\xi''') + \dots$$

zu einem Maximum werden. Die Differentiation nach x ergibt:

$$\frac{d \log f(\xi)}{d x} + \frac{d \log f(\xi')}{d x} + \frac{d \log f(\xi'')}{d x} + \frac{d \log f(\xi''')}{d x} + \dots = 0.$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form:

$$\frac{d \log f(\xi)}{\xi d \xi} \xi + \frac{d \log f(\xi')}{\xi' d \xi'} \xi' + \frac{d \log f(\xi'')}{\xi'' d \xi''} \xi'' + \frac{d \log f(\xi''')}{\xi''' d \xi'''} \xi''' + \dots = 0.$$

und vergleicht sie mit der oben bewiesenen:

$$\xi + \xi' + \xi'' + \xi''' + \dots = 0,$$

so zeigt sich, dass die erstere Gleichung aus dieser letzteren durch Multiplication mit einem constanten Factor k hervorgehen muss, wenn beide niemals in Widerspruch gerathen sollen. Es wird daher:

$$\begin{aligned} \frac{d \log f(x)}{x d x} &= \frac{d \log y}{x d x} = k \\ \log y &= \frac{1}{2} k x^2 + \log C \\ f(x) = y &= C e^{\frac{1}{2} k x^2}. \end{aligned}$$

Die Integrationsconstante C wird nun durch die Bedingung bestimmt, dass:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d x = C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2} k x^2} d x = 1$$

sein soll. Setzen wir in Rücksicht darauf, dass $f(x)$ abnimmt, wenn x wächst, $\frac{1}{2} k$ gleich einer negativen Grösse $-h^2$, und bemerken, was in der Lehre von den bestimmten Integralen gezeigt wird, dass nämlich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2} d x = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

ist, so ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen ξ und ξ' liege, der Ausdruck:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^{\xi'} e^{-h^2 x^2} d x.$$

Die Grösse h hängt von der Güte der Beobachtungen ab, auf welche die Formel Anwendung finden soll; haben in zwei Beobachtungsreihen von verschiedener Güte die Fehler ξ und $m\xi$ beziehungsweise dieselbe Wahrscheinlichkeit, ist also, wie man in diesem Falle zu sagen pflegt, die Genauigkeit der ersteren Art m mal so gross als die der anderen, so muss, wie man leicht aus obigem Ausdrucke erkennt, für die erstere auch h m mal grösser genommen werden, wenn für beide die Wahrscheinlichkeit den gleichen Werth annehmen soll. Die Grösse h wird deshalb auch das Maass der Genauigkeit genannt; sie lässt sich numerisch bestimmen, wenn man durch Abzählen der in der Beobachtungsreihe bis zu einer gewissen Grösse begangenen Fehler denjenigen Fehler ermittelt, welcher ebenso oft erreicht als überschritten worden ist, für welchen sich demnach die Wahrscheinlichkeit, dass er bei einer einzelnen Beobachtung nicht überschritten worden sei, auf $\frac{1}{2}$ reducirt. Die diese Eigenschaft besitzende Grösse

wird der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Beobachtung genannt; bezeichnen wir denselben mit ϱ , so haben wir die Bedingung:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\varrho}^{+\varrho} e^{-h^2 x^2} dx = 1/2,$$

oder, wenn $hx = t$ gesetzt wird:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\varrho} e^{-t^2} dt = 1/2$$

$$\int_0^{h\varrho} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4} = 0,44311.$$

Um aus dieser Bedingungsgleichung den Werth von $h\varrho$ zu finden, genügt hier die einfachste Reihenentwicklung des Integrales, nämlich:

$$\int_0^{h\varrho} e^{-t^2} dt = h\varrho - \frac{h^3 \varrho^3}{3} + 1/2 \frac{h^5 \varrho^5}{5} - \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{h^7 \varrho^7}{7} + \dots$$

und es ergibt sich:

$$h\varrho = 0,47694.$$

Durch diese unveränderliche Relation ist h gegeben, sobald man ϱ kennt, und daher bei jeder hinreichend zahlreichen Beobachtungsreihe die Möglichkeit geboten, das numerische Resultat der obigen Wahrscheinlichkeitsformel mit dem wirklichen Vorkommen der Fehler zu vergleichen.

In den *Fundamentis astronomiae* hat Bessel an 470 Bradley'schen Beobachtungen der Rectascensionen (Bestimmungen von α Aquilae und α Caniminoris) eine solche Untersuchung ausgeführt. Es ergab sich dabei:

$$\varrho = 0'',2637,$$

welchem entspricht:

$$h = 1,8087.$$

Unter Einsetzung dieses Werthes in die Integralformel stellt sich für die 470 Beobachtungen die Vergleichung zwischen Theorie und Erfahrung wie folgt:

Fehler zwischen	Anzahl nach	
	der Theorie	der Erfahrung
0'',0 und 0'',1	95	94
0'',1 " 0'',2	89	88
0'',2 " 0'',3	78	78
0'',3 " 0'',4	64	58
0'',4 " 0'',5	50	51
0'',5 " 0'',6	36	36
0'',6 " 0'',7	24	26
0'',7 " 0'',8	15	14
0'',8 " 0'',9	9	10
0'',9 " 1'',0	5	7
über 1'',0	5	8

Wenn man bedenkt, dass unter einer grösseren Zahl von Beobachtungen sich immer einige finden werden, die unter unbekannten und heterogenen Einflüssen gelitten haben, so muss die Uebereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung gewiss eine sehr befriedigende genannt werden.

Hundertundsechste Vorlesung.

Begriff und Ableitung des mittleren Fehlers. Relation zwischen dem wahrscheinlichen und dem mittleren Fehler.

Die Methode der Vorlesung 105, den wahrscheinlichen Fehler zu suchen, nämlich das Abzählen der Fehler, ist eine indirecte; wir werden im Folgenden eine directe Methode für diesen Zweck kennen lernen.

Sobald man einmal weiss, dass $f(x)$ der vorigen Vorlesung von der Form $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$ ist, kann man gleich die Bemerkung, dass:

$$f(\xi) f(\xi') f(\xi'') f(\xi''')$$

ein Maximum werden muss, noch weiter verwerthen. Es sei wieder p die Anzahl der angestellten Beobachtungen, so erscheint jenes Product unter der Form:

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^p e^{-h^2(\xi^2 + \xi'^2 + \xi''^2 + \xi'''^2 + \dots)}.$$

Wenn nun die Fehler ξ, ξ', ξ'', ξ''' u. s. w. bekannt sind oder die Summe ihrer Quadrate gegeben ist, so kann der Forderung eines Maximums nur dadurch genügt werden, dass man den Werth von h dementsprechend bestimmt, d. h. den Differentialquotienten des Productes, nach h genommen, gleich Null setzt. Wird der Kürze halber die Summe der Fehlerquadrate $\xi^2 + \xi'^2 + \xi''^2 + \xi'''^2 + \dots$ mit $[\xi\xi]$ bezeichnet, so erhält man:

$$\frac{p h^{p-1}}{(\sqrt{\pi})^p} e^{-h^2[\xi\xi]} - \frac{2 h^{p+1}}{(\sqrt{\pi})^p} e^{-h^2[\xi\xi]} \cdot [\xi\xi] = 0,$$

oder:

$$p - 2 h^2 [\xi\xi] = 0,$$

d. h.:

$$\frac{1}{h \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[\xi\xi]}{p}}.$$

Die Wurzelgrösse auf der rechten Seite dieser Gleichung wird der mittlere Fehler der Beobachtungen genannt; es ist derselbe, der bei jeder der p Beobachtungen begangen sein müsste, um die Summe der Fehlerquadrate der wirklich stattfindenden gleich zu liefern. Bezeichnet man den mittleren Fehler kurz mit ε , so ergibt die eben gefundene Relation $\frac{1}{h \sqrt{2}} = \varepsilon$, wenn man sie mit der für den wahrscheinlichen Fehler ϱ abgeleiteten:

$$h \varrho = 0,47694$$

verbindet:

$$\varrho = 0,67449 \varepsilon.$$

Mit einer fast immer hinreichenden Näherung pflegt man wohl den wahrscheinlichen Fehler gleich zwei Drittel des mittleren Fehlers zu setzen.

Ueberblickt man noch einmal die Ableitung des Ausdruckes von $f(x)$ im Fehlergesetze, so erscheint derselbe als eine Folgerung aus dem Principe des arithmetischen Mittels, ohne dass es schon nöthig gewesen wäre, das Princip der kleinsten Quadrate selbst dafür geltend zu machen. Es ist nun aber ferner klar, dass, wenn wir uns in dem Ausdrucke:

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^p e^{-h^2 [\xi \xi]},$$

welcher ein Maximum werden muss, die Grösse h gegeben denken und noch eine Bestimmung in Betreff der Summe der Fehlerquadrate zu machen haben, diese letztere dahin lauten muss, dass:

$$[\xi \xi] \text{ ein Minimum}$$

wird. Und so steht es uns denn frei, ob wir das Princip der Ausgleichung der Fehler nach dem arithmetischen Mittel als eine Folgerung aus dem Principe der kleinsten Quadrate betrachten, oder umgekehrt das Letztere aus dem Ersteren schliessen wollen.

Hat man eine lineäre Function der Grössen x, y, z, v u. s. w., welche letztere als unmittelbare Beobachtungsergebnisse aufgefasst werden sollen, also eine Function von der Form:

$$X = ax + by + cz + \dots,$$

worin a, b, c u. s. w. gegebene Constanten vorstellen, so lässt sich auch von dieser Function die Eigenschaft nachweisen, dass sie durch den Einfluss der Beobachtungsfehler in x, y, z u. s. w. ebenso oft und ebenso stark im positiven wie im negativen Sinne beeinflusst sein wird. Für die Function X gilt also ebenfalls der Grundsatz des arithmetischen Mittels, daher können alle Folgerungen wiederholt werden, welche auf die einfache Function x oben gezogen sind, insbesondere kann wieder das Maass der Genauigkeit auf dieselbe Weise gefunden werden. Bezeichnen wir die Fehler von $x, y, z \dots$, welche bei einer einzelnen Bestimmung begangen worden sind, mit $\xi, \eta, \zeta \dots$, die bei einer anderen Bestimmung vorgekommen, mit $\xi', \eta', \zeta' \dots$, so wird in dem einen Falle der Fehler von X sich ausdrücken durch:

$$a\xi + b\eta + c\zeta + \dots,$$

in dem anderen durch:

$$a\xi' + b\eta' + c\zeta' + \dots$$

und ähnlich bei den übrigen Bestimmungen. Stellt noch $[\mathcal{E} \mathcal{E}]$ die Summe der Fehlerquadrate von X vor, so soll nach Obigem der Ausdruck:

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^p e^{-h^2 [\mathcal{E} \mathcal{E}]}$$

durch die Wahl von h ein Maximum werden; dazu ist erforderlich, dass:

$$\frac{1}{h\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[\mathcal{E} \mathcal{E}]}{p}}$$

sei.

Es ist aber:

$$[\mathcal{E} \mathcal{E}] = [a\xi + b\eta + c\zeta + \dots]^2 + [a\xi' + b\eta' + c\zeta' + \dots]^2 + \dots$$

Führt man rechts die Erhebungen auf das Quadrat wirklich aus und bemerkt, dass die Productensummen:

$$ab(\xi\eta + \xi'\eta' + \dots)$$

$$ac(\xi\zeta + \xi'\zeta' + \dots)$$

u. s. w.

sich auf Null reduciren, wenn ebenso oft negative als positive Fehler begangen sein sollen, so erhält man:

$$[\mathcal{E}\mathcal{E}] = a^2[\xi\xi] + b^2[\eta\eta] + c^2[\zeta\zeta] + \dots$$

Wenn daher die einzelnen Bestimmungen von x den mittleren Fehler r , die von y den Fehler r' haben u. s. w., so wird der mittlere Fehler einer Bestimmung der Function X gleich:

$$\sqrt{a^2 r^2 + b^2 r'^2 + c^2 r''^2 + \dots}$$

Nun kann man aber auch das arithmetische Mittel aus m Bestimmungen einer Grösse als den Fall einer solchen lineären Function behandeln, wenn man die einzelnen Bestimmungen der Reihe nach mit x, y, z u. s. w. bezeichnet. Es wird dann:

$$a = b = c \text{ u. s. w. } = \frac{1}{m}$$

$$r = r' = r'' \text{ u. s. w.,}$$

demnach der mittlere Fehler des Mittels aus m Bestimmungen gleich:

$$\sqrt{\frac{1}{m} \frac{r^2}{m^2}}, \text{ also } \frac{r}{\sqrt{m}}.$$

Man zieht daraus den wichtigen Schluss, dass die Genauigkeit des Mittels aus gleich zuverlässigen Beobachtungen wächst, wie die Quadratwurzel aus der Anzahl der Bestimmungen. Hiernach sind z. B., um den wahrscheinlichen Fehler des Mittels aus einer Reihe von Bestimmungen auf ein Zehntel seines Betrages herabzudrücken, die Beobachtungen zu verhundertfachen, und es findet so der Grundsatz, dass man durch Wiederholung der Beobachtungen zuletzt jede beliebige Genauigkeit erzielen könne, seine naturgemässe Beschränkung.

Um verschiedene Beobachtungsreihen hinsichtlich ihrer Genauigkeit bequemer vergleichen zu können, hat man auch noch den Begriff des Gewichtes einer Bestimmung eingeführt. Wenn man ausdrücken will, dass die Bestimmungen von einer gewissen Art p mal so oft angestellt werden müssten, als die einer zweiten Art, um dieselbe Genauigkeit zu erzielen, so sagt man, diese letztere genauere Art der Bestimmung habe relativ zur ersteren das Gewicht p . Die Gewichte stehen in umgekehrtem Verhältnisse des Quadrates der wahrscheinlichen Fehler. Hiernach lässt sich nun gleich das Gewicht einer Bestimmung angeben, welche (wie z. B. die des Culminations- oder Rectascensionsunterschiedes zweier Gestirne) aus zwei oder mehreren Bestimmungen zusammengesetzt werden muss. Hat bei der Bestimmung von $x + y$ oder von $x - y$, x den wahrscheinlichen Fehler r , y den wahrscheinlichen Fehler r' , so wird derjenige der Summe oder Differenz nach Obigem gleich $\sqrt{r^2 + r'^2}$ sein; ist daher p das Gewicht der Bestimmung von x , p' das von y , P das der resultirenden Bestimmung, so wird:

$$\frac{1}{p} = r^2$$

$$\frac{1}{p'} = r'^2$$

$$\frac{1}{P} = r^2 + r'^2,$$

d. h.:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'},$$

und allgemeiner, haben die einzelnen Bestimmungen, aus welchen eine resultirende Bestimmung durch blosse Addition und Subtraction herzuleiten ist, die Gewichte p, p' ,

p'' u. s. w., so wird das Gewicht der resultirenden Bestimmung gegeben durch die Formel:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{p''} + \dots,$$

in Worten: der reciproke Werth des Gewichtes der resultirenden Bestimmung ist gleich der Summe der reciproken Gewichtswerthe der einzelnen Bestimmungen.

Ein Beispiel für Anwendung dieses Satzes liefert die Herleitung des Meridianunterschiedes zweier entfernter Stationen aus denen der zwischenliegenden.

Ferner kann man mit Rücksicht auf die Gewichte eine Reihe von Bestimmungen einer und derselben Grösse zu einem Mittel vereinigen. Es sei erhalten:

$$\begin{array}{ll} x = n, & \text{Gewicht } p \\ x = n', & \text{„ } p' \\ x = n'', & \text{„ } p'' \\ & \text{u. s. w.,} \end{array}$$

so werden diese Bestimmungen zu dem Mittel:

$$x = \frac{pn + p'n' + p''n'' + \dots}{p + p' + p'' + \dots},$$

welchem das Gewicht $p + p' + p'' + \dots$ zuzuschreiben ist, zu vereinigen sein. Die Analogie dieser Formel mit der in der Statik für eine Coordinate des Schwerpunktes verschiedener Massen von den Gewichten $p, p', p'' \dots$, fällt gleich in die Augen, so dass die Benennung „Gewicht“ ganz besonders motivirt erscheint.

Hundertundsiebente Vorlesung.

Mittlerer zu befürchtender Fehler. Beispiel.

Ueber die Berechnung des mittleren Fehlers im Falle einer einzigen Unbekannten würde wenig noch zu sagen übrig bleiben, wenn man den wahren Werth der zu suchenden Grösse in aller Genauigkeit kennt; man erfährt aber statt dessen immer nur den wahrscheinlichsten Werth und muss auf diesen Umstand Rücksicht nehmen, um so mehr, je kleiner die Anzahl der angestellten Beobachtungen ist. Dies erreicht man so weit als möglich durch folgende Betrachtung.

Sind ξ, ξ', ξ'' u. s. w. die Fehler, welche bei p einzelnen Beobachtungen der Reihe nach begangen zu sein scheinen, wenn man mit dem wahrscheinlichsten Werthe vergleicht, so werden, wenn der letztere noch um die Grösse $\pm m$ fehlerhaft ist, die wahren Fehler durch $\xi \pm m, \xi' \pm m, \xi'' \pm m$ u. s. w. vorgestellt. Die wahre Summe der Fehlerquadrate wird demnach:

$$[\xi\xi] \pm 2m[\xi + \xi' + \xi'' + \dots] + pm^2$$

oder, da $\xi + \xi' + \xi'' + \dots = 0$, gleich

$$[\xi\xi] + pm^2.$$

Wenn also ε den mit Rücksicht hierauf resultirenden mittleren Fehler vorstellt, so hat man:

$$p\varepsilon^2 = [\xi\xi] + pm^2.$$

Den Werth von m kennt man nun zwar nicht; man wird sich demselben jedoch so viel als möglich nähern, wenn man m , dem mittleren Fehler des Mittels, aus den p

Beobachtungen, also nach den Vorschriften, die wir kennen lernten, gleich $\frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}$ setzt. Hierdurch erhält man:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[\xi\xi]}{p-1}}.$$

Die nach dieser Formel ermittelte Grösse pflegt man auch, um den oben erwähnten Unterschied anzudeuten und aufrecht zu erhalten, den mittleren zu befürchtenden Fehler zu nennen. Der mittlere zu befürchtende Fehler des Mittels aus allen p Beobachtungen wird:

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{p}} = \sqrt{\frac{[\xi\xi]}{p(p-1)}},$$

woraus dann wieder der wahrscheinliche Fehler durch Multiplication mit der Zahl 0,67449 hervorgeht.

Als Beispiel einer solchen Ermittlung des wahrscheinlichen Fehlers mag die an dem Reichenbach'schen Meridiankreise der Göttinger Sternwarte ausgeführte Bestimmung der Schraubenumdrehungen eines Mikroskopes, welche in einem Intervalle der Theilung des Kreises von 3' enthalten sind, dienen. Es wurden zu dem Zwecke die den Einstellungen auf die Grenzen des Intervalles entsprechenden Ablesungen von einander abgezogen; die Differenz wurde, um auch ein Urtheil über die zufälligen Fehler der Theilung zu gewinnen, an 72 verschiedenen Stellen des Kreises bestimmt. Die einzelnen Differenzen bei 0°, 5°, 10° u. s. w. ergaben sich wie folgt:

Ablesung	Differenz	Abweichung vom Mittel	Fehlerquadrat	Ablesung	Differenz	Abweichung vom Mittel	Fehlerquadrat
0°	7,267	+ 0,011	0,000121	180°	7,282	— 0,004	0,000016
5	7,319	— 0,041	1681	185	7,264	+ 0,014	196
10	7,295	— 0,017	289	190	7,322	— 0,044	1936
15	7,250	+ 0,028	784	195	7,374	— 0,096	9216
20	7,321	— 0,043	1849	200	7,314	— 0,036	1296
25	7,278	0,000	0	205	7,275	+ 0,003	9
30	7,295	— 0,017	289	210	7,332	— 0,054	2916
35	7,260	+ 0,018	324	215	7,293	— 0,015	225
40	7,303	— 0,025	625	220	7,317	— 0,039	1521
45	7,303	— 0,025	625	225	7,389	— 0,111	12321
50	7,192	+ 0,086	7396	230	7,387	— 0,109	11881
55	7,272	+ 0,006	36	235	7,311	— 0,033	1089
60	7,257	+ 0,021	441	240	7,349	— 0,071	5041
65	7,238	+ 0,040	1600	245	7,322	— 0,044	1936
70	7,278	0,000	0	250	7,395	— 0,117	13689
75	7,277	+ 0,001	1	255	7,314	— 0,036	1296
80	7,297	— 0,019	361	260	7,295	— 0,017	289
85	7,318	— 0,040	1600	265	7,260	+ 0,018	324
90	7,268	+ 0,010	100	270	7,268	+ 0,010	100
95	7,234	+ 0,044	1936	275	7,239	+ 0,039	1521
100	7,290	— 0,012	144	280	7,233	+ 0,045	2025
105	7,189	+ 0,089	7921	285	7,252	+ 0,026	676
110	7,217	+ 0,061	3721	290	7,270	+ 0,008	64
115	7,226	+ 0,052	2704	295	7,264	+ 0,014	196
120	7,251	+ 0,027	729	300	7,244	+ 0,034	1156
125	7,212	+ 0,066	4356	305	7,260	+ 0,018	324
130	7,258	+ 0,020	400	310	7,235	+ 0,043	1849
135	7,235	+ 0,043	1849	315	7,260	+ 0,018	324
140	7,244	+ 0,034	1156	320	7,268	+ 0,010	100
145	7,244	+ 0,034	1156	325	7,274	+ 0,004	16
150	7,241	+ 0,037	1369	330	7,262	+ 0,016	256
155	7,272	+ 0,006	36	335	7,227	+ 0,051	2601
160	7,273	+ 0,005	25	340	7,275	+ 0,003	9
165	7,291	— 0,013	169	345	7,306	— 0,028	784
170	7,225	+ 0,053	2809	350	7,310	— 0,032	1024
175	7,280	— 0,002	4	355	7,269	+ 0,009	81

Das Mittel aus den 72 Bestimmungen, als wahrscheinlichster Werth der zu suchenden Grösse anzusehen, ist 7,278; hiernach sind die Zahlen der dritten und vierten Columnne berechnet. Die Summe der Fehlerquadrate wird:

$$[\xi\xi] = 0,126\,909$$

der mittlere zu befürchtende Fehler einer Bestimmung:

$$\sqrt{\frac{[\xi\xi]}{p-1}} = \sqrt{\frac{0,126\,909}{71}} = 0,04228,$$

also der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Bestimmung gleich $0,67449 \times 0,04228$, gleich 0,02852; der mittlere zu befürchtende Fehler des Mittels aus allen Beobachtungen findet sich gleich $\frac{0,04228}{\sqrt{72}} = 0,00498$, der zugehörige wahrscheinliche gleich 0,00336.

Nach dem Fehlergesetze soll der wahrscheinliche Fehler r einer einzelnen Bestimmung von 500 unter 1000 Beobachtungen nicht erreicht werden, bei 688 soll der Fehler unter $\frac{3}{2}r$, bei 823 unter $2r$, bei 908 unter $\frac{5}{2}r$, bei 956 unter $3r$ bleiben. Es sollten also unter 72 Beobachtungen Fehler

bis zu	0,02852	36 mal
„ „	0,04278	50 „
„ „	0,05704	59 „
„ „	0,07130	65 „
„ „	0,08556	69 „

vorgekommen sein. Die wirklichen Zahlen sind der Reihe nach 39, 53, 63, 66, 66, von den theoretischen nicht allzu stark abweichend.

Hundertundachte Vorlesung.

Die Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe aus einem System linearer Gleichungen. Aufstellung der Normalgleichungen.

Wir betrachten jetzt den Fall, wo die Methode der kleinsten Quadrate auf ein System von lineären Gleichungen mit mehreren Unbekannten x, y, z , welche wir hier auf die Zahl von drei beschränken, in Anwendung kommen soll. Es seien die aufzulösenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} ax + by + cz + n &= 0 \\ a'x + b'y + c'z + n' &= 0 \\ a''x + b''y + c''z + n'' &= 0 \\ a'''x + b'''y + c'''z + n''' &= 0 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

u. s. w.

Die absoluten Glieder dieser Gleichungen n, n', n'', n''' u. s. w. sind das Resultat von Messungen oder Beobachtungen, welche möglichst gut dargestellt werden sollen und in Betreff derer hier vorläufig vorausgesetzt wird, dass sie alle gleiche Zuverlässigkeit haben. Nach dem bekannten Grundsatz ist nun dasjenige System von Werthen der drei Unbekannten x, y, z für das wahrscheinlichste zu halten, welches die Summe der Fehlerquadrate (im Folgenden mit $[AA]$ bezeichnet):

$$(ax + by + cz + n)^2 + (a'x + b'y + c'z + n')^2 + (a''x + b''y + c''z + n'')^2 + (a'''x + b'''y + c'''z + n''')^2 + \dots$$

zu einem Minimum macht; diese Werthe werden gefunden, wenn man die Differentialquotienten nach x , y und z bildet und jeden gleich Null setzt. Setzt man der Kürze halber:

$$\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2 + \dots &= [aa] \\ ab + a'b' + a''b'' + a'''b''' + \dots &= [ab] \\ ac + a'c' + a''c'' + a'''c''' + \dots &= [ac] \\ an + a'n' + a''n'' + a'''n''' + \dots &= [an] \end{aligned}$$

u. s. w.

so erhält man die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + [an] &= 0 \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z + [bn] &= 0 \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z + [cn] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

welche Normalgleichungen genannt werden. Theoretisch ist über die Auflösung derselben wenig zu sagen, es sei denn, dass man die Summe der Fehlerquadrate benutzen will, um die wahrscheinlichen Fehler von x , y , z zu bestimmen; hiermit haben wir uns denn im Folgenden noch zu beschäftigen.

Bedient man sich zur Elimination von x aus den Normalgleichungen des gewöhnlichen Verfahrens, indem man die erste mit $\frac{[ab]}{[aa]}$ multiplicirt von der zweiten, dann mit $\frac{[ac]}{[aa]}$ multiplicirt von der dritten abzieht, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} [bb_1]y + [bc_1]z + [bn_1] &= 0 \\ [bc_1]y + [cc_1]z + [cn_1] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

wobei zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} [bb_1] &= [bb] - \frac{[ab][ab]}{[aa]} \\ [bc_1] &= [bc] - \frac{[ab][ac]}{[aa]} \\ [bn_1] &= [bn] - \frac{[ab][an]}{[aa]} \end{aligned}$$

u. s. w.

gesetzt ist. Eliminirt man nun y aus (3), so ergibt sich:

$$[cc_2]z + [cn_2] = 0 \dots \dots \dots (4)$$

wobei:

$$\begin{aligned} [cc_2] &= [cc_1] - \frac{[bc_1][bc_1]}{[bb_1]} \\ [cn_2] &= [cn_1] - \frac{[bc_1][bn_1]}{[bb_1]} \end{aligned}$$

Für die Summe der Fehlerquadrate ergibt sich, mit Rücksicht auf die Gleichungen (2):

$$[\mathcal{A}] = [nn] + [an]x + [bn]y + [cn]z \dots \dots \dots (5)$$

und wenn man darauf aus dieser Formel und jenen drei Gleichungen wieder x , y , z eliminirt:

$$[\mathcal{A}] = [nn] - \frac{[an]^2}{[aa]} - \frac{[bn_1]^2}{[bb_1]} - \frac{[cn_2]^2}{[cc_2]} \dots \dots \dots (6)$$

wofür zur Abkürzung $[nn_3]$ gesetzt wird.

Man kann für die Summe der Fehlerquadrate noch einen anderen Ausdruck aufstellen, der uns später ebenfalls von Nutzen sein wird. Multiplicirt man die ursprünglichen Gleichungen (1) jede der Reihe nach mit n , ax , by , cz und addirt dieselben, so ergiebt sich:

$$[A A] = [a A]x + [b A]y + [c A]z + [n A] \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$[a A] = [a a]x + [a b]y + [a c]z + [a n] \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

u. s. w.

und wenn man den Werth von x aus (8) in (7) einsetzt und die Abkürzungen

$$[b A_1] \text{ für } [b b_1]y + [b c_1]z + [b n_1] \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$[n A_1] \text{ für } [b n_1]y + [c n_1]z + [n n_1] \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

einführt:

$$[A A] = \frac{[a A]^2}{[a a]} + [b A_1]y + [c A_1]z + [n A_1] \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Aus (9) folgt:

$$y = \frac{[b A_1]}{[b b_1]} - \frac{[b c_1]}{[b b_1]}z - \frac{[b n_1]}{[b b_1]},$$

wenn dieser Werth in (11) substituirt wird:

$$[A A] = \frac{[a A]^2}{[a a]} + \frac{[b A_1]^2}{[b b_1]} + [c A_2]z + [n A_2] \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

wobei:

$$[c A_2] = [c c_2]z + [c n_2] \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$[n A_2] = [c n_2]z + [n n_2] \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Wird der aus (13) folgende Werth von z in (12) eingesetzt, so findet man:

$$[A A] = \frac{[a A]^2}{[a a]} + \frac{[b A_1]^2}{[b b_1]} + \frac{[c A_2]^2}{[c c_2]} - \frac{[c n_2][c A_2]}{[c c_2]} + [n A_2] \quad . \quad . \quad (15)$$

Rechterseits ist x , y , z nur in den Grössen $[a A]$, $[b A_1]$, $[c A_2]$ enthalten; diese müssen also, jedes einzeln, zu Null gemacht werden, wenn die Summe der Fehlerquadrate $[n n_3]$ ein Minimum werden soll. Die Gleichungen:

$$[a A] = 0, \quad [b A_1] = 0, \quad [c A_2] = 0$$

sind aber nichts Anderes als die Normalgleichungen (2). Zugleich sieht man, dass die Grösse $[n A_2]$ mit $[n n_3]$ oder dem Minimum der Fehlerquadrate identisch ist.

Hundertundneunte Vorlesung.

Fortsetzung der Entwicklung der Vorlesung Hundertundacht zur Entwicklung der wahrscheinlichen Fehler eines Systems von Grössen.

Die Aufgabe, den mittleren oder den wahrscheinlichen Fehler einer beliebigen von den drei Unbekannten x , y , z zu bestimmen, ist als gelöst zu betrachten, wenn man die Ausdrücke für jene Unbekannten in der Form linearer Functionen solcher Grössen dargestellt hat, deren mittlere oder wahrscheinliche Fehler bekannt sind. Es ist dies z. B. nach dem Vorhergehenden der Fall mit der Form, in welcher z gefunden wird; da:

$$z = - \frac{[c n_2]}{[c c_2]}$$

und $[cn_2]$ sich auf Producte von n mit bekannten Factoren zurückführen lässt. Es seien nun, um die dazu nöthigen Rechnungen auszuführen, A' und A'' zwei Coefficienten von solcher Beschaffenheit, dass, wenn man die erste der Gleichungen (2) mit $\frac{1}{[aa]}$, die erste der Gleichungen (3) mit $\frac{A'}{[bb_1]}$ und die Gleichung (4) mit $\frac{A''}{[cc_2]}$ multiplicirt und addirt, die Coefficienten von y und von z gleich Null werden. Es soll demnach sein:

$$\frac{[ab]}{[aa]} + A' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

$$\frac{[ac]}{[aa]} + A' \frac{[bc_1]}{[bb_1]} + A'' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

wodurch dann:

$$x = - \frac{[an]}{[aa]} - A' \frac{[bn_1]}{[bb_1]} - A'' \frac{[cn_2]}{[cc_2]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Ferner soll der Coefficient von z verschwinden, wenn man die erste der Gleichungen (3) mit $\frac{1}{[bb_1]}$, die Gleichung (4) mit $\frac{B'}{[cc_2]}$ multiplicirt und addirt, also:

$$\frac{[bc_1]}{[bb_1]} + B' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

gesetzt werden. Man erhält dann:

$$y = - \frac{[bn_1]}{[bb_1]} - \frac{B' [cn_2]}{[cc_2]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

ferner, wie oben:

$$z = - \frac{[cn_2]}{[cc_2]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Leicht erkennt man noch, dass

$$[bb_1] = A' [ab] + [bb] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

$$[bn_1] = A' [an] + [bn] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

$$[ac_2] = A'' [aa] + B' [ab] + [ac] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

$$[bc_2] = A'' [ab] + B' [bb] + [bc] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$$[cc_2] = A'' [ac] + B' [bc] + [cc] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

$$[cn_2] = A'' [an] + B' [bn] + [cn] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Die rechte Seite der Gleichungen (24) und (25) wird zufolge (16), (17) und (19) gleich Null, also $[ac_2] = 0$, $[bc_2] = 0$.

Stellt nun r den wahrscheinlichen Fehler einer einzigen Beobachtung, d. h. eines einzelnen Werthes von n vor, so wird, da:

$$[an] = an + a'n' + a''n'' + \dots$$

nach dem Satze über die lineären Functionen der wahrscheinliche Fehler $[an]$ ausgedrückt durch:

$$r \sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots} \quad \text{oder} \quad r \sqrt{[aa]}.$$

Nach der Art nun, wie $[bb_1]$ und $[bn_1]$ gebildet sind, könnte man nach Analogie schon schliessen, dass der wahrscheinliche Fehler von $[bn_1]$ gleich $r \sqrt{[bb_1]}$ sein werde; völlige Ueberzeugung aber kann man sich auf folgende Weise verschaffen. $[bn_1]$ ist zusammengesetzt aus Gliedern von der Form $(A'a + b)n$; der wahrscheinliche Fehler von $[bn_1]$ ist daher:

$$r \sqrt{A'^2 [aa] + 2 A' [ab] + [bb]} = r \sqrt{[bb_1]}.$$

Desgleichen ist $[cn_2]$ zusammengesetzt aus Gliedern von der Form:

$$(A''a + B'b + c)n.$$

Das Quadrat des wahrscheinlichen Fehlers von $[cn_2]$ wird demnach:

$$A''r^2 (A''[aa] + B'[ab] + [ac]) + B'r^2 (A''[ab] + B'[bb] + [bc]) \\ + r^2 (A''[ac] + B'[bc] + [cc]),$$

oder, mit Rücksicht auf (24), (25) und (26) gleich $r^2[cc_2]$; folglich der wahrscheinliche Fehler von $[cn_2] = r\sqrt{[cc_2]}$. Diese Formel enthält ein ebenso interessantes als wichtiges Resultat; da nämlich der wahrscheinliche Fehler von z nun gleich:

$$r \cdot \frac{\sqrt{[cc_2]}}{[cc_2]} = \frac{r}{\sqrt{[cc_2]}}$$

wird, so drückt $[cc_2]$ das Gewicht der Bestimmung von z aus, das einer einzelnen Beobachtung als Einheit genommen. Durch Umkehrung der Reihenfolge von x, y, z in dem Eliminationsverfahren kann man mittelst derselben Formel auch die Gewichte und wahrscheinlichen Fehler von x und y finden. Ausserdem kann man sich aber für diesen Zweck auch der folgenden Ausdrücke bedienen:

$$\text{wahrscheinlicher Fehler der Bestimmung von } x = r\sqrt{\frac{1}{[aa]} + \frac{A'^2}{[bb_1]} + \frac{A''^2}{[cc_2]}} \\ \text{„ „ „ „ „ } y = r\sqrt{\frac{1}{[bb_1]} + \frac{B'^2}{[cc_2]}},$$

welche nach den obigen Entwicklungen ohne Schwierigkeit sich ergeben.

Um nun auch r , den wahrscheinlichen Fehler einer einzelnen Beobachtung, zu bestimmen, benutzen wir die aus Gleichung (15) unmittelbar folgende Formel für die Summe der Fehlerquadrate:

$$[\Delta\Delta] = \frac{[a\Delta]^2}{[aa]} + \frac{[b\Delta_1]^2}{[bb_1]} + \frac{[c\Delta_2]^2}{[cc_2]} + [nn_3].$$

Die Substitution der wahrscheinlichsten Werthe von x, y, z zur Ermittlung der begangenen Fehler macht $a\Delta, b\Delta_1, c\Delta_2$ zu Null; bei der Substitution der wahren Werthe würde dies nicht mehr der Fall sein. Bezeichnen wir mit ε den mittleren zu befürchtenden Fehler einer einzelnen Beobachtung, so wird die wahre Summe der Fehlerquadrate von p Beobachtungen durch die Formel:

$$p\varepsilon^2 = \frac{[a\Delta]^2}{[aa]} + \frac{[b\Delta_1]^2}{[bb_1]} + \frac{[c\Delta_2]^2}{[cc_2]} + [nn_3]$$

gegeben, wobei $[nn_3]$ das durch die obigen Vorschriften gefundene Minimum vorstellt und unter $[a\Delta], [b\Delta_1], [c\Delta_2]$ gewisse Fehlersummen zu denken sind, und zwar diejenigen Werthe derselben, welche man durch Einsetzung der wahren Werthe von x, y, z erhalten würde. Letztere kennen wir nun zwar nicht; wir werden jedoch der Wahrheit so nahe kommen, als uns möglich ist, wenn wir bei n, n', n'', n''' u. s. w. immer den mittleren Fehler ε selbst als begangen ansehen. Es wird aber der mittlere Fehler von $[a\Delta]$ offenbar gleich dem von $[an]$, also nach obigen Entwicklungen gleich $\varepsilon\sqrt{[aa]}$, der mittlere Fehler von $[b\Delta_1]$ gleich dem von $[bn_1]$ oder gleich $\varepsilon\sqrt{[bb_1]}$, der von $[c\Delta_2]$ gleich dem von $[cn_2]$ oder gleich $\varepsilon\sqrt{[cc_2]}$. Hiernach haben wir denn also zur Bestimmung von ε die Gleichung:

$$p\varepsilon^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon^2 + \varepsilon^2 + [nn_3]$$

oder:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{[nn_3]}{p-3}},$$

und hieraus dann r nach der Formel:

$$r = 0,67449 \quad \varepsilon = 0,67449 \cdot \sqrt{\frac{[nn_3]}{p-3}}.$$

Allgemeiner findet sich für m Unbekannte der wahrscheinliche Fehler r einer einzelnen Beobachtung nach der Formel:

$$r = 0,67449 \cdot \sqrt{\frac{[nn_3]}{p-m}}.$$

Wir haben bisher die nicht immer zutreffende Voraussetzung gleicher Güte oder gleichen Gewichtes der einzelnen Beobachtungen gemacht; dieselbe lässt sich leicht verbessern, wenn man über die verschiedene Güte bestimmte Anhaltspunkte hat, z. B. wenn man weiss, dass die eine oder andere Beobachtung aus einer grösseren Zahl von Wiederholungen abgeleitet worden ist als die übrigen. Hat man aus solchen Rücksichten und nach einer vorläufigen Kenntniss des Verhältnisses der wahrscheinlichen Fehler einer gewissen Beobachtung das relative Gewicht p zuzuschreiben, so hat dann die derselben entsprechende Bedingungsgleichung darauf Anspruch, p mal aufgeführt und demgemäss zur Bildung der Normalgleichungen aufgeführt zu werden. Man kommt aber offenbar für die letzteren zu demselben Resultate, wenn man jene Bedingungsgleichung von dem relativen Gewichte p mit \sqrt{p} multiplicirt, weil auch dann die von diesen Gleichungen herührenden Producte aa , ab , ac u. s. w. p mal so gross werden als die der übrigen. Es ist dann ausserdem nur noch bei der Berechnung der einzelnen Fehler und des mittleren Fehlers darauf Rücksicht zu nehmen, dass die betreffende Bedingungsgleichung nicht eine einzige, sondern p Beobachtungen vertritt.

Hundertundzehnte Vorlesung.

Bildung der Normalgleichungen und Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten.

In der vorigen Vorlesung wurde gezeigt, wie man aus den Bedingungsgleichungen die Normalgleichungen bildet. Praktisch ist dieser Uebergang immer etwas langwierig auszuführen, und man muss sich durch besondere Vorsichtsmaassregeln vor Rechenfehlern schützen.

Wir erläutern hier zunächst das gewöhnliche, logarithmische Verfahren für die Bildung der Normalgleichungen. Am Schlusse dieser Vorlesung sollen dann noch einige Worte über die Bildung der Normalgleichungen mittelst Quadrattafeln nach dem Vorgehen von Bessel und über die Laplace'sche Methode zur Bestimmung wahrscheinlicher Werthe von Unbekannten aus einer grösseren Zahl von Gleichungen hinzugefügt werden.

Für den Kometen 1890 III lagen folgende Bedingungsgleichungen vor, welche fünf Normalörtern (1), (2) . . . (5) entsprechen¹⁾.

¹⁾ Das Ausgangselementensystem ist parabolisch. Wir führen keine Excentricität ein, weil das betrachtete Bahnstück zu kurz ist, um die Bestimmung einer solchen zu erlauben.

In Rectascension:

1.	$-0'',95 = 8,1460_n dT + 9,3181_n d \log q + 9,5863 d\pi + 9,3680_n \sin i d\Omega + 9,4081 di$
2.	$-1'',29 = 8,1158_n + 9,3506_n + 9,5564 + 9,2537_n + 9,4325$
3.	$+0'',29 = 8,0752_n + 9,3745_n + 9,5163 + 9,0477_n + 9,4512$
4.	$+0'',38 = 8,0234_n + 9,3853_n + 9,4647 + 8,5116_n + 9,4601$
5.	$-7'',26 = 7,9322_n + 9,3704_n + 9,3731 + 8,9490 + 9,4507$

In Declination:

1.	$+5'',93 = 7,9674 dT + 9,9664 d \log q + 9,5206_n d\pi + 9,6515 \sin i d\Omega + 9,4450 di$
2.	$+6'',79 = 7,9946 + 9,9909 + 9,5594_n + 9,6862 + 9,4025$
3.	$+4'',79 = 8,0173 + 0,0192 + 9,5977_n + 9,7183 + 9,3445$
4.	$+3'',02 = 8,0321 + 0,0490 + 9,6327_n + 9,7448 + 9,2687$
5.	$+1'',93 = 8,0359 + 0,0887 + 9,6733_n + 9,7696 + 9,1299$

In diesen Gleichungen beziehen sich $d\pi$, $d\Omega$ und di auf die Ekliptik. Statt dq ist $d \log q$ (d. h. der Zuwachs des Briggs'schen Logarithmus von q) und an Stelle von $d\Omega$ bezüglich $d\Omega \sin i$ eingeführt worden, was einige kleine Vortheile bei der Berechnung der Differentialquotienten darbietet.

Diese Gleichungen sind jedoch in Wirklichkeit nicht gleichwerthig, denn es beruhen die Normalorte (1), (2), (3), (4) und (5) auf respective 7, 12, 7, 5 und 3 Beobachtungen. Wir setzen daher die Gewichte der Normalörter gleich der Anzahl der Beobachtungen, d. h. wir multipliciren die Gleichungen respective mit $\sqrt{7}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{5}$ und $\sqrt{3}$ und erhalten so folgende gleichwerthige Bedingungsgleichungen:

1.	$0,4003_n = 8,5686_n dT + 9,7407_n d \log q + 0,0089 d\pi + 9,7906_n \sin i d\Omega + 9,8307 di$
2.	$0,6502_n = 8,6554_n + 9,8902_n + 0,0960 + 9,7933_n + 9,9721$
3.	$9,8850 = 8,4978_n + 9,7971_n + 9,9389 + 9,4703_n + 9,8738$
4.	$9,9293 = 8,3729_n + 9,7348_n + 9,8142 + 8,8611_n + 9,8096$
5.	$1,0995_r = 8,1708_n + 9,6090_n + 9,6117 + 9,1876 + 9,6893$
6.	$1,1957 = 8,3900 dT + 0,3890 d \log q + 9,9432_n d\pi + 0,0741 \sin i d\Omega + 9,8676 di$
7.	$1,3715 = 8,5342 + 0,5305 + 0,0990_n + 0,2258 + 9,9421$
8.	$1,1029 = 8,4399 + 0,4418 + 0,0203_n + 0,1409 + 9,7671$
9.	$0,8295 = 8,8316 + 0,3985 + 9,9822_n + 0,0943 + 9,6182$
10.	$0,5242 = 8,2745 + 0,3273 + 9,9119_n + 0,0082 + 9,8685$

Man bleibt aber bei dieser Form der Bedingungsgleichungen (denen wir jetzt die laufenden Nummern 1 bis 10 zuertheilt haben) gewöhnlich noch nicht stehen. In der That, die Coëfficienten besitzen sehr verschiedene Grösse (wie man aus ihren Logarithmen ersieht). Dies aber könnte bei der Bildung von $[aa]$, $[ab]$ u. s. w. wesentliche Nachtheile nach sich ziehen. Man würde z. B. öfter im Zweifel sein, wie viel Stellen man bei Bildung der Numeri von aa , ab . . . mitzunehmen habe und dadurch entweder unnütze Mehrarbeit leisten, oder sich zu Ungenauigkeiten verleiten lassen.

Um derartigen Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, pflegt man die Gleichungen homogen zu machen. Man führt z. B. an Stelle von dT eine neue Unbekannte ein, welche gleich ist dT , multiplicirt mit einem grössten Factor in obigen Gleichungen.

So wurde im vorliegenden Falle gesetzt:

$$\begin{aligned} v &= [1,3715] \text{ (als Einheit für die linke Seite, Fehlereinheit)} \\ x &= [8,6554] dT, \quad y = [0,5305] d \log q, \quad z = [0,0990] d\pi, \\ u &= [0,2258] \sin i d\Omega, \quad v = [9,9721] di. \end{aligned}$$

Die 10 (nunmehr homogenen) Gleichungen nehmen alsdann folgende Form an:

1. $9,0288_n = 9,9132_n x + 9,2102_n y + 9,9099 z + 9,5648_n u + 9,8586 v$
2. $9,2787_n = 0,0000_n + 9,3597_n + 9,9970 + 9,5675_n + 0,0000$
3. $8,5135 = 9,8424_n + 9,2666_n + 9,8399 + 9,2445_n + 9,9017$
4. $8,5578 = 9,7175_n + 9,2043_n + 9,7152 + 8,6353_n + 9,8375$
5. $9,7280_n = 9,5154_n + 9,0785_n + 9,5127 + 8,9618 + 9,7172$
6. $9,8242 = 9,7346 + 9,8585 + 9,8442_n + 9,8483 + 9,8955$
7. $0,0000 = 9,8788 + 0,0000 + 0,0000_n + 0,0000 + 9,9700$
8. $9,7314 = 9,7845 + 9,9113 + 9,9213_n + 9,9151 + 9,7950$
9. $9,4580 = 9,7262 + 9,8680 + 9,8832_n + 9,8685 + 9,6461$
10. $9,1527 = 9,6191 + 9,7968 + 9,8129_n + 9,7824 + 9,3964$

Im Folgenden bezeichnen wir die auf der linken Seite stehenden Grössen mit n , die Coëfficienten von x, y, z, u, v respective mit a, b, c, d und e und behalten ferner die fortlaufende Numerirung der Gleichungen (1) bis (10) bei.

Der Controle wegen bilden wir nun für jede dieser Gleichungen die Hilfsgrösse:

$$s = a + b + c + d + e + n.$$

So ergibt sich

Gleichung:

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
a	— 0,8188	— 1,0000	— 0,6956	— 0,5218	— 0,3276	+ 0,5428	+ 0,7565	+ 0,6088	+ 0,5323	+ 0,4160
b	— 0,1623	— 0,2290	— 0,1847	— 0,1601	— 0,1198	+ 0,7220	+ 1,0000	+ 0,8153	+ 0,7379	+ 0,6263
c	+ 0,8126	+ 0,9931	+ 0,6916	+ 0,5190	+ 0,3256	— 0,6985	— 1,0000	— 0,8343	— 0,7642	— 0,6500
d	— 0,3671	— 0,3694	— 0,1756	— 0,0432	+ 0,0916	+ 0,7052	+ 1,0000	+ 0,8224	+ 0,7388	+ 0,6059
e	+ 0,7222	+ 1,0000	+ 0,7975	+ 0,6879	+ 0,5214	+ 0,7861	+ 0,9333	+ 0,6237	+ 0,4427	+ 0,2491
n	— 0,1069	— 0,1900	+ 0,0326	+ 0,0361	— 0,5346	+ 0,6671	+ 1,0000	+ 0,5388	+ 0,2871	+ 0,1421
$\Sigma = s$	+ 0,0797	+ 0,2047	+ 0,4658	+ 0,5179	— 0,0434	+ 2,7247	+ 3,6898	+ 2,5747	+ 1,9746	+ 1,3894
$\log s$	8,9015	9,3111	9,6682	9,7142	8,6375 _n	0,5353	0,5670	0,4107	0,2955	0,1428

Wir stellen nun für unsere 10 Gleichungen $\log a, \log b, \log c, \log d, \log e, \log n$ und $\log s$ in der Weise zusammen, wie das für die weitere Rechnung am bequemsten ist, nämlich:

Gleichung:

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
$\log a$	9,9132 _n	0,0000 _n	9,8424 _n	9,7175 _n	9,5154 _n	9,7346	9,8788	9,7845	9,7262	9,6191
$\log b$	9,2102 _n	9,3597 _n	9,2666 _n	9,2043 _n	9,0785 _n	9,8585	0,0000	9,9113	9,8680	9,7968
$\log c$	9,9099	9,9970	9,8399	9,7152	9,5127	9,8442 _n	0,0000 _n	9,9213 _n	9,8832 _n	9,8129 _n
$\log d$	9,5648 _n	9,5675 _n	9,2445 _n	8,6353 _n	8,9618	9,8483	0,0000	9,9151	9,8685	9,7824
$\log e$	9,8586 _n	0,0000	9,9017	9,8375	9,7172	9,8955	9,9700	9,7950	9,6461	9,3964
$\log n$	9,0288 _n	9,2787 _n	8,5135	8,5578	9,7280 _n	9,8242	0,0000	9,7314	9,4580	9,1527
$\log s$	8,9015	9,3111	9,6682	9,7142	8,6375 _n	0,4353	0,5670	0,4107	0,2955	0,1428

Zunächst schreibt man nur die erste Zeile auf einen Papierstreifen und addirt sie zu sich selber und allen folgenden. Man thut dann dasselbe mit der zweiten Zeile und erhält so nach einander für die 10 Gleichungen:

Gleichung:

<i>log</i>	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
<i>a a</i>	9,8264	0,0000	9,6848	9,4350	9,0308	9,4692	9,7576	9,5690	9,4524	9,2382
<i>a b</i>	9,1234	9,3597	9,1090	9,9218	9,5939	9,5931	9,8788	9,6958	9,5942	9,4159
<i>a c</i>	9,8231 _n	9,9970 _n	9,6823 _n	9,4327 _n	9,0281 _n	9,5788 _n	9,8788 _n	9,7058 _n	9,6094 _n	9,4320 _n
<i>a d</i>	9,4780	9,5675	9,0869	8,3528	8,4772 _n	9,5829	9,8788	9,6996	9,5947	9,4015
<i>a e</i>	9,7718 _n	0,0000 _n	9,7441 _n	9,5550 _n	9,2326 _n	9,6301	9,8488	9,5795	9,3723	9,0155
<i>a n</i>	8,9420	9,2787	8,3559 _n	8,2753 _n	9,2434	9,5588	9,8788	9,5159	9,1842	8,7718
<i>a s</i>	8,8147 _n	9,3111 _n	9,5106 _n	9,4317 _n	8,1529	0,1699	0,3085	0,1952	0,0217	9,7619
<i>b b</i>	8,4204	8,7194	8,5332	8,4086	8,1570	9,7170	0,0000	9,8226	9,7360	9,5936
<i>b c</i>	9,1201 _n	9,3567 _n	9,1065 _n	8,9195 _n	8,5912 _n	9,7027	0,0000 _n	9,8326 _n	9,7512 _n	9,6097 _n
<i>b d</i>	8,7750	8,9272	8,5111	7,8396	8,0403 _n	9,7068	0,0000	9,8264	9,7365	9,5792
<i>b e</i>	9,0690 _n	9,3597 _n	9,1683 _n	9,0418 _n	8,7957 _n	9,7540	9,9700	9,7063	9,5141	9,1932
<i>b n</i>	8,2390	8,6384	7,7801 _n	7,7621 _n	8,8065	9,6827	0,0000	9,6427	9,3260	8,9495
<i>b s</i>	8,1117 _n	8,6708 _n	8,9348 _n	8,9185 _n	7,7160	0,2938	0,4297	0,3220	0,1635	9,9396
<i>c c</i>	9,8198	9,9940	9,6798	9,4304	9,0254	9,6884	0,0000	9,8426	9,7664	9,6258
<i>c d</i>	9,4747 _n	9,5645 _n	9,0844 _n	8,3505 _n	8,4745	9,6925 _n	0,0000 _n	9,8364 _n	9,7517 _n	9,5953 _n
<i>c e</i>	9,7685	9,9970	9,7416	9,5527	9,2299	9,7397 _n	9,9700 _n	9,7163 _n	9,5293	9,2093 _n
<i>c n</i>	8,9387 _n	9,2757 _n	8,5534	8,2730	9,2407 _n	9,6684 _n	0,0000 _n	9,6527 _n	9,3412 _n	8,9656 _n
<i>c s</i>	8,8114	9,3081	9,5081	9,4294	8,1502 _n	0,2795 _n	0,5670 _n	0,3320 _n	0,1787 _n	9,9557 _n
<i>d d</i>	9,1296	9,1350	8,4890	7,2706	7,9236	9,6966	0,0000	9,8302	9,7370	9,5648
<i>d e</i>	9,4234 _n	9,5675 _n	9,1462 _n	8,4728 _n	8,6790	9,7438	9,9700	9,7101	9,5146	9,1788
<i>d n</i>	9,5936	8,8462	7,7580 _n	7,1931 _n	8,6898 _n	8,6725	0,0000	9,6465	9,3265	8,9351
<i>d s</i>	8,4663 _n	8,8786 _n	8,9127 _n	8,3495 _n	7,5993 _n	0,2836	0,5670	0,3258	0,1640	9,9252
<i>e e</i>	8,7172	0,0000	9,8034	9,6750	9,4344	9,7910	9,9400	9,5900	9,2922	8,7928
<i>e n</i>	8,8874 _n	9,2787 _n	8,4152	8,3953	9,4452 _n	9,7197	9,9700	9,5264	9,1041	8,5491
<i>e s</i>	8,7601	9,3111	9,5699	9,5517	8,3547 _n	0,3308	0,5370	0,2057	9,9416	9,5392
<i>n n</i>	8,0576	8,5574	7,0270	7,1156	9,4560	9,6484	0,0000	9,4628	8,9160	8,3054
<i>n s</i>	7,9303 _n	8,5898 _n	8,1817	8,2720	8,3655	0,2595	0,5670	0,1421	9,7535	9,2955

Zu diesen Grössen suchen wir nun die Numeri auf. Hierbei ergeben sich verschiedene Proben. Es muss z. B. für jede Gleichung:

$$aa + ab + ac + ad + ae + an = as$$

sein. Gewöhnlich aber, wenn die Zahl der Bedingungsgleichungen nicht zu gross ist, begnügt man sich damit, die Summen dieser Gleichungen zu verificiren. Man sieht also zunächst nach, ob z. B.:

$$[aa] + [ab] + [ac] + [ad] + [ae] + [an] = [as]$$

ist. Erst wenn diese Summen nicht stimmen, verificirt man dann jede einzelne dieser Gleichungen und sucht so die Fehler allmähig zu localisiren. Hierbei geht freilich immer ziemlich viel Zeit verloren; auch dem geübtesten Rechner begegnen bei dieser logarithmischen Bildung der Normalgleichungen Vorzeichenfehler, weshalb es, wie das auch Oppolzer thut, vorzuziehen sein dürfte, der bald zu besprechenden Bessel'schen Methode den Vorzug zu geben.

Im vorliegenden Falle erhält man:

Glei- chung	$a a$	$a b$	$a c$	$a d$	$a e$	$a n$	$a s$	Probe	$b b$	$b c$
(1)	+ 0,6705	+ 0,1328	— 0,6655	+ 0,3006	— 0,5913	+ 0,0875	— 0,0653	+ 4,2282	+ 0,0263	— 0,1318
(2)	+ 1,0000	+ 0,2290	— 0,9931	+ 0,3694	— 1,0000	+ 0,1900	— 0,2047	+ 2,9111	+ 0,0524	— 0,2274
(3)	+ 0,4840	+ 0,1285	— 0,4811	+ 0,1222	— 0,5547	— 0,0227	— 0,3240	— 4,8380	+ 0,0341	— 0,1278
(4)	+ 0,2723	+ 0,0855	— 0,2708	+ 0,0227	— 0,3589	— 0,0189	— 0,2702	+ 3,0700	+ 0,0256	— 0,0831
(5)	+ 0,1074	+ 0,0393	— 0,1067	— 0,0300	— 0,1708	+ 0,1752	+ 0,0142	— 0,8238	+ 0,0144	— 0,0390
(6)	+ 0,2945	+ 0,3918	— 0,3791	+ 0,3827	+ 0,4267	+ 0,3620	+ 1,4788	+ 2,0696	+ 0,5212	— 0,5043
(7)	+ 0,5723	+ 0,7565	— 0,7565	+ 0,7565	+ 0,7060	+ 0,7565	+ 2,7913	—	+ 1,0000	— 1,0000
(8)	+ 0,3707	+ 0,4964	— 0,5080	+ 0,5007	+ 0,3798	+ 0,3280	+ 1,5675	—	+ 0,6647	— 0,6802
(9)	+ 0,2834	+ 0,3928	— 0,4068	+ 0,3933	+ 0,2357	+ 0,1529	+ 1,0512	—	+ 0,5445	— 0,5639
(10)	+ 0,1731	+ 0,2605	— 0,2704	+ 0,2521	+ 0,1037	+ 0,0591	+ 0,5780	—	+ 0,3922	— 0,4071
Σ	+ 4,2282	+ 2,9111	— 4,8380	+ 3,0700	— 0,5238	+ 2,0696	+ 6,6168	+ 6,6171	+ 3,2754	— 3,7646

Glei- chung	$b d$	$b e$	$b n$	$b s$	Probe	$c c$	$c d$	$c e$	$c n$	$c s$
(1)	+ 0,0596	— 0,1172	+ 0,0173	— 0,0129	+ 2,9111	+ 0,6604	— 0,2983	+ 0,5868	— 0,0868	+ 0,0648
(2)	+ 0,0846	— 0,2290	+ 0,0435	— 0,0469	+ 3,2754	+ 0,9863	— 0,3669	+ 0,9931	— 0,1887	+ 0,2033
(3)	+ 0,0324	— 0,1473	— 0,0060	— 0,0861	— 3,7646	+ 0,4784	— 0,1214	+ 0,5516	+ 0,0226	+ 0,3222
(4)	+ 0,0069	— 0,1101	— 0,0058	— 0,0329	+ 3,2768	+ 0,2694	— 0,0224	+ 0,3571	+ 0,0188	+ 0,2688
(5)	— 0,0110	— 0,0625	+ 0,0640	+ 0,0052	+ 1,8260	+ 0,1060	+ 0,0298	+ 0,1698	— 0,1741	— 0,0141
(6)	+ 0,5091	+ 0,5675	+ 0,4816	+ 1,9670	+ 2,3347	+ 0,4880	— 0,4926	— 0,5491	— 0,4660	— 1,9033
(7)	+ 1,0000	+ 0,9333	+ 1,0000	+ 3,6898	—	+ 1,0000	— 1,0000	— 0,9333	— 1,0000	— 3,6898
(8)	+ 0,6705	+ 0,5085	+ 0,4393	+ 2,0990	—	+ 0,6960	— 0,6861	— 0,5204	— 0,4496	— 2,1478
(9)	+ 0,5452	+ 0,3267	+ 0,2118	+ 1,4566	—	+ 0,5840	— 0,5645	— 0,3383	— 0,2194	— 1,5090
(10)	+ 0,3795	+ 0,1561	+ 0,0890	+ 0,8702	—	+ 0,4225	— 0,3939	— 0,1619	— 0,0924	— 0,9030
Σ	+ 3,2768	+ 1,8260	+ 2,3347	+ 9,8590	+ 9,8594	+ 5,6910	— 3,9163	+ 0,1554	— 2,6356	— 9,3079

Glei- chung	Probe	$d d$	$d e$	$d n$	$d s$	Probe	$e e$	$e n$	$e s$	Probe
(1)	— 4,8380	+ 0,1348	— 0,2651	+ 0,0392	— 0,0293	+ 3,0700	+ 0,5214	— 0,0772	+ 0,0576	— 0,8238
(2)	— 3,7646	+ 0,1365	— 0,3694	+ 0,0702	— 0,0756	+ 3,2768	+ 1,0000	— 0,1900	+ 0,2047	+ 1,8260
(3)	+ 5,6910	+ 0,0308	— 0,1401	— 0,0057	— 0,0818	— 3,9163	+ 0,6359	+ 0,0260	+ 0,3714	+ 0,1554
(4)	— 3,9163	+ 0,0019	— 0,0297	— 0,0016	— 0,0224	+ 3,9889	+ 0,4732	+ 0,0248	+ 0,3562	+ 1,7221
(5)	+ 0,1554	+ 0,0084	+ 0,0478	— 0,0490	— 0,0040	+ 1,7221	+ 0,2719	— 0,2787	— 0,0226	+ 5,0385
(6)	— 2,6356	+ 0,4972	+ 0,5544	+ 0,4705	+ 1,9213	+ 2,2649	+ 0,6180	+ 0,5244	+ 2,1419	+ 1,4611
(7)	—	+ 1,0000	+ 0,9333	+ 1,0000	+ 3,6898	—	+ 0,8710	+ 0,9333	+ 3,4435	—
(8)	—	+ 0,6764	+ 0,5130	+ 0,4431	+ 2,1174	—	+ 0,3890	+ 0,3360	+ 1,6058	—
(9)	—	+ 0,5458	+ 0,3270	+ 0,2121	+ 1,4588	—	+ 0,1960	+ 0,1271	+ 0,8742	—
(10)	—	+ 0,3671	+ 0,1509	+ 0,0861	+ 0,8418	—	+ 0,0621	+ 0,0354	+ 0,3461	—
Σ	— 9,3081	+ 3,3989	+ 1,7221	+ 2,2649	+ 9,8160	+ 9,8164	+ 5,0385	+ 1,4611	+ 9,3788	+ 9,3793

Glei- chung	$n n$	$n s$	Probe	Glei- chung	$n n$	$n s$	Probe
(1)	+ 0,0114	— 0,0085	+ 2,0696	(6)	+ 0,4450	+ 1,8176	+ 2,1736
(2)	+ 0,0361	— 0,0389	+ 2,3347	(7)	+ 1,0000	+ 3,6898	—
(3)	+ 0,0011	+ 0,0152	— 2,6356	(8)	+ 0,2903	+ 1,3871	—
(4)	+ 0,0013	+ 0,0187	+ 2,2649	(9)	+ 0,0824	+ 0,5669	—
(5)	+ 0,2858	+ 0,0232	+ 1,4611	(10)	+ 0,0202	+ 0,1975	—
				Σ	+ 2,1736	+ 7,6686	+ 7,6683

Da also die Proben stimmen, so ergeben sich folgende Normalgleichungen:

1. $+ 5,6910 z + 0,1554 v - 4,8380 x - 3,9163 u - 3,7646 y = - 2,6356$
2. $+ 0,1554 z + 5,0385 v - 0,8238 x + 1,7221 u + 1,8260 y = + 1,4611$
3. $- 4,8380 z - 0,8238 v + 4,2282 x + 3,0700 u + 2,9111 y = + 2,0696$
4. $- 3,9163 z + 1,7221 v + 3,0700 x + 3,3989 u + 3,2768 y = + 2,2649$
5. $- 3,7646 z + 1,8260 v + 2,9111 x + 3,2768 u + 3,2754 y = + 2,3347$

Diese Gleichungen haben wir so geschrieben, wie man das gewöhnlich zu thun pflegt. Man stellt diejenige Gleichung und Unbekannte an die Spitze, für welche der quadratische Coëfficient den grössten Werth hat. In diesem Falle hatte man:

$$[cc] > [ee] > [aa] > [dd] > [bb].$$

Man schreibt also in die Diagonale:

$$\begin{matrix} [cc] & & & & \\ & [ee] & & & \\ & & [aa] & & \\ & & & [dd] & \\ & & & & [bb], \end{matrix}$$

woraus sich obige Anordnung der fünf Gleichungen von selbst ergibt. Bevor wir zu ihrer Auflösung schreiten, besprechen wir zuvor kurz das Bessel'sche Verfahren, die Normalgleichungen zu bilden, sowie Laplace's Methode, gewisse wahrscheinliche Werthe der Unbekannten zu bestimmen.

Bessel hatte den glücklichen Gedanken, zur Bildung der Normalgleichungen Quadrattafeln heranzuziehen. Es ist ja:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \\ (a - b)^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \end{aligned}$$

und mithin wird:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= \frac{1}{2} [(a + b)^2 + (a - b)^2] \\ ab &= \frac{1}{4} [(a + b)^2 - (a - b)^2]. \end{aligned}$$

Man kann demnach in einfacher Weise die Summe der Quadrate zweier Grössen und ihr Product durch die Quadrate ihrer Summe und ihrer Differenz ausdrücken und die Rechnung etwa in folgender Weise anordnen.

Man beginnt damit, wie oben die Gleichungen homogen zu machen, und schlägt dann die Numeri von a , b u. s. w. auf. Diese Operationen müssen mit der grössten Sorgfalt ausgeführt werden, da sie im Folgenden nicht mehr controlirt werden. Vor Fehlern beim Aufschlagen der Numeri kann man sich auch sichern durch abwechselnde Anwendung logarithmischer und antilogarithmischer Tafeln (Tafeln, welche die Numeri als Functionen der Logarithmen geben). Die Vorzeichen müssen besonders verificirt werden. So erhält man folgende Uebersicht:

Gleichung:

	1	2	3	...
a	.	.	.	
b	.	.	.	
c	.	.	.	
d	.	.	.	
e	.	.	.	
f	.	.	.	
n	.	.	.	

Die nun folgenden Operationen bedürfen keiner besonderen Controle, sie controliren sich gegenseitig.

Wir schreiben successive die erste, zweite, dritte Linie u. s. w. auf einen Papierstreifen und erhalten so:

Gleichung:

	1	2	3	...
$a + b$.	.	.	
$a - b$.	.	.	
$a + c$.	.	.	
$a - c$.	.	.	
$a + d$.	.	.	
$a - d$.	.	.	
$a + e$.	.	.	
$a - e$.	.	.	
$a + f$.	.	.	
$a - f$.	.	.	
$a + n$.	.	.	
$a - n$.	.	.	
$b + c$.	.	.	
$b - c$.	.	.	
$b + d$.	.	.	
$b - d$.	.	.	
$b + e$.	.	.	
$b - e$.	.	.	
$b + f$.	.	.	
$b - f$.	.	.	
$b + n$.	.	.	
$b - n$.	.	.	

	1	2	3	...
$c + d$.	.	.	
$c - d$.	.	.	
$c + e$.	.	.	
$c - e$.	.	.	
$c + f$.	.	.	
$c - f$.	.	.	
$c + n$.	.	.	
$c - n$.	.	.	
$d + e$.	.	.	
$d - e$.	.	.	
$d + f$.	.	.	
$d - f$.	.	.	
$d + n$.	.	.	
$d - n$.	.	.	
$e + f$.	.	.	
$e - f$.	.	.	
$e + n$.	.	.	
$e - n$.	.	.	
$f + n$.	.	.	
$f - n$.	.	.	

Mittelst der im Anhange gegebenen Quadrattafel XVIII¹⁾ bildet man nun die Quadrate aller dieser Grössen, schreibt dieselben aber in etwas anderer Weise wie folgt:

Gleichung	$(a + b)^2$	$(a - b)^2$	$(a + c)^2$	$(a - c)^2$...
(1)	
(2)	
(3)	
.	
.	
.	
	Σ	Σ	Σ	Σ	

¹⁾ Entnommen aus Bremiker's Logarithmisch-Trigonometrischen Tafeln mit fünf Decimalstellen, mit freundl. Genehmigung der Weidmann'schen Buchhandlung in Berlin.

Zunächst bildet man nun:

$$\begin{aligned}\Sigma (a + b)^2 + \Sigma (a - b)^2 &= 2 \Sigma a^2 + 2 \Sigma b^2 \\ \Sigma (a + c)^2 + \Sigma (a - c)^2 &= 2 \Sigma a^2 + 2 \Sigma c^2 \\ &\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

Aus den beiden obenstehenden Gleichungen erhält man dann z. B. sofort durch Subtraction:

$$2 \Sigma b^2 - 2 \Sigma c^2 = \Sigma (a + b)^2 + \Sigma (a - b)^2 - \Sigma (a + c)^2 - \Sigma (a - c)^2.$$

Andererseits aber hat man:

$$2 \Sigma b^2 + 2 \Sigma c^2 = \Sigma (b + c)^2 + \Sigma (b - c)^2.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}4 \Sigma b^2 &= \Sigma (a + b)^2 + \Sigma (a - b)^2 \\ &\quad + \Sigma (b + c)^2 + \Sigma (b - c)^2 \\ &\quad - \Sigma (a + c)^2 - \Sigma (a - c)^2 \\ 4 \Sigma c^2 &= \Sigma (b + c)^2 + \Sigma (b - c)^2 \\ &\quad + \Sigma (a + c)^2 + \Sigma (a - c)^2 \\ &\quad - \Sigma (a + b)^2 - \Sigma (a - b)^2 \\ 4 \Sigma a^2 &= \Sigma (a + c)^2 + \Sigma (a - c)^2 \\ &\quad + \Sigma (a + b)^2 + \Sigma (a - b)^2 \\ &\quad - \Sigma (b + c)^2 - \Sigma (b - c)^2\end{aligned}$$

Man kann also durch solche Formeln, deren Bau leicht ersichtlich ist, die verschiedenen Quadratsummen bestimmen.

Weiter erkennt man sofort, dass dies auf sehr vielfache Weise geschehen kann. Anstatt z. B. oben stehende Formel zur Berechnung von $4 \Sigma a^2$ zu verwenden, könnte man z. B. auch setzen:

$$\begin{aligned}4 \Sigma a^2 &= \Sigma (a + d)^2 + \Sigma (a - d)^2 \\ &\quad + \Sigma (a + e)^2 + \Sigma (a - e)^2 \\ &\quad - \Sigma (d + e)^2 - \Sigma (d - e)^2.\end{aligned}$$

Indem man so:

$$4 \Sigma a^2, 4 \Sigma b^2 \dots \text{u. s. w.}$$

bildet, erhält man nicht nur die Werthe von $\Sigma a^2, \Sigma b^2 \dots$ u. s. w., die für das Folgende gebraucht werden, sondern controlirt auch gleichzeitig $\Sigma (a + b)^2, \Sigma (a - b)^2, \Sigma (a + c)^2 \dots$

Nach dieser Controle kann man dann ohne Weiteres die Doppelproducte bilden:

$$4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2 \text{ u. s. w.}$$

Diese Bessel'sche Methode zur Aufstellung der Normalgleichungen hat gegenüber der logarithmischen zwei wesentliche Vorzüge:

1. Es ist fast unmöglich, bei ihrer Anwendung Vorzeichenfehler zu begehen, da ein Quadrat einer Zahl immer positiv ist.
2. Die Controlen ergeben sich von selbst und erfordern nicht die Einführung besonderer Hilfsgrößen.

Es sei hier auch noch kurz ein einfaches Verfahren erwähnt, welches Laplace vorgeschlagen hat, um aus einer grösseren Zahl von Bedingungsgleichungen gute Werthe der Unbekannten zu bestimmen. Die Bedingungsgleichungen astronomischer Aufgaben zeichnen sich gewöhnlich dadurch aus, dass sich die Differentialquotienten nach den Unbekannten von einer Bedingungsgleichung zur anderen nur wenig ändern. Z. B. in benachbarten Normalorten, einer Opposition eines Kometen, sind die Differentialquotienten nach den Elementen fast nahezu gleich, was einfach durch die Aehnlichkeit der geometri-

sehen Verhältnisse bedingt ist. Hieraus folgt, dass man keinen besonderen Vortheil davon haben würde, jede einzelne von diesen Bedingungsgleichungen als ein besonderes Individuum zu betrachten. In der That, wären die Coëfficienten genau gleich, so wäre es überhaupt nicht möglich, aus ihnen eine der Unbekannten zu eliminiren. Man könnte dann z. B. ganz einfach beide Gleichungen durch ihr Mittel ersetzen, oder jede Gleichung mit der Zahl der ihr zugehörigen Beobachtungen multipliciren und die beiden so erhaltenen Gleichungen addiren.

Aus diesem Grunde hat Laplace vorgeschlagen, immer je benachbarte Bedingungsgleichungen zu mitteln und sich dabei so einzurichten, dass die Zahl der so erhaltenen Mittelgleichungen gleich ist der Zahl der zu bestimmenden Unbekannten. Man gelangt also auf diese Weise sehr schnell zu einer Art Normalgleichungen, aus denen man dann ganz gute Werthe der Unbekannten bestimmen kann.

Diese Methode dürfte sich besonders dann eignen, wenn man Bedingungsgleichungen unter verschiedenen Annahmen auflösen will. Aber auch in der Bahnrechnung kann sie jedenfalls oft mit Vortheil verwendet werden.

Die Auflösung obiger Normalgleichungen kann man etwa in folgender Weise vornehmen. Wir stellen die Coëfficienten der Normalgleichungen in Colonnen zusammen und geben für jede Gleichung (jede Horizontallinie) Σ die Summe aller dieser Grössen und dann die Logarithmen derselben Grössen.

Gleichung	Coëfficient von z	Coëfficient von v	Coëfficient von x	Coëfficient von u	Coëfficient von y	Rechte Seite	Σ
(1)	+ 5,6910	+ 0,1554	— 4,8380	— 3,9163	— 3,7646	— 2,6356	— 9,3081
(2)	+ 0,1554	+ 5,0385	— 0,8238	+ 1,7221	+ 1,8260	+ 1,4611	+ 9,3793
(3)	— 4,8380	— 0,8238	+ 4,2282	+ 3,0700	+ 2,9111	+ 2,0696	+ 6,6171
(4)	— 3,9163	+ 1,7221	+ 3,0700	+ 3,3939	+ 3,2768	+ 2,2649	+ 9,8164
(5)	— 3,7646	+ 1,8260	+ 2,9111	+ 3,2768	+ 3,2754	+ 2,3347	+ 9,8594
(1)	0,75519	9,19145	0,68467 _n	0,59287 _n	0,57572 _n	0,42088 _n	0,96886 _n
(2)	9,19145	0,70230	9,91582 _n	0,23606	0,26150	0,16468	0,97217
(3)	0,68467 _n	9,91582 _n	0,62615	0,48714	0,46406	0,31589	0,82067
(4)	0,59287 _n	0,23606	0,48714	0,53134	0,51545	0,35505	0,99195
(5)	0,57572 _n	0,26150	0,46406	0,51545	0,51526	0,36823	0,99385

Beim Aufschlagen dieser Logarithmen kann man sich natürlich einige Arbeit sparen in Folge der Symmetrie der Normalgleichungen bezüglich der Diagonale.

Anstatt nun aber die Elimination so fortzusetzen, wie das gewöhnlich geschieht, multipliciren wir alle Gleichungen mit einem Factor, so dass alle Coëfficienten von z gleich + 1 werden.

Diese Operation führen wir natürlich zunächst logarithmisch durch und schlagen dann die Numeri auf. Hierbei ergibt sich für jede dieser neuen Gleichungen eine Controle: Die Summe aller der vor Σ stehenden Grössen muss gleich der unter Σ stehenden sein. Diese erstere Grösse fügen wir unter „Controle“ bei.

Gleichung	z	v	x	u	y	Rechte Seite	Σ	Controle
(1)	0,00000	8,43626	9,92948 _n	9,83768 _n	9,82053 _n	9,66569 _n	0,21367 _n	
(2)	0,00000	1,51085	0,72437 _n	1,04461	1,07005	0,97323	1,78072	
(3)	0,00000	9,23115	9,94148 _n	9,80247 _n	9,77939 _n	9,63122 _n	0,13600 _n	
(4)	0,00000	9,64319 _n	9,89427 _n	9,93847 _n	9,92258 _n	9,76218 _n	0,89908 _n	
(5)	0,00000	9,68578 _n	9,88834 _n	9,93973 _n	9,93954 _n	9,79251 _n	0,41813 _n	
(1)	+ 1,00000	+ 0,02731	— 0,85012	— 0,68815	— 0,66150	— 0,46312	— 1,63558	— 1,63558
(2)	+ 1,00000	+ 32,42286	— 5,30113	+ 11,08179	+ 11,75027	+ 9,40220	+ 60,35571	+ 60,35599
(3)	+ 1,00000	+ 0,17028	— 0,87394	— 0,63456	— 0,60171	— 0,42778	— 1,36772	— 1,36771
(4)	+ 1,00000	— 0,43973	— 0,78892	— 0,86790	— 0,83672	— 0,57834	— 2,50659	— 2,50661
(5)	+ 1,00000	— 0,48504	— 0,77328	— 0,87042	— 0,87004	— 0,62017	— 2,61894	— 2,61895

Nun schreibe man die erste Gleichung auf einen Streifen und ziehe sie von allen folgenden ab. Hierdurch verschwindet z . Dann bildet man wieder die Logarithmen und macht alle Coëfficienten von v gleich + 1. Hierzu schlägt man wieder die Numeri auf und bildet die Controlen. Indem man dann wieder die erste Gleichung von allen folgenden subtrahirt, eliminirt sich v u. s. w.

Gleichung	v	x	u	y	Rechte Seite	Σ	Controle
(2')	+ 32,39555	— 4,45101	+ 11,76994	+ 12,41177	+ 9,86532	+ 61,99129	
(3')	+ 0,14297	— 0,02382	+ 0,05359	+ 0,05979	+ 0,03534	+ 0,26786	
(4')	— 0,46704	+ 0,06620	— 0,17975	— 0,17522	— 0,11522	— 0,87101	
(5')	— 0,51235	+ 0,07684	— 0,18227	— 0,20854	— 0,15705	— 0,98336	
(2')	1,51049	0,64846 _n	1,07078	1,09383	0,99411	1,79233	
(3')	9,15525	8,37694 _n	8,72908	8,77663	8,54827	9,42791	
(4')	9,66936 _n	8,82086	9,25467 _n	9,24358 _n	9,06153 _n	9,94003 _n	
(5')	9,70957 _n	8,88559	9,26072 _n	9,31919 _n	9,19604 _n	9,99271 _n	
(2')	0,00000	9,13797 _n	9,56029	9,58334	9,48362	0,28184	
(3')	0,00000	9,22169 _n	9,57383	9,62138	9,39302	0,27266	
(4')	0,00000	9,15150 _n	9,58531	9,57422	9,39217	0,27067	
(5')	0,00000	9,17602 _n	9,55115	9,60962	9,48647	0,28314	
(2')	+ 1,00000	— 0,13739	+ 0,36332	+ 0,38313	+ 0,30452	+ 1,91357	+ 1,91358
(3')	+ 1,00000	— 0,16661	+ 0,37483	+ 0,41820	+ 0,24718	+ 1,87352	+ 1,87360
(4')	+ 1,00000	— 0,14174	+ 0,38486	+ 0,37516	+ 0,24670	+ 1,86496	+ 1,86498
(5')	+ 1,00000	— 0,14998	+ 0,35575	+ 0,40703	+ 0,30653	+ 1,91930	+ 1,91933
(3'')		— 0,02922	+ 0,01151	+ 0,03507	— 0,05734	— 0,04005	
(4'')		— 0,00435	+ 0,02154	— 0,00797	— 0,05782	— 0,04861	
(5'')		— 0,01261	— 0,00757	+ 0,02390	+ 0,00201	+ 0,00573	
(3'')		8,46568 _n	8,06108	8,54494	8,75846 _n	8,60260 _n	
(4'')		7,63849 _n	8,33325	7,90146 _n	8,76208 _n	8,65673 _n	
(5'')		8,10072 _n	7,87910 _n	8,37840	7,30320	7,75815	
(3'')		0,00000	9,59540 _n	0,07926 _n	0,29278	0,13692	
(4'')		0,00000	0,69476 _n	0,26297	1,12359	1,04824	
(5'')		0,00000	9,77838	0,27768 _n	9,20248 _n	9,65743 _n	

Gleichung	v	x	u	y	Rechte Seite	Σ	Controle
(3'')		+ 1,00000	— 0,89391	— 1,20022	+ 1,96236	+ 1,37063	+ 1,36823
(4'')		+ 1,00000	— 4,95178	+ 1,83217	+ 13,29212	+ 11,17487	+ 11,17251
(5'')		+ 1,00000	+ 0,60031	— 1,89530	— 0,15940	— 0,45439	— 0,45439
(4''')			— 4,55787	+ 3,03239	+ 11,32976	+ 9,80424	
(5''')			+ 0,99422	— 0,69508	— 2,12176	— 1,82502	
(4''')			0,65876 _n	0,43178	1,05422	0,99141	
(5''')			9,99748	9,84204 _n	0,32670 _n	0,26126 _n	
(4''')			0,00000	9,82302 _n	0,39546 _n	0,33265 _n	
(5''')			0,00000	9,84456 _n	0,32922 _n	0,26378 _n	
(4''')			+ 1,00000	— 0,66530	— 2,48576	— 2,15105	— 2,15106
(5''')			+ 1,00000	— 0,69913	— 2,13414	— 1,83561	— 1,83327
(5''')				— 0,03383	+ 0,35162	+ 0,31544	
(5''')				8,52930 _n	9,54607	9,49892	
(5''')				0,00000	1,01677 _n	0,96962 _n	
(5''')				+ 1,00000	— 10,39366	— 9,32440	— 9,39366

Aus dem Vorhergehenden ersieht man, wie die Rechnung gegen den Schluss hin immer ungenauer wird. Die Normalgleichungen widersetzen sich augenscheinlich der Elimination und die Unbekannten sind nicht sehr gut bestimmt. Es liegt das daran, dass das Bahnstück, auf dem die Normalorte vertheilt sind, zu kurz ist. Für solche Fälle hat man vorgeschlagen, die Normalgleichungen mit sechs- oder noch mehrstelligen Tafeln aufzulösen. Die Anwendung sechsstelliger Tafeln ist vielleicht manchmal anzurathen. Obgleich nämlich z. B. die Grössen ab jede für sich nur vierstellig berechnet werden, so könnte doch, wenn die Beobachtungen sehr zahlreich sind, ihre Summe $[ab]$ etwas genauer sein. Mehr als sechsstellige Tafeln anzuwenden, ist indess wohl immer zwecklos.

Zu verwerfen sind ferner alle diejenigen Methoden, nach welchen die Unbekannten einer dem Probleme fernliegenden Nebenbedingung unterworfen werden, wie z. B. der, dass zwei Normalorte vollständig dargestellt werden müssen. Nur neues Beobachtungsmaterial kann in solchen Fällen die in den Bahnelementen bestehende Unsicherheit aufheben. So sind die Bahnelemente eines periodischen Kometen im Allgemeinen erst dann als gut bestimmt anzusehen, wenn Beobachtungen aus mindestens zwei Oppositionen vorliegen.

Wir gehen nun zum Schluss dazu über, die Unbekannten völlig zu bestimmen und wählen hierzu die folgenden Eliminationsgleichungen:

$$\begin{aligned}
 [0,00000]z &= [8,43626_n]v + [9,92948]x + [9,83768]u + [9,82053]y - 0,46312 \quad (1) \\
 [0,00000]v &= [9,13797]x + [9,56029_n]u + [9,58334_n]y + 0,30452 \quad (2') \\
 [0,00000]x &= [9,59540]u + [0,07926]y + 1,96236 \quad (3'') \\
 [0,00000]u &= [9,82302]y - 2,48576 \quad (4''') \\
 [0,00000]y &= [1,01677_n] \quad (5''')
 \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen bedeuten die eingeklammerten Zahlen Logarithmen, die nicht eingeklammerten hingegen Numeri. Die Gleichung (5''') bestimmt y und ist successive aus Gleichung (5) hervorgegangen; Gleichung (4''') ergibt u und fließt aus Gleichung (4) her u. s. w. Aber y hatte in Gleichung (5) seinen quadratischen Coefficienten $[bb]$, u hatte in Gleichung (4) seinen quadratischen Coefficienten $[dd]$ u. s. w.

Die Eliminationsgleichungen stammen also jede von der Normalgleichung her, welche die zu bestimmende Unbekannte mit quadratischem Coefficienten enthielt. Es scheint, dass diese Anordnung im Allgemeinen die vortheilhafteste ist.

Wir gehen nun dazu über, aus obigen Eliminationsgleichungen die Unbekannten successive zu bestimmen. Man findet:

$$\begin{aligned} y &= [1,01677_n] \\ u &= [0,97316_n] \\ x &= [1,15276_n] \\ v &= [0,75959_n] \\ z &= [1,41580_n]. \end{aligned}$$

Um die so erhaltenen Werthe der Unbekannten zu prüfen, schlägt man gewöhnlich den Weg ein, das betreffende Normalgleichungssystem noch einmal anders aufzulösen. Kürzer ist es, die Werthe der Unbekannten in die Normalgleichungen einzusetzen und zu sehen, ob diese letzteren dann erfüllt sind. Im vorliegenden Falle erhält man so:

Gleichung	z mal Coefficient	v mal Coefficient	x mal Coefficient	u mal Coefficient	y mal Coefficient	Rechte Seite	Linke Seite Σ
(1)	2,17099 _n	9,95104	1,83743	1,56603	1,59249		
(2)	0,60725 _n	1,46189	1,06858	1,20922 _n	1,27827 _n		
(3)	2,10047	0,67541 _n	1,77891 _n	1,46030 _n	1,48083 _n		
(4)	2,00867	0,99565	1,63990 _n	1,50450 _n	1,53222 _n		
(5)	1,99152	1,02109	1,61682 _n	1,48861 _n	1,53203 _n		
(1)	-148,2483	+ 0,8934	+ 68,7750	+ 36,8155	+ 39,1282	- 2,6356	- 2,6362
(2)	- 4,0481	+ 28,9660	+ 11,7105	- 16,1889	- 18,9787	+ 1,4611	+ 1,4608
(3)	+ 126,0286	- 4,7360	- 60,1050	- 28,8600	- 30,2571	+ 2,0696	+ 2,0705
(4)	+ 102,0163	+ 9,9003	- 43,6420	- 31,9521	- 34,0583	+ 2,2649	+ 2,2642
(5)	+ 98,0660	+ 10,4976	- 41,3827	- 30,8043	- 34,0431	+ 2,3347	+ 2,3335

Die Uebereinstimmung der rechten und linken Seiten der Normalgleichungen muss als eine für fünfstellige Rechnung genügende bezeichnet werden, denn wenn man z. B. in Gleichung (1) den Numerus -148,2483 fünfstellig bildet, kann man natürlich nicht erwarten, dass die letzten Stellen sicher sind.

Das Ausgangselementensystem, bezogen auf die Ekliptik war nun:

$$\begin{aligned} T &= 1890. \text{ Juli } 8,601\,360 \text{ M. Z. Berlin} \\ \omega &= 85^\circ 42' 50'',90 \\ \delta &= 14^\circ 20' 31'',60 \\ i &= 63^\circ 18' 23'',80 \\ \log q &= 9,883\,408\,6. \end{aligned}$$

Aus obigen Werthen von x, y, z, u und v , die sich ebenfalls auf die Ekliptik beziehen, ergibt sich, unter Berücksichtigung der Fehlereinheit ($\log v = 1,3715$):

$$\begin{aligned} \log dT &= 3,8689_n & \sin id\delta &= 2,1189_n \\ d \log q &= 1,8578_n & di &= 2,1590. \\ d\pi &= 2,6883_n \end{aligned}$$

Zunächst ist zu bemerken, dass nach der Anordnung, wie die Bedingungsgleichungen aufgestellt waren (Oppolzer's Anordnung), dT und $d \log q$ noch durch 206264,8 zu dividiren sind, um sie in den gewöhnlichen Einheiten zu erhalten.

Die Variationen der drei letzten Bahnelemente sind in " gegeben, nur muss noch $d\Omega$ von $\sin i$ befreit werden ($i = 63^\circ 18' 23'',80$). Die für die Unbekannten gefundenen Werthe sind noch mit der Fehlereinheit ($\log v = 1,3715$) zu multipliciren. Man erhält so schliesslich:

$$\begin{aligned} dT &= - 0^d,03585 \\ d \log q &= - 0,0003495 \\ d\pi &= - 8' 7'',9 \\ di &= + 2' 24'',2 \\ d\Omega &= - 2' 27'',2 \\ d\omega = d\pi - d\Omega &= - 5' 40'',7. \end{aligned}$$

Diese Correctionen hat man also nach der Methode der kleinsten Quadrate an obiges Elementensystem anzubringen, um die definitiven Elemente zu erhalten. Man pflegt dann gewöhnlich noch das definitive Elementensystem mit den Normalörtern zu vergleichen, bildet hierzu im Sinne Beobachtung (Normalort) minus Rechnung $\Delta \alpha \cos \delta$ und $\Delta \delta$ und sieht durch Bildung von $\Sigma[(\Delta \alpha \cos \delta)^2 + (\Delta \delta)^2]$ für das definitive und das ursprüngliche Elementensystem, wieviel man durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate gewonnen hat.

Um sich aber auch noch zu vergewissern, dass man nicht etwa bei Bildung der Zuwächse der Elemente aus den Unbekannten der Normalgleichungen $x, y, z \dots$ Fehler begangen hat, setzt man $x, y, z \dots$ in die homogen gemachten Bedingungsgleichungen ein. Die Residua derselben müssen (bei Berücksichtigung der Fehlereinheit) mit den durch directe Rechnung (Normalort minus definitive Elemente) gefundenen $\Delta \alpha \cos \delta$ und $\Delta \delta$ identisch sein.

Achte Abtheilung.

Die Berechnung von Doppelsternbahnen.

Hundertundelfte Vorlesung.

Einleitende Bemerkungen.

Unter den zahlreichen Entdeckungen des älteren Herschel hat sich keine für die Fixsternastronomie so epochemachend erwiesen, als die Entdeckung der Thatsache, dass ausserordentlich häufig auch selbstleuchtende Körper, wie die Fixsterne, zu zweien, dreien, zuweilen in noch grösserer Anzahl in einem einzigen engeren Systeme vereinigt sind und sich um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt des Systemes bewegen. Die Fortsetzung der Beobachtungen nach Herschel hat zu der Kenntniss einer sehr beträchtlichen Zahl solcher Systeme mit nachweisbarer Bewegung geführt; bei einer Reihe von Doppelsternen ist es sogar gelungen, die Gestalt und Lage der Bahn, sowie die Umlaufszeit mit einiger Sicherheit zu ermitteln; bei einer für jetzt allerdings sehr beschränkten Zahl ist nicht ohne Erfolg der Versuch einer Bestimmung der wahren Dimension der Bahn im Vergleiche zu den Bahnen unseres eigenen Sonnensystemes und der daraus folgenden Vergleichung der Masse des Sternpaares mit dem der Sonne versucht worden. Das Material für solche Untersuchungen wächst, wie an Umfang, so an Interesse; es sollen daher in den folgenden Vorlesungen die wichtigsten Vorschriften zum Ordnen und zur Vorbereitung der durch die Beobachtungen gelieferten Data, sowie eine der sichersten Rechnungsmethoden entwickelt werden.

Ehe wir zeigen, wie die aus der Lehre von der Gravitation verallgemeinerten Kepler'schen Gesetze auf Doppelsterne (für die drei- und mehrfachen Sterne besitzen wir noch keine sicheren Methoden) Anwendung finden, ist es nöthig, zu wissen, in welcher Form das Beobachtungsmaterial gegeben zu werden pflegt. Es kann dies in der Weise geschehen, dass man den Rectascensions- und den Declinationsunterschied der beiden Sterne angiebt; doch ist diese Form kaum mehr im Gebrauche. Die jetzt übliche Angabe bestimmt die gegenseitige Lage der beiden Sterne durch Distanz und Positionswinkel. Die Distanz ist der die beiden Sterne verbindende Bogen eines grössten Kreises, in Secunden ausgedrückt, der Positionswinkel derjenige Winkel, welchen dieser grösste Kreis mit dem durch den helleren Stern gelegten Meridian des Himmels macht. Die Positionswinkel pflegt man durch Ost, Süd und West nach dem nördlichen Theile

des Meridians zurückzuzählen. Mit anderen Worten, bezeichnet man die Differenz, Rectascension des Nebensterne — Rectascension des Hauptsterne mit $\Delta\alpha$, den entsprechenden Declinationsunterschied mit $\Delta\delta$, den Positionswinkel mit p , so liegt p

zwischen	0^0	und	90^0 ,	wenn	$\Delta\alpha$	positiv,	$\Delta\delta$	positiv,
"	90^0	"	180^0 ,	"	"	positiv,	"	negativ,
"	180^0	"	270^0 ,	"	"	negativ,	"	negativ,
"	270^0	"	360^0 ,	"	"	negativ,	"	positiv.

Bezeichnet man die Distanz der Sterne, in Secunden ausgedrückt, mit ϱ , so hat man noch:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha \cdot \cos \delta &= \varrho \sin p \\ \Delta\delta &= \varrho \cos p,\end{aligned}$$

wonach sich leicht p und ϱ berechnen lassen, wenn einmal die Beobachtungen in anderer als der gewöhnlichen Form gegeben sein sollten.

Bei fernerer Untersuchungen ist es auch nöthig, zu beachten, dass in Folge der Präcession der durch den Hauptstern gelegte Meridian nicht immer derselbe grösste Kreis der Sphäre bleibt, d. h. dass durch die Präcession eine scheinbare Veränderung des Positionswinkels (offenbar nicht auch der Distanz) hervorgebracht wird. Die deshalb an die Positionswinkel, um diese von dem fremdartigen Einflusse zu befreien, anzubringende Correction findet sich leicht aus der Formel für die jährliche Präcession in Declination:

$$\text{Präcession in Declination} = n \cos \alpha,$$

wobei n für unseren Zweck als eine Constante angesehen werden kann. Stellt $d\Delta\delta$ die sehr kleine Grösse vor, um welche der Declinationsunterschied der beiden Sterne verändert wird, dp den Einfluss der Präcession, so wird:

$$d\Delta\delta = -n \sin \alpha \Delta\alpha,$$

oder, da $\Delta\delta = \varrho \cos p$, $d\Delta\delta = -\varrho \sin p dp$:

$$dp = \frac{n \sin \alpha}{\varrho \sin p} \cdot \Delta\alpha.$$

Da nun:

$$\Delta\alpha = \frac{\varrho \sin p}{\cos \delta}$$

so wird:

$$dp = + \frac{n \sin \alpha}{\cos \delta}.$$

Das ist also der jährliche Zuwachs des Positionswinkels. Will man umgekehrt von p zur Zeit der Beobachtung t auf das Jahr t_0 zurückgehen, so hat man diese Correction mit entgegengesetztem Vorzeichen anzubringen.

Für die numerische Rechnung hat man hiernach die Regel: Um Positionswinkel, welche für das Jahr t gegeben sind, von dem Betrage der Präcession zu befreien und auf das Jahr t_0 zu beziehen, hat man die Correction:

$$- 20''.0548 \sin \alpha \sec \delta (t - t_0)$$

anzubringen. Wir bemerken hier noch gleich, dass man bei den Positionswinkeln die Secunden, wenn sie überhaupt noch berücksichtigt werden, in Bruchtheile von Minuten umzusetzen pflegt.

Hundertundzwölfte Vorlesung.

Fortsetzung der einleitenden Bemerkungen.

Die Lehre von der Gravitation zeigt, dass zwei sich gegenseitig anziehende Massen m und m' einen Kegelschnitt, speciell, wenn derselbe ein in sich zurücklaufender ist, eine Ellipse um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt beschreiben. Der Schwerpunkt theilt hiernach die Verbindungslinie zwischen den beiden Componenten eines Sternpaares im umgekehrten Verhältnisse der Massen; der scheinbare Abstand der Masse m vom Schwerpunkte ist daher gleich:

$$\frac{m'}{m + m'} q,$$

der der Masse m' gleich:

$$\frac{m}{m + m'} q.$$

Da man nun aber die Massen nicht kennt, der Ort des Schwerpunktes daher nicht markirt ist und erst auf eine besondere Art, die wir später besprechen werden, ermittelt werden müsste, so betrachtet man den helleren Stern als ruhend und die um diesen von dem schwächeren Sterne (der gleichwohl an Masse der stärkere sein kann) beschriebene Bahn als den Gegenstand der Rechnung. Die letztere Ellipse ist offenbar der um den Schwerpunkt beschriebenen ähnlich.

In einzelnen Fällen, wie z. B. bei dem Doppelsterne γ Virginis, sind die beiden Componenten so nahe von gleicher Helligkeit, dass die verschiedenen Beobachter in der Wahl des Hauptsternes von einander abweichen, wodurch ein Unterschied von 180° in den entsprechenden Beobachtungen hervorgebracht wird.

Die das Auge mit dem helleren Sterne verbindende Gerade nennt man den Visionsradius. Die im Hauptsterne an die Kugel zu legende Berührungsebene, eine Ebene also, zu welcher der Visionsradius senkrecht steht, dient als Fundamentalebene, um die Lage der Bahn anzugeben, ganz ebenso, wie bei den Körpern unseres Sonnensystemes die Ekliptik gebraucht wird. Die Zählung der Längen, wie z. B. der Länge des Knotens \oslash , geschieht in demselben Sinne und von demselben Nullpunkte, wie für die Positionswinkel. $\pi - \oslash$ ist wieder der Winkel, welcher in der Ebene der Bahn zwischen Perihel und Knoten liegt. Die Neigung der Bahn, i , ist Null, wenn die wirkliche Bahn mit der scheinbaren Bahn, d. h. mit ihrer Projection auf die obige Berührungsebene zusammenfällt; die scheinbare Bahn nennt man auch die Projectionsellipse. Es ist ohne Weiteres klar, dass nicht entschieden werden kann, ob der Nebensterne sich diesseits oder jenseits der Ebene der Projection befindet, und es fällt daher bei den Doppelsternbahnen der Unterschied zwischen aufsteigenden und niedersteigenden Knoten ganz weg.

Es ist eine ebenso leicht zu erkennende als oft benutzte Eigenschaft der Projectionsellipse oder scheinbaren Bahn, dass sich die in ihr von dem scheinbaren Radius vector beschriebenen Sektoren zu einander wie die in der wahren Bahn, demnach ebenfalls wie die Zeiten, verhalten. Das doppelte Element des Sektors der scheinbaren Bahn, auszudrücken durch:

$$q^2 \frac{dp}{dt},$$

wird also eine Constante sein und die Winkelgeschwindigkeit wird dem Quadrate der Distanz umgekehrt proportional sein. Dieser Satz kommt häufig mit Erfolg zur Anwendung, wo es sich darum handelt, den Werth einer Distanz, deren Messung sich Schwierigkeiten entgegengestellt haben, auf rechnendem Wege zu ermitteln.

Die Anzahl der bei einer Doppelsternbahn zu bestimmenden Elemente beläuft sich im Ganzen auf sieben, nämlich auf die folgenden Stücke:

die mittlere Anomalie der Epoche	M
die Länge des Knotens	Ω
die Neigung der Bahn	i
der Winkel zwischen Perihel und Knoten	$\pi - \Omega$
die Excentricität	e
die halbe grosse Axe in Secunden	a
die Umlaufszeit	U .

Die Umlaufszeit, deren Angabe auch durch die der mittleren Winkelbewegung ersetzt werden kann, tritt hier als selbständiges Element auf, da die Masse des Systemes nicht bekannt ist. Bei bekannter Masse und Parallaxe Π des Systemes würde die durch die Gravitationstheorie erlangte Verallgemeinerung des dritten Keppler'schen Gesetzes die mittlere jährliche Bewegung μ nach der Formel:

$$\mu = \frac{365,26 k \sqrt{m + m'}}{a^{3/2} \operatorname{cosec} \Pi^{3/2}},$$

auf die wir später zurückkommen werden, ergeben.

Wir ziehen den Schluss, dass zur Bestimmung der sieben obigen Elemente einer Doppelsternbahn sieben von einander unabhängige Data erforderlich sind. Darunter muss sich aber wenigstens ein Positionswinkel befinden, weil die Bestimmung der Lage und Gestalt der Bahn aus lauter Distanzen offenbar nicht möglich sein würde; desgleichen muss aber auch mindestens eine Distanz gegeben sein, wenn die Dimension der Bahn bestimmt werden soll. Im Allgemeinen ist es vortheilhaft, Gestalt und Lage der Bahn so viel als möglich nur aus Positionswinkeln zu berechnen, da die Beobachtungen der Distanz an grösserer Unsicherheit leiden¹⁾; z. B. können meist sechs Positionswinkel zur Bestimmung von Lage und Gestalt, wonach dann zuletzt die Dimension möglichst gut mit einer Distanz oder mit der Gesamtheit der Distanzen in Uebereinstimmung zu bringen ist, für eine zweckmässige Combination gelten. Zwei Ausnahmen machen sich jedoch in dieser Hinsicht für die Praxis bemerklich. Ist die beobachtete Bahnbewegung nicht bedeutend genug, so werden die zu sechs Epochen beobachteten Positionswinkel, weil die Epochen einander zu nahe rücken, in praktischer Beziehung nicht mehr für ganz unabhängig gelten dürfen; man muss dann von Distanzen Gebrauch machen, um grössere Zeitintervalle zu bekommen. Eine andere Ausnahme zeigt sich, wenn i nahe gleich 90° wird; in diesem Grenzfall hat ja offenbar der Positionswinkel nur zwei von einander verschiedene Werthe, Ω und $180^\circ + \Omega$, die in der Zeit, in welcher der Nebensterne oder die Duplicität verschwindet, in einem grossen Sprunge in einander übergehen (wie z. B. nahe bei α Centauri der Fall ist). Durch diese beiden Positionswinkel werden Ω und i gegeben; es bleiben dann aber noch fünf Elemente übrig, welche in dem strengen Grenzfall nur durch ebenso viele Distanzen bestimmt werden können. Bei einer blossen Annäherung an den Grenzfall wird man

¹⁾ Savary's Methode (siehe die *Connaissance des temps* vom Jahre 1830) und Encke's Methode (siehe das *Berliner Jahrbuch* für 1832) sind trotz aller ihrer Eleganz doch deshalb wenig zur Anwendung gekommen, weil sie vier Distanzen als gegeben betrachten.

wenigstens wohl daran thun, mehr als eine Distanz zu gebrauchen, d. h. die Distanzen nicht lediglich zur Bestimmung der Dimension zu verwenden.

Doppelsternmessungen sind begreiflicher Weise, trotzdem man zu denselben nur die stärksten Vergrösserungen und besten Hilfsmittel verwendet, dennoch wegen der ausserordentlichen Kleinheit der Beobachtungsgrössen verhältnissmässig weit beträchtlicheren Fehlern unterworfen, als die meisten anderen Messungen. Während z. B. eine beobachtete Rectascension oder auch Länge fast immer bis auf wenige Secunden zu verbürgen steht, ist bei einem engen Sternpaare der Positionswinkel aus einem kürzeren Satze von Messungen häufig kaum auf einen ganzen Grad sicher; etwas ungünstiger noch verhalten sich die Distanzen, da deren Bestimmung durch ganz besondere Fehlerquellen, wie persönliche Unterschiede der Beobachter, in höherem Grade, als die der Positionswinkel, beeinflusst wird. Es ergiebt sich aus dem eben Gesagten die Nothwendigkeit, bei Untersuchungen von Doppelsternbahnen vorwiegend Normalörter zu gebrauchen, wie sich solche auf bekannte Weise bilden lassen. Wir nehmen weiter unten stillschweigend an, dass das ganze Beobachtungsmaterial in die gerade hinreichende Anzahl von Normaldaten zusammengezogen sei, z. B. in sechs Positionswinkel und eine Distanz.

Für das Ordnen des Materiales der gemessenen Positionswinkel hat Sir John Herschel ein graphisches Verfahren in Aufnahme gebracht, welches überall als eine sehr nützliche Vorarbeit zu statten kommt, auch wenn man bei der darauf folgenden Bahnbestimmung sich einer anderen als der beiden Herschel'schen Methoden bedienen will¹⁾. Das Verfahren besteht darin, dass auf einer Geraden die Zeiten als Abscissen, die Positionswinkel, welche dazu gehören, als Ordinaten aufgetragen werden; zwischen den so erhaltenen Punkten wird darauf möglichst stetig eine Curve hindurchgeführt, um so die unvermeidlichen Sprünge und Unregelmässigkeiten der Messung des Positionswinkels auszugleichen.

Die Berührungslinie an einem Punkte dieser Curve giebt dann durch die Tangente des von ihr mit der Abscissenaxe gebildeten Winkels den Werth von $\frac{d p}{d t}$ oder der scheinbaren Winkelgeschwindigkeit für diesen Punkt der Bahn. Es wird durch dies Verfahren also auch das Verhältniss der Distanzen und der Gestalt der scheinbaren Bahn bekannt. Ueber die Art, wie aus letzterer dann die Elemente der wahren Bahn bestimmt werden, muss hier auf die in der Note citirten Abhandlungen von Sir John Herschel verwiesen werden.

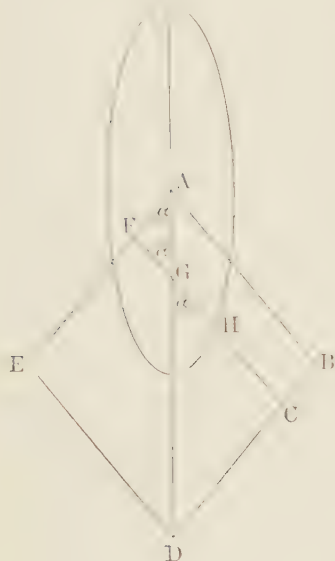
Das eben erwähnte graphische Verfahren lässt oft, besonders aber bei solchen Systemen, wo der Nebensterne durch Jahre hindurch wegen grosser Annäherung an den Hauptstern unsichtbar wird (beispielsweise bei ω Leonis, δ Cygni, γ Coronae) der Willkür im Ziehen der Curve einen beträchtlichen Spielraum. Es ist daher sehr wünschenswerth, leicht prüfen zu können, ob die aus den Winkelgeschwindigkeiten geschlossenen relativen Distanzen, zu ihren Positionswinkeln um einen Punkt herum aufgetragen, auch wirklich nahe in einer Ellipse oder auf einem elliptischen Bogen liegen. In der Praxis der Doppelsternbahnrechnungen kommen Ellipsen von fast jedem möglichen Axenverhältnisse mit ziemlich gleicher Häufigkeit vor, darunter auch solche, welche mit den meisten der üblichen Ellipsographen unbequem zu zeichnen sein würden. Es mag deshalb hier darauf aufmerksam gemacht werden, dass der zum Copiren von Zeichnungen im verjüngten Maassstabe im Gebrauche befindliche Storchschnabel als bequemes Hilfs-

¹⁾ Herschel's erste Methode findet man in den „Memoirs of the Royal Astronomical Society“, Vol. 5, die zweite in Vol. 18 desselben Werkes.

mittel zum Zeichnen von Ellipsen gerade für unseren Zweck Anwendung finden kann. Die Fig. 63 skizzirt einen Storchschnabel von der bekannten Form mit Querleiste.

In A befindet sich der Befestigungsstift, in D der Handstift, mit welchem man in dem gewöhnlichen Gebrauche die Linien der Originalzeichnung verfolgt; G ist der Copirstift, welcher die Zeichnung in dem Verhältnisse von $\overline{BC} : \overline{BD}$ oder $\overline{AF} : \overline{AE}$ verjüngt wiedergiebt, vorausgesetzt, dass auch $\overline{FG} : \overline{FC}$ in dem nämlichen Verhältnisse stehen. Wird der Copirstift in einem anderen Punkte der Querleiste befestigt, z. B.

Fig. 63.



in H , so hört die Aehnlichkeit der Zeichnungen auf, in der Weise, dass, während man mit dem Handstifte in D eine gerade Linie oder einen Kreis beschreibt, vom Copirstifte in H eine andere Curve beschrieben wird. Für uns genügt es, den Handstift eine durch den Punkt A gehende gerade Linie beschreiben zu lassen; die von H gezogene Curve ist dann eine von der grossen Axe begrenzte Ellipsenhälfte. Der Mittelpunkt der Ellipse liegt in A , die Richtung der grossen Axe fällt mit der durch A gehenden Geraden zusammen; man überzeugt sich durch eine leichte Entwicklung, dass die halbe grosse Axe der Ellipse gleich:

$$\overline{AF} + \overline{FH} \text{ oder } 2\overline{BC} + \overline{GH},$$

die halbe kleine Axe gleich:

$$\overline{GH}$$

wird. Setzt man nämlich:

$$\angle GAF = \angle AGF = \angle HGD = \alpha$$

$$\text{und } \overline{AF} = \overline{FG} = \overline{BC} = m, \quad \overline{GH} = n,$$

so wird:

$$x = (2m + n) \cos \alpha, \quad y = n \sin \alpha,$$

also:

$$\frac{x^2}{(2m + n)^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1.$$

Man erkennt auf diese Weise leicht, ob die durch das obige graphische Verfahren abgeleiteten Winkelgeschwindigkeiten mit einer Ellipse sich vertragen, oder ob man daran abändern muss. Dadurch wird die erwähnte Willkür schon sehr beschränkt; sie wird es noch mehr, wenn man mit einem Planimeter (am besten mit dem Hansen'schen) prüft, ob nicht bloss (was durch die Herleitungsart der Distanzen verbürgt wird) einige Sektoren der Ellipse, sondern überhaupt irgend zwei Sektoren im Verhältnisse der entsprechenden Zeitintervalle stehen. Dass Letzteres erfüllt, würde nämlich durch jenes graphische Verfahren besonders in dem Falle nicht hinreichend gesichert erscheinen, wo in der Beobachtungsreihe grosse Lücken vorkommen.

Das eben beschriebene graphische Verfahren verhilft nicht bloss zu einem Urtheile darüber, ob das Material für eine Bahnberechnung schon hinreichend ist (wozu, im Gegensatze zu den Planeten- oder Kometenbahnberechnungen, ein beträchtlicher Theil der ganzen Bahn durchlaufen sein muss), sondern auch ausserdem, wenn die Versuche wirklich eine bestimmte Lösung in Aussicht stellen, zu der Kenntniss angenäherter Werthe von gewissen Grössen, die nachher auf rechnerischem Wege in aller Schärfe zu bestimmen sind. Was uns die genannten Versuche in der Beziehung leisten, soll in nächster Vorlesung gezeigt werden.

Hundertunddreizehnte Vorlesung.

Leichte Herleitung verschiedener Elemente der wahren Bahn aus der Projectionsellipse oder Theilen derselben.

Da die Bestimmung der Dimension der Bahn ganz von der der übrigen Elemente getrennt werden kann, indem man nachher an die Distanzen so gut als möglich anschliesst, so können wir von derselben vorläufig ganz absehen und uns nur mit den sechs dann noch übrig bleibenden Elementen der Doppelsternbahn: $\Omega, i, \pi - \Omega, M_0, \mu, e$ befassen¹⁾. Wie sich zeigen wird, lassen sich aus den Bedingungsgleichungen für die Darstellung der Beobachtungen auf sehr einfache Art die drei Elemente $\Omega, i, \pi - \Omega$ eliminiren, so dass dann Gleichungen, welche implicite die Unbekannten M_0, μ und e enthalten, zum Vorschein kommen. Nach der Natur der Aufgabe sind die Gleichungen transcendent, daher nur durch Versuche aufzulösen; es ist also vor Allem wünschenswerth, Annäherungen gerade für diese Elemente zu kennen.

Zuweilen ist durch eine Wiederkehr zu demselben Positionswinkel die Umlaufszeit, demnach auch μ gegeben, oder es kommen (wie bei η Coronae borealis) nur zwei verschiedene Werthe der Umlaufszeit in Betracht. In anderen Fällen findet sich in der Beobachtungsreihe ein Perihel und ein Aphel; da diese beiden Epochen auf dem gleich zu zeigenden Wege erkannt werden können, so ist auch bei solcher Gelegenheit μ gegeben. Bei weniger umfassender Beobachtungsreihe ist man, um eine Annäherung für μ zu haben, darauf angewiesen, den in derselben enthaltenen Sector der Projectionsellipse mit der Fläche der ganzen Ellipse zu vergleichen.

Zur Herleitung von M_0 , der mittleren Anomalie einer bestimmten Epoche aus der Projectionsellipse, können folgende Bemerkungen dienen. Offenbar sind die Projectionen dreier in gerader Linie liegender Punkte auf einer Ebene wiederum in gerader Linie. Da nun der Mittelpunkt der wahren Ellipse, die Brennpunkte und das Perihel oder Aphel alle auf einer Geraden liegen, so findet dasselbe auch in Beziehung auf den Mittelpunkt der scheinbaren Ellipse, den Ort des Hauptsternes und den dem Perihel oder Aphel entsprechenden Orte des Nebensterne statt, d. h. man erhält den Ort des Perihels und des Aphels in der scheinbaren Bahn, wenn man den Mittelpunkt der Projectionsellipse mit dem Orte des Hauptsternes durch eine gerade Linie verbindet und diese zu beiden Seiten bis zur Peripherie der Projectionsellipse verlängert. Der dem Hauptsterne näher gelegene Durchschnitt ist die Projection des Perihels, der entferntere die des Aphels. Die Beobachtungszeit, welche zu den Positionswinkeln der Durchschnitte gehört, ist die des Perihels, beziehungsweise des Aphels.

Man kann nun gleich noch weiter bemerken, dass bei der in Rede stehenden Art von Projection noch ausserdem die Abschnitte einer projecirten Geraden in demselben Verhältnisse bleiben, d. h. auf den gegenwärtigen Fall angewendet, dass das Stück gerader Linie zwischen Mittelpunkt und Brennpunkt der wahren Ellipse zu der halben grossen Axe derselben in dem nämlichen Verhältnisse steht, wie das Stück zwischen Mittelpunkt und Hauptstern in der Projectionsellipse zu der eben besprochenen Pro-

¹⁾ Es mag hier die nachträgliche Bemerkung Platz finden, dass man der mittleren Bewegung μ das negative Vorzeichen zu geben pflegt, wenn die Positionswinkel mit wachsender Zeit abnehmen; man erspart sich damit eine weitere Angabe über den Sinn der Bewegung.

jection der halben grossen Axe. Die Excentricität e der wahren Bahn ist also gleich dem Verhältnisse:

Abstand des Hauptsternes vom Mittelpunkte der Projectionsellipse zu dem in der Richtung dieses Abstandes genommenen Halbmesser der scheinbaren Ellipse.

Durch die nämliche Betrachtungsweise kann man auch diejenigen um 180° verschiedenen Positionswinkel ermitteln, welche den wahren Anomalien $v = -90^\circ$ und $v = +90^\circ$ entsprechen; man braucht zu dem Zwecke nur zu ermitteln, in welcher Richtung eine Sehne der scheinbaren Ellipse, durch den Hauptstern gelegt, von diesem halbt wird; die dieser Richtung entsprechenden Positionswinkel sind die gesuchten.

Wenn das Material überhaupt zu einer Bahnbestimmung reif ist, so wird man, seltene Fälle ausgenommen, auf die eine oder andere der vorstehend beschriebenen Arten zu einer angenäherten Kenntniss von M_0 , μ und e , mindestens von einer dieser Grössen gelangen. Nur bei Sternpaaren, die fortwährend den Messungen grosse Schwierigkeiten darbieten, bei denen daher in keinem Theile der Bahn ein einigermaassen zusammenhängendes Material vorliegt und sich wegen der Grösse der Intervalle auch die Herleitung der Winkelgeschwindigkeiten erschwert, ist man genöthigt, M_0 , μ und e selbst ganz aus dem Rohen heraus durch Rechnung zu finden; doch wird auch dann die Bestimmung durch bekannte Hülfsmittel sehr erleichtert.

Ogleich die im Vorigen angestellten Betrachtungen für unsere Zwecke ausreichen, so mag hier doch noch gezeigt werden, wie auch Ω und i , überhaupt die wahre Ellipse durch ein graphisches Verfahren aus der scheinbaren Ellipse construirt werden kann. Es ist klar, dass durch die Projection nur ein einziger Diameter der wahren Ellipse keine Verkürzung erleidet, derjenige nämlich, welcher der Linie des Ω parallel ist, welchen man aus der scheinbaren dadurch graphisch herleiten kann, dass man von den Punkten der letzteren auf den Diameter Perpendikel fällt und diese dann im Verhältnisse von $\cos i$ zur Einheit vergrössert; der so erhaltene, auf demselben Perpendikel gelegene Punkt der wahren Ellipse ist offenbar dann derjenige, von welchem der Punkt der scheinbaren Ellipse die Projection ist. Der Winkel, welcher am Centrum der Ellipse von dem Radius des so construirten Punktes mit jenem Diameter gebildet wird, ist demjenigen gleich, welcher von demselben centrischen Radius in der wahren Bahn mit der Linie des Ω gebildet wird. Um aber die beschriebene Construction wirklich ausführen zu können, muss man die Knotenlinie und i zuvor kennen, wozu die vorhergehenden Betrachtungen selbst das Mittel geben. Denn aus denselben geht hervor, dass man durch Vergrösserung des Perpendikels für den einen Endpunkt der conjugirten Axe 2α einen Endpunkt der grossen Axe $2a$ erhalten muss, ebenso durch Vergrösserung des Perpendikels für einen Endpunkt der conjugirten Axe 2β einen Endpunkt der kleinen Axe $2b$. Nennen wir demnach A den Positionswinkel zur Zeit des Perihels, der der Axe 2α zukommt, ferner B denjenigen der conjugirten Axe 2β , so haben wir:

$$\alpha^2 \cos(A - \Omega)^2 + \alpha^2 \sin(A - \Omega)^2 \sec^2 i = a^2 \dots \dots (1)$$

$$\beta^2 \cos(B - \Omega)^2 + \beta^2 \sin(B - \Omega)^2 \sec^2 i = b^2 \dots \dots (2)$$

Nun ist aber $a^2 + b^2$ das Quadrat der Sehne, welche in der wahren Ellipse die Endpunkte von grosser und kleiner Axe verbindet. Die vorhergehenden Betrachtungen liefern für dieses Quadrat aber noch den Ausdruck:

$$\{\alpha \cos(A - \Omega) - \beta \cos(B - \Omega)\}^2 + \sec^2 i \{\alpha \sin(A - \Omega) - \beta \sin(B - \Omega)\}^2,$$

welcher in Verbindung mit obigen Gleichungen die bemerkenswerthe Relation:

$\cos(A - \Omega) \cos(B - \Omega) + \sec i^2 \sin(A - \Omega) \sin(B - \Omega) = 0 \dots (3)$
ergiebt.

Dividirt man die Gleichung (1) und (2) und substituirt für $\sec i^2$ seinen aus (3) folgenden Werth:

$$\sec i^2 = -\cotg(A - \Omega) \cotg(B - \Omega),$$

so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \frac{b^2 \alpha^2}{a^2 \beta^2} &= \frac{\sin(B - \Omega) \cos(B - \Omega)}{\sin(A - \Omega) \cos(A - \Omega)} \times \\ \frac{\sin(A - \Omega) \cos(B - \Omega) - \cos(A - \Omega) \sin(B - \Omega)}{\cos(A - \Omega) \sin(B - \Omega) - \sin(A - \Omega) \cos(B - \Omega)} &= -\frac{\sin 2(B - \Omega)}{\sin 2(A - \Omega)} \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung ist nun Alles bekannt, da ja die Werthe von $\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 = \cos \varphi^2$, ebenso wie die von α und β der Projectionsellipse entnommen werden können. Da in dieser Gleichung 2Ω die Unbekannte ist, so würde man in Beziehung auf Ω selbst zwischen vier Quadranten zu wählen haben, wenn nicht eben noch verlangt werden müsste, dass $\cos i^2$, d. h. nach dem Vorhergehenden das Product:

$$\tg(A - \Omega) \tg(\Omega - B)$$

positiv und kleiner als die Einheit werde. Nach Berücksichtigung dieses Umstandes bleibt nur noch die Wahl zwischen zwei um 180° verschiedenen Werthen von Ω übrig, in Uebereinstimmung mit der früher gemachten Bemerkung, dass bei einer Doppelsternbahn aufsteigender und niedersteigender Knoten nicht von einander unterschieden werden können.

Will man die Gleichung (4) durch Rechnung auflösen, so setzt man:

$$\frac{b\alpha}{a\beta} = \tg \xi,$$

was immer bei reeller Lösung erlaubt; man hat dann:

$$\frac{1 + \tg \xi^2}{1 - \tg \xi^2} = \frac{\sin 2(A - \Omega) - \sin 2(B - \Omega)}{\sin 2(A - \Omega) + \sin 2(B - \Omega)},$$

d. h.:

$$\cos 2\xi = \cotg(A - B) \tg(A + B - 2\Omega) \dots (5)$$

Wenn man dagegen die Gleichung (4) durch Construction auflösen will, so zieht man aus dem Centrum der Projectionsellipse zwei Geraden, den Positionswinkeln oder Richtungen $2B$ und $2A$ entsprechend, und diesen parallel zwei andere Geraden, deren Abstände von jenen sich beziehungsweise wie $b^2 \alpha^2 : a^2 \beta^2$ verhalten; die den Schnittpunkt der letzteren und den Mittelpunkt der Projectionsellipse verbindende Gerade hat, wie leicht zu erkennen, die Richtung oder den Positionswinkel 2Ω . Um auch die Neigung i der wahren Bahn gegen die Ebene der Projectionsellipse durch Construction zu finden, bemerke man, dass nach den obigen Entwicklungen $\cos i$ die mittlere Proportionale zwischen:

$$\tg(A - \Omega) \text{ und } \tg(\Omega - B),$$

wonach sich dann die fragliche Construction ohne Weiteres ergiebt.

Hundertundvierzehnte Vorlesung.

Anwendung des graphischen Verfahrens auf die Bahn von ω Leonis.

Wir wollen versuchen, die folgenden beobachteten Positionswinkel und Distanzen des ebenso schwierigen als interessanten Doppelsternes ω Leonis, dessen Ort am Himmel für die Epoche 1800 für unseren Zweck angenähert genug durch die Rectascension $9^h 20^m,9$ und die Declination $+ 9^\circ 40'$ gegeben wird, an eine den verallgemeinerten Keppler'schen Gesetzen gemäss durchlaufene Bahn anzuschliessen:

Epoche	Positionswinkel	Distanz	Beobachter
1782,87	$110^\circ 54'$	—	Herschel I.
1804,09	$130^\circ 53'$	—	"
1825,21	$153^\circ 56'$	$0'',970$	W. Struve
32,25	$163^\circ 24'$	$0'',515$	"
33,29	$172^\circ 48'$	$0'',447$	"
43,408	$280^\circ 11'$	$0'',350$	Mädler
56,153	$356^\circ 30'$	$0'',333$	Secchi
56,167	$359^\circ 12'$	$0'',36$	"
56,186	$4^\circ 10'$	$0'',40$	"
56,386	$357^\circ 39'$	$0'',45$	"
56,425	$0^\circ 59'$	$0'',358$	Mädler
57,342	$2^\circ 41'$	$0'',35$	Secchi
57,378	$5^\circ 45'$	$0'',35$	"
58,323	$0^\circ 47'$	—	"
58,367	$357^\circ 18'$	—	"
58,370	$2^\circ 42'$	—	"
66,300	$32^\circ 54'$	$0'',3$	"
67,346	$33^\circ 45'$	$0'',57$	Engelmann.

Die jährliche Präcession im Positionswinkel, zu berechnen nach der früher entwickelten Formel:

$$dp = \frac{n \sin \alpha}{\cos \delta} = 0',34 \sin \alpha \sec \delta$$

beträgt für ω Leonis:

$$0',22.$$

Auf die Epoche oder, wie man auch sagt, den Meridian von 1850 reducirt, werden die obigen Positionswinkel:

1782,87	$111^\circ 9'$	56,386	$357^\circ 38'$
1804,09	$131^\circ 3'$	56,425	$0^\circ 58'$
25,21	$154^\circ 1'$	57,342	$2^\circ 39'$
32,25	$163^\circ 28'$	57,378	$5^\circ 43'$
33,29	$172^\circ 52'$	58,323	$0^\circ 45'$
43,408	$280^\circ 12'$	58,367	$357^\circ 16'$
56,153	$356^\circ 29'$	58,370	$2^\circ 40'$
56,167	$359^\circ 11'$	66,300	$32^\circ 50'$
56,186	$4^\circ 9'$	67,346	$33^\circ 41'$

$$\operatorname{tg}(A - \varnothing) = \cos i \operatorname{tg}(\pi - \varnothing)$$

oder mit Elimination von $\cos i$ durch das Vorhergehende:

$$\operatorname{tg}(\pi - \varnothing)^2 = \frac{\operatorname{tg}(A - \varnothing)}{\operatorname{tg}(\varnothing - B)}.$$

Es gilt hier die von den Planetenbahnen her uns bekannte Regel, dass $\pi - \varnothing$ und $A - \varnothing$ in demselben Quadranten liegen müssen. Die Anwendung auf vorliegenden Fall ergibt:

$$\pi - \varnothing = 113^{\circ} 41'.$$

Bei der Bestimmung der halben grossen Axen in Bogensecunden muss man sich nach zuverlässigen Messungen der Distanz umsehen; in der Regel wird das Resultat sich vom Beobachter und vom Instrument in der Art abhängig erweisen, dass man bei feineren Rechnungen wohlthut, jeden Beobachter und jedes Instrument abgesondert zu berücksichtigen, welchen Theil der Rechnung man gewöhnlich zuletzt vornimmt.

Unter den obigen Distanzen findet sich nur eine einzige, welche durch ihre Grösse und Zuverlässigkeit zu einer Bestimmung von a geeignet erscheint, die 1825,21 beobachtete: $\varrho = 0'',970$. Sucht man nach bekannter Formel:

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg}(v + \pi - \varnothing) = \sec i \operatorname{tg}(p - \varnothing)$$

das Argument der Breite u zu dem Positionswinkel $p = 154^{\circ} 1'$, so findet man:

$$u = -10^{\circ} 33',$$

die Breite selbst nach der Formel:

$$\sin \text{Breite} = \sin i \cdot \sin u$$

gleich $-8^{\circ} 20'$; folglich ist der zugehörige Radius vector r gleich:

$$0'',970 \cdot \sec \text{Breite} \quad \log r = 9,9914.$$

Ferner ist die wahre Anomalie $v = u - (\pi - \varnothing)$ gleich:

$$-123^{\circ} 57' \quad \text{oder} \quad v = 236^{\circ} 3',$$

und, da:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v} = 0,936 a,$$

so wird:

$$a = 1'',05.$$

Die äussersten, in Zeit am weitesten von einander abstehenden der obigen Positionswinkel kann man benutzen, nicht bloss die Umlaufszeit zu bestimmen, sondern auch noch einmal die Epoche des wahren Perihels herzuleiten, für welche letztere man, soll die Bahnbestimmung als gelungen gelten, einen dem früheren nahe kommenden Werth erhalten muss. Zu dem Zwecke bestimmen wir die wahren Anomalien der Positionswinkel:

$$111^{\circ} 9' \quad \text{und} \quad 33^{\circ} 15',$$

welche zu den Epochen:

$$1782,87 \quad \text{und} \quad 1866,82$$

gehören und finden dafür:

$$184^{\circ} 14' \quad \text{und} \quad 131^{\circ} 43',$$

daraus ferner die mittleren Anomalien:

$$194^{\circ} 7' \quad \text{und} \quad 59^{\circ} 1',$$

d. h.:

$$194^{\circ} 7' \quad \text{und} \quad 419^{\circ} 1'.$$

1) Will man die Herleitung des Werthes von i auf dem Wege der Construction mit der rein constructiven Bestimmung von $\pi - \varnothing$ in einer Regel zusammenfassen, so kann man sagen:

$\cos i$ ist das geometrische Mittel zwischen $\operatorname{tg}(A - \varnothing)$ und $\operatorname{tg}(\varnothing - B)$
 $\operatorname{tg}(\pi - \varnothing)$ „ „ „ „ „ „ $\operatorname{tg}(A - \varnothing)$ und $\cotg(\varnothing - B)$.

Hiernach beträgt die Umlaufszeit:

134,3 Jahre.

(Die vorläufigen Versuche unter Anwendung eines Planimeters hatten 138,5 Jahre ergeben.) Die Epoche des Perihels ergibt sich hier auf 1844,8 fallend.

Nehmen wir da, wo zwei verschiedene Bestimmungen vorliegen, das Mittel, so können wir als vorläufiges Elementensystem von ω Leonis, welches nachher durch eine vollkommenere Methode bestimmt werden soll, annehmen:

Epoche des wahren Perihels $T = 1844,2$

$\oslash = 160^{\circ},5$

$\pi - \oslash = 113^{\circ},4$

$i = 52^{\circ},4$

$e = 0,62$

$a = 1'',05$

Umlaufszeit = 136,4 Jahre.

Hundertundfünfzehnte Vorlesung.

Methode zur Bestimmung einer Doppelsternbahn aus sechs Positionswinkeln.

Zu einer schärferen Berechnung der Elemente gelangt man durch Anschluss an sechs Positionswinkel, am sichersten an sechs Normalörter aus Positionswinkeln. Die dazu dienlichen Formeln erhalten wir durch folgende Betrachtung.

Die Flächen der wahren Bahn stehen zu ihren Projectionen in der scheinbaren Bahn überall im Verhältniss von 1 zu $\cos i$, folglich stehen je zwei Dreiecksflächen der wahren Bahn zu einander in demselben Verhältniss, wie die zwei entsprechenden der scheinbaren Bahn oder wie ihre Projectionen. Man hat daher, wenn v, v', v'', v''' u. s. w. eine Reihe von wahren Anomalien, r, r', r'', r''' u. s. w. die Radienvectoren p, p', p'', p''' u. s. w. die zugehörigen Positionswinkel, $\varrho, \varrho', \varrho'', \varrho'''$ u. s. w. die Distanzen bedeuten:

$$\frac{r r' \sin (v - v')}{r' r'' \sin (v' - v'')} = \frac{\varrho \varrho' \sin (p - p')}{\varrho' \varrho'' \sin (p' - p'')} \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

Desgleichen hat man:

$$\frac{r r'' \sin (v - v'')}{r'' r''' \sin (v'' - v''')} = \frac{\varrho \varrho'' \sin (p - p'')}{\varrho'' \varrho''' \sin (p'' - p''')} \cdot \cdot \cdot \cdot (2)$$

und aus der Division beider Gleichungen in einander:

$$\frac{\sin (v' - v) \sin (v'' - v''')}{\sin (v'' - v) \sin (v' - v''')} = \frac{\sin (p' - p) \sin (p'' - p''')}{\sin (p'' - p) \sin (p' - p''')} \cdot \cdot \cdot \cdot (3)$$

Indem wir noch nach einander v''', p''' und v''', p''' an der Stelle von v'' und p'' in dieser Gleichung einführen, erhalten wir die beiden analogen:

$$\frac{\sin (v' - v) \sin (v''' - v''')}{\sin (v''' - v) \sin (v' - v''')} = \frac{\sin (p' - p) \sin (p''' - p''')}{\sin (p''' - p) \sin (p' - p''')} \cdot \cdot \cdot \cdot (4)$$

$$\frac{\sin (v' - v) \sin (v''' - v''')}{\sin (v''' - v) \sin (v' - v''')} = \frac{\sin (p' - p) \sin (p''' - p''')}{\sin (p''' - p) \sin (p' - p''')} \cdot \cdot \cdot \cdot (5)$$

Die vorhergehenden Gleichungen enthalten auf der zweiten Seite die gemessenen Positionswinkel oder Distanzen, auf der ersten Seite nur wahre Anomalien und Radienvectoren, d. h. lediglich die sogenannten phoronomischen Elemente T , U (Umlaufszeit) und e^1 , für welche man bequemer die mittlere Anomalie M_0 einer gewählten Epoche und die mittlere jährliche Bewegung μ (bei abnehmendem Positionswinkel negativ zu nehmen) substituiren darf. Die geometrischen, d. h. die Elemente der Lage der Bahn und der Dimension erscheinen eliminirt. Halten wir uns zunächst an die Gleichungen (3), (4) und (5), in denen auf der rechten Seite nur Positionswinkel vorkommen, so wird es sich darum handeln, die drei Unbekannten M_0 , μ und e so zu bestimmen, dass jenen drei Gleichungen, mindestens sehr nahe, genügt wird. Folgende Auflösungsweise hat schon bei mancher Gelegenheit gute Dienste geleistet. Man macht in Beziehung auf M_0 und μ eine combinirte Hypothese (mit Benutzung der Annäherungen, welche man durch das graphische Verfahren, überhaupt durch vorläufige Bestimmungen erhalten hat), ermittelt dann durch Versuche denjenigen Werth von e , durch welchen einer der Gleichungen, beispielsweise der Gleichung (3), Genüge geleistet wird, und berechnet die bei (4) und (5) in Beziehung auf den gegebenen Werth der zweiten Seite übrig bleibenden Fehler. Dieselbe Rechnung führt man für zwei andere combinirte Hypothesen von M_0 und μ durch und schliesst dann auf die bekannte Art, die wir bei früheren Gelegenheiten hinreichend erörtert haben, auf die wahren Werthe von M_0 , μ und mittelbar auf e .

Durch die in Abtheilung I. gegebenen Hilfsmittel ist die Bestimmung der wahren Anomalien, welche einer gewissen Hypothese entsprechen, selbst für grosse Excentricitäten, nicht allzu mühselig. Bei dieser Gelegenheit mag jedoch noch kurz eines anderen Hilfsmittels zur Auflösung der Keppler'schen Gleichung Erwähnung geschehen. Dasselbe beruht auf einer Eigenschaft der Cykloide, welche sich auf folgende Weise aussprechen lässt:

Wenn man einen Kreis vom Radius 1 auf einer Geraden rollen lässt, so dass ein vom Centrum um die Grösse e abstehender Punkt eine verkürzte Cykloide beschreibt, so ist bei passender Wahl des Anfangspunktes der Coordinaten die Abscisse des bewegten Punktes die mittlere Anomalie, die Ordinate desselben der Radius vector, während die Abscisse des eine Gerade beschreibenden Centrums die excentrische Anomalie vorstellt, dabei die Excentricität gleich e und die halbe grosse Axe gleich 1 gesetzt. Die rechtwinkligen Coordinaten sind so zu wählen, dass für $x = 0$, $y = 1 - e$ wird.

Dieser Bemerkung zufolge, von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugen kann, wird, sobald man die Cykloide für die Excentricität e construirt und die von dem Centrum des Kreises beschriebene Gerade gezogen hat, die excentrische Anomalie für eine gegebene mittlere Anomalie dadurch gefunden, dass man aus dem Punkte der Cykloide, welcher die mittlere Anomalie zur Abscisse hat, als dem Centrum, mit dem Halbmesser e einen Kreis beschreibt; der Durchschnittspunkt des letzteren mit jener Geraden wird die excentrische Anomalie zur Abscisse haben.

Insofern bei dieser Construction der excentrischen Anomalie ein ganzes System von Cykloiden, etwa für die vollen Zehntel der Excentricität e , gezeichnet werden muss, zwischen denen man nach dem Augenmaass interpolirt, steht dieses Hilfsmittel gegen die in Abtheilung I. gezeigte Sinuscurve etwas zurück. Es hat dagegen vor jenem den nicht zu unterschätzenden Vorzug, dass keine andere Operation als das Messen mit dem Cirkel vorkommt und dass die Ordinate zugleich den Werth des Differentialquotienten:

$$\frac{dM}{dE}$$

¹⁾ Die Excentricität e kann, als in der Keppler'schen Gleichung auftretend, zu den phoronomischen Elementen gerechnet werden.

darstellt, durch welchen man weitere Näherungen auf bekannte Weise mit grösster Leichtigkeit erhalten kann.

Wir wollen hier auch noch kurz eine der merkwürdigeren Umformungen erwähnen, welche die Gleichungen (1) bis (5) zulassen, wenn wir auch kaum Veranlassung nehmen dürfen, davon bei der praktischen Rechnung Gebrauch zu machen. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}\sqrt{rr'} \sin \frac{1}{2} (v - v') &= a \sqrt{1 - e^2} \sin \frac{1}{2} (E - E') \\ \sqrt{rr'} \cos \frac{1}{2} (v - v') &= a \{ \cos \frac{1}{2} (E - E') - e \cos \frac{1}{2} (E + E') \}\end{aligned}$$

daher:

$$\begin{aligned}rr' \sin (v - v') &= a^2 \sqrt{1 - e^2} \{ \sin (E - E') - e \sin E + e \sin E' \} \\ &= a^2 \sqrt{1 - e^2} \{ \sin (E - E') - (E - M) + (E' - M') \}.\end{aligned}$$

(1) bis (5) kann man demnach in folgender Form schreiben:

$$\frac{\sin (E - E') - (E - M) + (E' - M')}{\sin (E' - E''''') - (E' - M') + (E'''' - M''''')} = \frac{q \, q' \sin (p - p')}{q' \, q'''' \sin (p' - p''''')} \cdot \cdot \cdot \quad (6)$$

$$\frac{\sin (E - E'') - (E - M) + (E'' - M'')}{\sin (E'' - E''''') - (E'' - M'') + (E'''' - M''''')} = \frac{q \, q'' \sin (p - p'')}{q'' \, q'''' \sin (p'' - p''''')} \cdot \cdot \cdot \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} &\frac{\sin (E' - E) - (E' - M') + (E - M)}{\sin (E'' - E) - (E'' - M'') + (E - M)} \times \\ &\frac{\sin (E'' - E''''') - (E'' - M'') + (E'''' - M''''')}{\sin (E' - E''''') - (E' - M') + (E'''' - M''''')} = \frac{\sin (p' - p) \sin (p''' - p''''')}{\sin (p'' - p) \sin (p' - p''''')} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

u. s. w.

Man erspart hier zwar die Berechnung der wahren Anomalien; dagegen haben die Formeln an Uebersichtlichkeit soviel verloren, dass man wohl den ursprünglichen bei der Rechnung den Vorzug geben wird; doch giebt es einzelne Fälle, wo die Gleichungen (6) bis (8) mit Nutzen in Anwendung gebracht werden können. Der Gebrauch einer Tafel der Function:

$$\sin x - x$$

wird übrigens auch für die Form (6) bis (8) eine grössere Bequemlichkeit herbeiführen; in welcher Weise ist leicht zu erkennen.

Hat man M_0 , μ und e so bestimmt, dass den Grundgleichungen nahezu Genüge geschieht, so werden δ , i und $\pi - \delta$ leicht auf folgende Art gefunden. Man dividire in einander die bekannten Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned}tg (p - \delta) &= \cos i \, tg (v + \pi - \delta) \\ tg (p' - \delta) &= \cos i \, tg (v' + \pi - \delta) \\ tg (p'' - \delta) &= \cos i \, tg (v'' + \pi - \delta)\end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (I)$$

wodurch man nach leichter Transformation erhält:

$$\left. \begin{aligned}\sin (p' - p) \sin (v' + v + 2[\pi - \delta]) &= \sin (v' - v) \sin (p' + p - 2\delta) \\ \sin (p'' - p) \sin (v'' + v + 2[\pi - \delta]) &= \sin (v'' - v) \sin (p'' + p - 2\delta) \\ \sin (p'' - p') \sin (v'' + v' + 2[\pi - \delta]) &= \sin (v'' - v') \sin (p'' + p' - 2\delta)\end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Multiplieirt man die erste dieser Gleichungen mit:

$$\sin (p'' - p) \sin (p'' - p') \sin (v' - v),$$

die zweite mit:

$$- \sin (p' - p) \sin (p'' - p') \sin (v'' - v),$$

die dritte mit:

$$\sin (p' - p) \sin (p'' - p) \sin (v'' - v'),$$

und addirt, so findet man:

$$tg 2 \Omega = \frac{\frac{\sin(p' + p)}{\sin(p' - p)} \cdot \sin(v' - v)^2 - \frac{\sin(p'' + p)}{\sin(p'' - p)} \cdot \sin(v'' - v)^2 + \frac{\sin(p'' + p')}{\sin(p'' - p')} \cdot \sin(v'' - v')^2}{\frac{\cos(p' + p)}{\sin(p' - p)} \cdot \sin(v' - v)^2 + \frac{\cos(p'' + p)}{\sin(p'' - p)} \cdot \sin(v'' - v)^2 + \frac{\cos(p' + p')}{\sin(p'' - p')} \cdot \sin(v'' - v')^2} \quad (III)$$

Die Substitution des aus (III) berechneten Werthes von Ω in eine der Gleichungen (II) liefert den Werth von $\pi - \Omega$, und endlich geben beide Werthe, in (I) substituirt, $\cos i$. Die Vierdeutigkeit in der Bestimmung von Ω wird durch den Umstand, dass $\cos i$ reell, positiv und kleiner als die Einheit sich ergeben muss, auf die bekannte Zweideutigkeit beschränkt, nach welcher aufsteigender und niedersteigender Knoten nicht von einander unterschieden werden können.

Ehe wir nach diesen Formeln das oben gewählte Beispiel beendigen, wollen wir auch noch diejenigen Grundformeln entwickeln, welche zu einer ebenso unmittelbaren Anwendung sich eignen, wenn mehr als zwei Distanzen gegeben sind.

Hundertundsechszehnte Vorlesung.

Grundformeln für Berechnung einer Doppelsternbahn, wenn ausser vier Positionswinkeln noch wenigstens drei Distanzen gegeben sind.

Die Methode der Bestimmung aus sechs Positionswinkeln wird unbrauchbar, wenn $i = 90^\circ$ wird, weil dann jeder Positionswinkel, von den Beobachtungsfehlern natürlich abgesehen, gleich Ω oder gleich $180^\circ + \Omega$ sein muss. Es versagen die Formeln (3) bis (5) vollständig ihren Dienst. Je näher i der genannten Grenze kommt, desto mehr wird man genöthigt sein, auch schon bei der Bestimmung von M , μ , e Distanzen zu Hülfe zu ziehen. Die folgende Methode ist sowohl für die Combination:

Vier Positionswinkel und drei Distanzen

als auch für:

Drei Positionswinkel und vier Distanzen

von grosser Bequemlichkeit; denn sie gewährt die besondere Annehmlichkeit, dass die Versuche zur Auflösung der Grundgleichungen in aller Strenge sich nur auf zwei Unbekannte, statt wie oben auf M , μ und e zu erstrecken haben.

Denken wir uns in der Ebene der Projectionsellipse durch den Hauptstern als Nullpunkt ein schiefwinkliges Coordinatensystem gelegt, dessen X -Axe mit der Projection der grossen Axe $2a$ zusammenfällt, während die Y -Axe der Projection der kleinen Axe $2b$ parallel sein soll; es seien auch wieder A und B beziehungsweise die Positionswinkel der Richtungen dieser Axen, von denen wir schon in Vorlesung 109 Gebrauch gemacht haben.

Stellt c den vorläufig allerdings unbekannten Cosinus der Projectionswinkel für b und die mit ihm parallelen Sehnen der wahren Bahn vor, so haben wir die y sämmtlich unter der Form:

$$c \sin E,$$

wo wieder E die excentrische Anomalie bedeutet. Ferner ist aber auch:

$$\frac{y}{\varrho} = \frac{\sin(p - A)}{\sin(B - A)},$$

und wir haben daher aus drei Positionswinkeln p, p', p'' und den zugehörigen Distanzen $\varrho, \varrho', \varrho''$ die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} c \sin E &= \varrho \operatorname{cosec}(B - A) \sin(p - A) \\ c \sin E' &= \varrho' \operatorname{cosec}(B - A) \sin(p' - A) \\ c \sin E'' &= \varrho'' \operatorname{cosec}(B - A) \sin(p'' - A) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (A)$$

und durch deren Division in einander:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin E'}{\sin E} &= \frac{\varrho'}{\varrho} \cdot \frac{\sin(p' - A)}{\sin(p - A)} \\ \frac{\sin E''}{\sin E} &= \frac{\varrho''}{\varrho} \cdot \frac{\sin(p'' - A)}{\sin(p - A)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (B)$$

Bedeutend t, t', t'', t''' die Beobachtungszeiten, so besteht zwischen E, E' und E'' die Bedingungs Gleichung:

$$\frac{E' - E - c(\sin E' - \sin E)}{E'' - E' - c(\sin E'' - \sin E')} = \frac{t' - t}{t'' - t'} \dots \dots \dots (C)$$

Ausserdem fanden wir in Vorlesung 115:

$$\frac{\sin(E' - E) - e(\sin E' - \sin E)}{\sin(E'' - E') - e(\sin E'' - \sin E)} = \frac{\varrho \sin(p' - p)}{\varrho'' \sin(p'' - p')} \dots \dots \dots (D)$$

Aus Gleichung (C) ergibt sich:

$$e = \frac{(t'' - t')(E' - E) - (t' - t)(E'' - E')}{(t'' - t')(\sin E' - \sin E) - (t' - t)(\sin E'' - \sin E')} \dots \dots \dots (E)$$

aus (D) folgt:

$$e = \frac{\varrho'' \sin(p'' - p') \sin(E' - E) - \varrho \sin(p' - p) \sin(E'' - E')}{\varrho'' \sin(p'' - p') (\sin E' - \sin E) - \varrho \sin(p' - p) (\sin E'' - \sin E')} \dots \dots (F)$$

Es empfiehlt sich nun folgende indirecte Bestimmungsweise. Man macht in Betreff der beiden Unbekannten A und E eine Hypothese und berechnet mittelst der Gleichungen (B) die excentrischen Anomalien E' und E'' . Man hat sodann für die Richtigkeit der beiden Werthe von A und E die beiden Bedingungen, dass die Werthe von e aus (E) und (F) übereinstimmen müssen, und ausserdem, wenn ein vierter Positionswinkel p''' gegeben ist, nach Vorlesung 114 die Gleichung:

$$\frac{\sin(v' - v) \sin(v''' - v'')}{\sin(v'' - v) \sin(v''' - v')} = \frac{\sin(p' - p) \sin(p''' - p'')}{\sin(p'' - p) \sin(p''' - p')} \dots \dots \dots (G)$$

Sollte sich zeigen, dass die Positionswinkel sich sehr nahe nur zwischen zwei um 180° verschiedenen Werthen bewegen, oder durch eine sehr rasche Winkelveränderung von dem einen zum anderen übergehen, so würde man vorziehen, eine vierte Distanz darzustellen, da der Positionswinkel dann für die Bestimmung kein Gewicht hat.

Man könnte diese Prüfung durch Vergleichung des aus E, E', E'' abzuleitenden Werthes der Distanz ϱ''' mit dem beobachteten in der Weise ausführen, dass man nach den Formeln (I) bis (III) der 115. Vorlesung aus v, v', v'', p, p', p'' die Elemente $\delta, \pi - \delta$ und i bestimmte, wonach man dann unter Anwendung von Grundgleichungen aus Abtheilung I. haben wird:

$$\begin{aligned} \varrho \cos(p - \delta) &= r \cos(v + \pi - \delta) \\ \varrho \sin(p - \delta) &= r \cos i \sin(v + \pi - \delta). \end{aligned}$$

Um jedoch nicht bei jedem Versuche bis zu der Bestimmung der Elemente Ω , $\pi - \Omega$ und i zurückgehen zu müssen, kann man auch so verfahren, dass man zuerst p''' der Bedingung (G) genügend bestimmt. Setzt man zur Abkürzung:

$$tg \xi = \frac{\sin (v - v'')}{\sin (v'' - v')} \cdot \frac{\sin (v''' - v')}{\sin (v''' - v)} \cdot \frac{\sin (p'' - p')}{\sin (p - p'')},$$

so wird die Gleichung:

$$tg^{1/2} (p' + p - 2p''') = tg(45^\circ + \xi) tg^{1/2} (p - p')$$

einen solchen Werth von p''' liefern, und dieser Werth wird immer alle zu erlangende Schärfe besitzen, gerade um so sicherer, je mehr die Gleichung (G) zur Bestimmung der Elemente unbrauchbar werden würde. Fügt man nun noch den Gleichungen (B) die folgende hinzu:

$$\frac{\sin E'''}{\sin E} = \frac{\varrho'''}{\varrho} \cdot \frac{\sin (p''' - A)}{\sin (p - A)},$$

so lässt sich, nachdem man E''' auf gewöhnliche Art berechnet hat, sogleich ϱ''' ohne Kenntniss von Ω , $\pi - \Omega$ und i ermitteln.

Für beide oben erwähnte Combinationen¹⁾ hat man, wenn die über A und E gemachte Hypothese nicht beiden Prüfungen genügt, eine zweite und dritte Hypothese durchzurechnen und dann auf von früher her schon bekannte Weise die wahren Werthe zu interpoliren.

Hundertundsiebenzehnte Vorlesung.

Rechnungsbeispiel für die Methode der Vorlesung 115.

Wir wollen jetzt die Vorschriften der Vorlesung 110 auf folgende sechs Positionswinkel von ω Leonis, in denen so ziemlich das ganze bis jetzt vorhandene Beobachtungsmaterial der Positionswinkel vertreten ist, zur Anwendung bringen:

1782,87	$p = 111^\circ 9'$
1804,09	$p' = 131^\circ 3'$
32,23	$p'' = 166^\circ 58'$
43,41	$p''' = 280^\circ 20'$
50,28	$p'''' = 344^\circ 25'$
66,03	$p''''' = 25^\circ 33'$

Es werden:

$$\frac{\sin (p' - p) \sin (p'' - p''''')}{\sin (p'' - p) \sin (p' - p''''')} = 0,2663$$

$$\frac{\sin (p' - p) \sin (p''' - p''''')}{\sin (p''' - p) \sin (p' - p''''')} = - 1,8162$$

$$\frac{\sin (p' - p) \sin (p'''' - p''''')}{\sin (p'''' - p) \sin (p' - p''''')} = 0,2899$$

¹⁾ Auf beide lässt sich auch die in Nr. 990 der Astronom. Nachrichten gegebene Methode mit gutem Erfolg anwenden.

Zur Abkürzung für das Folgende schreiben wir die aufzulösenden Grundgleichungen (3), (4) und (5) in der Form:

$$\alpha = 0,2663 \qquad \beta = -1,8162 \qquad \gamma = 0,2899$$

Das Aufsuchen der Werthe von M_0 , μ und e oder der Zeit des Perihels, der Umlaufszeit und der Excentricität der wahren Bahn, welche jene Gleichungen befriedigen, können wir uns, wenn wir von den durch das graphische Verfahren erhaltenen Annäherungen ausgehen, die Bestimmung der drei Unbekannten wesentlich erleichtern. In der Regel werden wir nämlich in solchem Falle, wo das Resultat eines graphischen Verfahrens zu verbessern ist, schon mit vier Hypothesen zum Ziele kommen. In der ersten Hypothese legen wir die erhaltenen Annäherungen, im gegenwärtigen Falle beispielsweise die Werthe¹⁾:

$$\begin{aligned} T &= 1843,8 \\ U &= 142,0 \text{ Jahr} \\ e &= 0,62 \end{aligned}$$

zu Grunde, um zu prüfen, welche Unterschiede in Darstellung von α , β , γ übrig bleiben. In der zweiten Hypothese werden die mittleren Anomalien sämmtlich um eine gewisse Grösse, hier beispielsweise um 1° vermehrt, und die erwähnte Prüfung vorgenommen; in der dritten Hypothese wird versucht, welchen Effect es hervorbringt, wenn bloss die Umlaufszeit oder μ geändert wird, beispielsweise hier die mittleren Anomalien mit 1,01 multiplicirt werden; in der vierten Hypothese endlich ist lediglich mit e eine Aenderung vorgenommen, im gegenwärtigen Falle durch Vermehrung des obigen Werthes auf 0,63. Dividirt man mit der Aenderung von M in der zweiten gegen die erste Hypothese in die entsprechenden Aenderungen von α , β und γ , so sind die Quotienten sehr angenähert als die partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{d\alpha}{dM}, \qquad \frac{d\beta}{dM}, \qquad \frac{d\gamma}{dM}$$

zu betrachten. Die Vergleichung der dritten Hypothese mit der ersten liefert ebenso die Differentialquotienten:

$$\frac{d\alpha}{d\mu}, \qquad \frac{d\beta}{d\mu}, \qquad \frac{d\gamma}{d\mu};$$

aus der Combination der vierten mit der ersten Hypothese ergeben sich:

$$\frac{d\alpha}{de}, \qquad \frac{d\beta}{de}, \qquad \frac{d\gamma}{de}.$$

Bezeichnet man die Werthe von α , β , γ der ersten Hypothese mit α_0 , β_0 , γ_0 , so darf nach dem Taylor'schen Lehrsatz gesetzt werden:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 + \frac{d\alpha}{dM} \Delta M + \frac{d\alpha}{d\mu} \Delta \mu + \frac{d\alpha}{de} \Delta e &= \alpha \\ \beta_0 + \frac{d\beta}{dM} \Delta M + \frac{d\beta}{d\mu} \Delta \mu + \frac{d\beta}{de} \Delta e &= \beta \\ \gamma_0 + \frac{d\gamma}{dM} \Delta M + \frac{d\gamma}{d\mu} \Delta \mu + \frac{d\gamma}{de} \Delta e &= \gamma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (A)$$

in welchen Gleichungen ΔM , $\Delta \mu$, Δe die gesuchten Verbesserungen von M , μ und e bedeuten.

¹⁾ Es sind hier zu grösserer Sicherheit nicht die Resultate aus einer ersten Anwendung des graphischen Verfahrens, sondern aus dessen Wiederholung zum Ausgangspunkte gemacht.

Was nun aber das Durchrechnen der einzelnen Hypothesen anlangt, so merken wir hier die Gelegenheit zu den bedeutendsten Abkürzungen und Erleichterungen. Die excentrischen Anomalien der zweiten Hypothese erhält man nämlich aus denen der ersten E, E', E'', E''' u. s. w., indem man die an M angebrachte Aenderung beziehungsweise mit:

$$\frac{1}{1 - e \cos E} \quad \frac{1}{1 - e \cos E'} \quad \frac{1}{1 - e \cos E''} \quad \frac{1}{1 - e \cos E'''} \text{ u. s. w.}$$

multiplicirt. Die excentrischen Anomalien der dritten Hypothese werden erhalten, indem man dieselben Factoren mit dem entsprechenden Increment der mittleren Anomalie multiplicirt und das Product zu E, E', E'', E''' addirt. Da der Differentialquotient von E nach e gleich:

$$\frac{\sin E}{1 - e \cos E}$$

ist, so hat man die in der vierten Hypothese vorgenommene Aenderung von e der Reihe nach mit:

$$\frac{\sin E}{1 - e \cos E} \quad \frac{\sin E'}{1 - e \cos E'} \quad \frac{\sin E''}{1 - e \cos E''} \quad \frac{\sin E'''}{1 - e \cos E'''} \text{ u. s. w.}$$

zu multipliciren, um die entsprechenden Aenderungen der excentrischen Anomalien zu haben.

Unter Anwendung der eben angegebenen ungemein grossen Erleichterungen wurden die folgenden Rechnungen geführt. Die sechs mittleren Anomalien der Hypothese I. findet man:

$$\begin{array}{rcl} - 154^{\circ} 28' & - & 0^{\circ} 59' \\ - 100^{\circ} 40' & + & 16^{\circ} 26' \\ - 29^{\circ} 20' & + & 56^{\circ} 22', \end{array}$$

woraus die excentrischen Anomalien der vier Hypothesen, wie folgt, hervorgehen:

Hypothese I. (M für 1843,8 = 0°, Umlaufsz. = 142 J., $e = 0,62$)	Hypothese II. (M für 1843,8 = 1°, Umlaufsz. = 142 J., $e = 0,62$)	Hypothese III. (M für 1843,8 = 0°, Umlaufsz. = 140,58 J., $e = 0,62$)	Hypothese IV. (M für 1843,8 = 0°, Umlaufsz. = 142 J., $e = 0,63$)
— 164° 10'	— 163° 32'	— 165° 8'	— 164° 16'
— 128 29	— 127 45	— 129 12	— 128 48
— 60 9	— 58 41	— 60 35	— 60 52
— 2 35	+ 0 3	— 2 37	— 2 39
+ 38 36	+ 40 31	+ 38 55	+ 39 18
+ 91 52	+ 92 51	+ 92 25	+ 92 26

Nach der Formel:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} E$$

sind dann weiter die wahren Anomalien v, v', v'', v''' u. s. w. der vier Hypothesen berechnet worden. Die folgende Zusammenstellung enthält diese Werthe sowie die von α, β, γ in den vier Hypothesen:

I.	II.	III.	IV.
— 172° 17'	— 171° 59'	— 172° 46'	— 172° 28'
— 153 41	— 153 17	— 154 6	— 154 17
— 100 11	— 98 30	— 100 41	— 101 55
— 5 20	+ 0 6	— 5 24	— 5 34
+ 71 44	+ 74 37	+ 72 13	+ 73 42
+ 129 46	+ 130 31	+ 130 12	+ 130 55

	I.	II.	III.	IV.
$\alpha =$	0,2638	0,2599	0,2693	0,2733
$\beta =$	— 1,0252	— 1,8249	— 1,0208	— 0,9824
$\gamma =$	0,3095	0,2979	0,2995	0,2972

Durch Vergleichung der Hypothesen erhält man:

$$\begin{array}{lll} \frac{d\alpha}{dM} = - 0,0039 & \frac{d\alpha}{d\mu} = 0,0055 & \frac{d\alpha}{de} = 0,0095 \\ \frac{d\beta}{dM} = - 0,7997 & \frac{d\beta}{d\mu} = 0,0044 & \frac{d\beta}{de} = 0,0428 \\ \frac{d\gamma}{dM} = - 0,0116 & \frac{d\gamma}{d\mu} = - 0,0100 & \frac{d\gamma}{de} = - 0,0123 \end{array}$$

wobei der Kürze halber die Incremente von M , μ und e , nämlich 1^0 , $0^0,0254$ und $0,01$ beziehungsweise als Einheiten für die betreffenden Correctionen gewählt sind. Die Bedingungsgleichungen (A) werden somit:

$$\begin{array}{l} - 0,0039 \Delta M + 0,0055 \Delta \mu + 0,0095 \Delta e = 0,0025 \\ - 0,7997 \Delta M + 0,0044 \Delta \mu + 0,0428 \Delta e = - 0,7910 \\ - 0,0116 \Delta M - 0,0100 \Delta \mu - 0,0123 \Delta e = - 0,0196 \end{array}$$

Die Auflösung derselben ergibt:

$$\Delta M = 1^0,033 \quad \Delta \mu = - 0,29 \times 0,0254 \quad \Delta e = 0,86 \times 0,01$$

oder:

$$\begin{array}{l} T = 1843,391 \\ U = 142,413 \text{ Jahr} \\ e = 0,6286 \end{array}$$

Mit diesen verbesserten Werthen ergeben sich die wahren Anomalien:

$$\begin{array}{ll} v = - 171^0 47' & v''' = + 0^0 17' \\ v' = - 153^0 21' & v'''' = + 76^0 16' \\ v'' = - 99^0 48' & v''''' = + 131^0 24' \end{array}$$

und:

$$\alpha = 0,2674 \quad \beta = - 1,7804 \quad \gamma = 0,2886$$

Die hier sich zeigenden Ungenauigkeiten der Darstellung entsprechen so geringen Differenzen im Positionswinkel, dass sie sich durchaus der praktischen Wahrnehmung entziehen. Drei von den sechs Normalörter, z. B. den ersten, vierten und sechsten, können wir scharf darstellen, wenn wir die Formeln (I) bis (III) der Vorlesung 115 darauf zur Anwendung bringen. Diese Rechnung ergibt:

$$\begin{array}{l} \lambda = 161^0 58' \\ \pi - \delta = 107^0 9' \\ i = 54^0 25' \end{array}$$

Im Mittel geben diese Elemente die sechs Positionswinkel um $15'$ zu klein; wir fügen deshalb zur besseren Darstellung diese $15'$ zu δ hinzu und haben dann folgende Unterschiede zwischen Rechnung und Beobachtung:

	Rechn. — Beob.		Rechn. — Beob.
1782,87	+ $15'$	1843,41	+ $15'$
1804,09	— $4'$	1850,28	— $12'$
1832,23	— $27'$	1866,03	+ $15'$

Was die Kritik dieser Abweichungen betrifft, so sei hier nur bemerkt, dass die Distanz für 1832,23 nur 0'',5 beträgt und dass die grösste obiger Differenzen, wenn man sie hiernach auf den grössten Kreis reducirt, einem Beobachtungsfehler von nur 0'',004 entspricht.

Der Vollständigkeit halber bestimmen wir auch noch die halbe grosse Axe der wahren Bahn aus der beobachteten Distanz von 1825,21. Setzen wir $a = 1$, so würde nach den Formeln:

$$\sqrt{r} \sin \frac{1}{2} v = \sqrt{a(1+e)} \cdot \sin \frac{1}{2} E$$

$$\sqrt{r} \cos \frac{1}{2} v = \sqrt{a(1-e)} \cdot \cos \frac{1}{2} E$$

für jene Epoche $v = -122^\circ 6'$, $\log r = 9,97908$, und nach den Formeln:

$$\varrho \cos(p - \varnothing) = r \cos(v + \pi - \varnothing)$$

$$\varrho \sin(p - \varnothing) = r \cos i \sin(v + \pi - \varnothing)$$

der Positionswinkel $= 153^\circ 21'$, $\log \varrho$ aber gleich 9,94843 sich ergeben, während letzterer nach der Beobachtung gleich 9,98677 ist. Die Differenz beider Logarithmen, d. h.:

$$0,03834$$

ist gleich $\log a$.

Stellen wir noch einmal sämmtliche Elemente von ω Leonis zusammen:

$T = 1843,391$	$i = 54^\circ 25'$
$U = 142,414 \text{ Jahr}$	$e = 0,6286$
$\varnothing = 162^\circ 13'$	$a = 1'',092.$
$\pi - \varnothing = 107^\circ 9'$	

Hundertundachtzehnte Vorlesung.

Einige Anwendungen der Doppelsternbahn-Methoden auf andere Theile der Fixsternastronomie. Berechnung der hypothetischen Parallaxe. Massenbestimmungen.

Zu den interessantesten Resultaten, welche durch Berechnung der Elemente einer Doppelsternbahn erlangt werden können, gehört die Aufstellung der Relation zwischen der Masse des Sternpaares und seiner Parallaxe. Wie schon in Vorlesung 111 erwähnt wurde, geht der uns geläufige Ausdruck für eine mittlere jährliche Bewegung unseres Sonnensystems:

$$\mu = \frac{365,26 k \sqrt{1+m'}}{a^{3/2}}$$

bei einem Doppelsystem über in:

$$\mu = \frac{365,26 k \sqrt{m+m'}}{a^{3/2} \cos \varnothing \Pi^{3/2}},$$

wenn in letzterer Gleichung m und m' die Massen beider Sterne, die Masse der Sonne als Einheit genommen, Π die Parallaxe des Sternpaares und a die halbe grosse Axe in Secunden ausgedrückt vorstellt. Die Grösse:

$$a \cos \varnothing \Pi$$

ist dabei offenbar nichts Anderes als die halbe grosse Axe der wirklichen Bahn, wenn die der Erdbahn als Einheit genommen wird. Unter Vernachlässigung der Masse der Erde, welche bei diesen Vergleichen gar nicht in Betracht kommt, wird:

$$365,26 k = 360^\circ = 2\pi = 1 \text{ Umlauf};$$

da der Umlauf, dividirt durch μ , gleich der Umlaufszeit U , so haben wir:

$$a^{3/2} \operatorname{cosec} \Pi^{3/2} = U \cdot \sqrt{m + m'},$$

oder wegen der Kleinheit von Π , welche erlaubt, den Sinus mit dem Bogen zu identificiren:

$$\frac{a}{\Pi} = U^{2/3} (m + m')^{1/3}.$$

Man nennt die Grösse $\frac{a}{U^{2/3}}$, d. h. den Werth, welcher für Π als Werth der Parallaxe in Bogensekunden erhalten wird, wenn a , wie oben, in Bogensekunden ausgedrückt wird, und die Masse $m + m'$ des Sternpaares der Sonnenmasse oder richtiger der Masse der Sonne und Erde gleich angenommen wird, die hypothetische Parallaxe des Doppelsternes.

Die Folgen der Willkür einer solchen Annahme werden dadurch gemildert, dass nach der eben angeführten Gleichung aus $m + m'$ die Cubikwurzel zu ziehen wäre. Ausserdem haben die allerdings bis jetzt nicht zahlreichen Erfahrungen durch wirklich ausgeführte Parallaxenmessungen wahrscheinlich gemacht, dass unter den Fixsternen sehr grosse Verschiedenheiten der Masse selten sind und selbst in solchen Fällen sich nicht bestätigen, wo man nach den ausserordentlich grossen Verschiedenheiten der Helligkeit solche erwarten sollte.

Berechnen wir, um ein Beispiel der Anwendung der obigen Gleichung zu geben, die hypothetische Parallaxe von ω Leonis, wie sie den gefundenen Elementen entspricht, so erhalten wir:

$$\Pi = \frac{a}{U^{2/3}} = \frac{1'',092}{27,271} = 0'',040.$$

Es entspricht diese Parallaxe einer Entfernung von:

$$5,156000$$

Halbmessern der Erdbahn oder etwas über 100 Billionen Meilen, welche das Licht in 80 Jahren durchläuft.

Es ist klar, dass, wenn, wie bis jetzt in einigen wenigen Fällen bei Doppelsternen geschehen, die Parallaxe gemessen worden ist, durch obige Relation die Masse des Sternpaares gefunden wird. Die Bestimmung der einzelnen Massen m und m' selbst wird möglich, wenn man den Schwerpunkt des Systemes bestimmen kann, weil bekanntlich die Abstände der Componenten vom Schwerpunkte des Systemes den Massen umgekehrt proportional sind.

Die Kenntniss des Schwerpunktes wird erhalten durch eine sehr genaue Untersuchung der sogenannten Eigenbewegung des Sternpaares. Unter Eigenbewegung eines Fixsternes versteht man die Winkelgrösse, um welche derselbe, abgesehen von der Präcession, Nutation und Aberration, am Himmel seinen Ort, also seine Rectascension und Declination ändert. Diese kleine, aber mit der Zeit sehr merklich hervortretende Ortsveränderung ist die Folge der Bewegung der Fixsterne und unseres Sonnensystemes im Raume, einer Bewegung, welche bei den verschiedenen Fixsternen von sehr verschiedener Grösse und wegen der grossen Räume, durch welche die Fixsterne von einander getrennt sind, eine nicht merklich beschleunigte, d. h. eine geradlinige mit constanter Geschwindig-

keit ist. Wir haben früher gesehen, dass die Richtung der Verbindungslinien der Theilpunkte zweier Geraden im Raume, wenn die Theile beider sämmtlich in demselben Verhältniss stehen, in einen grössten Kreis der Sphäre fallen; da ausserdem die Entfernung des Fixsternes von unserer Sonne immer nur verhältnissmässig ausserordentlich kleine Aenderungen erfährt, so ergibt sich, dass die Eigenbewegungen in einem grössten Kreise erfolgen und der Zeit proportional angesehen werden können. Für Sterne, die dem Pole nicht allzu nahe stehen, erlaubt man sich, wohl auf lange Zeit hinaus, die Aenderung der Rectascension wie die der Declination durch Eigenbewegung als constant zu behandeln.

In jedem Systeme haben wir es nach dem Vorhergehenden mit zweierlei Bewegungen zu thun, mit einer solchen, welche der Zeit proportional in einem grössten Kreise, d. h. perspectivisch in gerader Linie vor sich geht und den beiden oder sogar allen Componenten mit dem Schwerpunkte gemeinsam ist, und einer periodischen oder Umlaufbewegung, welche die Sterne eines Systemes in verschiedenem Sinne und verschiedener Grösse beeinflusst. Die Untersuchung der Eigenbewegung optisch nahe stehender Sterne bildet daher ein Mittel zur Prüfung, ob dieselben zu einem engeren Systeme gehören oder nicht, speciell, ob man einen bloss optischen oder einen physischen Doppelstern vor sich hat.

Es folgt noch aus den eben angestellten Betrachtungen, dass es zur Aufsuchung des Schwerpunktes eines Binärsystemes genügt, den scheinbaren Radius vector so zu theilen, dass der Theilpunkt in einem grössten Kreise, d. h. perspectivisch geradlinig mit constanter Geschwindigkeit vorrückt.

Es seien $\alpha, \alpha', \alpha''$ die Rectascensionen des Hauptsternes, $\delta, \delta', \delta''$ die Declinationen, t, t', t'' die zugehörigen Zeiten, p, p', p'', q, q', q'' die entsprechenden Positionswinkel und Distanzen des Begleiters, wobei die Winkelgrössen auf ein bestimmtes mittleres Aequinoctium reducirt sein müssen. Ferner sei:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= q \sin p \sec \delta & \Delta\delta &= q \cos p \\ \Delta\alpha' &= q' \sin p' \sec \delta' & \Delta\delta' &= q' \cos p' \\ \Delta\alpha'' &= q'' \sin p'' \sec \delta'' & \Delta\delta'' &= q'' \cos p'' \end{aligned}$$

so sind:

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \frac{m'}{m+m'} \Delta\alpha & & \delta + \frac{m'}{m+m'} \Delta\delta \\ \alpha' + \frac{m'}{m+m'} \Delta\alpha' & & \delta' + \frac{m'}{m+m'} \Delta\delta' \\ \alpha'' + \frac{m'}{m+m'} \Delta\alpha'' & & \delta'' + \frac{m'}{m+m'} \Delta\delta'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (A)$$

die Rectascensionen und die Declinationen der Projection des Schwerpunktes, während m die Masse des Hauptsternes vorstellt. Die bekannte Bedingungsgleichung dafür, dass drei Punkte der Sphäre in einem grössten Kreise liegen, auf die Oerter des Schwerpunktes angewandt, giebt hier:

$$\left. \begin{aligned} &tg \left(\delta + \frac{m'}{m+m'} \Delta\delta \right) \sin \left(\alpha'' - \alpha' + \frac{m'}{m+m'} (\Delta\alpha'' - \Delta\alpha') \right) \\ &- tg \left(\delta' + \frac{m'}{m+m'} \Delta\delta' \right) \sin \left(\alpha'' - \alpha + \frac{m'}{m+m'} (\Delta\alpha'' - \Delta\alpha) \right) \\ &+ tg \left(\delta'' + \frac{m'}{m+m'} \Delta\delta'' \right) \sin \left(\alpha' - \alpha + \frac{m'}{m+m'} (\Delta\alpha' - \Delta\alpha) \right) = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (B)$$

Mittelst dieser Gleichung kann also leicht das Verhältniss der Masse m' des Nebensternes zu der Gesamtmasse bestimmt werden, da Positionswinkel und Distanzen durch die Bestimmung der Bahn des Systemes, die Rectascensionen und Declinationen des Hauptsternes durch Meridianbeobachtungen gegeben sind. Es existirt aber noch eine zweite Bedingung für obiges Verhältniss, indem verlangt wird, dass die Bögen des vom Schwerpunkte durchlaufenen grössten Kreises sich verhalten wie die zugehörigen Zeitintervalle.

Die strenge Formel für letztere Bedingung ist aus den Fundamentalgleichungen der sphärischen Trigonometrie leicht herzuleiten.

In der Regel darf man sich, wie oben bemerkt, erlauben, statt der Bögen jenes grössten Kreises die Aenderung der Rectascensionen und Declinationen des Schwerpunktes der Zeit proportional zu setzen. Es wird dann verlangt, dass:

$$\left. \begin{aligned} \alpha' - \alpha + \frac{m'}{m + m'} (\Delta \alpha' - \Delta \alpha) \\ \alpha'' - \alpha + \frac{m'}{m + m'} (\Delta \alpha'' - \Delta \alpha) \\ \delta' - \delta + \frac{m'}{m + m'} (\Delta \delta' - \Delta \delta) \\ \delta'' - \delta + \frac{m'}{m + m'} (\Delta \delta'' - \Delta \delta) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (C)$$

$$= \frac{t' - t}{t'' - t}$$

werde.

Drei vollständige Bestimmungen des mittleren Ortes des Hauptsternes liefern zwei Gleichungen, überhaupt aber n Bestimmungen der Rectascension oder der Declination $n - 2$ Gleichungen, also n vollständige Bestimmungen des mittleren Ortes des Hauptsternes 2 ($n - 2$) Gleichungen zur Ermittlung von $\frac{m'}{m + m'}$ und lassen unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate das wahrscheinlichste Resultat finden.

Hundertundneunzehnte Vorlesung.

Ueber die Berechnung einer Doppelsternbahn, wenn die eine Componente unsichtbar ist.

Bestimmungen mittlerer Oerter von Fixsternen von solcher Genauigkeit, dass sie zur Herleitung der Eigenbewegung herangezogen werden können, reichen nicht vor Bradley und Tobias Mayer zurück. So kurz der Zeitraum, den diese noch dazu nicht mit dem Mikrometer allein ausführbaren Beobachtungen umfassen, mit Fixsternperioden im Allgemeinen verglichen, auch ist, so sind doch schon zwei der hellsten Sterne des Himmels, Sirius und Procyon, durch die Discussion ihrer Eigenbewegungen als Doppelsterne erkannt worden. Bessel fand bei seinen für die praktische Astronomie so epochemachend gewordenen Untersuchungen und Beobachtungen von mittleren Oertern und Eigenbewegungen die des Sirius und des Procyon veränderlich und zog daraus den vor wenigen Jahrzehnten noch als sehr kühn geltenden Schluss, dass die Erklärung für diese Veränderlichkeit in unsichtbaren Begleitern zu finden sei. In mathematischer Ein-

kleidung dieses Schlusses kann man sagen: wenn in Beziehung auf die Rectascensionen und die Declinationen des Sternes die Doppelgleichung (C) nicht so zu erfüllen steht, dass:

$$\frac{\alpha' - \alpha}{\alpha'' - \alpha} = \frac{\delta' - \delta}{\delta'' - \delta} = \frac{t' - t}{t'' - t},$$

also die Eigenbewegungen veränderlich werden, kann im nächst einfachsten Falle nur durch die mit $\frac{m'}{m + m'}$ multiplicirten Glieder der obigen Gleichung die Erfüllung der Bedingung herbeigeführt werden. C. A. F. Peters hat in einer Abhandlung, die immer denkwürdig bleiben wird, zunächst bei dem Sirius das genannte Indicium weiter verfolgt und zum ersten Male die Bahn des damals unsichtbaren Begleiters bestimmt. Das Resultat dieser Rechnung ist seitdem durch die wirkliche Entdeckung dieses Körpers glänzend bestätigt worden.

Der zweite Stern, welcher zu einer Untersuchung dieser Art glückliche Gelegenheit bot, ist Procyon; nach den mit ausserordentlicher Sorgfalt ausgeführten Arbeiten von Auwers kennen wir die Bahn des Procyonbegleiters mit nicht geringerer Sicherheit als die des Siriusbegleiters; aber erst im Jahre 1896 wurde der Procyonbegleiter von Schaeberle auf der Licksternwarte entdeckt.

Wegen des ungemeinen Interesses solcher Untersuchungen auf das Vorhandensein dunkler Massen und deren Bahnbestimmungen wollen wir im Folgenden noch den Weg angeben, wie das Problem auf das der Bestimmung einer Doppelsternbahn der gewöhnlichen Art reducirt werden kann.

Es erscheint hier in noch höherem Grade, als bei dem leichteren Falle, gerathen, sich die erste Annäherung mit Zuziehung eines graphischen Verfahrens zu verschaffen. Wenn man das eine Mal den Betrag der Eigenbewegung in Rectascensionen, das andere Mal die Declinationsveränderungen dieser Art als Ordinaten der als Abscissen betrachteten Zeiten aufgetragen hat, so wird sich in praktischen Fällen beinahe immer sogleich eine Schätzung der Umlaufszeit und des mittleren Werthes der Eigenbewegung erlangen lassen. Nehmen wir zunächst der Einfachheit halber an, die Beobachtungen umfassen mindestens einen Umlauf (was auch mit Rücksicht auf den praktischen Erfolg der Rechnung gegenwärtig noch immer sehr wünschenswerth bleibt), so wird man leicht diejenigen Punkte der Rectascensionencurve und ebenso der Declinationencurve erkennen, die um einen Umlauf von einander abstehen; denn in diesen Punkten werden bei gleichem Sinne der Aenderung die Tangenten parallele Richtung haben müssen. Wenn man die zwischen je zwei solchen Punkten vorkommende Eigenbewegung, also die Differenz der Ordinaten, durch die Differenz der Abscissen dividirt, so erhält man die mittlere jährliche Eigenbewegung. Es sei letztere gleich n für die Rectascensionen, gleich q für die Declinationen, so wird man unter Zuziehung von anderen Punkten der Curve eine Reihe von Gleichungen folgender Form erhalten:

$$\alpha' - \alpha + \frac{m'}{m + m'} (\Delta \alpha' - \Delta \alpha) = n (t' - t)$$

$$\alpha'' - \alpha + \frac{m'}{m + m'} (\Delta \alpha'' - \Delta \alpha) = n (t'' - t)$$

$$\alpha''' - \alpha + \frac{m'}{m + m'} (\Delta \alpha''' - \Delta \alpha) = n (t''' - t),$$

desgleichen für die Declination:

$$\delta' - \delta + \frac{m'}{m + m'} (\Delta \delta' - \Delta \delta) = q (t' - t)$$

$$\delta'' = \delta + \frac{m'}{m + m'} (\Delta \delta'' - \Delta \delta) = q (t'' - t)$$

$$\delta''' = \delta + \frac{m'}{m + m'} (\Delta \delta''' - \Delta \delta) = q (t''' - t).$$

Man erkennt sofort, dass es nur noch der Kenntniss von zweien der Grössen:

$$\begin{array}{cccc} \frac{m'}{m + m'} \Delta \alpha & \frac{m'}{m + m'} \Delta \alpha' & \frac{m'}{m + m'} \Delta \alpha'' & \frac{m'}{m + m'} \Delta \alpha''' \\ \frac{m'}{m + m'} \Delta \delta & \frac{m'}{m + m'} \Delta \delta' & \frac{m'}{m + m'} \Delta \delta'' & \frac{m'}{m + m'} \Delta \delta''' \end{array}$$

bedarf, um die übrigen und dann die vier Positionswinkel und $\frac{m'}{m + m'}$ -fache der Distanzen abzuleiten. Für den Fall, dass die Umlaufszeit gegeben ist, würden sogar zwei dieser abgeleiteten Grössen für die Bestimmung der Bahn überflüssig sein; daher man, wie folgt, verfahren kann. Man entwirft für:

$$\frac{m'}{m + m'} \Delta \alpha \quad \text{und} \quad \frac{m'}{m + m'} \Delta \delta$$

eine Hypothese, und leitet, wie eben gezeigt, daraus:

$$p, p', p'', \quad \frac{m'}{m + m'} q \quad \frac{m'}{m + m'} q' \quad \frac{m'}{m + m'} q''$$

ab. Durch das Auftragen dieser Coordinaten um den Ort des Hauptsternes als Nullpunkt herum werden drei Punkte der hypothetischen scheinbaren Bahn erhalten, welche der Doppelbedingung genügen müssen, dass die Sektoren einer durch diese Punkte gelegten Ellipse zwischen dem ersten und zweiten, zwischen dem ersten und dritten und der Inhalt der ganzen Ellipse sich so verhalten, wie es die Zeitintervalle und die Umlaufszeit verlangen. Ist dem genügt, so lässt sich die Bahn nach den bekannten Vorschriften finden, wenigstens der Form und Lage nach, von der scheinbaren Dimension der Bahn aber nur die Entfernung des Sternes vom Schwerpunkte, d. h. analog unserer früheren Bezeichnung die Grösse:

$$\frac{m'}{m + m'} a.$$

Kann die Umlaufszeit nicht als gegeben angesehen werden, so muss die combinirte Hypothese über:

$$\frac{m'}{m + m'} \Delta \alpha \quad \text{und} \quad \frac{m'}{m + m'} \Delta \delta$$

auch noch auf die mittlere Bewegung ausgedehnt werden. Es genügen aber alsdann aus bekannten Gründen nicht drei Epochen, sondern es muss eine vierte zugezogen werden, um drei Sektoren in Beziehung auf ihre Fläche vergleichbar zu machen und so die Fehler der Hypothese ermitteln zu können. Die Versuche im Rohen sind natürlich auch hier wieder durch das graphische Verfahren sehr zu erleichtern. —

Ehe wir nun zum Schluss zu einigen interessanten Anwendungen übergehen, mögen des grossen Interesses wegen, welches sie beanspruchen, hier noch die von H. Seeliger gegebenen Ausführungen über Doppelsterne Platz finden. —

Hundertundzwanzigste Vorlesung.

Ueber Doppelsterne (nach Seeliger)¹⁾.

Einen physischen Doppelstern bilden zwei Sterne, wenn ihre gegenseitige Entfernung so klein ist, dass die Einwirkung der übrigen Fixsterne auf ihre relative Bewegung vernachlässigt oder wenigstens als nebensächlich betrachtet werden darf. Stehen zwei Sterne nur scheinbar in grosser Nähe bei einander, so entsteht ein optischer Doppelstern. Das Vorkommen eines solchen ist den Gesetzen des Zufalles unterworfen, und es ist deshalb eine wohl definirte mathematische Aufgabe, die zu erwartende Anzahl optischer Doppelsterne von gegebenem scheinbarem Abstände zu berechnen, wenn Anzahl und Vertheilung der Sterne im Raume bekannt sind. Da eine strenge Lösung dieser Aufgabe nicht vorliegt, entbehren die gewöhnlich angeführten Angaben über die zu erwartende Anzahl von optischen Doppelsternen der genügend sicheren Grundlage. Leicht kann man sich aber davon überzeugen, dass die Anzahl hellerer optischer Doppelsterne von kleiner Distanz nicht bedeutend sein kann, und in diesem Sinne kann man in der That behaupten, dass die Componenten der überwiegenden Mehrzahl der vielen bekannten Doppelsterne nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit physisch mit einander verbunden sein werden. Man hat, zum Theil aus äusserlichen Gründen, nach dem Vorgange von W. Struve, als Maximaldistanz eines Doppelsternes im engeren Sinne 32'' festgesetzt. In der That werden der Hauptsache nach die Systeme mit schnellerer Revolutionsbewegung hierdurch umgrenzt.

Dass die Entdeckung zahlreicher engerer Doppelsterne einer mit optischen Hilfsmitteln besser ausgerüsteten Zeit vorbehalten bleiben musste, ist selbstverständlich. Indessen sind vereinzelt schon sehr frühe Doppelsterne aufgefunden worden. So z. B. α Centauri von Feuillée im Jahre 1709, γ Virginis, Castor, 61 Cygni von Bradley etc. Dass dies aber nicht vereinzelte Fälle seien, dass vielmehr eine grössere Anzahl von Doppelsternen am Himmel existiren, hat zuerst Christian Mayer, Hofastronom in Mannheim, gezeigt. Er suchte nicht nur nach solchen Objecten, sondern bestimmte auch die Rectascensions- und Declinationsdifferenzen der beiden Componenten mit einem achtfüssigen Bird'schen Mauerquadranten. Diese Thatsache kann nicht verdunkelt werden durch die nicht ganz einwandfreien Bemerkungen, welche die erste Publication Mayer's²⁾ über diesen Gegenstand enthält und die zu Missverständnissen Anlass gebende von ihm gebrauchte Bezeichnung „Fixsterntabanten“. Die Astronomen standen übrigens den Mayer'schen Entdeckungen nicht gleichgültig gegenüber, was aus dem Umstande hervorgeht, dass im Berliner Jahrbuche für 1784, das im Jahre 1781 erschien, ein „Verzeichniss aller bisher entdeckten Doppelsterne“, die „fast alle von Herrn Hofastronom Mayer auf der Churfürstlichen Sternwarte zu Mannheim zuerst beobachtet worden sind“, abgedruckt ist. Dieses Verzeichniss enthält 79 Doppelsterne, und zwar zum grössten Theile begreiflicherweise sehr weite (bis 72'' Distanz). Es scheint sowohl Mayer, als auch dem Herausgeber des Jahrbuches Bode sehr fern gelegen zu haben, diese oder auch

¹⁾ Mit Genehmigung des Herrn Verfassers aus dem Handwörterbuche der Astronomie, herausgegeben von W. Valentiner, Bd. I, S. 671 bis 696, abgedruckt.

²⁾ Gründliche Vertheidigung neuer Beobachtungen von Fixsterntabanten etc. 8°. Mannheim 1778.

nur einen Theil dieser Doppelsterne als physische zu betrachten, denn es wird das astronomische Interesse an solchen Systemen ausdrücklich darin gefunden, dass die fortschreitende relative Eigenbewegung der beiden Fixsterne in Folge ihres scheinbaren Nebeneinanderstehens leichter bemerkt und genauer bestimmt werden könne, was offenbar nur bei optischen Doppelsternen einen Sinn hat. Von nicht wesentlich anderen Gedanken wurde W. Herschel bei seinen ersten Forschungen über Doppelsterne geleitet. Auch er dachte nur an optische Systeme und suchte nach solchen, ohne Mayer's Bemühungen zu kennen. Nun sollten enge Doppelsterne die Messung der jährlichen parallaktischen Verschiebungen erleichtern und also die Auffindung der ersten Werthe von Fixsternparallaxen ermöglichen. Von allem Anfange an waren seine Nachforschungen nach Doppelsternen sehr ergiebig, und bereits am 10. Januar 1782 konnte er der Royal Society einen Katalog von 269 Doppelsternen vorlegen. Die eigentliche Bedeutung der Herschel'schen Entdeckungen erkannte aber erst Michell¹⁾, der das Vorkommen so vieler scheinbar nahe bei einander stehender Sterne als mit den Gesetzen des Zufalles unvereinbar erklärte und betonte, dass die meisten dieser Doppelsterne thatsächlich nahe bei einander stehende Weltkörper seien, die sich nach den Gesetzen der Gravitation um einander bewegen müssen. Diese Ansicht wurde durch die ferneren Arbeiten W. Herschel's bestätigt, die in Folge dessen in dem Gebiete der Doppelsternastronomie von grundlegender Bedeutung sind. Herschel begnügte sich in der Folgezeit nicht damit, neue Doppelsterne zu entdecken. Vielmehr suchte er nach Verlauf eines angemessenen Zeitraumes die ihm bekannt gewordenen Doppelsterne wieder auf und konnte in mehreren Fällen eine Veränderung in der gegenseitigen Stellung beider Sterne nachweisen. Allerdings hätte diese auch eine Folge der als geradlinig anzusehenden Eigenbewegungen sein können, aber es waren so die Grundlagen gegeben, um (wenigstens theoretisch) durch eine dritte Messung auch den letzten Zweifel an dem Vorhandensein wirklicher Doppelsterne zu zerstören.

Endlich gebührt W. Herschel das Verdienst, zuerst in klarer Weise erkannt zu haben, welcher Art die Beobachtungen sein müssen, um als Grundlage für Betrachtungen über etwaige Revolutionsbewegungen dienen zu können. Mayer hatte, ähnlich wie es durch die jetzt üblichen Meridianbeobachtungen geschieht, die Rectascension und Declination der beiden Componenten bestimmt, ein Verfahren, das nicht die nöthige Genauigkeit gewähren konnte, bei engen Doppelsternen überdies kaum anwendbar ist. W. Herschel dagegen bestimmte die gegenseitige Stellung beider Sterne mit Hülfe von Mikrometermessungen, und zwar in einer Weise, welche auch die Folgezeit als die zweckmässigste anerkennen musste. Der hellere der beiden Sterne wurde als Hauptstern und als das Bezugsobject für die Angaben des Ortes des schwächeren betrachtet. Die letzteren enthielten die beiden Polarcoordinaten: Distanz und Positionswinkel. Distanz ist der scheinbare Abstand beider Sterne, und Positionswinkel der Winkel, den die Distanz mit einem festen, durch den Hauptstern gehenden grössten Kreis bildet. Den Positionswinkel hat W. Herschel nicht immer von derselben Nullrichtung an gezählt und durch Angabe des Quadranten jeden Zweifel zu beheben gesucht. Die Folgezeit hat in dieser an sich ohne Frage nebensächlichen Angelegenheit ein vereinfachtes und allgemein angenommenes Verfahren ausgebildet. Man zählt seit W. Struve den Positionswinkel vom nördlichen Theile des Stundenkreises in der Richtung Ost, Süd, West, Nord. Steht also der Begleiter genau nördlich über dem Hauptsterne, so ist der Positionswinkel 0^0 zu notiren.

¹⁾ Michell, On the means of discovering the distance, magnitude etc. of the Fixed Stars etc. Philosophical Transact. 1783, Nov. 27.

Die Resultate seiner Entdeckungen und Messungen hat W. Herschel in den Jahren 1782, 1785 und 1804 zusammengestellt. Diese enthalten Angaben über etwa 700 Doppel- und mehrfache Sterne; eine sehr schätzbare Zusammenstellung dieser Resultate verdankt man J. Herschel¹⁾.

Wie in vielen anderen Gebieten der Astronomie, setzte auch hier der Sohn die grossartige Thätigkeit des Vaters fort. John Herschel hat nicht nur den nördlichen Himmel in dieser Richtung, in der ersten Zeit in Gemeinschaft mit South, auf das Eifrigste durchforscht, sondern die Gelegenheit, welche ihm sein so reich gesegneter Aufenthalt am Cap der guten Hoffnung darbot, auch für die Doppelsterne in der ergiebigsten Weise ausgenutzt. Die verschiedenen von ihm publicirten Zusammenstellungen beziehen sich auf etwa 6000 Doppelsterne, von denen etwa 2000 der südlichen Halbkugel angehören²⁾.

Am meisten und nachdrücklichsten aber wurde nach W. Herschel die Kenntniss der Doppelsterne gefördert durch W. Struve. Seine Bemühungen, durch Aufsuchen neuer Systeme und Bestimmung ihrer Positionen das Fundament für eine Astronomie der vielfachen Sterne zu legen, beginnen bereits um das Jahr 1813. In der ersten Zeit mit sehr beschränkten Hilfsmitteln arbeitend, konnte er seine weitreichenden Absichten erst voll ins Werk setzen, als er in Fraunhofer's berühmtem Refractor von 9 Zoll Oeffnung ein ausgezeichnetes, für die damalige Zeit sogar unvergleichliches Hilfsmittel erhielt. Der Plan, welcher im Laufe der folgenden Jahre wirklich zur Ausführung kam, erstreckte sich auf folgende Aufgaben:

1. Möglichst alle vielfachen Sterne zwischen dem Nordpole und -15° Declination, deren Distanz kleiner als $32''$ und deren schwächster Stern nicht schwächer als von der neunten Grösse ist, aufzusuchen und zu katalogisiren.

2. Die gefundenen Systeme mikrometrisch so genau und so oft als möglich auszumessen und hierbei Notirungen über das Aussehen der Sterne, namentlich ihrer Farbe zu machen.

3. Die mittleren Orte aller dieser vielfachen Sterne mit dem Meridiankreise zu bestimmen.

Die zwei ersten Aufgaben hat Struve ganz allein mit grosser Energie durchgeführt, wie die berühmten Publicationen³⁾ der gewonnenen Resultate zeigen. Bei der dritten Aufgabe musste er bald, von den beiden ersten völlig in Anspruch genommen, auf die Mitarbeiterschaft von Preuss, später auch Dölln rechnen. Für den vorliegenden Gegenstand bieten selbstverständlich die „*Mensurae microm.*“ das grösste Interesse, es wird deshalb wohl angebracht sein, einige Einzelheiten über dieses Werk, wenn auch nur in grösster Kürze, zu erwähnen.

Struve hat die gefundenen Doppelsterne nach zwei Gesichtspunkten in Gruppen eingetheilt: erstens nach der Grösse der Distanz, indem er acht Classen in gleich zu erwähnender Weise unterschied, zweitens nach der Helligkeit der beiden Componenten. Er nennt die Doppelsterne entweder „*lucidae*“ oder „*reliquae*“, je nachdem keiner der beiden Sterne schwächer als achter Grösse oder dies wenigstens bei einem der Fall ist. Die *Mens. micr.* enthalten nun folgende Anzahlen von Doppelsternsystemen:

¹⁾ A Synopsis of all Sir William Herschel's micrometrical Measurements etc. Memoirs of the R. Astr. Society London, Vol. 35.

²⁾ In vielen Bänden der Memoirs of the R. Astr. Society, London. Dann auch in dem grossen Werke: „Results of Astronomical Observations of the Cape of Good Hope“ 1847.

³⁾ Catalogus novus stellarum duplicium etc. Dorpat 1827. Mensurae micrometricae stellarum etc. St. Petersburg 1837.

Classe	Distanz	lucidae	reliquae
1 . . .	0"— 1"	62	29
2 . . .	1"— 2"	116	198
3 . . .	2"— 4"	133	402
4 . . .	4"— 8"	130	452
5 . . .	8"— 12"	54	298
6 . . .	12"— 16"	52	179
7 . . .	16"— 24"	54	429
8 . . .	24"— 32"	52	
Summa		653	1987

Hierzu kommen noch 72 Paare, welche, obwohl ausserhalb des Arbeitsprogrammes liegend, gemessen worden sind, nämlich 28, bei denen der Begleiter schwächer als neunter Grösse ist, und 44 von einer Distanz $> 32''$. Diese 2712 Paare sind aber nur 2641 von einander verschiedene Systeme, weil die mehrfachen Sterne bei der vorgenommenen Classification zugleich in mehreren Classen erscheinen. Die ganze Eintheilung Struve's ist übrigens willkürlich und dürfte wohl kaum als praktisch anerkannt werden, sie wird auch in der neueren Zeit nicht mehr gebraucht.

Durch W. Struve's ¹⁾ Arbeiten wurden die Doppelsterne in den Vordergrund des astronomischen Interesses gerückt und eine grössere Anzahl von Beobachtern widmet seither diesem Gebiete ihre Kräfte. Zuerst ist Otto Struve ²⁾ zu erwähnen, welcher seit 1840 bis vor kurzer Zeit die Doppelsternwelt durchforschte und hierin seine Lebensaufgabe fand. Ihm schliessen sich in würdiger Weise an: Dawes ³⁾, Dembowski ⁴⁾, Dunér ⁵⁾ und in neuester Zeit Schiaparelli ⁶⁾, A. Hall und H. Struve. Ferner sind noch als verdiente Doppelsternbeobachter u. A. zu erwähnen: Mädler, Kaiser, Secchi, Fletcher, Engelmann, Jedrzejewicz, Glasenapp, Lewis, Seabroke, Gledhill, Wilson, die Beobachter der englischen Privatsternwarten von Barclay, Bishop und Lord Wrottesly u. s. f.

Trotz so vielfacher Betheiligung war aber die Anzahl bekannter Doppelsterne in den letzten Jahrzehnten verhältnissmässig wenig grösser geworden. Es musste deshalb nicht geringes Aufsehen machen, als Burnham ⁷⁾ in den siebziger Jahren mit vergleichsweise geringen optischen Hilfsmitteln eine grössere Anzahl neuer, zum Theil sehr enger und lichtschwacher Doppelsterne auffand. Nicht selten waren es Struve'sche Doppelsterne, die sich durch Auffindung eines nahen oder lichtschwachen Begleiters als mehrfach erwiesen. Diese Entdeckungen, die sich später sehr vermehrten, als Burnham in dem 36zölligen Refractor der Licksternwarte ein überaus mächtiges Hilfsmittel erhielt, versprachen für die Zukunft eine reiche Ausbeute an schnell bewegten Doppelsternsystemen, haben in den letzten Jahren auch schon zur Kenntniss sehr interessanter Objecte geführt. Burnham's verschiedene Kataloge enthalten bis jetzt etwa

¹⁾ Stellarum fixarum imprimis duplicium etc. positiones mediae 1852.

²⁾ Zahlreiche kleinere Arbeiten und Mittheilungen Otto Struve's über Doppelsterne finden sich in den Schriften der Petersburger Akademie. Die zahlreichen Messungen engerer Doppelsterne sind zusammengestellt und eingehend bearbeitet in „Observations de Poulcova, Tome IX“.

³⁾ Die Beobachtungen von Dawes sind gesammelt in Memoirs of the R. Astr. Society, London, Bd. 35.

⁴⁾ Misure micrometriche di stelle doppie etc. Roma 1883 und 1884.

⁵⁾ Mésures micrométriques d'étoiles doubles. Lond. 1876.

⁶⁾ Osservazioni sulle stelle doppie. Pubblicazioni del reale Osservatorio di Brera in Milano, No. XXXIII, 1888.

⁷⁾ Memoirs of the R. Astr. Society, London. Bd. XLVII.

1300 neue Objecte¹⁾. Im Ganzen werden gegenwärtig an 12000 mehrfache Sterne bekannt sein, von denen etwa 10 Proc. mehr oder weniger deutliche Revolutionsbewegungen aufweisen. Diese Abschätzung beruht auf folgenden Angaben: J. Herschel²⁾ hat ein Verzeichniss der ihm bekannten mehrfachen Sterne hinterlassen, welches 10300 Objecte enthält. Nicht inbegriffen sind die Burnham'schen Sterne, sowie die, allerdings nicht zahlreichen, in den letzten Jahren von anderen Astronomen gefundenen. Noch mag erwähnt werden, dass man die Doppelsterne mit Vorliebe nach den von den um diesen Zweig der Astronomie verdientesten Astronomen bezeichnet, indem die Nummern der von ihnen herausgegebenen Kataloge citirt werden. Es ist üblich, W. Struve mit Σ , Otto Struve mit $O\Sigma$, Dawes mit D , Dembowski mit \mathcal{A} , Dunér mit Du , Burnham mit β , Schiaparelli mit Sp zu bezeichnen. So wird z. B. ξ Cancri auch Σ 1196 benannt.

Viel ist, namentlich in früherer Zeit, über die Farben der Doppelsterne geschrieben worden. W. Struve hat, wie schon erwähnt, die Untersuchung dieses Gegenstandes in sein Arbeitsprogramm aufgenommen. Im Ganzen hat er unter 596 Systemen gefunden: 375 Paare von gleicher Farbe, 101 Paare von wenig verschiedener Färbung und 120 Paare, deren Componenten sehr verschieden gefärbt sind. Diese Aufzählung dürfte jedenfalls der vielfach ausgesprochenen Meinung entgegenstehen, dass sehr verschiedene Färbung beider Componenten, namentlich in complementärem Sinne, das gewöhnliche Vorkommniss sei. Doppler³⁾ hat in Verfolgung dieser Ansicht die Meinung ausgesprochen, dass bei Doppelsternen mit schneller Revolutionsbewegung die Neigung zu complementärer Färbung sich aus den Gesetzen der Wellenbewegung des Lichtes ableiten lasse. Wenngleich die Folgezeit diese Meinung als irrig erkannt und das dem erwähnten Gedanken zu Grunde liegende „Doppler'sche Princip“ in einigen, allerdings nicht wesentlichen Punkten modificirt hat, so bildet dasselbe doch ein überaus wichtiges Fundament, welches in den letzten Jahren zu wichtigen und interessanten Ergebnissen und Entdeckungen geführt hat. — Zur Erklärung der Farbenverschiedenheit der beiden Componenten eines Doppelsternes dürfte es oftmals ausreichen, in Erinnerung zu behalten, dass an sich geringe Farbenunterschiede sehr nahe bei einander stehender Objecte leichter bemerkbar werden. Während allerdings einerseits durch Versuche an besonders auffällig gefärbten Sternpaaren gezeigt worden ist, dass die Contrastwirkung nicht Alles zu erklären vermag, muss andererseits hervorgehoben werden, wie unsicher bisher alle Angaben, welche sich auf die Sternfarben beziehen, sind. Der Fall kommt nicht selten vor, dass ein Beobachter sehr intensive Farben wahrzunehmen glaubt, die ein anderer nicht oder wenigstens nicht mit Sicherheit wahrnehmen kann. So hat sich ein so erfahrener Beobachter wie J. Herschel stets sehr skeptisch gegenüber der ganzen Angelegenheit verhalten. Seiner Meinung nach kommen überhaupt nur Färbungen aus dem weniger brechbaren Theile des Spectrums (roth, gelb) bei Sternen in ausgesprochenem Grade vor, und blaue Sternfarben seien stets nur Folge der Contrastwirkung naher röthlicher Sterne. Die Anwendung der Spectralanalyse wird auch in dieser Frage mit der Zeit Klarheit schaffen, da die Feststellung der für die Gesamtfarbe maassgebenden Zusammensetzung des Spectrums nicht subjectivem Urtheile preisgegeben ist. An sich ist nicht unwahrscheinlich, dass die Componenten der Doppelsterne sich häufig in sehr

¹⁾ Eine Uebersicht über Burnham's Arbeiten giebt der zweite Band der „Publications of the Lick Observatory“, Sacramento 1894.

²⁾ A Catalogue of 10300 multiple and double Stars. Memoirs of the R. Astr. Society, London, Vol. 40.

³⁾ Ueber das farbige Licht der Doppelsterne etc. Prag 1842.

verschiedenen Stadien der Abkühlung befinden müssen. Dann werden ihre Spectren verschieden sein und in Folge dessen auch ihre Färbung.

Von der grössten Bedeutung für die Astronomie wurden die Doppelsternmessungen, als sie angingen, deutlich Revolutionsbewegungen zu enthüllen, und als es mit ihrer Hülfe gelang, die Einsicht zu erlangen, dass diese, ebenso wie alle Bewegungen im Planetensysteme, durch die Folgerungen des allgemeinen Attractionsgesetzes dargestellt werden können. Die Aufgabe, aus den gemessenen Positionswinkeln und Distanzen die Elemente einer Doppelsternbahn abzuleiten, wurde auf Anregung von Seite Arago's zuerst von dem leider früh verstorbenen Felix Savary¹⁾, und zwar in durchaus correcter Weise gelöst. Denselben Gegenstand hat später Encke²⁾ behandelt, ohne indessen, ausser in weniger belangreichen Dingen, die Savary'sche Lösung zu überholen. Von den zum Theil primitiven graphischen Methoden J. Herschel's³⁾ und den Vorschriften, welche Y. Villarceau⁴⁾ im Anschlusse an die in der *Mécanique céleste* zur Berechnung einer Planetenbahn gegebenen entwickelt hat, darf wohl behauptet werden, dass sie einen Fortschritt in dem vorliegenden Thema nicht gebildet haben. Dagegen hat J. Herschel⁵⁾ und unabhängig von ihm, wenn auch Jahrzehnte später, Villarceau⁶⁾ eine Methode entwickelt, die in den meisten Fällen in grosser Kürze und mit Sicherheit die Berechnung einer Doppelsternbahn auszuführen erlaubt. Der Grundgedanke dieser Methode kommt im Folgenden zu kurzer Auseinandersetzung und führt in der elementarsten und einfachsten Weise zu äusserst leicht ausführbaren Rechenvorschriften. In neuerer Zeit hat das Problem durch Klinkerfues⁷⁾ und Thiele⁸⁾ beachtenswerthe Lösungen erfahren, die auch in der Praxis von Wichtigkeit werden können.

Von besonderem Interesse ist die Frage, ob die beobachteten Bahnbewegungen der Doppelsterne einen directen Beweis für die Gültigkeit des Newton'schen Gravitationsgesetzes auch in jenen abgelegenen Fixsternräumen enthalten. Dass letzteres den Beobachtungen genügt, ist schon oben als bestätigt erwähnt worden. Die Untersuchung, ob kein anderes Gesetz dieselbe scheinbare Wirkung hat, gestaltet sich ganz anders, als bei den Planetenbewegungen, weil hier die Beobachtungen nur über die Ortsveränderungen in der auf der Gesichtslinie senkrechten Ebene Aufschluss geben und über die Bewegung im Visionsradius gar nichts aussagen. Die Aufgabe führt auf ein interessantes mathematisches Problem. Dasselbe, von Bertrand⁹⁾ zuerst formulirt, wurde vollkommen gelöst von Darboux und Halphén¹⁰⁾ und im Anschlusse an den letzteren in sehr eleganter Weise von Tisserand¹¹⁾. Nach diesen Arbeiten ist allerdings, wenn nur gewisse höchst plausible Annahmen hinzugezogen werden, nur das Newton'sche Gesetz im Stande, die beobachteten Doppelsternbewegungen zu erklären. Ganz anders gestaltet sich aber die Sachlage, wenn man auf den Umstand Rücksicht nimmt, dass die zu Grunde liegenden Messungen vermöge der bedeutenden Ungenauigkeiten, welche ihnen anhaften, durchaus nicht eine bestimmte Bewegungsform mathematisch genau definiren, vielmehr nur gewisse Grenzen anzugeben im Stande sind, innerhalb welcher

¹⁾ *Connaissance des temps* für 1830 addit.

²⁾ *Berliner Astronomisches Jahrbuch* für 1832.

³⁾ *Memoirs of the R. Astr. Society*, London, Bd. 5.

⁴⁾ *Connaiss. d. t.* für 1852 add.

⁵⁾ *Memoirs of the R. Astr. Society*, London, Bd. 18.

⁶⁾ *Connaiss. d. t.* für 1877 add.

⁷⁾ *Theoretische Astronomie*, Braunschweig 1877. Auch *Astr. Nachr.* Nr. 990.

⁸⁾ *Astr. Nachr.*, Bd. 104.

⁹⁾ *Compt. rend.*, Bd. 84.

¹⁰⁾ Ebenda.

¹¹⁾ *Bulletin astronomique*, Tome IV, 1887.

die Abweichungen von der Theorie liegen müssen. Diese Grenzen sind aber ziemlich weite, weil bei engeren Doppelsternen z. B. Fehler in Distanz von 5 bis 10 Proc. und darüber durchaus nicht selten vorkommen. Da man ferner etwaige Zweifel an der Allgemeingültigkeit des Newton'schen Gesetzes doch nur auf kleinere Abweichungen desselben von der Wahrheit beziehen wird, so muss man zugeben, dass die bisher berechneten Doppelsternbahnen durchaus nicht im Stande sind, in der besprochenen Frage beweiskräftig zu wirken. Im Folgenden wird ein hierher gehöriges Beispiel erwähnt werden. Der vielfache Stern ξ Cancri zeigt zum Theil Bewegungen, die, trotzdem dieselben in Wahrheit sehr verwickelte Störungsbewegungen sind, doch durch die Kepler'schen Gesetze, wenigstens innerhalb längerer Zeiträume, genügend dargestellt werden können.

Ehe man dazu schreiten kann, die vorhandenen Messungen eines Doppelsternes zu einer Bahnbestimmung heranzuziehen, muss überlegt werden, welche Correctionen man an sie anzubringen hat, um ein homogenes Material zu erlangen. Refraction, Aberration, Nutation haben auf die Messungen der engen Doppelsterne, welche hier in Frage kommen, nur einen verschwindend kleinen Einfluss. Ebenso kann in den meisten Fällen die Einwirkung der Präcession auf den Positionswinkel unbedenklich vernachlässigt werden. Dieselbe ist indessen so einfach zu berechnen, dass man die damit verbundene Mühe nicht scheuen wird. Bezeichnen p_0 und p die zu den Zeiten t_0 und t gehörigen Positionswinkel, α und δ Rectascension und Declination des Doppelsternes, so hat man nämlich:

$$p = p_0 + 0,0056 \sin \alpha \sec \delta (t - t_0).$$

Ganz anders verhält es sich mit gewissen Messungsfehlern, die, in systematischer Weise auftretend, der Person des Beobachters eigenthümlich sind und deshalb persönliche Fehler genannt werden. Es ist das Verdienst Bessel's und W. Struve's, auf das Vorkommen solcher Fehler hingewiesen zu haben, als sie ihre gleichzeitigen Messungen gemeinsam beobachteter Objecte verglichen. Dann aber hat besonders O. Struve, die Wichtigkeit des Gegenstandes erkennend, zuerst eingehende Untersuchungen über die persönlichen Fehler, mit denen seine eigenen Beobachtungen in hohem Grade behaftet sind, angestellt. Es hat sich gezeigt, dass verschiedene Umstände, wie die Stellung des Sternpaares gegen die Verticale, die Grösse der Distanz, vielleicht auch die Helligkeit der Sterne maassgebend auf die Messung einwirken. Ferner hat sich die sehr unangenehme Thatsache herausgestellt, dass zeitliche Aenderungen in den persönlichen Fehlern nicht selten sind und manchmal in sehr merkbarem Betrage zum Vorschein kommen. Thiele¹⁾ konnte das bei mehreren Beobachtern in unzweideutiger Weise nachweisen. Es ist begreiflich, dass unter solchen Umständen die persönlichen Beobachtungsfehler, die z. B. bei O. Struve den Positionswinkel unter Umständen um mehrere Grade verfälschen, genauren Untersuchungen über die Bewegungen der Doppelsterne grosse Schwierigkeiten bereiten und dass der Berechner niemals unterlassen darf, auf sie gehörig Rücksicht zu nehmen. Wegen der zeitlichen Veränderlichkeit derselben sind solche Untersuchungen aber mit grossen Unsicherheiten behaftet, die nur durch vielfache Vergleichen der Resultate verschiedener Beobachter verringert werden können. Solche Vergleichen wurden in neuerer Zeit in der That angestellt, noch ist aber manche Lücke in dieser Beziehung auszufüllen.

¹⁾ Castor, Calcul du mouvement relatif etc. Kopenhagen 1879.

Wie schon erwähnt, wird bei der Bahnberechnung eines Doppelsternes die unbedingte Gültigkeit des Newton'schen Gesetzes vorausgesetzt. Wir haben also anzunehmen, dass die beiden Componenten eines Doppelsternes sich nach den Kepler'schen Gesetzen um einander bewegen. Diese Annahme können wir, da nur geschlossene Bahnen in Betracht gezogen werden sollen, so formuliren: der eine Stern beschreibt um den anderen (den Hauptstern) eine Ellipse und hält hierbei das Gesetz von der Constanz der Flächengeschwindigkeit ein. Diese Bewegung wird von dem sehr weit entfernten Beobachter betrachtet und es werden demzufolge nur die Veränderungen in der gegenseitigen Stellung der Projectionen der beiden Sterne in einer Ebene bemerkbar sein, welche senkrecht zur Gesichtslinie steht. Es ist leicht zu sehen, wie sich diese scheinbare Bewegung gestaltet. Die scheinbare Bahn wird wieder eine Ellipse sein; der Hauptstern wird aber nicht in ihrem Brennpunkt, sondern irgendwo im Inneren stehen. Das Gesetz der Flächen aber wird bekanntlich nach wie vor gelten. Die Kenntniss der scheinbaren Bewegung genügt indess, wie wir sehen werden, vollständig zur Bestimmung der wahren Bewegung.

Wir haben zunächst festzusetzen, wie viele und welche Bestimmungsstücke die wahre Bewegung bestimmen. Grösse und Gestalt der wahren Ellipsen sind gegeben durch die grosse Halbaxe a und die Excentricität e . Die Lage der Bahnebene wird bestimmt durch die Neigung i gegen die Projectionsebene und die Länge des Knotens Ω auf letzterer. Wir wollen Ω von demselben Anfange und in derselben Richtung wie die Positionswinkel zählen. Es mag gleich hier bemerkt werden, dass, falls i stets positiv und kleiner als 90° angenommen wird, Ω nicht eindeutig bestimmt werden kann. Da offenbar die scheinbare Bewegung entstehen kann durch eine wahre in einer Ebene mit der Neigung $=i$ oder auch $-i$, so ist es erlaubt, nach Belieben den Werth von Ω um 180° zu ändern. Man hat sich aber für einen der beiden gleichberechtigten Werthe von Ω zu entschliessen, alles Andere ist dadurch unzweideutig gegeben. Die Lage der wahren Ellipsen in ihrer Ebene wird durch den Winkel λ bestimmt, welchen die grosse Axe mit der Knotenlinie bildet, und der Ort des Sternes in der Bahn durch die wahre oder mittlere Anomalie zu einer bestimmten Zeit. Man kann auch, und das soll im Folgenden geschehen, die Zeit τ angeben, zu welcher die beiden Sterne die kleinste Entfernung von einander haben. τ ist also die Zeit des Passirens des Periastrons. λ wird dann den Winkel zwischen Periastron und Knoten, vom Hauptsterne gesehen, darstellen. Schliesslich muss noch die Umlaufszeit T bekannt sein, weil diese, wie wir sehen werden, nicht durch a , wie im Planetensysteme, gegeben ist.

Zwischen den angeführten Grössen, der Zeit t , der wahren Anomalie v , der mittleren M und der excentrischen E finden die bekannten Beziehungen statt, die durch die Kepler'schen Gesetze gegeben sind. Wir wollen eine dieser Gleichungen näher betrachten. Es seien m und m_1 die Massen der beiden Sterne, k die Anziehungsconstante, dann ist bekanntlich:

$$T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{k\sqrt{m+m_1}} \quad \dots \quad (1)$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$a = \left(\frac{Tk\sqrt{m+m_1}}{2\pi} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Die Constante k ist hier natürlich in denselben Einheiten auszudrücken, wie die anderen vorkommenden Grössen. Ob bei den Doppelsternen k denselben Werth hat wie in unserem Planetensysteme, ist eine Frage, die wohl discutirt werden kann und in der That discutirt worden ist. Ernstliche Zweifel dagegen hat man aber nicht vor-

bringen können. Dann gilt aber (1) auch z. B. für die Bewegung der Erde um die Sonne. Setzt man also die Sonnenmasse bezw. Erdmasse gleich 1 bezw. ν , die Umlaufzeit der Erde = 1, so ist:

$$k = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\nu}},$$

wobei noch mit jedenfalls hinreichender Genauigkeit ν einfach fortgelassen werden kann. Man hat jetzt einfach:

$$a = T^{\frac{2}{3}} (m + m_1)^{\frac{1}{3}} (2)$$

Hier ist also T in Jahren, m und m_1 in Sonnenmassen und a in mittleren Entfernungen Sonne — Erde auszudrücken. Nennt man p die Parallaxe des Fixsternes, a'' den scheinbaren Winkelwerth von a , so hat man in Folge von:

$$a'' = ap$$

die Gleichung:

$$p = \frac{a''}{[(m + m_1) T^2]^{\frac{1}{3}}} (3)$$

Da nun eine Doppelsternbahnberechnung nur a'' angeben kann, so enthält die Gleichung (3) eine Beziehung zwischen p und $m + m_1$, wenn auch noch T bekannt ist. Diese Gleichung ist demnach bei jenen Doppelsternen von besonderem Interesse, für welche Parallaxenbestimmungen vorliegen, denn sie gestattet die Bestimmung von Fixsternmassen. Als Beispiel mag hierfür der Doppelstern 70 Ophiuchi angeführt werden. Nimmt man — es sei dahingestellt, ob dies die beste Annahme ist — an:

$$T = 95,97 \quad a'' = 4'',958 \quad p = 0'',162,$$

so ergibt Formel (3) $m + m_1 = 3,11$. Die Gesamtmasse des Systemes ist also etwa drei Sonnenmassen gleich.

Nach dem Früheren wird also eine Doppelsternbahn durch sieben Elemente bestimmt. Als solche kann man die Grössen:

$$a, e, \Omega, i, \lambda, T, \tau,$$

oder Combinationen aus ihnen wählen. Sind diese Elemente bekannt, so ist es eine sehr leichte Aufgabe, hieraus für eine gegebene Zeit t Positionswinkel p und Distanz ϱ zu berechnen. Hält man die früher angeführten Bezeichnungen fest, so hat man zunächst die bekannten Formeln:

$$\begin{aligned} M &= \frac{2\pi}{T} (t - \tau) \\ E - e \sin E &= M \\ tg \frac{1}{2} v &= tg \frac{1}{2} E \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \end{aligned}$$

anzuwenden. Hieraus ergibt sich die wahre Distanz r der beiden Sterne:

$$r = a (1 - e \cos E)$$

und entsprechend:

$$\left. \begin{aligned} tg(p - \Omega) &= \cos i \, tg(\lambda + v) \\ \varrho &= r \cdot \frac{\cos(\lambda + v)}{\cos(p - \Omega)} \end{aligned} \right\} (4)$$

wozu noch zu bemerken ist, dass $p - \Omega$ und $\lambda + v$ in demselben Quadranten liegen.

Die umgekehrte Aufgabe, aus gegebenen p und ϱ die sieben Bahnelemente zu bestimmen, ist natürlich viel complicirter. Offenbar muss im Allgemeinen aus sieben Daten eine Bahnbestimmung möglich sein. Man sieht aber sofort ein, dass Positions-

winkel oder Distanzen allein hierzu nicht ausreichend sind, denn nach (4) ist p unabhängig von a , während ϱ nicht von δ abhängt. Sonst können die Daten in ganz beliebiger Weise combinirt werden. Es sind auch für einige dieser Combinationen Methoden, die wegen der transcendenten Form einiger der auftretenden Gleichungen Näherungsmethoden sein müssen, aufgestellt worden. Dieselben sind dem Wunsche entsprungen, die Lösung des Problems aus der gerade hinreichenden Anzahl von Daten zu erlangen, welcher Wunsch in rein theoretischer Hinsicht durchaus berechtigt ist. In der Praxis liegt die Sache anders. Bahnbestimmungen solcher Doppelsterne, deren Stellung nur durch wenige Positionswinkel und Distanzen festgelegt erscheint, haben meistens kein Interesse und können bei den bekannten Ungenauigkeiten der beobachteten Coordinaten auf irgend welche Zuverlässigkeit keinen Anspruch machen. Man wird deshalb wohl in allen Fällen, die eine Bahnberechnung überhaupt verdienen, annehmen dürfen, dass eine grössere Anzahl von Messungen vorliegt. Es soll nun für das Folgende nur angenommen werden, dass entweder fünf zusammengehörige Positionswinkel und Distanzen direct gegeben seien oder wenn es, was bei engeren Doppelsternen vorkommen kann, an letzteren fehlt, eine fortlaufende Reihe von Positionswinkeln gegeben sei, die erlaubt, für fünf Zeiten den Betrag des Differentialquotienten $\frac{dp}{dt}$ zu berechnen. Da nämlich der Flächensatz:

$$\varrho^2 \frac{dp}{dt} = \text{const.}$$

gilt, so kann man jetzt für die fünf gegebenen Zeiten die zugehörigen ϱ ableiten, wenn das einem und zwar unter den gegebenen beliebig ausgewählten Zeitmomente zukommende ϱ gegeben ist, oder auch ganz beliebig angenommen wird. Man erhält in letzterem Falle die Dimensionen der wahren Ellipse natürlich in diesem willkürlichen Maassstabe ausgedrückt, sonst aber selbstverständlich alles Andere ebenso richtig, als wenn die eine erwähnte Distanz bekannt wäre. Durch die fünf Paare p und ϱ sind auch die fünf Paare rechtwinkliger Coordinaten:

$$x = \varrho \cos p \qquad y = \varrho \sin p$$

gegeben. Diese aber müssen der Gleichung der scheinbaren Ellipse genügen, die sich den oben gemachten Bemerkungen gemäss in der allgemeinsten Form:

$$\beta x^2 + \gamma y^2 + 2\delta xy + 2\epsilon x + 2\zeta y - 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

darstellt. Da (5) eine Ellipse darstellen soll, so muss bekanntlich sein:

$$\beta > 0 \qquad \gamma > 0 \qquad \beta\gamma - \delta^2 > 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5a)$$

Zur Bestimmung der fünf Constanten $\beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$ reichen fünf gegebene x und y aus. Man wird indessen niemals versäumen, etwa mehr vorhandene Daten mit zu benutzen und so viele Gleichungen anzusetzen, als zusammengehörige x und y vorhanden sind. Aus allen wird man, am besten nach der Methode der kleinsten Quadrate, die Werthe der β, γ etc. berechnen.

Ist dies geschehen, so lässt sich leicht die wahre Ellipse bestimmen. Die rechtwinklige Projection dieser letzteren ist die Ellipse (5) und der Coordinatenanfang, welcher mit dem Hauptsterne zusammenfällt, ist der Brennpunkt der wahren Ellipse. Diese geometrischen Bedingungen, in passender Weise durch Formeln ausgedrückt, geben die einfache Lösung des Problemes.

(5) kann auch als Gleichung eines geraden Cylinders angesehen werden, dessen Axe mit der Z-Axe des Coordinatensystemes, also mit der auf der Projectionsebene senkrechten Gesichtslinie zusammenfällt. Wir beziehen nun diesen Cylinder auf ein in

demselben Anfange gelegenes Coordinatensystem der x'', y'', z'' . Die x'' -Axe soll in der Knotenlinie der wahren Ellipse liegen, die y'' -Axe senkrecht darauf im Sinne der Bewegungsrichtung des Sternes um den Hauptstern. Dann hat man in sofort ersichtlicher Weise für die Transformation beider Coordinatensysteme:

$$\begin{aligned} x &= x'' \cos \varnothing - y'' \sin \varnothing \cos i + z'' \sin \varnothing \sin i \\ y &= x'' \sin \varnothing + y'' \cos \varnothing \cos i - z'' \cos \varnothing \sin i \\ z &= \quad \quad + y'' \sin i \quad \quad + z'' \cos i. \end{aligned}$$

Führt man dies in (5) ein und setzt $z'' = 0$, so erhält man den Durchschnitt des erwähnten Cylinders mit der wahren Bahnebene, also die wahre Ellipse. Ihre Gleichung ist also:

$$\left. \begin{aligned} &\beta (x'' \cos \varnothing - y'' \sin \varnothing \cos i)^2 + \gamma (x'' \sin \varnothing + y'' \cos \varnothing \cos i)^2 \\ &+ 2 \delta (x'' \cos \varnothing - y'' \sin \varnothing \cos i) (x'' \sin \varnothing + y'' \cos \varnothing \cos i) \\ &+ 2 \varepsilon (x'' \cos \varnothing - y'' \sin \varnothing \cos i) + 2 \xi (x'' \sin \varnothing + y'' \cos \varnothing \cos i) - 1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (I)$$

Andererseits ist aber die Gleichung der wahren Ellipse auf dieselben Axen bezogen:

$$\frac{(a e + x'' \cos \lambda + y'' \sin \lambda)^2}{a^2} + \frac{(-x'' \sin \lambda + y'' \cos \lambda)^2}{b^2} - 1 = 0 \quad . \quad . \quad (II)$$

wenn die kleine Halbaxe mit b bezeichnet wird. Die Gleichungen (I) und (II) müssen identisch für alle Coordinatenwerthe mit einander übereinstimmen. Es müssen demzufolge die Coëfficienten gleicher Potenzen der Coordinaten gleich sein. Bezeichnet deshalb ν einen zu bestimmenden Factor, so findet sich sofort:

$$\nu \left(\frac{\cos \lambda^2}{a^2} + \frac{\sin \lambda^2}{b^2} \right) = \beta \cos \varnothing^2 + \gamma \sin \varnothing^2 + 2 \delta \sin \varnothing \cos \varnothing \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\nu \left(\frac{\sin \lambda^2}{a^2} + \frac{\cos \lambda^2}{b^2} \right) = (\beta \sin \varnothing^2 + \gamma \cos \varnothing^2 - 2 \delta \sin \varnothing \cos \varnothing) \cos i^2 \quad . \quad . \quad (7)$$

$$\nu \sin 2 \lambda \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = (-\beta \sin 2 \varnothing + \gamma \sin 2 \varnothing + 2 \delta \cos 2 \varnothing) \cos i \quad . \quad . \quad (8)$$

$$\nu \frac{e}{a} \cos \lambda = \varepsilon \cos \varnothing + \xi \sin \varnothing \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$\nu \frac{e}{a} \sin \lambda = (-\varepsilon \sin \varnothing + \xi \cos \varnothing) \cos i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$\nu (e^2 - 1) = -1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Aus (11) folgt $\nu = \frac{1}{1 - e^2} = \frac{a^2}{b^2}$. Führt man noch den halben Parameter $p = \frac{b^2}{a}$ ein, so kann man (8) und (9) schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{e}{p} \cos \lambda &= \varepsilon \cos \varnothing + \xi \sin \varnothing \\ \frac{e}{p} \sin \lambda &= (-\varepsilon \sin \varnothing + \xi \cos \varnothing) \cos i \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Das doppelte Product dieser Gleichungen ist:

$$\frac{e^2}{p^2} \sin 2 \lambda = (-\varepsilon^2 \sin 2 \varnothing + \xi^2 \sin 2 \varnothing - 2 \varepsilon \xi \cos 2 \varnothing) \cos i,$$

während (8) die Gestalt annimmt:

$$\frac{e^2}{p^2} \sin 2 \lambda = (\beta \sin 2 \varnothing - \gamma \sin 2 \varnothing + 2 \delta \cos 2 \varnothing) \cos i.$$

es nach Belieben um 180° vergrössern darf oder nicht. Diese übrigbleibende Zweideutigkeit liegt aber, wie bereits oben auseinandergesetzt wurde, in der Natur der Sache und kann nicht gehoben werden. Man muss sich also für ein bestimmtes Ω entscheiden, weil dann erst Ω unzweideutig bestimmt ist.

Wir stellen nun alle Formeln zusammen, die, nach Ermittlung der Coëfficienten $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \xi$, zur Bestimmung der wahren Bahnellipse zu berechnen sind:

$$\begin{aligned}\mu &= \gamma + \xi^2 \\ \nu &= \beta + \varepsilon^2 \\ \varrho &= \delta + \xi \varepsilon \\ \operatorname{tg} 2 \Omega &= \frac{-2 \varrho}{\mu - \nu};\end{aligned}$$

$\cos 2 \Omega$ hat das Vorzeichen von $(\mu - \nu)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{p^2} &= \frac{\mu + \nu}{2} - \frac{\mu - \nu}{2} \cos 2 \Omega + \varrho \sin 2 \Omega \\ \operatorname{tg} i^2 &= (\mu + \nu) p^2 - 2 \\ \frac{e}{p} \sin \lambda &= (-\varepsilon \sin \Omega + \xi \cos \Omega) \cos i \\ \frac{e}{p} \cos \lambda &= \varepsilon \cos \Omega + \xi \sin \Omega.\end{aligned}$$

Will man für die Berechnung dieser höchst einfachen Formeln eine Controle haben, so findet man eine solche u. a. in der oben vorkommenden Formel:

$$\frac{e^2}{p^2} \sin 2 \lambda = \cos i [(\beta - \gamma) \sin 2 \Omega - 2 \delta \cos 2 \Omega].$$

Es mag noch erwähnt werden, dass man die Gleichungen für p^2 und $\operatorname{tg} i^2$ auch schreiben kann:

$$\begin{aligned}\frac{2}{p^2} &= (\mu + \nu) - \sqrt{(\mu - \nu)^2 + 4 \varrho^2} \\ \operatorname{tg} i^2 &= p^2 \sqrt{(\mu - \nu)^2 + 4 \varrho^2}.\end{aligned}$$

Man sieht hieraus, dass, wie es nach den getroffenen Festsetzungen auch sein muss, $\operatorname{tg} i$ immer reell wird, wenn es p ist. Dieses wird imaginär, wenn:

$$\varrho^2 > \mu \nu.$$

Das ist aber, wie man leicht einsieht, die Bedingung dafür, dass der Koordinatenanfang ausserhalb der scheinbaren Ellipse sich befindet, welcher Fall nicht eintreten kann, weil der Koordinatenanfang die Projection des Brennpunktes der wahren Ellipse sein muss.

Hat man auf diese Weise Grösse, Form und Lage der wahren Ellipse berechnet, so kann man aus jedem Positionswinkel p und der zugehörigen Zeit die mittlere Anomalie M berechnen, denn es ist:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(v + \lambda) &= \sec i \operatorname{tg}(p - \Omega) \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} E &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \\ M &= E - e \sin E.\end{aligned}$$

Da aber andererseits:

$$M = \frac{360^\circ}{T} (t - \tau)$$

ist, so giebt jedes M eine lineare Gleichung zwischen den beiden Unbekannten:

$$\frac{360^0}{T} = n \quad \text{und} \quad n\tau = -\varepsilon,$$

nämlich:

$$M = nt + \varepsilon.$$

Aus der Gesamtheit der vorliegenden Werthe für M ergeben sich dann, am besten nach der Methode der kleinsten Quadrate, die gesuchten Unbekannten.

Auf die angegebene Weise wird man in den allermeisten Fällen eine Bahnbestimmung erhalten, die sich dem verfügbaren Beobachtungsmateriale so weit anschmiegen wird, dass man sie zum Ausgangspunkte für eine consequente Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate wählen können wird. Zu diesem Zwecke wird man, ganz ähnlich wie bei Kometen- und Planetenbahnen die Beziehungen aufzustellen haben, welche zwischen kleinen Aenderungen der Bahnelemente und den zugehörigen Aenderungen der Beobachtungsgrössen bestehen. Hier sind also die kleinen Zunahmen dp und dq durch die Differentiale der sieben Bahnelemente auszudrücken. In Folge der grossen Einfachheit der auszuführenden Operationen wird es wohl ausreichend sein, wenn nur das Resultat angeführt wird. Die benutzte Bezeichnung ist dieselbe wie früher, nur ist noch der Einfachheit wegen der Excentricitätswinkel φ , wo $\sin \varphi = e$, eingeführt worden.

Man findet nun:

$$dE = \frac{a}{r} (t - \tau) dn - \frac{an}{r} d\tau + \frac{a}{r} \sin E \cos \varphi d\varphi$$

$$dv = \frac{a^2}{r^2} \cos \varphi [(t - \tau) dn - n d\tau] + \frac{a^2}{r^2} \sin E \left(\frac{r}{a} + \cos \varphi^2 \right) d\varphi$$

$$dr = \frac{r}{a} da + \frac{a^2}{r} \sin \varphi \sin E [(t - \tau) dn - n d\tau] + \frac{a^2 (e - \cos E)}{r} \cos \varphi d\varphi$$

und hiermit:

$$\left. \begin{aligned} dp &= d\Omega - \frac{r}{\varrho} \sin(\lambda + v) \cos(p - \Omega) \sin i di + \left(\frac{r}{\varrho} \right)^2 \cos i d\lambda \\ &+ \left(\frac{a}{\varrho} \right)^2 \cos \varphi \cos i [(t - \tau) dn - n d\tau] + \left(\frac{a}{\varrho} \right)^2 \cos i \sin E \left(\frac{r}{a} + \cos \varphi^2 \right) d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Setzt man noch zur Abkürzung:

$$m = \frac{1}{2} \frac{\sin i^2}{\cos i} \sin 2(p - \Omega),$$

so wird die gesuchte Differentialgleichung für die Distanz:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varrho}{\varrho} &= \frac{da}{a} - m d\lambda + \left(\frac{a}{r} \right)^2 (e \sin E - m \cos \varphi) [(t - \tau) dn - n d\tau] \\ &- \operatorname{tg} i \sin(p - \Omega)^2 di - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left[\cos \varphi (\cos E - e) + m \sin E \left(\frac{r}{a} + \cos \varphi^2 \right) \right] d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Diese beiden Gleichungen ermöglichen sofort die Aufstellung der Bedingungs-
gleichungen. Die Bildung der Normalgleichungen hängt von dem Gesetze ab, nach
welchem die Beobachtungsfehler dp und dq von der Distanz ϱ abhängen. Dass eine
solche Abhängigkeit stattfindet, ersieht man aus dem Umstande, dass die Genauigkeit
der Beobachtung der p schnell mit der Distanz ϱ abnimmt. Man wird im Allgemeinen
sagen können, dass beide Coordinaten gleich genau gemessen sind, wenn ϱdp und dq
gleich gross sind. Trifft letzteres zu, so müsste man die Normalgleichungen nach der
Bedingung:

$$\Sigma \varrho^2 dp^2 + \Sigma d\varrho^2 = \text{Minim.}$$

bilden. Dies ist aber nicht, wenigstens nicht bei allen Beobachtern, der Fall und scheint namentlich bei kleinen Distanzen ($< 1''$) nicht zuzutreffen. Man wird, da die Sache namentlich mit Berücksichtigung der systematischen Fehler, die hier wie zufällige Fehler angesehen werden, bisher nicht genügend untersucht ist, vielleicht am besten thun, bei mässigen Distanzen die obige Minimumsbedingung festzuhalten, für ganz kleine Distanzen aber:

$$\Sigma \varrho^2 dp^2 = \text{Minim.}$$

zu setzen und die beobachteten Distanzen nur zur Ableitung der Dimensionen der wahren Ellipse, also zur Bestimmung von a zu benutzen. — Die auseinandergesetzte Methode reicht nicht aus, wenn i nahezu 90° ist. Ein Beispiel für diesen Fall bietet der enge Doppelstern 42 Comae, bei welchem die Annahme $i = 90^\circ$ den Beobachtungen am besten zu genügen scheint. Hier hat man die Bahnbestimmung allein auf die Distanzmessungen zu gründen und der unveränderliche Positionswinkel bestimmt für sich die Knotenlänge der Bahn. Auf die Behandlung dieser Ausnahmefälle kann hier nicht näher eingegangen werden.

Die zu ferneren Untersuchungen über Bahnbewegungen tauglichen Doppelsternmessungen gehen bis auf W. Struve zurück. Die ersten Beobachtungen dieses Astronomen sind indessen mit grösseren und weniger gut ermittelten systematischen Fehlern behaftet, so dass man bei ihrer Benutzung öfters auf Schwierigkeiten stösst. Mit Sicherheit darf man sich aber der von 1828 an von WΣ gelieferten Messungen bedienen, und man darf sie den besten neueren Beobachtungen an die Seite stellen. Die Beobachtungen W. Herschel's, so überaus werthvoll wegen ihres Alters, dürfen nur mit grösster Vorsicht verwerthet werden. Die Angaben der Positionswinkel sind nicht selten durch grobe Versehen, z. B. falsche Angabe des Quadranten, entstellt, die Distanzen sind, wenn überhaupt angegeben, sehr wenig sicher. Aus diesen Gründen wird man diese Messungen nicht mit Vortheil in die Ausgleichungsrechnung einbeziehen, dagegen wird ihre Vergleichung mit dem Resultate der Bahnbestimmung unter Umständen sehr werthvoll sein zur Beurtheilung der Sicherheit der erhaltenen Umlaufszeit, und man wird deshalb gut thun, diese Vergleichung nicht zu unterlassen. — Aus der verhältnissmässig kurzen Zeit, über welche sich die verfügbaren Messungen erstrecken, folgt von selbst, dass die Bahnen von mehreren Jahrhunderten Umlaufszeit auf Sicherheit keinen Anspruch machen können. Eine vollständige Uebersicht über die bisher berechneten Doppelsternbahnen soll hier nicht gegeben werden, eine solche würde auch bei der raschen Entwicklung unserer Kenntnisse in dieser Richtung schnell veralten.

Man findet u. a. eine solche Zusammenstellung neuesten Datums im „Annuaire pour l'an 1896“, während der Stand der Kenntnisse in dieser Richtung vor 20 Jahren in einem Werke von Flammarion¹⁾ und dem bekannten Handbuche von Crossley, Gledhill und Wilson²⁾ dargestellt ist. In der folgenden Tabelle sind jene 38 Doppelsternbahnen nach dem „Annuaire“ angeführt, die Umlaufzeiten unter 100 Jahren haben. Ausser der Umlaufszeit werden noch die Helligkeiten der Componenten und die ein allgemeines Interesse darbietenden Elemente i , e und a angegeben.

¹⁾ C. Flammarion, Catalogue des étoiles doubles et multiples, Paris 1878.

²⁾ A Handbook of double Stars, by Crossley, Gledhill and Wilson, London 1879.

	Grösse	T	i	e	a
α Pegasi	4,3— 5,0	11 ^j ,4	81°,2	0,49	0'',42
δ Equul.	4,5— 5,0	11,5	79,0	0,14	0,45
β 883	7,0— 9,0	16,4	28,5	0,48	0,24
85 Pegas.	6,0— 9,0	17,5	66,7	0,16	0,80
ζ Sagitta	3,5— 4,0	18,7	58,8	0,17	0,53
20 Pers.	6,0— 7,0	20,8	73 6	0,48	0,25
9 Argus	6,0— 7,0	22,0	77,7	0,70	0,65
42 Com. Ber.	6,0— 6,0	25,7	90,0	0,48	0,66
β 416	7,0— 9,0	27,7	59,8	0,44	2,04
β 612	6,0— 6,0	30,0	23,0	0,13	0,28
β Delph.	3,5— 4,5	30,9	59,3	0,34	0,52
Σ 3121	7,5— 7,8	34,0	75,0	0,33	0,67
ζ Herc.	3,0— 6,5	35,0	44,9	0,46	1,31
τ Cygn.	5,6— 7,9	36,5	44,7	0,24	1,19
Procyon	1,0—	40,0	—	—	—
η Coron. Bor.	5,8— 6,2	41,3	59,6	0,25	0,87
Σ 2173	6,0— 6,0	45,4	80,7	0,13	1,00
μ^2 Herc.	9,5—10,5	45,4	67,0	0,21	1,37
$O. \Sigma$ 269	6,8— 7,3	47,7	82,8	0,06	0,58
Sirius	1,0—10,0	49,4	42,4	0,63	7,57
99 Herc.	6,0—11,5	53,5	38,6	0,79	1,12
γ Androm.	4,5— 6,0	54,8	78,9	0,88	0,37
ζ Cancri	5,0— 5,7	59,1	11,1	0,38	0,86
ξ Urs. maj.	4,0— 5,0	60,6	55,9	0,39	2,59
γ Cent.	4,0— 4,0	61,9	84,1	0,63	1,50
$O. \Sigma$ 234	7,0— 7,4	63,5	47,4	0,36	0,34
$O. \Sigma$ 298	7 0— 7,3	65,2	57,6	0,53	0,86
α Cent.	1,0— 2,0	81,8	79,7	0,52	17,71
$O. \Sigma$ 149	6,5— 9,0	85,9	31,1	0,46	0,50
70 Ophiuch.	4,1— 6,1	88,4	60,1	0,48	4,60
Σ 228	6,7— 7,6	88,7	71,0	0,53	0,98
γ Cor. Bor.	4,0— 7,0	90,4	83,4	0,35	0,66
φ Urs. maj.	5,0— 5,6	91,9	34,7	0,45	0,29
λ Cygn.	5,0— 6,3	93,4	58,8	0,60	0,51
8 Sext.	5,0— 6,0	93,9	31,8	0,47	0,52
$O. \Sigma$ 235	6,0— 7,3	94,4	54,5	0,50	0,98
ξ Scorp.	4,9— 5,2	95,9	68,7	0,08	1,26
$O. \Sigma$ 224	7,2— 9,2	96,1	49,8	0,58	0,42

Besondere Beachtung verdienen die mehrfachen Sternsysteme, von denen die beiden interessantesten ζ Cancri und ξ Scorp. in obiger Zusammenstellung vorkommen. Die Bewegungen in dem ersteren Systeme, welches aus drei nahezu gleich hellen und aus einem vierten bisher noch nicht gesehenen Sterne besteht, sind in neuerer Zeit eingehend ¹⁾

¹⁾ H. Seeliger, Untersuchungen über die Bewegungsverhältnisse in dem dreifachen Sternsysteme ζ Cancri, Denkschriften der Wiener Akademie, Bd. 44, 1881. — Fortgesetzte Untersuchungen über das mehrfache Sternsystem ζ Cancri. Abhandlungen der Münchener Akademie, Bd. 17, 1889. — Ueber den vierfachen Stern ζ Cancri, Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1894.

studirt worden und haben zu Resultaten geführt, die hier ganz kurz, ohne näheren Nachweis, erwähnt werden sollen.

Von den drei sichtbaren Sternen *A*, *B*, *C* stehen zwei, *A* und *B*, in grosser Nähe bei einander. Sie beschreiben in etwa 60 Jahren einen vollen Umkreis um einander und halten hierbei eine Distanz von $0''{,}6$ bis $1''{,}1$ ein. Der Stern *C* dagegen beschreibt um die Mitte von *A* und *B* jährlich im Durchschnitt $0^{\circ}{,}5$ im Positionswinkel bei einer nahezu constanten Distanz von $5\frac{1}{2}''$. Sowohl die Prüfung der Flächensätze, als auch die Berechnung einer elliptischen Bahn ergaben, dass man den Beobachtungen von *A* und *B* beinahe vollständig genügen kann, ohne auf eine Einwirkung des dritten Sternes Rücksicht zu nehmen. Hieraus darf aber nicht geschlossen werden, dass der dritte Stern *C* keinen bedeutenden Einfluss auf die Bewegung von *B* um *A* ausübt. Vielmehr hat sich ergeben, dass man für den Stern *C* sehr bedeutende Massenwerthe annehmen kann, ohne die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung zu gefährden und dass man ziemlich bedeutende Massenwerthe annehmen muss, um die beste Darstellung im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate zu erhalten.

Die Beobachtungen des Sternes *C* zeigen Anomalien höchst merkwürdiger Art. C. Flammarion und Otto Struve haben vor mehreren Jahren darauf aufmerksam gemacht, dass die Messungen mit grosser Deutlichkeit eine periodische Veränderung im Positionswinkel und Distanz ergeben, die beinahe vollkommen durch die Annahme fortgeschafft werden konnte, der Stern *C* bewege sich in etwa 18 Jahren in einer Kreisbahn vom Radius $0''{,}2$ um einen Punkt, der wieder in einer Kreisbahn langsam um die Mitte von *A* und *B* fortrückt. In der That ist die durch diese Hypothese erzielte Uebereinstimmung so auffällig, dass an ihrer Berechtigung schon damals kaum zu zweifeln war. Indessen war doch eine erneute Prüfung aus verschiedenen, hier nicht näher zu erörternden Gründen nöthig. Namentlich musste untersucht werden, ob die Annahme eines dunklen vierten Sternes nothwendig sei und die beobachtete Anomalie nicht durch eine andere Annahme ebenfalls erklärt werden könne. Die dahin gerichtete Prüfung hat nun eine vollständige Bestätigung der gemachten Annahme geliefert und es kann als eine bewiesene Thatsache angesehen werden, dass sich in grosser Nähe des Sternes *C* ein vierter Stern befindet.

Diese Untersuchungen über ξ Cancri führen uns auf den Fall eines Doppelsternes, bei dem nur die eine Componente sichtbar ist. Ein solcher Stern wird, also im Gegensatz zu den gewöhnlichen Fixsternen eine Eigenbewegung zeigen, die ausser einem mit der Zeit proportionalen Fortschreiten am Himmel eine periodische Veränderlichkeit aufweist. Man sagt deshalb, ein solcher Stern habe eine veränderliche Eigenbewegung. Das Vorkommniss dunkler Fixsternbegleiter darf an sich nicht verwundern. Schon Bessel sprach die Meinung aus, dass die Leuchtkraft nicht nothwendiges Attribut stellarer Massen sei. Diese an sich unzweifelhaft richtige Ansicht hat den grossen Astronomen zu der epochemachenden Entdeckung eines solchen Falles geführt, indem er aus den periodischen Veränderungen der Rectascension des Sirius die wahre Sachlage erkannte¹⁾. Ihm war es nicht vergönnt, den Gegenstand weiter zu verfolgen und die Bahn, welche Sirius um den Schwerpunkt seiner und des Begleiters Masse beschreibt, abzuleiten. Diese Aufgabe hat später C. A. F. Peters²⁾ in mustergültiger Weise gelöst. Darauf behandelte Auwers³⁾ dasselbe Problem sehr eingehend, indem er nicht nur die Rectascensionen, sondern auch die Declinationen in den Bereich seiner Betrachtungen zog.

¹⁾ Astr. Nachr., Bd. 22, Nr. 514 bis 516, Abhandlungen Bd. 2.

²⁾ Ebenda, Bd. 32, Nr. 745 bis 748.

³⁾ Untersuchungen über veränderliche Eigenbewegungen. 1. Theil, Königsberg 1862; 2. Theil, Leipzig 1868.

Diese umfangreiche Arbeit hat den unwiderleglichen Beweis für die Richtigkeit der Bessel'schen Anschauungen erbracht. Noch war dieselbe aber nicht in die Oeffentlichkeit getreten, als es A. Clarke am 31. Januar 1862 gelang, den genannten Begleiter wirklich zu sehen, und zwar sehr nahe an dem Orte, welchen ihm die Theorie zugewiesen hatte. Die von Auwers gefundenen Elemente sind:

$$\begin{aligned}\tau &= 1843,28 \\ \Omega &= 61^{\circ},97 \\ \lambda &= 18,92 \\ i &= 47,15 \\ e &= 0,615 \\ a &= 2'',33, \quad T = 49^j,4.\end{aligned}$$

Diese beziehen sich auf die Bewegung des Sirius um den Schwerpunkt des Systemes. Sobald aber nur eine Beobachtung des Begleiters bekannt ist, kann man hieraus das Verhältniss beider Massen bestimmen. Auwers hat aus den ersten bekannt gewordenen Beobachtungen gefunden, dass die Masse des Sirius 2,05mal so gross ist, wie die des Begleiters. Daraus folgt die Halbaxe der Bahn, welche Sirius um den Begleiter beschreibt, gleich $7'',1$. Da nun weiter die Parallaxe des Sirius zu etwa $\frac{1}{5}''$ angenommen werden darf, so folgt aus den oben mitgetheilten Formeln für die Masse des Sirius und des Begleiters zwölf resp. sechs Sonnenmassen. Bringt man hiermit in Verbindung, dass der Begleiter als ein Sternchen von höchstens neunter Grösse erscheint, so liegt in der That ein auffälliges Beispiel dafür vor, wie wenig in speciellen Fällen die Grösse einer stellaren Masse mit ihrer Leuchtkraft zusammenhängt. Denn die Lichtquantität des Begleiters verhält sich zu der des Sirius wie 1:16000, während das Massenverhältniss beider nur 1:2 ist. Dieser Berechnung liegt nach Seidel die Annahme zu Grunde, dass Sirius uns etwa 10mal soviel Licht zusendet, wie ein typischer Stern erster Grösse und dass sich die Helligkeit eines Sternes der m ten Grösse zu der eines Sternes von der $(m+1)$ ten Grösse verhält wie 2,5:1. Letztere Annahme ist gewiss nahezu richtig, die angegebene Helligkeit des Sirius vielleicht etwas zu gross, wogegen der Begleiter vielleicht zu hell angesetzt worden ist. — Bald nach seiner Entdeckung wurde der Siriusbegleiter ein verhältnissmässig leicht zu beobachtendes Object und blieb es bis vor wenigen Jahren. Gegenwärtig (1896) steht er dem Hauptsterne noch sehr nahe, die Entfernung vergrössert sich aber wieder, so dass er wahrscheinlich für die grossen Fernrohre bald erreichbar werden wird. — Die zahlreichen mikrometrischen Messungen, welche über die Stellung des Begleiters vorliegen, gestatten den Versuch einer Bahnbestimmung, dies allerdings nur mit bedingter Zuverlässigkeit, da sich der Positionswinkel seit der Entdeckung bis 1890 nur um etwa 80 Grad verändert hat. In Anbetracht der schwierigen Umstände ist die Uebereinstimmung der Bahn mit der aus den Meridianbeobachtungen abgeleiteten recht befriedigend. Auwers¹⁾ fand nämlich aus den Beobachtungen zwischen 1862 und 1890, bei angenommener Umlaufszeit, für die Bahn des Begleiters um den Hauptstern:

$$\begin{aligned}\tau &= 1844,22 \\ \Omega &= 37,51 \\ \lambda &= 39,94 \\ i &= 42,43 \\ e &= 0,629 \\ T &= 49,4.\end{aligned}$$

¹⁾ Auwers, Beiträge zur Kenntniss des Siriussystemes. Astr. Nachr., Bd. 129.

Wie schon erwähnt, ist die Bahn des Sirius am Himmel nicht das Stück eines grössten Kreises, sondern eine gewisse verschlungene cykloidische Curve, welche zu definiren zufolge der obigen Auseinandersetzungen leicht ist. Der Schwerpunkt des Sirius-systemes bewegt sich nach den mechanischen Grundsätzen in einer Geraden. Die scheinbare Bahncurve desselben Punktes ist also ein grösster Kreis, der mit gleichbleibender Geschwindigkeit beschrieben wird. Bezeichnet A_0 und D_0 Rectascension und Declination des Schwerpunktes zur Zeit t_0 und A'_0 , D'_0 die Eigenbewegungen in diesen beiden Coordinaten, so wird die Rectascension und Declination desselben Punktes zur Zeit t sein:

$$A_0 + A'_0 (t - t_0)$$

und:

$$D_0 + D'_0 (t - t_0).$$

Bedeutend p und ϱ Positionswinkel und Distanz des Sirius gegen den Schwerpunkt und setzt man:

$$\xi = \varrho \cos p$$

$$\eta = \varrho \sin p,$$

so wird die Rectascension A und die Declination D des Sirius durch die Formeln gegeben sein:

$$A = A_0 + A'_0 (t - t_0) + \eta \sec D_0$$

$$D = D_0 + D'_0 (t - t_0) + \xi.$$

Nun genügen aber ξ und η der Gleichung der scheinbaren Ellipse. Man hat daher, wenn noch zur Abkürzung gesetzt wird:

$$A_0 + A'_0 (t - t_0) = l \sec D_0$$

$$D_0 + D'_0 (t - t_0) = m$$

$$\gamma (A \cos D_0 - l)^2 + \beta (D - m)^2 + 2 \delta (D - m) (A \cos D_0 - l) + 2 \varepsilon (D - m) + 2 \xi (A \cos D_0 - l) - 1 = 0.$$

In dieser Gleichung sind als Unbekannte die Grössen β , γ , δ , ε , ξ , l und m anzusehen, wobei sich die letzteren zwei aus vier zu bestimmenden Grössen zusammensetzen. Man wird diese Unbekannten durch ein Näherungsverfahren bestimmen, indem für l und m gute Näherungswerthe verhältnissmässig leicht zu erreichen sind. Aus letzteren folgen aber strenge durch Auflösung eines Systemes linearer Gleichungen die anderen Unbekannten. Sind schliesslich die Versuche zu Ende geführt, so kann die wahre Bahnellipse und die Bewegung in ihr nach den oben gegebenen Formeln ins Werk gesetzt werden.

Ausser bei Sirius hat Bessel¹⁾ noch in den Declinationen des Procyon eine veränderliche Eigenbewegung constatirt, was ebenfalls die späteren Untersuchungen von Auwers²⁾ bestätigt haben. Die von Letzterem berechnete Kreisbahn war:

$$\text{Epoche des Min. in } A. R. \dots 1795,568$$

$$\text{Umlaufszeit} \dots 39'',97$$

$$\text{Radius} \dots 1'',053$$

Die Auffindung des gesuchten Begleiters ist bisher nicht gelungen. Noch bei einigen anderen Sternen (β Orionis, α Hydr., α Virg.) hat man einen dunklen Begleiter vermuthet, spätere eingehendere Untersuchungen haben aber diese Vermuthung nicht bestätigt, so dass wir dieses interessante Vorkommniss nur bei den drei Sternen, Sirius, Procyon und ξ Cancri als erwiesen betrachten können. —

¹⁾ Astr. Nachr., Bd. 22.

²⁾ Ebenda, Nr. 1371 u. 1373.

Hatte man schon durch die Burnham'schen Doppelsterne äusserst enge Systeme kennen gelernt, die in einigen Jahren einen vollen Umkreis um einander beschreiben, so hat die Anwendung der neueren spectralanalytischen Messungen zur Kenntniss des Vorhandenseins so nahe bei einander stehender Weltkörper geführt, dass ihre optische Trennung wohl niemals durch das Fernrohr erfolgen kann. Die Umlaufszeiten, die bei diesen Systemen auftreten, berechnen sich nach Tagen und zum Theil nach wenigen Stunden. Schon seit längerer Zeit war man geneigt, die veränderlichen Sterne vom Algoltypus als solche überaus enge Doppelsterne zu betrachten, bei denen die eine Componente gegenüber der anderen wenig hell sein muss. Diese Hypothese ist für Algol selbst zur Gewissheit geworden, nachdem es H. C. Vogel gelungen ist, in den photographischen Spectraufnahmen mit Sicherheit jene Linienverschiebungen nachzuweisen, welche in Folge des Doppler'schen Principes mit der Bahnbewegung verbunden sein müssen. Aehnliche Verschiebungen der Spectrallinien wurden später auch bei nicht veränderlichen Sternen, z. B. bei α Virginis gefunden. Diese Verschiebungen ergeben die in der Richtung des Visionsradius liegende Componente der Geschwindigkeit des leuchtenden Sternes um den Schwerpunkt des Systemes, und hieraus kann man die hauptsächlichsten Elemente dieser Bewegung ableiten, was gleich gezeigt werden soll.

Aber auch, wenn beide Componenten des sehr engen Doppelsternes leuchtend sind, giebt die Spectralanalyse unter Umständen die Mittel an die Hand, eine Bahnbewegung zu constatiren. Es hat wohl zuerst Edward C. Pickering die Bemerkung gemacht, dass die Spectren einiger Sterne innerhalb kurzer Zeiträume Veränderungen aufweisen, indem gewisse Spectrallinien bald doppelt, bald einfach erscheinen. Dass diese Erscheinung zufolge des Doppler'schen Principes durch eine periodische Bewegung zweier Sterne um einander erklärt werden könne, war von Anfang an klar. Misst man nun zu verschiedenen Zeiten die Entfernungen der verdoppelten Linien von einander, so erhält man die im Visionsradius liegende Componente der relativen Geschwindigkeit der beiden Sterne des Systemes gegen einander. Solche Beobachtungen waren bisher mit Erfolg möglich u. a. bei den Sternen β Aurig. und ξ Urs. maj., und es ist kaum zu bezweifeln, dass sich die Anzahl solcher Objecte in der nächsten Zeit schnell vermehren wird.

Der Zusammenhang zwischen den spectrokopischen Verschiebungen, welche in Kilometern ausgedrückte Geschwindigkeiten im Visionsradius angeben und den Bahnelementen ist sehr leicht aufzustellen. Nach Abzug des bekannten Einflusses der Bewegung der Erde um die Sonne auf die Verschiebung der Spectrallinien giebt die Beobachtung im ersten der beiden betrachteten Fälle (Algol) die Geschwindigkeitscomponente des hellen Sternes gegen die Sonne. Legt man also die z -Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, dessen Anfang in der Sonne liegt, in die Fortsetzung des Visionsradius, nennt m und ξ die Masse und die ξ -Coordinate des hellen Sternes, m' und ξ' die analogen Grössen für den dunklen Körper und setzt $z = \xi - \xi'$, so giebt die spectrokopische Messung:

$$\frac{d\xi}{dt} = T + \frac{m'}{m + m'} \frac{dz}{dt} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (19)$$

Hierin bedeutet T die relative Geschwindigkeitscomponente im Visionsradius des Schwerpunktes des Doppelsternsystemes gegen die Sonne.

Im zweiten Falle (β Aurig. etc.) giebt die spectrokopische Beobachtung direct $\frac{dz}{dt} = z'$. Mit den oben gebrauchten Bezeichnungen hat man:

$$z = r \sin(v + \lambda) \sin i$$

und mit Hülfe der Gleichungen:

$$r \frac{dv}{dt} = \frac{na(1 + e \cos v)}{\sqrt{1 - e^2}}$$

$$\frac{dr}{dt} = na \cdot \frac{e \sin v}{\sqrt{1 - e^2}}$$

erhält man sofort:

$$z' = \frac{dz}{dt} = \frac{na \sin i}{\sqrt{1 - e^2}} [e \cos \lambda + \cos(v + \lambda)].$$

Bezeichnet man mit a_1 die grosse Halbaxe der Bahn, welche m um den Schwerpunkt von m und m' beschreibt, so ist:

$$(m + m')a_1 = m'a,$$

d. h.:

$$z'_1 = \frac{m}{m + m_1} \frac{dz}{dt} = \frac{na_1 \sin i}{\sqrt{1 - e^2}} [e \cos \lambda + \cos(v + \lambda)] \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Da die Bahnen, welche m und m' einerseits und um den Schwerpunkt von m und m' andererseits beschreibt, ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen sind, so erhält man z_1 einfach aus z' , wenn man die Elemente der ersten Bahnbewegung durch die der zweiten ersetzt oder, was dasselbe ist, wenn man im Ausdrucke für z' an Stelle von a , a_1 setzt.

Es ist deshalb unnöthig, die beiden Fälle zu unterscheiden, ob nämlich z' oder $\frac{d\xi}{dt}$ durch die Beobachtungen gegeben ist. Ist das letztere der Fall, so nimmt man, worüber das Nähere weiter unten folgt, den rein periodischen Theil z'_1 von $\frac{d\xi}{dt}$, welcher in Formel (20) genau in derselben Verbindung mit den Bahnelementen vorkommt, wie z' in der unmittelbar vorhergehenden Formel.

Die rechte Seite von (20) lässt sich durch die fünf Bahnelemente:

$$a_1 \sin i, n, e, \tau, \lambda$$

ausdrücken. Man kann also aus spectrokopischen Messungen nur diese fünf Elemente bestimmen. a_1 kann nicht von i getrennt werden und die Knotenlänge ist, wie von vornherein klar, gänzlich unbestimmt.

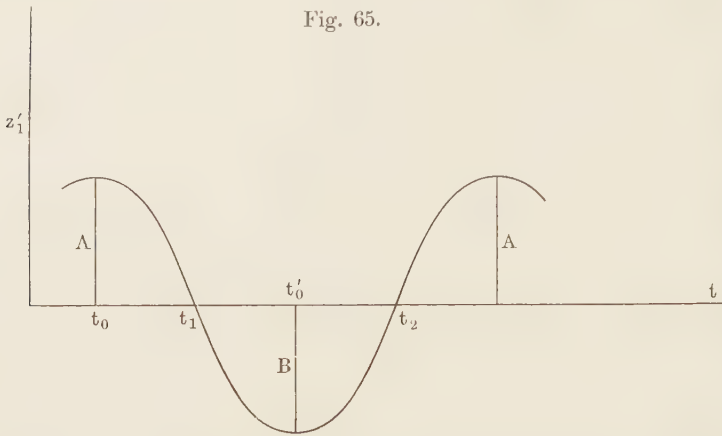
Liegen also zu fünf verschiedenen Zeiten gemessene z'_1 vor, so kann man aus diesen die genannten fünf Bahnelemente ableiten. In dieser Allgemeinheit wird indessen die Lösung der Aufgabe von der Praxis wohl kaum jemals gefordert werden. Schon in Rücksicht auf die Ungenauigkeit der Messungen wird es sich fast stets darum handeln, aus bereits als periodisch erkannten Veränderungen der Spectrallinien weitere Schlüsse zu ziehen, und man wird deshalb annehmen dürfen, dass aus zahlreich vorliegenden Beobachtungen n oder die Umlaufszeit mit genügender Sicherheit bereits festgestellt ist. Ist aber n bekannt, dann wird sich die Bestimmung der übrigen Bahnelemente sehr einfach vollziehen, wie die Untersuchungen von A. Rambaut¹⁾ und R. Lehmann-Filhés²⁾ gezeigt haben. Der letzteren Arbeit folgen die weiteren Auseinandersetzungen, unter Hinweis auf sie in Bezug auf Einzelheiten, die hier nicht besprochen werden können.

Die beobachteten Werthe $\frac{d\xi}{dt}$ in Formel (19) stelle man graphisch als Ordinaten dar, die zu den zugehörigen Zeitangaben als Abscissen gehören. Die Verbindung der

¹⁾ A. Rambaut, Monthly Notices, Bd. 51, S. 316 ff.

²⁾ Lehmann-Filhés, Ueber die Bestimmung einer Doppelsternbahn aus spectrokopischen Messungen etc. Astr. Nachr., Nr. 3242.

einzelnen Punkte in möglichst gleichförmiger Weise ergibt eine Curve. Von der Sicherheit, mit welcher diese Curve gezeichnet werden kann, hängt die Sicherheit der Bahnbestimmung ab, und es ist kaum zu bezweifeln, dass eine Bahnrechnung nur dann



Aussicht auf Erfolg hat, wenn sich die genannte Curve mit einiger Sicherheit herstellen lässt. Zunächst wird der Curvenzug T oder n erkennen lassen, darauf wird man die Beobachtungen, welche zu Zeiten gehören, die sich um Vielfache der Umlaufszeit T unterscheiden, zusammenziehen und so die Sicherheit des Curvenzuges zwischen zwei

Zeiten $t = t_0$ und $t = t_0 + T$ beträchtlich erhöhen. Mit Hülfe eines Planimeters oder ähnlicher Hilfsmittel kann dann sofort die Fläche angegeben werden, die zwischen der Curve und zwei beliebigen Ordinaten liegt. Da nun $\frac{dz}{dt}$ eine rein periodische Function von A mit der Periode T ist, so ergibt sich aus (19):

$$\Gamma = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{d\xi}{dt} \cdot dt.$$

Mit diesem Γ ergeben sich die periodischen Theile z'_1 von $\frac{d\xi}{dt}$ durch Subtraction, was übrigens nichts Anderes aussagt, als dass nunmehr die Abscissenaxe in der Zeichnung so gelegt ist, dass die Ordinaten die periodischen Theile z'_1 bedeuten. Setzt man noch zur Abkürzung:

$$C = \frac{n a_1 \sin i}{\sqrt{1 - e^2}},$$

so wird also:

$$z'_1 = C[e \cos \lambda + \cos(v + \lambda)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Aus der Curve (Fig. 65) kann man leicht den grössten positiven Werth A und den absolut grössten negativen Werth $-B$ von z'_1 , welche den Zeiten t_0 und t'_0 entsprechen sollen, entnehmen. Man hat also:

$$\begin{aligned} A &= C(e \cos \lambda + 1) \\ -B &= C(e \cos \lambda - 1), \end{aligned}$$

woraus:

$$2C = A + B, \quad A - B = 2C e \cos \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

und die Gleichung (21) kann man jetzt schreiben:

$$z'_1 = \frac{A - B}{2} + \frac{A + B}{2} \cos(v + \lambda).$$

Aus der Zeichnung nimmt man weiter die beiden auf einander folgenden Zeiten t_1 und t_2 , für welche $z'_1 = 0$. Die diesen Zeiten entsprechenden wahren Anomalien seien: $v = v_1$ und $v = v_2$. Es wird also:

$$\cos(v_1 + \lambda) = \cos(v_2 + \lambda) = -e \cos \lambda = -\frac{A - B}{A + B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Die Anwendung eines Planimeters erlaubt die Grössen:

$$\int_{t_0}^{t_1} z'_1 dt = z_1 \qquad \int_{t'_0}^{t_2} z'_1 dt = z_2$$

anzugeben. Zwischen t_0 und t_1 ist z'_1 positiv, d. h. die z -Coordinate nimmt zu. t_0 entspricht also der Zeit des Durchganges durch den aufsteigenden Knoten, t'_1 dem absteigenden Knoten. Es ist demnach $\sin(v_1 + \lambda)$ positiv und $\sin(v_2 + \lambda)$ negativ anzusetzen. Daraus folgt also:

$$\left. \begin{aligned} \cos(v_1 + \lambda) &= -\frac{A-B}{A+B} \\ \sin(v_1 + \lambda) &= +2 \frac{\sqrt{AB}}{A+B} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \cos(v_2 + \lambda) &= -\frac{A-B}{A+B} = \cos(v_1 + \lambda) \\ \sin(v_2 + \lambda) &= -2 \frac{\sqrt{AB}}{A-B} = -\sin(v_1 + \lambda) \end{aligned} \quad (24)$$

Da nun:

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1 \sin(v_1 + \lambda) \sin i \\ z_2 &= r_2 \sin(v_2 + \lambda) \sin i, \end{aligned}$$

so ergibt sich:

$$-\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1 + e \cos v_2}{1 + e \cos v_1} = \frac{\sin(v_1 + \lambda) - e \sin \lambda}{\sin(v_1 + \lambda) + e \sin \lambda}$$

und hieraus:

$$e \sin \lambda = \frac{2 \sqrt{AB}}{A+B} \cdot \frac{z_2 + z_1}{z_2 - z_1} \dots \dots \dots (25)$$

Dadurch sind die Grössen C , e und λ eindeutig bestimmt. τ kann man der Zeichnung entnehmen. Für $t = \tau$ wird $v = 0$, d. h.:

$$z'_1 = C(1 + e) \cos \lambda.$$

Man sucht also die diesem z'_1 entsprechende Zeit auf. Unter Umständen, nämlich in der Nähe von t_0 und t'_0 , wird dieses Verfahren aber ungenau. Es ist dann besser, t_1 zu nehmen, für welches $z'_1 = 0$ wird. Man kennt dann nach (24) $v_1 + \lambda$ und, da λ bekannt ist, ist es auch v_1 . Man hat nun noch die Formeln anzuwenden:

$$\left. \begin{aligned} tg \frac{1}{2} E_1 &= tg \frac{v_1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \\ t_1 - \tau &= \frac{1}{n} (E_1 - e \sin E_1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

Auf diese Weise sind alle überhaupt bestimmbaren Elemente berechnet. Die weitere Verbesserung erfolgt nach bekannten Methoden, etwa nach der Methode der kleinsten Quadrate. Die Aufstellung der Differentialformeln macht nicht die geringsten Schwierigkeiten, und es wird deshalb genügen, diese Formel einfach anzuführen:

$$\left. \begin{aligned} dz'_1 &= \frac{z'_1}{C} \cdot dC - C [e \sin \lambda + \sin(v + \lambda)] \cdot d\lambda \\ &+ \left[\cos \lambda - \frac{\sin v \sin(v + \lambda)}{1 - e^2} (2 + e \cos v) \right] C \cdot de \\ &+ \frac{\sin(v + \lambda) \cdot (1 + e \cos v)^2}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} C [n d\tau - (t - \tau) dn] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

Die spectrokopischen Messungen erlauben also nur die Bestimmung von fünf Bahnelementen. Andererseits aber ergänzen sie in zwei Richtungen die Bahnbestimmung aus Positionswinkel und Distanzen. Zuerst ist klar, dass man durch die Angabe der Grösse von $\frac{dz}{dt}$ die Zweideutigkeit in der Bestimmung der Knotenlänge heben kann;

hierzu genügen spectroscopische Beobachtungen, die nur eine solche Genauigkeit besitzen, dass sie über das Vorzeichen von $\frac{dz}{dt}$ eine Entscheidung treffen. Zweitens liefern aber die spectroscopischen Messungen dadurch eine neue Beziehung, dass sie die Geschwindigkeiten in absolutem Maasse (Kilometern) angeben. Hat man aus Mikrometerbeobachtungen die Doppelsternbahn abgeleitet, so geben in Verbindung mit ihnen die spectroscopischen Messungen die Parallaxe des Doppelsternes und die Summe beider Massen. Denn die ersteren geben a in Bogensecunden $= a''$, C dagegen bestimmt dieselbe Grösse in Kilometern. Die Parallaxe des Sternes in Secunden p'' ist dann:

$$p'' = \frac{a''}{a} \cdot R,$$

wo R , die Entfernung Erde-Sonne, sowie a in Kilometern angesetzt ist. Die Gesamtmasse ist gegeben durch die Formel:

$$m + m' = \frac{n^2 a^3}{k^2}.$$

Wenn nur die Verschiebungen der Spectrallinien des einen Sternes beobachtet sind, so ist durch C und n nicht a , sondern nur:

$$a_1 \sin i$$

gegeben, und man kann weitere Beziehungen nicht aufstellen, da auch die relative Stellung der beiden Weltkörper gegen einander der Beobachtung nicht zugänglich ist. Bei den Veränderlichen vom Algoltypus geben aber die photometrischen Beobachtungen, d. h. die Verfolgung der Lichtvariation, weitere Daten. So sind aus diesen Beobachtungen für Algol bestimmbar die Verhältnisse: $a : \varrho : \varrho'$, wo ϱ und ϱ' die Radien der beiden als Kugeln betrachteten Massen m und m' bedeuten; hierbei ist allerdings noch vorausgesetzt, dass die Masse m' ganz dunkel ist und die Masse m sich als eine überall gleich helle Scheibe darstellt. Als bekannt dürfen also angenommen werden:

$$\lambda = \frac{\varrho'}{\varrho} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{a}{\varrho}.$$

Die beiden Gleichungen:

$$n^2 a^3 = k^2 (m + m_1) \quad a_1 = \frac{m_1}{m + m_1} \cdot a$$

kann man dann auch so schreiben:

Es bezeichne v die mittlere Bewegung der Erde um die Sonne, A die Entfernung Sonne—Erde, R den Sonnenradius und die Dichtigkeit der Sonne werde $= 1$ gesetzt. Ist weiter D die mittlere Dichtigkeit der beiden Massen m und m' , deren Dichtigkeiten δ und δ' sind, so giebt die erste der beiden genannten Gleichungen:

$$D = \frac{\left(\frac{n}{v}\right)^2 \cdot R^3}{A^3 (1 + \lambda^3)} \cdot \alpha^3$$

die Dichtigkeit D und die zweite:

$$a = a_1 \left(1 + \frac{1}{\lambda^3} \cdot \frac{\delta}{\delta'}\right).$$

Nimmt man z. B. in ganz roher Annäherung als Resultate der photometrischen Beobachtungen für Algol an: $\alpha = 6$, $\lambda^3 = \frac{1}{2}$, $\frac{n}{v} = 127,4$, so ergeben diese für sich:

$$D = 0,237.$$

Die spectroscopischen Messungen ergeben unter Voraussetzung einer Kreisbahn und für $i = 90^\circ$: $n a_1 = 42$ km in der Secunde, also:

$$a = 1\,656\,000 \text{ km} \left(1 + 2 \frac{\delta}{\delta'}\right).$$

Die weitere Annahme jedoch $\delta = \delta_1$, die oft gemacht wird, ist jedenfalls sehr gewagt; man kann freilich diese oder ähnliche Hypothesen bei völliger Unkenntniss über die wahre Sachlage kaum entbehren.

So enge Doppelsterne, wie Algol, werden sich nicht mehr in aller Strenge nach den einfachen Kepler'schen Gesetzen um einander bewegen können. Da man diesen Weltkörpern einen Aggregatzustand zuschreiben muss, der jedenfalls von dem der völligen Starrheit verschieden ist, oder wenigstens in früheren Zeiten davon verschieden gewesen sein muss, so werden sie nicht unbeträchtliche Abweichungen von der Kugelform zeigen, und diese in Verbindung mit der Fluthreibung wird auf die Revolutionsbewegung einwirken müssen. Selbst wenn diese Einwirkungen an sich klein sind, werden dieselben mit der Zeit, nach Art säcularer Störungen, beträchtliche Veränderungen der Bahnen erzeugen können. So ist leicht einzusehen, dass unter Umständen bemerkbare säculare Bewegungen des Periastrons eintreten müssen, wie sich auch bei einigen Veränderlichen vom Algoltypus zu zeigen scheint. Es ist gegenwärtig nicht möglich, zu sagen, wie sich diese Bahnveränderungen in unbeschränkt langer Zeit gestalten, ob die augenblicklich stattfindenden Bahnen dauernd umgestaltet, oder in langen Perioden früheren Bewegungszuständen wieder näher gebracht werden. Die Beantwortung dieser Fragen hängt wesentlich davon ab, wie man die fortschreitende Abkühlung der betreffenden Weltkörper vor sich gehen lässt, und schon hieraus lassen sich die grossen Schwierigkeiten abschätzen, welche hier zu überwinden sind. Man muss also die schwierige Frage nach der „Stabilität“ solcher Systeme vor der Hand gänzlich offen lassen, und wenn man diese dadurch zu beantworten glaubte, dass man einfach die durch die allerelementarsten und bekanntesten Rechnungen darstellbare Thatsache, dass die Deformationen, welche die beiden Himmelskörper gegenseitig auf einander hervorrufen, klein seien, wenn man die Massen als homogen annimmt und die höheren Potenzen der deformirenden Kräfte vernachlässigt, so beweist ein solches Verfahren sehr wenig Einsicht und Verständniss. Leicht kann man dagegen zeigen, dass in solchen engen Doppelsternsystemen, wenn nur die Fluthreibung eine gewisse Grenze nicht überschreitet und die Excentricität der Bahn nicht gross ist, die Umlaufszeit sich vergrössern muss, und dass dasselbe auch mit der mittleren Entfernung beider Sterne von einander und der Excentricität der relativen Bahn geschieht. Es ist hier nicht der Ort, auf diese Dinge näher einzugehen.

Zum Schlusse mag noch auf gewisse Betrachtungen hingewiesen werden, die zuerst von Savary angeregt worden sind. Die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes bewirkt, sobald nur die wahre Doppelsternbahn nicht zufällig genau senkrecht auf dem Visionsradius steht, dass die scheinbare gegenseitige Stellung beider Componenten nicht der wahren zu irgend einer Zeit entspricht, vielmehr gehört der beobachtete Ort eines jeden der beiden Sterne einer anderen Zeit an, die man erhält, wenn man von der Beobachtungszeit die Lichtzeit abzieht. Diese ist aber für beide Sterne verschieden, weil ihre Entfernungen vom Beobachter ungleich sind. Letztere ändern sich aber periodisch, und wenn die Grösse dieses hierdurch entstehenden periodischen Einflusses durch die Beobachtungen festzustellen möglich wäre, so könnte man die Dimensionen der

Doppelsternbahn in Lichtzeit angeben und hierdurch die Parallaxe des Doppelsternes finden, wie auch die Zweideutigkeit in der Knotenlängenbestimmung aus Positionswinkel und Distanzen heben. Dieser auf den ersten Blick sehr bestechende Gedanke kann aber in Wirklichkeit nicht realisirt werden, wie die Untersuchungen von Villarceau¹⁾, Birkmajer²⁾ und H. Seeliger³⁾ dargethan haben. Savary hat nämlich bei seinem Vorschlage übersehen, dass nicht der Hauptstern, in Bezug auf welchen die Bewegung des zweiten Sternes angegeben wird, sondern der Schwerpunkt des ganzen Systemes sich gleichförmig im Raume bewegt. Hierdurch tritt eine neue Unbekannte, nämlich das Verhältniss der beiden Massen auf, und die Dimension der Bahn kann nicht mehr für sich bestimmt werden.

Noch mag erwähnt werden, dass man die Möglichkeit erwogen hat, ob nicht die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes von der Helligkeit der Lichtquelle abhängt. Solche Einflüsse sind, wenn auch nicht gerade besonders wahrscheinlich, so doch denkbar, allerdings können sie nur in sehr kleinem Maassstabe vorkommen, wie besonders zu diesem Zwecke angestellte physikalische Messungen ergeben haben. In der Bewegung der Doppelsterne würden sich dadurch, dass die beiden Componenten sehr oft an Helligkeit überaus verschieden sind, sehr merkwürdige Unregelmässigkeiten bemerkbar machen, welche H. Seeliger an anderen Orten näher untersucht hat.

Hundertundeinundzwanzigste Vorlesung.

Anhang zu der Berechnung der Doppelsterne. Grundzüge der Theorie des Saturnrings.

Der Planet Saturn ist bekanntlich ausser seinem Reichthum an Satelliten noch dadurch vor den anderen Planeten unseres Systemes ausgezeichnet, dass ihn mehrere concentrische, in der Richtung seiner Rotationsaxe ungemein abgeplattete Ringe umgeben. Wir wollen hier wenigstens die Grundzüge der Theorie der Erscheinungen, welche die Gesammtheit dieser Ringe bietet, vom Standpunkte dieses Buches behandeln. Wir schliessen also diejenigen Fragen aus, die nur durch die schwierigeren Theile der Gravitationslehre theoretisch beantwortet werden können, wie die Störungen, welche der Ring erleidet und ausübt. Unter Anderem nehmen wir ohne weitere Discussion als Thatsache hin, dass die Ringe (der Kürze halber wird im Folgenden stets von einem einzigen Ringe gesprochen werden), kleine Abnormitäten ausgenommen, überall von dem Saturnsphäroid gleich weit abstehen und ein zu der Rotationsaxe des Saturn symmetrisches System bilden. Die Beobachtungen stehen mit dieser Annahme in keinem nachweisbaren Widerspruch; es scheint unter allen Verhältnissen der Mittelpunkt der Scheibe des Saturn mit dem Mittelpunkte der Ellipse, als welche der Ring sich uns präsentirt, zusammenzufallen.

¹⁾ Connaissance des temps für 1878 add.

²⁾ L. Birkmajer, Ueber die durch die Fortpflanzung des Lichtes hervorgerufenen Ungleichheiten etc. Sitzungsberichte der Wiener Akademie, II. Abth., Bd. 93, 1886.

³⁾ H. Seeliger, Ueber optische Ungleichheiten in der Bewegung der Doppelsterne. Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1889, S. 19 ff.

Wenn man sich die Erscheinung des Ringes durch die einer grossen Zahl von Trabanten ersetzt denkt¹⁾, welche hinter und neben einander kreisförmige Bahnen durchlaufen, so ist die Bestimmung einer solchen Bahn auf einen sehr leichten Fall einer Doppelsternbahn zurückgeführt. Denn die Projectionsellipse ist bei jeder Beobachtung unmittelbar vollständig gegeben, e ist gleich 0, die Zeit des Perihels also beliebig; die Umlaufzeit übt auf die Erscheinung des Ringes keinen leicht zu bemerkenden Einfluss aus und muss aus der Verfolgung von auffallenden Punkten des Ringes mittelst sehr starker Fernröhre bestimmt werden. Die Knotenlinie der Ringebene fällt bei obiger Behandlung mit der Richtung der grossen Axe der Ringellipse zusammen. Der Quotient aus der Division der grossen Axe in die kleine ist der Cosinus der Neigung. Endlich ist $\pi - \varnothing$ beliebig, wenn es nur der über T , die Zeit des Perisaturniums gemachten

Fig. 66.



Annahme entspricht. Nun wünscht man allerdings diese Elemente nicht in Beziehung auf die im Grossen nach der Stellung von Saturn und Erde veränderliche Ebene der Projectionsellipse zu wissen, sondern in Beziehung auf den Aequator oder auf die Ekliptik. Dazu gelangt man durch folgende einfache Betrachtung. Offenbar hängt die Oeffnung des Saturnringes oder seine Neigung gegen die Ebene der Projectionsellipse davon ab, welchen Winkel die Verbindungslinie Saturn-Erde mit der Ringebene bildet, mit anderen Worten, von der chronocentrischen Breite der Erde, aber auf die Ringebene als die Fundamentalebene bezogen. Die Neigung der Ebene der Projectionsellipse ist nichts Anderes als der Abstand des chronocentrischen Ortes der Erde vom Pole des grössten Kreises der Sphäre, welcher der Ringebene entspricht.

Den Pol des grössten Kreises, welcher der Ebene des Ringes entspricht, findet man hiernach, da der chronocentrische Ort der Erde dem geocentrischen Orte des Saturn diametral entgegengesetzt ist, durch ein

sehr einfaches Verfahren. Sind a und b die halbe grosse und die halbe kleine Axe des Ringes, wie sie die Messungen unmittelbar ergeben, so wird der Abstand des geocentrischen Ortes des Saturn von jenem Pole durch die Gleichung:

$$\cos i = \frac{b}{a}$$

gefunden; man gelangt daher zu jenem Pole, wenn man den Bogen i in der Richtung der kleinen Axe, und zwar nach derjenigen Seite der Ringebene hin, welche der Erde zugekehrt ist, aufträgt (siehe Fig. 66).

Dieselbe Betrachtungsweise, welche auf diese Construction geführt hat, liefert uns ohne Weiteres die Formeln zur Berechnung des Positionswinkels p der Richtung der kleinen Axe, wenn der Pol der Ringebene einmal bekannt geworden ist, und das Verhältniss der Axen. Die letzteren werden auch ihrer Grösse nach bekannt, wenn man eine von ihnen bei bekannter Entfernung des Saturn vom Auge einmal

¹⁾ Empirisch bestätigt wurde diese Anschauung durch die berühmten zu Ende der achtziger Jahre gemachten Barnard'schen Beobachtungen. Siehe deren theoretische Discussion: „Ueber die Japetusverfinsterung durch Saturn und sein Ringsystem vom Jahre 1889“. Astronom. Nachrichten, Bd. 137, Nr. 3280. — Anmerkung des Herausgebers der 2. Auflage.

gemessen hat. Es seien α und δ die geocentrische Rectascension und Declination des Saturn, A und D beziehungsweise dieselben Coordinaten für den mit der Erde auf gleicher Seite gelegenen Pol, so wird nach der bekanntesten Grundformel der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos i = -\frac{b}{a} = \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos (\alpha - A)^1) \dots \dots \dots (1)$$

Ferner ergibt sich für den Positionswinkel der nördlichen Hälfte der kleinen Axe:

$$\frac{\sin p}{\sin (\alpha - A)} = -\frac{\cos D}{\sin i} \dots \dots \dots (2)$$

Ist c der Halbmesser des Ringes in Theilen der mittleren Entfernung der Sonne von der Erde, A die Entfernung des Saturn von der Erde, so ist die halbe grosse Axe der Ringellipse in Bogensekunden:

$$a = \frac{c}{A} \dots \dots \dots (3)$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen findet man Lage und Aussehen des Saturnringes für irgend eine Zeit, wenn die Grössen A , D und c abgeleitet sind. Wenn man auf die obige Construction noch einmal die erwähnte Grundformel anwendet, jedoch so, dass i aus dem gemessenen Axenverhältniss und ausserdem δ und p als bekannt gelten, so ergibt sich:

$$\sin D = \sin \delta \cos i + \cos \delta \sin i \cos p \dots \dots \dots (4)$$

wonach dann weiter unter Zuziehung von (2) auch A bekannt wird. Aus einem gemessenen a folgt endlich $c = \alpha A$.

Rechnungsbeispiele. Am 31. December 1849 war die Südseite des Ringes sichtbar und der Positionswinkel des nördlichen Theiles der kleinen Axe $p = 3^\circ 52', 1$, ferner $b = -1'', 57$, $a = 19'', 68$, $\alpha = 0^\circ 42', 7$, $\delta = -1^\circ 27', 7$, $\log A = 0,97906$. Hieraus sollen A , D und c bestimmt werden. Nach Gleichung (4) ergibt sich, da hier $i = 85^\circ 25', 2$,

$$D = 82^\circ 50', 0$$

als Declination des Nordpols der Ringebene. Nach Gleichung (2) wird:

$$\alpha - A = -32^\circ 37', 1, \text{ also } A = 33^\circ 19', 8$$

als Rectascension des genannten Poles; endlich wird:

$$\log c = 2,27309.$$

Wollten wir aus diesen Werthen umgekehrt die Erscheinung des Saturn für den 1. Januar 1860 herleiten, wobei wir zur Berücksichtigung der Präcession des Ringpols, aber in Vernachlässigung anderer kleiner, hier nicht zu behandelnder Correctionen:

$$A = 33^\circ 42', 1$$

$$D = 82^\circ 52', 8$$

setzen, so bekommen wir, da für jene Zeit die geocentrische Rectascension des Saturn $\alpha = 148^\circ 13', 4$, die Declination $\delta = +14^\circ 15', 3$ ist:

$$\log A = 0,92814 \text{ nach Formel (1)}$$

$$i = 78^\circ 47', 4,$$

¹⁾ Hierbei ist b negativ zu nehmen, wenn die verdeckte Hälfte der kleinen Axe die südliche ist. Nach dieser Bestimmung über die Vorzeichen, und wenn A und D sich auf den Nordpol der Ringebene beziehen sollen, wird der Abstand i des Saturnortes von jenem Pole ein stumpfer Winkel, wenn $\frac{a}{b}$ positiv ist, d. h. die nördliche Fläche des Ringes uns zugekehrt ist.

und daraus weiter:

$$p = - 6^{\circ} 38',7,$$

endlich:

$$\begin{aligned} a &= 22'',13, \text{ die grosse Axe} = 44'',26, \\ b &= - 4'',30, \text{ die kleine Axe} = - 8'',60. \end{aligned}$$

Der südliche Theil der kleinen Axe wird durch die Scheibe des Saturn verdeckt.

Es mag hier noch angegeben werden, dass nach Bessel die Länge L des Nordpols der Ringebene auf die bei den Beobachtungen übliche bewegliche Ekliptik bezogen, d. h. mit Rücksicht auf die Säcularstörungen, nach der Formel:

$$L = 76^{\circ} 53' 8'',9 + 46'',462 (t - 1800)$$

die Breite B nach den folgenden:

$$B = 61^{\circ} 49' 44'',7 + 0'',350 (t - 1800)$$

zu berechnen ist.

Hundertundzweiundzwanzigste Vorlesung.

Kriterium für die Sichtbarkeit des Saturnringes.

Der Ring des Saturn bleibt nicht immer sichtbar. Seiner schon erwähnten, ungemein starken Abplattung wegen bietet der Ring den erleuchtenden Strahlen der Sonne fast gar keine Fläche dar, wenn die Sonne sich in der Ebene des Ringes befindet; die Ringellipse reducirt sich dann auf eine äusserst feine helle Linie, welche aber nur in stärkeren Fernröhren noch wahrgenommen werden kann. Beleuchtet die Sonne die uns entgegengesetzte Seite des Ringes, so wird der Ring für uns ganz verschwinden und sein Schlagschatten auf der Scheibe des Planeten bemerkbar werden. Zu gewissen anderen Zeiten sind Ring und Schatten gleichzeitig zu sehen. Das Sichtbarwerden des Ringes geht in der Weise vor sich, dass zuerst einzelne Punkte am äussersten Rande hervortreten; in umgekehrter Reihenfolge verschwinden solche Punkte bei dem Unsichtbarwerden.

Wir wollen nun im Folgenden die Grundbedingungen für die genannten Erscheinungen und ein Kriterium dafür, ob der Ring sichtbar sei oder nicht, zu entwickeln suchen.

Zunächst ist einleuchtend, dass die Zeiten des Durchganges der Sonne durch die Ringebene zusammenfallen werden mit den Zeiten, wo der heliocentrische Ort des Saturn, am Himmel einen grössten Kreis durchwandernd, den die Ringebene repräsentirenden grössten Kreis passirt, mit anderen Worten, wo der heliocentrische Ort des Saturn um 90° von jenem Pole des Ringes, dessen Rectascension und Declination mit A und D bezeichnet wurde, entfernt ist. Verstehen wir daher unter (a) und (d) beziehungsweise die heliocentrische Rectascension und Declination des Planeten, so wird sich die Beleuchtung auf die blossе Ringkante beschränken, wenn:

$$\sin(d) \sin D + \cos(d) \cos D \cos[(a) - A] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

da die erste Seite dieser Gleichung den Cosinus des Abstandes des heliocentrischen Ortes von dem Pole der Ringebene vorstellt. Ist derselbe Cosinus positiv, so wird die Südseite des Ringes beleuchtet sein, wenn negativ, die Nordseite. Die Beleuchtung der einen oder anderen wird um so intensiver sein, je mehr der Cosinus von Null verschieden.

Ob die beleuchtete Seite uns zugekehrt ist oder die dunkle, wird davon abhängen, ob der heliocentrische und der geocentrische Ort des Planeten auf gleiche oder entgegengesetzte Seiten des der Ringebene entsprechenden grössten Kreises der Sphäre fallen, d. h. also davon, ob die linke Seite von (1) und der Ausdruck:

$$\sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos(\alpha - A),$$

welcher den Cosinus des Abstandes des geocentrischen Ortes vom Ringpol vorstellt, gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben. Die Frage, ob der Ring sichtbar sei, ist demnach zu bejahen, so oft der Ausdruck:

$$\frac{\sin \delta \cdot \sin D + \cos \delta \cdot \cos D \cos(\alpha - A)}{\sin(d) \sin D + \cos(d) \cos D \cos[(a) - A]}$$

positiv, zu verneinen, so oft derselbe negativ wird.

In Anbetracht aber, dass die Division des Ausdruckes durch $\frac{\cos \delta}{\cos(d)}$, d. h. durch eine stets positive Grösse, keine Aenderung des Vorzeichens hervorbringt, kann man noch einfacher sagen:

Die Frage, ob der Ring des Saturn sichtbar sei, ist zu bejahen, wenn der numerische Werth von:

$$\frac{\operatorname{tg} \delta \cdot \operatorname{tg} D + \cos(\alpha - A)}{\operatorname{tg}(d) \operatorname{tg} D + \cos[(a) - A]}$$

ein bejahendes Vorzeichen bekommt, im anderen Falle zu verneinen.

Das Verschwinden des Zählers vorgenannten Ausdruckes deutet an, dass die Erde, dasjenige des Nenners, dass die Sonne sich in der Ringebene befindet.

Rechnungsbeispiel. Es wird gefragt, ob der Saturnring für die Mitternacht des 1. Sept. 1847 Berl. Zeit sichtbar war. Der heliocentrische Ort des Saturn war um jene Zeit:

$$(a) = 341^{\circ} 45',1 \qquad (d) = - 9^{\circ} 42',7$$

der geocentrische:

$$\alpha = 431^{\circ} 55',0 \qquad \delta = - 9^{\circ} 52',5.$$

Nehmen wir, wie in Vorlesung 121, $A = 33^{\circ} 19',8$, $D = 82^{\circ} 50',0$ an, so finden wir den Zähler des obigen Ausdruckes gleich $- 0,7607$, den Nenner gleich $- 0,7397$; folglich war der Ring sichtbar, und zwar seine Nordseite erleuchtet.

Im Laufe des 21. April des folgenden Jahres wechselte der Zähler, durch Null hindurchgehend, das Vorzeichen, der Ring verschwand daher bis zum 3. September desselben Jahres, wo der Nenner ebenfalls das Vorzeichen wechselte. Am 12. September, wo der Zähler von Neuem das Zeichen wechselt, verschwindet der Ring wiederum bis zum 19. Januar 1849, wo dann eine lange Periode der Sichtbarkeit beginnt. Mit Hülfe des obigen Kriteriums kann man jeden solchen Wechsel mit Leichtigkeit finden.

Eine längere Dauer der Sichtbarkeit des Ringes wird immer eintreten, wenn sich der heliocentrische Ort des Planeten so weit vom grössten Kreise der Ringebene entfernt, dass ein Hinübertreten des geocentrischen Ortes auf die andere Seite nicht mehr möglich ist. Besonders in den Oppositionen des Saturn wird ein Unsichtbarsein des Ringes zu den Seltenheiten gehören, da bei der geringen Neigung aller Bahnen der grossen Planeten, so auch des Saturn, gegen die Ekliptik in der Opposition der geocentrische Ort dem heliocentrischen ungemein nahe liegt. Nach derselben Betrachtung kann man, wenn man bemerkt, dass die Neigung der Ringebene gegen den Erdäquator nur etwa 7° beträgt, auch leicht übersehen, dass ein Verschwinden des Ringes nicht vorkommen wird, so lange der geocentrische Ort des Saturn weit von den Aequinoctien entfernt ist.

Hundertunddreiundzwanzigste Vorlesung.

Berechnung der Satellitenbahnen durch Zurückführung auf die Berechnung einer Doppelsternbahn.

Bekanntlich sind die grösseren Planeten unseres Systemes, mit Ausnahme von Mercur und Venus, von Satelliten begleitet. Auf diese Körper kann man mit besonderem Vortheil die im „Anhang“ des vorliegenden Werkes angegebene Leuschner'sche Methode der Bahnbestimmung mit sofortiger Berücksichtigung der Störungen als erste nunmehr vorliegende directe Methode der Bahnbestimmung für Satelliten anwenden (vergleiche auch die Vorbemerkungen zur 3. Ausgabe, S. XXIV).

Man könnte das Problem auch auf die für Planetenbahnen gegebenen Vorschriften zurückführen, oder auf diejenigen für Doppelsterne. Im ersteren Falle würden wir die Beobachtungen als aus dem jedesmaligen Durchschnittspunkte des Visionsradius mit einer durch den Hauptkörper des Satelliten gelegten, dem Erdäquator oder der Ekliptik parallelen Ebene geschehen betrachten, dabei die Coordinaten auf den Hauptkörper als Nullpunkt bezogen. Hierbei tritt uns indessen der Uebelstand entgegen, dass die Formeln Grössen verschiedener Ordnung gleichzeitig enthalten; die Trennung ist nicht ganz einfach und überhaupt dieser Weg nicht zu empfehlen. Auch muss bei solcher Behandlung des Problems der Satellitenbahnen entweder die Masse des Hauptkörpers oder die Umlaufzeit des Satelliten als bekannt angesehen werden.

In praktischer Hinsicht ist einer solchen Bestimmungsweise vorzuziehen die Zurückführung der Bahnbestimmung auf die einer Doppelsternbahn. Wir erreichen dies durch ganz ähnliche Betrachtungen wie bei dem Saturnringe, den wir als eine sichtbare Trabantenbahn betrachteten. Dort allerdings hatten wir zwei Erleichterungen, auf welche wir hier verzichten müssen; es wird uns für eine bestimmte Zeit immer nur ein einziger Punkt der Projectionsellipse, nicht werden sie alle auf einmal gegeben; ferner dürfen wir die Excentricitäten der Bahn hier nicht gleich Null setzen.

Aber auch hier lassen sich wieder durch den Mittelpunkt der Scheibe des Hauptkörpers zwei um 90° in Position verschiedene Richtungen oder Axen von solcher Beschaffenheit auffinden, dass die scheinbaren Abstände des Trabanten von der einen gerade so geschehen werden, als beobachtete man aus der Richtung des Pols der Bahnebene des Trabanten, d. h. also ohne perspectivische Verkürzung, die Abstände von der anderen aber mit perspectivischer Verkürzung. Die scheinbaren Dimensionen der Bahn können der Entfernung des Hauptkörpers von der Erde umgekehrt proportional gesetzt werden. Die bei dem Saturnring angestellten Betrachtungen zeigen, dass die perspectivischen Verkürzungen, wenn sich das Auge vom Pole der Trabantenbahn entfernt, parallel dem durch den Hauptkörper und den Pol gelegten grössten Kreise, welcher perspectivisch durch eine Gerade vorgestellt wird, stattfinden; senkrecht zu dieser Geraden werden die Abstände nicht geändert. Nennen wir also ψ den Positionswinkel des nach dem Nordpol der Trabantenbahn gerichteten grössten Kreises, A und D beziehungsweise die Rectascension und Declination des Nordpols, α und δ die des geocentrischen Ortes des Hauptkörpers, Δ dessen Entfernung, p und q beziehungsweise den Positionswinkel und die Distanz des Satelliten, so haben die Grössen $q \sin(p - \psi)$ gar keine Verkürzung durch geänderte Richtung der Gesichtslinie, die $q \cos(p - \psi)$ dagegen eine solche im Verhältniss von 1 zu $\cos \gamma$ erlitten, wenn nämlich γ den Abstand des geocentrischen Ortes vom erwähnten Pole vorstellt. Gesetzt, es seien A und D bekannt, so hat man

also die $\varrho \sin(p - \psi)$ mit Δ , die $\varrho \cos(p - \psi)$ dagegen mit $\frac{\Delta}{\cos \gamma}$, d. h. mit:

$$\frac{\Delta}{[\sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos(\alpha - A)]}$$

zu multipliciren, um diese Grössen so zu haben, wie sie aus einer zur Trabantenbahnebene senkrechten, durch den Hauptkörper gelegten Geraden und zwar aus der Einheit der Entfernung würden beobachtet worden sein.

Man hat nun, was die Bestimmung der Elemente betrifft, die beiden Fälle zu unterscheiden, ob die Umlaufszeit oder auch die Masse des Systemes bekannt ist, oder ob dieselbe ebenfalls erst aus den Beobachtungen hergeleitet werden soll. In dem ersteren Falle genügen, wie wir sogleich sehen werden, drei vollständige Beobachtungen des Satelliten mit den Positionswinkeln p, p', p'' und den Distanzen $\varrho, \varrho', \varrho''$. Denn es werden dadurch, immer vorausgesetzt, dass A und D bekannt seien, drei Punkte der Bahn und die Lage des Brennpunktes, d. h. die ganze Ellipse gegeben. Es existiren dann zur Prüfung der Richtigkeit der Werthe von A und D die beiden von einander unabhängigen Bedingungen, dass jeder Sector zu der ganzen Ellipse seinem Flächeninhalte nach in dem Verhältniss stehen soll, wie es die Zeitintervalle verlangen. Hiernach kann man also leicht A und D , für die meist sogar Annäherungen bekannt sind, auf indirectem Wege bestimmen. Mit Rücksicht auf die hier etwas geänderte Bezeichnung hat man unter Anwendung der Gleichung (2) der Vorlesung 121:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin \psi}{\sin(A - \alpha)} &= \frac{\cos D}{\sin \gamma} \\ \frac{\sin \psi'}{\sin(A - \alpha')} &= \frac{\cos D}{\sin \gamma'} \\ \frac{\sin \psi''}{\sin(A - \alpha'')} &= \frac{\cos D}{\sin \gamma''} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (I)$$

wobei die Accente zur Unterscheidung der zu den drei Zeiten t, t', t'' gehörenden Beobachtungen gebraucht worden sind. Die Reduction der Positionswinkel und Distanzen auf die aus der Entfernung 1) ohne Verkürzung gesehene Bahn geschieht nun nach den Formeln:

$$\left. \begin{aligned} R \sin(P - \psi) &= \varrho \sin(p - \psi) \cdot \Delta \\ R \cos(P - \psi) &= \varrho \frac{\cos(p - \psi)}{\cos \gamma} \cdot \Delta \\ R' \sin(P' - \psi') &= \varrho' \sin(p' - \psi') \cdot \Delta' \\ R' \cos(P' - \psi') &= \varrho' \frac{\cos(p' - \psi')}{\cos \gamma'} \cdot \Delta' \\ R'' \sin(P'' - \psi'') &= \varrho'' \sin(p'' - \psi'') \cdot \Delta'' \\ R'' \cos(P'' - \psi'') &= \varrho'' \frac{\cos(p'' - \psi'')}{\cos \gamma''} \cdot \Delta'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (II)$$

wobei P, P', P'' die drei reducirten Positionswinkel, R, R', R'' die zugehörigen reducirten Distanzen vorstellen. Ehe wir jedoch mit diesen Positionswinkeln und Distanzen weiter operiren, müssen wir die ersteren noch auf einen und denselben Meridian der Sphäre, auf einen gewissen ersten Meridian reduciren, wie es früher nöthig war, die Doppelsternbahnmessungen von dem Einflusse der Präcession zu befreien. Die im Vorhergehenden erhaltenen Positionswinkel beziehen sich auf den jedesmaligen Meridian des Jupiterortes. Es mag hier einfach darauf aufmerksam gemacht werden, dass diese Reduction bei den P der folgenden Gleichungen als ausgeführt vorausgesetzt wird,

weil wir in nächster Vorlesung einen directen Weg zu allen diesen Reductionen kennen lernen. Es mag ausserdem bemerkt werden, dass die Distanzen besonders bei den Satelliten des Jupiter bedeutende Grösse erlangen können. In solchem Falle muss man berücksichtigen, dass die Dimensionen in der Bahn, welche wir bei Doppelsternen unbedenklich mit ϱ , ϱ' , ϱ'' identificiren, genau genommen die Tangenten der durch ϱ , ϱ' , ϱ'' in Secunden gegebenen Schinkel sind; man muss deshalb bei grösserer Strenge statt $\varrho, \varrho', \varrho''$ setzen: $206\,264,8 \text{ tg } \varrho$, $206\,264,8 \text{ tg } \varrho'$, $206\,264,8 \text{ tg } \varrho''$, ebenso bei den R, R', R'' $206\,264,8 \text{ tg } R$, $206\,264,8 \text{ tg } R'$, $206\,264,8 \text{ tg } R''$. Im Folgenden vernachlässigen wir dies der Kürze halber. Zwischen dem Semiparameter der Bahn $a(1 - e^2)$, den Radien-vectoren R, R', R'' und den wahren Anomalien v, v', v'' bestehen nun bekanntlich die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} 1 + e \cos v &= \frac{a(1 - e^2)}{R} \\ 1 + e \cos v' &= \frac{a(1 - e^2)}{R'} \\ 1 + e \cos v'' &= \frac{a(1 - e^2)}{R''} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{ (III)}$$

welche nach einer am Schlusse der Vorlesung 75 gezeigten Umformung ergeben:

$$a(1 - e^2) = \frac{4 R R' R'' \sin \frac{1}{2}(v' - v) \sin \frac{1}{2}(v'' - v) \sin \frac{1}{2}(v'' - v')}{R R' \sin(v' - v) - R R'' \sin(v'' - v) + R' R'' \sin(v'' - v')},$$

oder da offenbar:

$$\begin{aligned} v' - v &= P' - P, \quad v'' - v = P'' - P, \quad v'' - v' = P'' - P', \\ a(1 - e^2) &= \frac{4 R R' R'' \sin \frac{1}{2}(P' - P) \sin \frac{1}{2}(P'' - P) \sin \frac{1}{2}(P'' - P')}{R R' \sin(P' - P) - R R'' \sin(P'' - P) + R' R'' \sin(P'' - P')} \end{aligned} \quad \text{ (IV)}$$

Aus den Gleichungen (III) ergibt sich dann:

$$\left. \begin{aligned} 2 e \cos \frac{1}{2}(v' + v) \cos \frac{1}{2}(P'' - P) &= a(1 - e^2) \left\{ \frac{1}{R} + \frac{1}{R''} \right\} - 2 \\ 2 e \sin \frac{1}{2}(v'' + v) \sin \frac{1}{2}(P'' - P) &= a(1 - e^2) \left\{ \frac{1}{R} - \frac{1}{R''} \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \text{ (V)}$$

d. h. die Excentricität e und $v'' + v$, welches mit der bekannten Differenz $v'' - v$ oder $P'' - P$ verbunden die wahren Anomalien liefert. Auch findet man, wenn π den reducirten Positionswinkel des Perihels vorstellt:

$$\pi = P - v = P' - v' = P'' - v''.$$

v' folgt aus der zweiten der Gleichungen (III). Berechnet man auch noch die mittleren Anomalien, so ist man vollkommen im Stande, eine in Beziehung auf A und D gemachte Hypothese zu prüfen, eventuell zu verbessern.

Sehr abgekürzt wird die Rechnung, wenn man eine vierte vollständige Beobachtung zuzieht. Es muss dann die doppelte Bedingung erfüllt sein, dass:

$$\begin{aligned} a(1 - e^2) &= \frac{4 R R' R'' \sin \frac{1}{2}(P' - P) \sin \frac{1}{2}(P'' - P) \sin \frac{1}{2}(P'' - P')}{R R' \sin(P' - P) - R R'' \sin(P'' - P) + R' R'' \sin(P'' - P')} \\ &= \frac{4 R R' R''' \sin \frac{1}{2}(P' - P) \sin \frac{1}{2}(P'' - P) \sin \frac{1}{2}(P''' - P')}{R R' \sin(P' - P) - R R''' \sin(P''' - P) + R' R''' \sin(P''' - P')} \\ &= \frac{4 R R'' R''' \sin \frac{1}{2}(P'' - P) \sin \frac{1}{2}(P''' - P) \sin \frac{1}{2}(P''' - P'')}{R R'' \sin(P'' - P) - R R''' \sin(P''' - P) + R'' R''' \sin(P''' - P'')} \end{aligned}$$

oder es muss, in das Geometrische übertragen, von den drei Ellipsen mit gegebenem Brennpunkte, welche man durch je drei der vier Punkte ziehen kann, jede der anderen congruent werden. Man kann also auch hier zum Zwecke der ersten Versuche für A und B von einem graphischen Verfahren mit Vortheil Gebrauch machen.

Hundertundvierundzwanzigste Vorlesung.

Fortsetzung der Untersuchungen zur Berechnung einer Satellitenbahn.

Bei den Satelliten des Jupiter durchaus (auch bei den helleren des Saturn, obgleich bei diesen schon die optischen Mittel gesteigert werden müssen) bietet die Bestimmung der Umlaufszeit durch Beobachtungen der Wiederkehr zu gleicher Stellung gegen den Jupiter keine sehr grossen Schwierigkeiten dar. Man darf dabei nur nicht vergessen, die geocentrische Bewegung des Hauptplaneten zu berücksichtigen. In anderen Fällen ist die Bestimmungsweise mit der Gefahr, Irrthümer und Verwechslungen zu begehen, verbunden, z. B. in besonders hohem Grade bei den Trabanten des Uranus. Diese lichtschwachen Objecte können bekanntlich nur mit den stärksten Sehmitteln beobachtet werden; solche Fernrohre zeigen nun eben vermöge ihrer ausserordentlichen optischen Kraft meistens auch Fixsterne im Hintergrunde, ein Umstand, welcher ungemein erschwerend wirkt, wenn der Planet gerade Theile der Milchstrasse oder andere sternreiche Gegenden durchwandert. Hier ist es sehr wünschenswerth, ein anderes Verfahren, welches von der Kenntniss der Umlaufszeit des Satelliten gar nicht abhängt, einschlagen zu können. Dasjenige, welches wir nun im Folgenden kennen lernen wollen, gewährt einen so gut wie vollständigen Schutz dagegen, dass ein Fixstern für einen Satelliten genommen werde. Um es in der Praxis zur Anwendung zu bringen, ist es nur nöthig, von den kleinen Sternen in der Umgebung des Planeten so viele nach Positionswinkel und Distanz aufzunehmen, als man in der Zeit von einigen Stunden auszuführen vermag; bei grossem Sternenreichthume kann auch ein Netzmikrometer gute Dienste thun.

Wir wollen nun jetzt diese Messungen von dem Einflusse der geocentrischen Bewegung des Planeten auf eine solche Art befreien, dass eine Sichtung der Fixsterne von den Monden und die Reduction der Bahnbestimmung dieser letzteren auf die einer Doppelsternbahn erlangt wird.

Es sei wie früher:

$$x = \varrho \cos p$$

$$y = \varrho \sin p$$

und z die in den jedesmaligen Visionsradius fallende Componente. Ist α die Rectascension, δ die Declination des Planeten zur Zeit der Beobachtung, so zielt offenbar die X -Axe des Coordinatensystemes nach einem Punkte der Sphäre, dessen Rectascension durch $180^\circ + \alpha$ und dessen Declination durch $90^\circ - \delta$ ausgedrückt wird.

Die Y -Axe zielt nach einem Punkte der Sphäre, dessen Rectascension offenbar gleich $90^\circ + \alpha$, dessen Declination gleich Null ist.

Stellen x_0 und y_0 die Coordinaten derselben gemessenen Oerter, wie oben, aber bezogen auf ein System vor, dessen X -Axe nach einem Punkte von der Rectascension $180^\circ + \alpha_0$, der Declination $90^\circ - \delta_0$, dessen Y -Axe einen Ort von der Rectascension $90^\circ + \alpha_0$, der Declination Null zum Zielpunkte hat, so haben wir, um die x_0 und y_0 durch die x , y und z auszudrücken, Gleichungen von der bekannten Form:

$$\begin{aligned} x_0 &= (X_0 X) x + (X_0 Y) y + (X_0 Z) z \} \\ y_0 &= (Y_0 X) x + (Y_0 Y) y + (Y_0 Z) z \} \end{aligned} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (I)$$

wobei:

$$\left. \begin{aligned} (X_0 X) &= \cos \delta_0 \cos \delta + \sin \delta_0 \sin \delta \cos(\alpha - \alpha_0) \\ (X_0 Y) &= \sin \delta_0 \sin(\alpha - \alpha_0) \\ (X_0 Z) &= \cos \delta_0 \sin \delta - \sin \delta_0 \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_0) \\ (Y_0 X) &= -\sin \delta \sin(\alpha - \alpha_0) \\ (Y_0 Y) &= \cos(\alpha - \alpha_0) \\ (Y_0 Z) &= +\cos \delta \sin(\alpha - \alpha_0) \end{aligned} \right\} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (II)$$

Wir können es nun bei Saturn, Uranus, Neptun, auf die es hier fast allein ankommt, ihrer langsamen geocentrischen Bewegung halber stets so einrichten, dass für eine lange Reihe von Beobachtungen die Coëfficienten $(X_0 Z)$ und $(Y_0 Z)$ sehr klein werden. Wir setzen z. B. α_0 gleich dem Mittel aus den Rectascensionen der ersten und letzten Rectascension, ebenso δ_0 gleich der halben Summe der entsprechenden Declinationen; es werden dann bei der ersten Annäherung jene Coëfficienten ganz und gar zu vernachlässigen sein. Ebenso wird man sich erlauben dürfen, $\cos(\alpha - \alpha_0) = 1$, d. h.

$$(X_0 X) = \cos(\delta - \delta_0), \quad (X_0 Y) = 0, \quad (Y_0 X) = 0, \quad (Y_0 Y) = 1$$

zu setzen. Zur Reduction der Distanzen und Positionswinkel, welche dem Visionsradius der Messung entsprechen, auf einen gewählten festen Visionsradius von der Rectascension α_0 und der Declination δ_0 und zugleich auf dessen Meridian, haben wir daher:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_0 \cos p_0 &= \varrho \cos(\delta - \delta_0) \cos p \\ \varrho_0 \sin p_0 &= \varrho \sin p \end{aligned} \right\} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (III)$$

Bedeutet (a) die halbe grosse Axe oder mittlere Entfernung des Planeten von der Sonne und Δ den jedesmaligen Abstand von der Erde, so hat man noch die nach (III) zu findenden p_0 und ϱ_0 durch Multiplication mit $\frac{\Delta}{(a)}$ auf mittlere Entfernung zu reduciren.

Hiermit ist die Zurückführung auf eine Doppelsternbahn vollendet. Wenn man mit den beobachteten Objecten in der Nachbarschaft des Planeten die angegebenen leichten Reductionen vornimmt und die Oerter aufträgt, so wird sich ziemlich bald ergeben müssen, welche darunter einer Projectiionsellipse angehören, und ferner, ob die beschriebenen Sektoren den Zwischenzeiten proportional sind. Mit demjenigen Materiale, welches diese sichtende Prüfung besteht, wird darauf eine Doppelsternbahnbestimmung vorgenommen. Die Unterscheidung des auf- und des niedersteigenden Knotens würde auch hier zwar nicht, wie bei einer Doppelsternbahn, unmöglich, so doch zuweilen schwierig werden, wenn nicht andere Kriterien, darunter die Verfinsterungen und Bedeckungen der Monde durch den Planeten, zu Hülfe gezogen werden könnten. Indessen ist eine Entscheidung darüber auch noch auf folgendem anderen Wege zu erlangen, welchen einzuschlagen die Kenntniss der Parallaxe möglich macht.

Die Neigung i der Bahn gegen die Ebene der Projectiionsellipse, senkrecht zur Knotenlinie, und zwar nach der uns zugewandten Seite der wirklichen Bahn als Bogen eines grössten Kreises von dem geocentrischen Orte α_0, δ_0 , auf den man reducirt hat, an aufgetragen, führt in dem anderen Endpunkte dieses Bogens auf den Pol der von uns abgewandten Seite der Bahnebene. Bei obiger Formel wird es sich daher darum handeln, nach welcher Seite hin man den Bogen i aufzutragen hat, und welcher von den beiden um $2i$ von einander abstehenden Punkten der Sphäre die Eigenschaften jenes Poles wirklich besitzt. Zu diesen gehört offenbar, dass, wenn sich der geocentrische Ort vom Pole entfernt, die in den grössten Kreis, welcher beide verbindet, fallende Ver-

kürzung der Radienvectoren eine grössere wird. Wenn nicht gerade i den Grenzwert 90° annimmt, wobei dann Verfinsterungen und Bedeckungen die Beantwortung der Frage ermöglichen, so wird nur einer der beiden durch Auftragen des Bogens i nach beiden Seiten erlangten Punkte hierin Genüge leisten. Kürzer aber ist das folgende Kriterium: Transformirt man die Coordinaten x_0, y_0, z_0 auf ein System, dessen Z -Axe nach dem Pole der Bahnebene mit der Rectascension A , der Declination D zielt, so muss in Folge der Wahl des Vorzeichens von z_0 die transformirte Z -Coordinate verschwinden, d. h. es muss die Bedingung:

$\{ \sin D \cos \delta_0 - \cos D \sin \delta_0 \cos(\alpha_0 - A) \} x_0 - \cos D \sin(\alpha_0 - A) y_0 + \cos i \cdot z_0 = 0$
erfüllt sein.

Um die zweite Näherung durchzuführen, berechnet man aus dem so für jede Zeit bekannt gewordenen z_0 die z für die ursprünglichen Oerter nach der Formel:

$$z = \{ \sin \delta \cos \delta_0 - \cos \delta \sin \delta_0 \cos(\alpha_0 - \alpha) \} x_0 - \cos \delta \sin(\alpha_0 - \alpha) y_0 \\ + \{ \sin \delta \sin \delta_0 + \cos \delta \cos \delta_0 \cos(\alpha_0 - \alpha) \} z_0$$

und bringt darauf die Gleichungen (I), (II) und (III) von Neuem zur Anwendung. Darauf folgt wieder die Berechnung der Bahn als die einer Doppelsternbahn. Die Entscheidung des Vorzeichens von z_0 wird man in der Regel nicht zu wiederholen haben.

Wir schliessen die Untersuchungen über Satellitenbahnen, nicht ohne den Leser, welcher sich vollständiger über dieses Thema zu unterrichten wünscht, auf die in Schumacher's Astronomischen Nachrichten in einer Reihe von Aufsätzen niedergelegten Arbeiten Bessel's über das Saturnsystem zu verweisen.

Was Doppelsternbahnen betrifft, so sei hier am Schlusse der Abtheilung VIII. noch das Buch: „Undersogelse af Omlobsbevaegelsen i Dobbelstjernesystemet ,Gamma Virginis' udført tildels efter nye Methoder af Th. N. Thiele, Cand. magist. Kjobenhavn.“ empfohlen.

Neunte Abtheilung.

Ueber die Bahnbestimmung der Meteore, Meteoriten und Sternschnuppen.

Hundertundfünfundzwanzigste Vorlesung.

Einleitende Bemerkungen.

In der Classe der Sternschnuppen, Meteore und Meteoriten sind die kleinsten, aber zahlreichsten der die Sonne umkreisenden Körper vertreten. Ihrer Kleinheit und geringen Masse ungeachtet ist das Studium dieser früher etwas vernachlässigten Körper aller Aufmerksamkeit werth, seitdem die Untersuchungen und Entdeckungen des amerikanischen Astronomen Newton, von Oppolzer, C. F. W. Peters u. A., vorzüglich aber die von Schiaparelli gezeigt haben, dass durch solches Studium ungemein werthvolle Aufschlüsse erlangt werden können. Sichtbar werden uns die genannten Körper bei dem Falle von Feuerkugeln, von Sternschnuppen und bei Kometenerscheinungen. Die Bezeichnung der Feuerkugeln und der durch Helligkeit ausgezeichneten Sternschnuppen als Meteore oder Meteoriten ist das Vermächtniss einer Zeit, welche, wie vor Jahrhunderten die Kometen, so auch Feuerkugeln und Sternschnuppen unter die Lufterscheinungen rechnete. Die Ansicht, deren Richtigkeit wir bis zur Evidenz erwiesen ansehen dürfen, dass nämlich die Erscheinung der Feuerkugeln und Sternschnuppen veranlasst wird durch kleine Himmelskörper, welche auf ihrer Bahn um die Sonne in die Atmosphäre der Erde gerathen, ist erst von Chladni aufgestellt und vertheidigt worden. In Betreff der Gründe für diese Ansicht und der Einwürfe dagegen wird man in dem geistvollen Buche von Schiaparelli: „Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen“, aus dem Italienischen übersetzt und herausgegeben von Georg v. Boguslawski, die genügende Belehrung finden.

Unsere gegenwärtige Aufgabe ist es, nicht eine Geschichte der Entwicklung der Sternschnuppentheorie zu geben, sondern nur die beiden Bahnbestimmungsprobleme zu behandeln, welche der gegenwärtige Stand dieser Theorie uns vorlegt. Diese Aufgabe zerfällt in zwei Theile, in die Bestimmung des Laufes der Sternschnuppe innerhalb der Zeiten des Aufleuchtens und Erlöschens, und in die Bestimmung des um die Sonne beschriebenen Kegelschnittes. Die letztere Bahn hat dadurch ein ganz besonderes grosses Interesse, weil sie zugleich in zahlreichen Fällen von einer grossen Menge der kleinen Körper gemeinschaftlich durchlaufen wird und somit eine Art Ring repräsentirt; die Zeiten des Durchgehens der Erde durch einen solchen Ring sind bekanntlich durch einen stärkeren Fall von Sternschnuppen ausgezeichnet, besonders, wenn dieser Durch-

gang durch eine dichtere Stelle des Ringes erfolgt. Diese durch eine grössere Ansammlung der kleinen Körper hervorragenden Stellen des Meteorstromes können, im Gegensatz zu der einzelnen Sternschnuppe, uns auch aus grösseren Entfernungen sichtbar werden und bieten dann eine Kometenerscheinung. So z. B. ist der Komet 1862 III. nichts Anderes als eine dichtere Stelle desjenigen Meteorstromes, welche den Sternschnuppenfall des 10. und 11. August, seit über 1000 Jahren bekannt und unter dem Namen der Thränen des heiligen Laurentius erwähnt, hervorbringt. Als zweites Beispiel dieser Art mag erwähnt werden, dass der Komet 1866 I. in dem Meteorstrome des bekannten Novemberphänomens läuft.

Hundertundsechszwanzigste Vorlesung.

Bestimmung der Höhen und Geschwindigkeiten aus correspondirenden Sternschnuppenbeobachtungen.

Die Beobachtungen von Sternschnuppen werden, wenn sie zur Bestimmung der Höhen dienen sollen, in der Weise angestellt, dass man an zwei einander nicht allzu benachbarten Stationen von den im Laufe einer Nacht sichtbar werdenden Sternschnuppen Zeit und Ort des Aufleuchtens oder des Erlöschens oder beider Momente bemerkt. Je vollständiger diese Data erhalten worden sind, um so grösser ist die Sicherheit, mit welcher erkannt werden kann, welche von den an beiden Stationen beobachteten Erscheinungen sich auf einen und denselben Körper beziehen, d. h. sich als correspondirende erweisen. Nach der Erfahrung ist die so erhaltene Ausbeute correspondirender Beobachtungen in der Regel eine geringe; daher ist es in hohem Grade wünschenswerth, leicht anwendbare Kriterien zu haben, mittelst deren man die correspondirenden Beobachtungen erkennen kann.

Es darf in der Hinsicht vorläufig angenommen werden, dass die Momente des Aufleuchtens wie des Erlöschens für beide Stationen gleichzeitig sind, sich also nur um den Meridianunterschied beider Orte von einander unterscheiden. Nur ist dieses einfachste Kriterium, welches man vor allen übrigen zu Hülfe ruft, weder immer anwendbar, noch stets untrüglich. Eine scharfe Angabe der Zeit an beiden Stationen ist nämlich, zumal die Beobachtungen ziemlich viel Uebung erfordern, durchaus nicht häufig; ausserdem ist es aber gar nicht so selten, dass zwei verschiedene Körper beinahe gleichzeitig aufleuchten oder erlöschen, als dass man sich auf die Uebereinstimmung der Zeiten allein verlassen dürfte; man darf diese nur als vorläufiges Kriterium gelten lassen, und muss sich, wie wir nun im Folgenden thun wollen, nach weiteren Erkennungszeichen umsehen.

Ist das von beiden Stationen aufleuchtend gesehene Object ein und dasselbe, so müssen die Visionsrichtungen der beiden Stationen sich schneiden. Denken wir uns diese Stationen die eine von der anderen aus sichtbar, so muss der Zielpunkt der Verbindungslinie am Himmel mit den beiden Beobachtungsrichtungen auf einem grössten Kreise liegen, da die Ebene des Dreiecks Station I. — Station II. — Object diesem grössten Kreise entspricht. Dieselbe Betrachtung wiederholt sich für den Moment des Erlöschens der Sternschnuppe; hiermit verfügen wir denn über eine hinreichende Zahl von Kriterien,

um uns vor Irrthümern zu schützen¹⁾. Es ist leicht, den analytischen Ausdruck für dieselben zu finden.

Zu dem Ende seien:

$$\left. \begin{array}{l} R \text{ der Abstand vom Erdmittelpunkte} \\ \varphi \text{ die verbesserte Polhöhe} \\ s \text{ die Sternzeit} \end{array} \right\} \text{ der Station I.,}$$

$$\left. \begin{array}{l} R' \text{ der Abstand vom Erdmittelpunkte} \\ \varphi' \text{ die verbesserte Polhöhe} \\ s' \text{ die Sternzeit} \end{array} \right\} \text{ der Station II.,}$$

K die beide Stationen verbindende Sehne,
 A, D beziehungsweise die Rectascension und Declination der Station II. von Station I. aus gesehen,

so wird nach bekannten Formeln:

$$\begin{aligned} R' \cos \varphi' \cos s' - R \cos \varphi \cos s &= K \cos D \cos A \\ R' \cos \varphi' \sin s' - R \cos \varphi \sin s &= K \cos D \sin A \\ R' \sin \varphi' - R \sin \varphi &= K \sin D. \end{aligned}$$

Es seien ferner α, δ die Rectascension und Declination der Sternschnuppe, von Station I. aus gesehen, α', δ' Rectascension und Declination an Station II. beobachtet, so haben wir nach der bekannten Bedingungsgleichung für drei in einem grössten Kreise liegende Oerter:

$$\lg D \sin(\alpha' - \alpha) + \lg \delta \sin(A - \alpha') - \lg \delta' \sin(A - \alpha) = 0 \quad . \quad . \quad (\odot)$$

Bezeichnen wir mit x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten in Beziehung auf ein System, dessen Fundamentelebene die Ebene des Erdäquators, dessen positive X -Axe nach dem Frühlingspunkt gerichtet ist, mit X, Y, Z die Coordinaten der Station I., mit X', Y', Z' die der Station II., mit ϱ den Abstand der Sternschnuppe von Station I., mit ϱ' den von Station II., so wird:

$$\begin{aligned} x - X &= \varrho \cos \delta \cos \alpha & y - Y &= \varrho \cos \delta \sin \alpha & z - Z &= \varrho \sin \delta \\ x - X' &= \varrho' \cos \delta' \cos \alpha' & y - Y' &= \varrho' \cos \delta' \sin \alpha' & z - Z' &= \varrho' \sin \delta', \end{aligned}$$

daher nach Subtraction der unteren Gleichungen von den oberen, wenn man sich erinnert, dass:

$$\begin{aligned} X' - X &= K \cos D \cos A & Y' - Y &= K \cos D \sin A & Z' - Z &= K \sin D, \\ \left. \begin{array}{l} \varrho \cos \delta \cos \alpha - \varrho' \cos \delta' \cos \alpha' = K \cos D \cos A \\ \varrho \cos \delta \sin \alpha - \varrho' \cos \delta' \sin \alpha' = K \cos D \sin A \\ \varrho \sin \delta - \varrho' \sin \delta' = K \sin D \end{array} \right\} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I) \end{aligned}$$

Eliminirt man aus der ersten und zweiten dieser Gleichungen ϱ' , so findet man:

$$\varrho \cos \delta \sin(\alpha' - \alpha) = K \cos D \sin(\alpha' - A) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

eliminirt man dagegen ϱ , so ergibt sich:

$$\varrho' \cos \delta' \sin(\alpha' - \alpha) = K \cos D \sin(\alpha - A) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

Die Formeln (II) und (III) sind sehr bequem zur Bestimmung von ϱ und ϱ' und damit aller übrigen zu suchenden Werthe, wenn $\alpha' - \alpha$ nicht allzu klein wird. Würde dagegen vorzugsweise die Declination von der Sternschnuppenparallaxe afficirt, so müsste man sich anderer Formeln bedienen. Multiplicirt man die Gleichungen (I), die erste mit

¹⁾ Der Fall, dass zwei Sternschnuppen nahezu gleichzeitig in einem grössten Kreise erscheinen, der durch den Zielpunkt der Verbindungslinie zwischen den Stationen geht, und dass noch ausserdem die eine Sternschnuppe bloss auf der einen, die andere bloss auf der anderen Station bemerkt wird, ist schon zu selten, um viel Rücksicht darauf nehmen zu müssen.

$\sin \delta' \cos \alpha'$, die zweite mit $-\sin \delta' \sin \alpha'$, die dritte mit $-\cos \delta' \cos 2\alpha'$, so erreicht man ebenfalls die Elimination von ϱ' und erhält:

$$\begin{aligned} & \varrho \cos \delta \sin \delta' \cos(\alpha' + \alpha) - \varrho \sin \delta \cos \delta' \cos 2\alpha' \\ &= K \cos D \sin \delta' \cos(\alpha' + A) - K \sin D \cos \delta' \cos 2\alpha', \\ \text{oder:} \quad & \varrho = \frac{\sin \delta' \cos D \cos(\alpha' + A) - \cos \delta' \sin D \cos 2\alpha'}{\sin \delta' \cos \delta \cos(\alpha' + \alpha) - \cos \delta' \sin \delta \cos 2\alpha'} \cdot K. \end{aligned}$$

Die Gleichung für $-\varrho'$ ist analog der Gleichung für $+\varrho$, natürlich unter Vertauschung von α, δ mit α', δ' und umgekehrt.

Aus ϱ und ϱ' berechnet sich dann:

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi \cos s + \varrho \cos \delta \cos \alpha = R' \cos \varphi' \cos s' + \varrho' \cos \delta' \cos \alpha' \\ y &= R \cos \varphi \sin s + \varrho \cos \delta \sin \alpha = R' \cos \varphi' \sin s' + \varrho' \cos \delta' \sin \alpha' \\ z &= R \sin \varphi + \varrho \sin \delta = R' \sin \varphi' + \varrho' \sin \delta'. \end{aligned}$$

Es bedeute r den Abstand der Sternschnuppe vom Erdcentrum, a und d die aus diesem geschene Rectascension und Declination, d. h. also die Sternzeit und verbesserte Polhöhe des Ortes, für welchen die Sternschnuppe im verbesserten Zenith erschien, so ist bekanntlich:

$$x = r \cos d \cos a \quad y = r \cos d \sin a \quad z = r \sin d.$$

Der Ueberschuss von r über den Radius vector des genannten Ortes auf der Erdoberfläche, multiplicirt mit dem Cosinus der Verbesserung der Polhöhe liefert die Höhe der Sternschnuppe über der Erdoberfläche. Jener Cosinus darf übrigens ohne Bedenken gleich 1 gesetzt werden, da die Verbesserung nur etwa 12' im Maximum beträgt.

Die wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler immer nur nahe, nicht in äusserster Schärfe zu verlangende Uebereinstimmung der Resultate aus (II) und (III) liefert sowohl eine Prüfung der Richtigkeit der numerischen Rechnung, wie auch einen nachträglichen Beweis, dass an beiden Stationen wirklich ein und derselbe Körper beobachtet worden ist.

Die Formeln der eben vorgetragenen Methode lassen, wie man leicht bemerken wird, zu, die Höhe der Stationen über dem Meere zu berücksichtigen, was in einzelnen Fällen erheblich das Resultat verbessern kann. Man braucht zu dem Ende nur die Meereshöhen auf dieselbe Einheit, wie R und R' haben, zu reduciren und zu letzteren Grössen zu addiren; wenn man es aber noch genauer nehmen will, multiplicirt man zuvor die Höhen mit der Secante der Polhöhenverbesserung.

Hundertundsiebenundzwanzigste Vorlesung.

Ueber den Radiationspunkt und dessen Herleitung.

Die Vorschriften der vorhergehenden Vorlesung auf das Aufleuchten und das Erlöschen einer Sternschnuppe angewandt, geben die geocentrischen Coordinaten derselben für die den beiden Momenten entsprechenden Zeiten, also den dazwischen zurückgelegten Weg und endlich aus der Dauer der Erscheinung die Geschwindigkeit. Ehe wir jedoch ein Beispiel einer solchen Rechnung geben, wird es nützlich sein, die Aufmerksamkeit noch auf einen anderen wichtigen Punkt zu lenken.

Es leuchtet ein, dass sowohl die Bewegung der Erde als auch die der Sternschnuppe

von dem Widerstande, welche letztere in der Erdatmosphäre findet, hier abgesehen, sowie von dem gleichfalls hier unwesentlichen Umstande, dass die Sternschnuppe in der Regel die Katastrophe des Zusammentreffens mit der Erde und deren Atmosphäre nicht überdauert, für die Zeit einiger Stunden als eine gleichmässige und geradlinige betrachtet werden kann. Dass bei solcher Annahme der geocentrische Lauf der Sternschnuppe ebenfalls in einen, wenn auch mit ungleicher Geschwindigkeit verfolgten grössten Kreis falle, d. h. scheinbar geradlinig sein wird, wissen wir aus früheren Betrachtungen. Stellen wir uns aber weiter die Frage, welchen geocentrischen Ort die Sternschnuppe in genanntem grössten Kreise nach Verlauf einer so langen Zeit einnimmt, als sich im äussersten Falle mit obiger Voraussetzung vertragen würde, mit anderen Worten, die Frage nach dem Endpunkte des geocentrischen Bogens, dem die Sternschnuppe sich fortwährend nähert, ohne ihn überschreiten zu können. Bezeichnen wir die rechtwinkligen geocentrischen Coordinaten für die aufleuchtende Sternschnuppe mit x, y, z , die für die gewöhnlich nur einige Secunden später erlöschende Sternschnuppe mit x', y', z' , ferner mit ϑ die erwähnte Zeit, welche nach dem Erlöschen oder vorher verfliesst, bis die Sternschnuppe den Endpunkt des geradlinigen Theiles ihres geocentrischen Laufes erreicht, mit t und t' die Zeiten des Aufleuchtens und Erlöschens, mit P und Q bezw. die Rectascension und die Declination jenes Endpunktes, endlich mit g die Geschwindigkeit der Sternschnuppe relativ zur Erde oder die Grösse:

$$\sqrt{\frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}{t' - t}},$$

so haben wir:

$$x' + \frac{\vartheta (x' - x)}{t' - t} = g \vartheta \cos Q \cos P$$

$$y' + \frac{\vartheta (y' - y)}{t' - t} = g \vartheta \cos Q \sin P$$

$$z' + \frac{\vartheta (z' - z)}{t' - t} = g \vartheta \sin Q$$

oder:

$$\frac{x'}{\vartheta} + \frac{x' - x}{t' - t} = g \cos Q \cos P$$

$$\frac{y'}{\vartheta} + \frac{y' - y}{t' - t} = g \cos Q \sin P$$

$$\frac{z'}{\vartheta} + \frac{z' - z}{t' - t} = g \sin Q.$$

Da nun aber ϑ sehr gross, gleichsam unendlich gross gewählt werden soll, so verschwinden auf der einen Seite dieser Gleichungen die Glieder $\frac{x'}{\vartheta}, \frac{y'}{\vartheta}, \frac{z'}{\vartheta}$, und man hat:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x' - x}{t' - t} &= g \cos Q \cos P \\ \frac{y' - y}{t' - t} &= g \cos Q \sin P \\ \frac{z' - z}{t' - t} &= g \sin Q \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (A)$$

Nimmt man hier das Vorzeichen von g positiv, so erhält man jenen Ort am Himmel, nach welchen der geocentrische Lauf nicht bloss der einzelnen Sternschnuppe, sondern aller solcher Körper gerichtet ist, welche bei dem Durchgange der Erde durch den

Meteorstrom sichtbar werden. Denn dieselben durchlaufen im Raume parallele Gerade mit gemeinschaftlicher Geschwindigkeit; es sind daher für alle zu dem Meteorstrome gehörigen Körper die Verhältnisse:

$$\frac{y' - y}{x' - x} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} P$$

und:

$$\frac{z' - z}{x' - x} \quad \text{oder} \quad \sec P \operatorname{tg} Q$$

dieselben. Der betreffende Punkt wird, weil die feurigen Linien des Sternschnuppenfalles nach ihm convergiren, Radiationspunkt der Convergenz, der demselben diametral gegenüberliegende, von welchem die Sternschnuppen eines und desselben Schwarmes zu kommen scheinen, Radiationspunkt der Divergenz genannt. Für das Novemberphänomen fällt der letztere Punkt nahe an γ Leonis, weshalb der das Phänomen verursachende Strom, dessen knotenförmige Verdichtung den Kometen I. 1866 bildet, Strom der Leoniden genannt wird. Der dem Augustphänomen entsprechende, dessen Verdichtung den Kometen III. 1862 ausmacht und dessen Divergenzpunkt in eine Stelle des Perseus mit der Rectascension 44° , der Declination $+56^{\circ}$ fällt, führt deshalb auch den Namen der Perseiden.

Zur Bestimmung des Divergenzpunktes bedarf es nach dem Vorhergehenden nicht der correspondirenden Beobachtungen, sondern nur des Eintragens der in einer Nacht bemerkten Sternschnuppenbahnen in gute Sternkarten und der Construction des allen wenigstens nahezu gemeinsamen Durchschnittspunktes. (Man muss hier berücksichtigen, dass die Sternschnuppe sich in einem widerstehenden Mittel bewegt, dessen hemmender Einfluss ja durch das Glühen der Sternschnuppe am besten bezeugt wird, ferner, dass das Auge des Beobachters an der Drehung der Erde theilnimmt, und dass noch andere störende Einflüsse das Zustandekommen eines strengen Radiationspunktes verhindern.)

Ehe wir, wie in der zweitnächsten Vorlesung geschehen soll, zeigen, dass aus der Lage des Divergenzpunktes und der Geschwindigkeit alle Elemente der Bahn des Sternschnuppenringes abgeleitet werden können, mag an einem Beispiele die Anwendung der oben gegebenen Formeln für correspondirende Beobachtungen erläutert werden.

I. Die folgende Berechnung hat Herr Chas. P. Olivier von der Licksternwarte beigetragen. Die Beobachtung des Meteors ist entnommen aus den Lick Observatory Contributions, Nr. 5.

Für Mt. Hamilton: Breite $121^{\circ} \quad 38' \quad 43'',4$
 Länge $+37 \quad 20 \quad 25,6$

Meteor gesehen um $15^{\text{h}} 45^{\text{m}} 18^{\text{s}}$ mittlere Ortszeit.

Ort des Aufleuchtens . . . $\alpha = 348^{\circ},5 \quad \delta = + 28^{\circ},0$
 Ort des Verschwindens . . $\alpha = 336,5 \quad \delta = + 16,8$

Für Mt. Diablo: Breite . . . $121^{\circ} \quad 54' \quad 48'',3$
 Länge . . . $37 \quad 52 \quad 55,5$

Meteor gesehen um $15^{\text{h}} 44^{\text{m}} 14^{\text{s}}$ mittlere Ortszeit.

Ort des Aufleuchtens . . . $\alpha = 12^{\circ},0 \quad \delta = + 5^{\circ},5$
 Ort des Verschwindens . . $\alpha = 7,0 \quad \delta = - 17,0$

Geocentrische Coordinaten:

Mt. Hamilton: $X_1 = 0,77042$		Mt. Diablo: $X_2 = 0,76577$
$Y_1 = 0,20103$		$Y_2 = 0,19602$
$Z_1 = 0,60334$		$Z_2 = 0,61079$

$$\begin{aligned}\text{Sternzeit} &= 0^{\text{h}} 58^{\text{m}} 30^{\text{s}} \\ \log R_1 &= 9,99956 \\ \Phi_1 &= 37^{\circ} 9' 10'',7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Sternzeit} &= 0^{\text{h}} 57^{\text{m}} 26^{\text{s}} \\ \log R_2 &= 9,99954 \\ \Phi_2 &= 37^{\circ} 41' 37'',5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= 227^{\circ} 12' 37'' \\ D &= 47 \quad 27 \quad 10 \\ \log K &= 3,00458\end{aligned}$$

II. Für den Moment des Verschwindens ist: |

$$\begin{aligned}\log \varrho_1 &= 8,03856 \\ \log x_1 &= 9,89213 \\ \log y_1 &= 9,29412 \\ \log z_1 &= 9,78272 \\ \alpha_1 &= 14^{\circ} 9' 46'' \\ \delta_1 &= + 37 \quad 0 \quad 16 \\ \log r_1 &= 0,00366 \\ \text{Höhe} &= 33,51 \text{ Meilen}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Breite des Endes der Bahn} &= + 37^{\circ} 11' 31'' \\ \text{Länge des Endes der Bahn} &= 122 \quad 6 \quad 27\end{aligned}$$

Controle:

$$\begin{aligned}\log \varrho_2 &= 8,17221 \\ \log x_2 &= 9,89203 \\ \log y_2 &= 9,29611 \\ \log z_2 &= 9,78278 \\ \alpha_2 &= 14^{\circ} 13' 41'' \\ \delta_2 &= + 37 \quad 0 \quad 28 \\ \log r_2 &= 0,00370 \\ \text{Höhe} &= 33,84 \text{ Meilen}\end{aligned}$$

Die Controlformel (⊙) giebt, auf den Endpunkt der Bahn angewendet, für die Summe der drei Glieder statt Null etwa 0,06, was eine genügende Uebereinstimmung ist.

Hundertundachtundzwanzigste Vorlesung.

Unabhängigmachen der Bestimmung von der Forderung der Gleichzeitigkeit. Vereinfachende geometrische Betrachtungen und Construction. Angabe der bleibenden Unsicherheit.

Natürlich ist es zuweilen misslich um die Anforderung der Gleichzeitigkeit der Beobachtung des Aufleuchtens und Verschwindens bestellt. Derselbe Umstand tritt nun aber in noch viel entscheidenderer Weise hervor, wo wirklich scharfe Bestimmungen der Zeit vorliegen; man macht da die Erfahrung, dass das Aufleuchten an der einen Station häufig erheblich später bemerkt wird als an der anderen, ja häufig sogar erst dann, nachdem für die eine Station schon das Erlöschen eingetreten ist. Vorwiegende Ursache dieser Erscheinung scheint nicht die Verschiedenheit in der Entfernung von beiden Stationen zu sein, sondern vielmehr die Phasenverschiedenheit der Brennflächen; denn es hat sich gezeigt, dass in der Mehrzahl der Fälle gerade die nähere Station später beobachtet.

Bei so bewandten Umständen ist es doppelt wünschenswerth, der Gleichzeitigkeit der Beobachtungsmomente ganz entbehren zu können. Durch die folgenden Betrachtungen erlangen wir aber noch mehr als dies; wir werden in den Stand gesetzt, anzugeben, in welchem Grade die unvermeidlichen Beobachtungsfehler auf die Sicherheit des Resultats einwirken.

tates einwirken. Ohne dass ein solches Urtheil ermöglicht wird, haben die Rechnungsergebnisse nur geringen Werth und können, wenn man allzu vertrauensvoll Folgerungen aus ihnen zieht, zu falschen Ansichten (wie z. B. über die Höhe der Atmosphäre) Veranlassung geben und statt zu einem Förderungsmittel der Erkenntniss ein Hemmniss derselben werden.

Der in der Vorlesung 127 definirte Radiationspunkt der Divergenz, auch Radiationspunkt schlechthin genannt, hat offenbar nicht bloss locale Bedeutung der Art, dass mit einem anderen Beobachtungsorte auch ein anderer Radiationspunkt einträte, vielmehr müssen eben die scheinbaren Bahnen der verschiedensten Stationen diesen Punkt der Sphäre mit einander gemein haben, vorausgesetzt, dass die Beobachtungen nicht durch ein grösseres Zeitintervall von einander getrennt sind. Die Bahn an der Station I. schneidet sich also mit der an der Station II. beobachteten im Radiationspunkte. Ferner: der Zielpunkt der Sehne zwischen beiden Stationen, dessen Rectascension und Declination wir oben mit A und D beziehungsweise bezeichneten, beschreibt während der Dauer des Meteors am Himmel den Bogen eines Parallelkreises. Wegen der immer sehr kurzen Dauer der Erscheinung der Sternschnuppe kann aber dieser Bogen vernachlässigt werden, also A sowohl wie D während jener Dauer als constant behandelt werden. Wir wissen nun aber, dass der grösste Kreis, welcher einen Ort der Bahn aus Station I. mit dem entsprechenden der Bahn auf Station II., wie er hier bei strenger Gleichzeitigkeit hätte beobachtet werden müssen, verbindet, ebenfalls durch den Zielpunkt der Sehne geht. Von den sechs Oertern auf der Sphäre: die Zenithe beider Stationen, zwei correspondirende Oerter am Anfange der scheinbaren Bahn und zwei am Ende derselben, lässt sich demnach Folgendes behaupten:

Verbindet man die Zenithe beider Stationen durch einen grössten Kreis und ebenso die correspondirenden Oerter paarweise durch grösste Kreise, so gehen diese drei grössten Kreise durch den Ort, dessen Rectascension mit A , dessen Declination mit D bezeichnet wird.

Desgleichen, gehen drei grösste Kreise durch den Radiationspunkt der Divergenz oder der Convergenz, nämlich die scheinbare, an beiden Stationen beobachtete, durch Anfangspunkt und Endpunkt gegebene Bahn und die daraus herzuleitende, wie sie aus dem Erdmittelpunkte gesehen worden wäre.

Nach dem eben Gesagten ist es nun offenbar für den Zweck der Berechnung eines correspondirenden Sternschnuppenfalles nicht mehr erforderlich, dass das Aufleuchten oder Erlöschen ein an beiden Stationen gleichzeitig wahrzunehmendes Moment sei. Denn man kann immer zu einem beliebigen Orte der scheinbaren Bahn in Station I. den entsprechenden Ort für Station II. dadurch finden, dass man durch den Zielpunkt der Sehne und jenen Ort einen grössten Kreis legt; der Durchschnittspunkt desselben mit der scheinbaren Bahn der Station II. ist der gesuchte correspondirende Ort.

Eines angenäherten Vermerkes der Zeit einer beobachteten Sternschnuppe bedarf es übrigens stets, um über die Correspondenz zu entscheiden, einmal schon deshalb, weil es ja durchaus nicht unmöglich ist, dass zwei verschiedene Körper zu zwei verschiedenen Zeiten in einer und derselben Bahn oder vielleicht doch wenigstens in einer und derselben Ebene laufen; dann aber auch, weil der Zielpunkt der Sehne, d. h. die Rectascension A und die Declination D seines Ortes sonst nicht bestimmt werden können. Beiläufig sei noch einmal darauf aufmerksam gemacht, dass man diese beiden Grössen, so lange die beiden Stationen dieselben bleiben, nur einmal für irgend eine Zeit, z. B. für die Sternzeit 0^h der Station I. nach trigonometrischen Formeln zu berechnen braucht. Denn, da die Sehne zwischen beiden Stationen eine Kegelfläche beschreibt, der am Himmel ein Parallelkreis entspricht, so ist D constant und A wächst wie die Sternzeit.

Wir können nun das Wesentlichste der ganzen Rechnung in einige wenige leicht zu behaltende Formeln zusammendrängen, wenn wir uns die Einführung von ein paar Symbolen gestatten. So bezeichnen wir mit (αA) den durch die Gleichung:

$$\cos(\alpha A) = \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos(\alpha - A)$$

zu bestimmenden Bogen eines grössten Kreises, welcher zwischen dem Zielpunkte der Sehne K und dem Orte von der Rectascension α und der Declination δ liegt, an welchem die Sternschnuppe auf Station I. gesehen wurde. Die Rectascension und die Declination des correspondirenden Ortes auf Station II. seien beziehungsweise α_1 und δ_1 , so stellt nach obiger Bezeichnung, und wenn man noch bestimmt, dass die Bogen unter 180° bleiben sollen, (αA) den inneren Winkel des ebenen Dreiecks Station I. — Station II. — Sternschnuppe vor, an dem Punkte Station I. gelegen; $(\alpha' A) - (\alpha A)$ ist offenbar der Winkel an der Sternschnuppe, und wir haben daher sehr einfach:

$$\varrho = \frac{\sin(\alpha' A)}{\sin\{(\alpha' A) - (\alpha A)\}} \cdot K$$

$$\varrho' = \frac{\sin(\alpha A)}{\sin\{(\alpha' A) - (\alpha A)\}} \cdot K.$$

Beträgt der Beobachtungsfehler, welchen man bei dem einzelnen Orte zu befürchten hat, ε Grade, so kann der daraus für (αA) und für $(\alpha' A)$ entspringende Fehler gleichfalls bis zu ε Graden steigen, jedoch nur in dem allerungünstigsten Falle, dass der Beobachtungsfehler gerade in der Richtung des grössten Kreises begangen worden ist, in welchen jene Bogen fallen.

Der im natürlichen Logarithmus von ϱ schlimmsten Falles zu befürchtende Fehler, entsprechend der Annahme, dass die Fehler der beiden Bogen (αA) und $(\alpha' A)$, im entgegengesetzten Sinne begangen, sich verstärken, wird gleich:

$$\pm \frac{2\varepsilon}{57,3} \left[\cotg\{(\alpha' A) - (\alpha A)\} - \frac{1}{2} \cotg(\alpha' A) \right],$$

folglich der Fehler des Werthes von ϱ selbst gefunden aus der Gleichung:

$$57,3 \cdot \Delta \varrho = \pm 2 \varrho \varepsilon \left[\cotg\{(\alpha' A) - (\alpha A)\} - \frac{1}{2} \cotg(\alpha' A) \right].$$

Durch dieselben Betrachtungen findet man für $\Delta \varrho'$, d. h. den Fehler von ϱ' :

$$57,3 \Delta \varrho' = \pm 2 \varrho' \varepsilon \left[\cotg\{(\alpha' A) - (\alpha A)\} - \frac{1}{2} \cotg(\alpha A) \right].$$

Ist nun, wie früher angegeben, die geocentrische Rectascension a , die zugehörige Declination d der Sternschnuppe und ihr Abstand vom Erdcentrum r berechnet, so wird, wie leicht einzusehen, der zu befürchtende Fehler in r oder in der Höhe der Sternschnuppe aus der Gleichung:

$$\Delta r = \cos(\alpha a) \Delta \varrho = \cos(\alpha' a) \Delta \varrho'$$

zu bestimmen sein. Die Längeneinheit ist der Aequatorialhalbmesser der Erde.

α' und δ' sind Rectascension und Declination des Durchschnittspunktes zweier grössten Kreise. Wie die Coordinaten eines solchen bestimmt werden, haben wir bei einer früheren Gelegenheit gesehen.

Hundertundneunundzwanzigste Vorlesung.

Bestimmung des von dem Meteor oder Meteorstrom um die Sonne beschriebenen Kegelschnittes.

Es liegt uns jetzt ob, das zweite Hauptproblem der Sternschnuppentheorie zu behandeln, die Bestimmung der Bahn, welche dieselben um die Sonne beschreiben. Dazu bieten sich nun leicht die folgenden Gesichtspunkte. Sind $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ die drei Componenten der Geschwindigkeit relativ zur Erde, mit welcher sich die Sternschnuppe in der Richtung nach dem Radiationspunkte der Convergence zu bewegen scheint, $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, $\frac{dZ}{dt}$ die Componenten der Geschwindigkeit des Erdcentrums, so werden die Componenten der Geschwindigkeit des Meteors, relativ zur Sonne, ausgedrückt durch:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dX}{dt} \qquad \frac{dy}{dt} + \frac{dY}{dt} \qquad \frac{dz}{dt} + \frac{dZ}{dt}.$$

Geometrisch wird also die totale Geschwindigkeit der Sternschnuppe in ihrer Bahn vorgestellt durch die Diagonale eines Parallelogramms, welches die relative Geschwindigkeit zur Erde und die Geschwindigkeit der letzteren selbst zu Seiten hat.

Da nun das Parallelogramm eine ebene Figur ist, so folgt, dass derjenige Punkt des Himmels, auf welchen die Tangente an die Sternschnuppenbahn zielt, in einen grössten Kreis fällt, welcher den Zielpunkt der Tangente der Erdbahn mit dem Converganzpunkte des Meteorstroms verbindet.

Kennt man von den genannten Stücken ausser dem Radiationspunkte entweder die beiden Seiten oder eine Seite und die Diagonale, so kann man offenbar sämtliche Winkel des Parallelogramms, also auch den Zielpunkt der Diagonale oder Tangente auf dem Bogen jenes grössten Kreises vollkommen bestimmen. Wir werden gleich und noch besser weiter unten die Fruchtbarkeit dieser Betrachtung kennen lernen.

Nach dem eben Gesagten sind uns, wenn die Geschwindigkeit irgend woher bekannt ist, sogleich auch zwei Richtungen bekannt, welche in die Bahnebene der Sternschnuppe fallen müssen; die eine ist die Richtung der Tangente an die Bahn, die andere die Richtung nach der Sonne, weil für die Beobachtung die Radienvectoren der Erde und der Sternschnuppe als zusammenfallend betrachtet werden dürfen. Die Länge der Erde zur Zeit der Beobachtung ist also \varnothing oder \wp der Sternschnuppenbahn, je nachdem der Zielpunkt der Diagonale des Parallelogramms eine nördliche oder eine südliche Breite hat. Der durch letzteren Ort und die Sonne gelegte grösste Kreis repräsentirt die Bahnebene.

Hiernach ergeben sich nun ohne Mühe die folgenden Formeln, in denen Längen und Breiten zu Grunde gelegt sind, da diese Coordinaten hier wirkliche Vorzüge vor den Rectascensionen und Declinationen besitzen.

Es seien λ und β beziehungsweise die Länge und die Breite des Converganzpunktes, L die Länge des Zielpunktes der Tangente an die Erdbahn, V die Geschwindigkeit des Meteors in seiner Bahn um die Sonne, \odot die Länge der Sonne, δ der Bogen des grössten Kreises, welcher den Converganzpunkt mit dem Zielpunkte der Erdbewegung

Hundertunddreissigste Vorlesung.

Fortsetzung der Untersuchungen aus Vorlesung Hundertundneunundzwanzig. Rechnungsbeispiel.

Die Voraussetzung, die wir vorläufig gemacht, dass V aus den Sternschnuppenbeobachtungen, d. h. aus einer directen Bestimmung der Geschwindigkeit mittelst Vergleichung des zurückgelegten Weges und der Dauer der Sichtbarkeit bekannt sei, trifft nur äusserst selten zu, ja wohl niemals ausser jenen Gelegenheiten, wo der Nachweis zu liefern ist, dass:

$$V = k \sqrt{\frac{2}{r}}$$

und somit die Bahn des Meteors eine Hyperbel gewesen sein müsse.

Wo es aber nicht bloss darauf ankommt, zu erkennen, dass die genannte Grenze überschritten sei, sucht man die Umlaufszeit aus den Jahren besonderer Häufigkeit der Sternschnuppen des bestimmten Radiationspunktes zu ermitteln. So hat z. B. der amerikanische Astronom Newton festgestellt, dass das Novemberphänomen nach 33 bis 34 Jahren einen besonderen Glanz entfaltet, dass also die Umlaufszeit der dichter Stelle des Meteorringes zwischen 33 und 34 Jahren, genauer noch, dass sie 33,25 Jahre betrage. Dieser entspricht der Werth der halben grossen Axe:

$$a = (33,25)^{\frac{2}{3}} = 10,340,$$

und der Werth von V , da nämlich $r = 0,98894$, $\frac{2}{r} - \frac{1}{a} = 1,9257$:

$$V = 0,02387.$$

Was ein anderes Beispiel, den Augustfall, betrifft, so ist derselbe nach den Zusammenstellungen von Ed. Biot und Quetelet besonders stark in folgenden Jahren bemerkt worden: 830, 833, 835, 841, 925, 926, 933, 1029, 1263, 1451, 1779, 1784, 1789. Sucht man diese Zahlen unter die Form:

$$\xi + n\eta$$

zu bringen, wobei n die Anzahl der vom Anfange der Reihe an vollendeten Umläufe, η die Dauer eines solchen, ξ die Anfangsepoche darstellt, so findet man $\xi = 827,6$, $\eta = 105,7$. Verstärkte Augustfälle würden hiernach um folgende Jahre herum gewesen sein: 828, 933, 1039, 1145, 1250, 1356, 1462, 1567, 1673, 1779; das nächst bevorstehende Maximum würde gegen das Jahr 1885 fallen.

Hiernach würde sich a für den Augustschwarm gleich 22,355, die Geschwindigkeit V in demselben zu 0,02389 ergeben.

Unter der Voraussetzung, dass der Sternschnuppenschwarm eine sehr gestreckte Bahn durchläuft, wird, wenn man auf die eben angegebene Art keine Annäherung von a erhalten kann, auch die Annahme:

$$a = \infty$$

einen für die Rechnung brauchbaren Werth von V liefern. Man ist also immer im Stande, aus dem Radiationspunkte die Grösse $\delta - w$, welche man ganz passend die Aberration des Radiationspunktes nennen könnte, da sie durch die Erdbewegung veranlasst wird, mittelst der Formel (4) voriger Vorlesung:

$$\sin(\delta - w) = \sin \delta \frac{T}{V} = \sqrt{\frac{1 - \frac{r}{2}}{1 - \frac{r}{2a}}} \sin \delta$$

zu berechnen; wir haben gesehen, dass sich daraus dann alle Elemente der Meteoritenbahn vollständig bestimmen. Man begreift also leicht die Wichtigkeit und das Interesse des Constatirens der vielen Radiationspunkte, welche aufmerksame Beobachter, wie Heis, Jul. Schmidt und Andere, am Himmel bemerkt.

Rechnungsbeispiel. Ein Maximum des Novemberphänomens fiel auf 1866, November, 13,59 Mittl. Berliner Zeit. Die Länge und die Breite des Convergenzpunktes waren beziehungsweise:

$$\begin{aligned}\lambda &= 323^{\circ} 12' \\ \beta &= - 10^{\circ} 16'\end{aligned}$$

Ausserdem ergiebt das Jahrbuch:

$$\begin{aligned}\odot &= 231^{\circ} 28' \\ r &= 0,9889,\end{aligned}$$

folglich nach Formel (13), da r abnimmt:

$$\begin{aligned}\odot - L &= 89^{\circ} 8' \\ L &= 142^{\circ} 20'.$$

Da $\lambda - L = 180^{\circ} 52'$, erhält man nach (1) und (2):

$$\begin{aligned}\varphi &= 85^{\circ} 12',9 \\ \delta &= 190^{\circ} 18',2.\end{aligned}$$

Die Formel (3) zeigt, dass δ im dritten Quadranten liegt, da sowohl $\sin \delta$ als $\cos \delta$ negativ ausfallen.

Gleichung (4) oder ihre oben angeführte Transformation ergiebt:

$$\begin{aligned}\delta - w &= - 7^{\circ} 29',3 \\ w &= 197^{\circ} 47',5,\end{aligned}$$

sodann erhält man nach (5) und (6):

$$\begin{aligned}b &= - 17^{\circ} 43',6 \\ l - L &= 181^{\circ} 32',0.\end{aligned}$$

In diesem Quadranten, nicht im vierten, muss $l - L$ gewählt werden, damit nicht $\operatorname{tg} i$ nach (7) unzulässigerweise negativen Werth annimmt. Es wird danach:

$$\begin{aligned}l &= 321^{\circ} 38' \\ \odot - l &= 269^{\circ} 50' \\ i &= 17^{\circ} 44'.$$

Da hier $\sin(\odot - l)$ negativ wird, ist die Bewegung retrograd. Da b negativ, so ist:

$$\odot = \odot = 231^{\circ} 28'.$$

Die Formel (8) ergiebt:

$$\sigma = 90^{\circ} 9',6,$$

wonach dann weiter nach Relation (9):

$$k\sqrt{p} = Vr \sin \sigma,$$

weil V nach (10) = 0,02387:

$$\log p = 0,27488,$$

und da bekanntlich $p = a \cos \varphi^2$:

$$\begin{aligned}\varphi &= 64^{\circ} 44',3 \\ c = \sin \varphi &= 0,9044.\end{aligned}$$

Formel (11) liefert den Werth der wahren Anomalie v mit Rücksicht darauf, dass σ ein stumpfer Winkel:

$$v = 8^{\circ} 37';$$

nach (12) wird:

$$\pi - \varnothing = v = 188^{\circ} 37',$$

also die Länge des Perihels $= 60^{\circ} 5'$.

Die Periheldistanz q oder die Grösse $a(1 - e)$ findet man:

$$q = 0,9885.$$

Aus obiger wahrer Anomalie von $8^{\circ} 37'$ folgt noch, dass der Durchgang durch das Perihel auf:

1866 Nov. 7,27 Mittl. Berl. Zeit fiel.

Hundertundeinunddreissigste Vorlesung.

Vergleichung der durch Berechnung des Radiationspunktes gefundenen Bahn mit Kometenbahnen.

Vergleichen wir die aus dem Convergenzpunkte des Novemberphänomens eben abgeleitete Bahn mit bekannten Kometenbahnen, so finden wir, dass die Elemente des Kometen I. 1866 damit die auffallendste Uebereinstimmung zeigen, das Element der Epoche des Perihels, welches hier, wie wir leicht erkennen werden, keine bedeutende Rolle spielt, allein ausgenommen. Zur besseren Uebersicht setzen wir die beiden Elementensysteme neben einander.

Novemberphänomen	Komet I. 1866
(Perihelzeit) . . . Nov. 7,27	1866 Januar 11,197
$\pi - \varnothing$ $188^{\circ} 37'$. $189^{\circ} 1',9$
\varnothing $231^{\circ} 28'$	$231^{\circ} 26',1$
i $17^{\circ} 44'$	$17^{\circ} 18',1$
q 0,9885	0,9765
e 0,9044	0,9056
a 10,340	10,324
Retrograd	Retrograd.

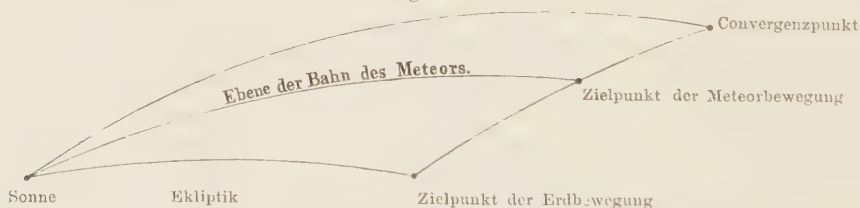
Bei Vergleichen dieser Art, zu denen die nicht geringe Zahl von Meteorströmen jetzt häufiger Gelegenheit bietet, darf man übrigens nicht vergessen, dass die in demselben sich bewegenden Körper in einem Ringe einander folgen, und dass auch der dichtere Theil dieses Ringes sich über einen beträchtlichen Bogen erstreckt. Selbst bei dem Novemberfalle, bei welchem der Umstand der Verdichtung des Ringes in einem kleinen Theile desselben am deutlichsten hervortritt, hat man dennoch eine besonders glänzende Erscheinung in zwei bis drei auf einander folgenden Jahren, woraus zu zu schliessen, dass der Bogen besonderer Verdichtung etwa in zwei Jahren durchlaufen wird. Hierauf ist dann ohne Weiteres klar, dass auf die Uebereinstimmung der Perihelzeiten der Meteore und eines damit in Beziehung zu setzenden Kometen nichts ankommt. Aber auch der Querschnitt des Stromes an der Stelle, wo ihn die Erde passirt, ist viel zu bedeutend, als dass man annehmen dürfte, die Erde treffe bei ihrem Durchgange die dichteste Stelle, mit anderen Worten, es lasse sich die Voraussetzung der Gleichheit der

Radienvectoren von Erde und Meteorring an dieser Stelle für die ganze Breite des Stromes verantworten. Der Meteorstrom des Augustfalles z. B. hat nach Erman's Schätzung einen Querdurchmesser von über 800000 geographischen Meilen. Man darf daher nicht nur nicht erwarten, dass dieser Meteorstrom in seinem Schnitte mit der Erdbahn auch für seine dichteste Stelle, welche nach Schiaparelli's Theorie den Kometen III. 1862 ausmacht, in Strenge den Radius vector der Erde habe, wie es die vorhergehenden Rechnungen voraussetzen müssen, sondern kann im Voraus des Gegentheils gewiss sein. Denn ein centraler Durchgang der Erde durch den Strom oder gar durch den Kometen selbst hat in hohem Grade die Wahrscheinlichkeit gegen sich. Nach dem Gesagten hat es denn auch nichts Auffallendes, wenn die Periode des verstärkten Falles, bei dem Augustfalle eine Periode von 105,7 Jahren beispielsweise, nicht innerhalb der nach den Beobachtungsfehlern zu setzenden Grenzen mit der Umlaufszeit des Kometen übereinstimmt. Der genannte, dem Augustschwarme entsprechende Komet hat nach Oppolzer's sorgfältiger Rechnung eine Umlaufszeit von 121,502 Jahren. Der Unterschied der beiden Perioden lässt sich, wie bemerkt, nicht aus Fehlern der Beobachtung, sehr gut aber aus der Breite des Stromes, nach welcher die bekannte Voraussetzung über r für den Kometen selbst schon merklich unrichtig wird, erklären. Am meisten wird durch solchen Umstand ausser der Perihelzeit der numerische Werth des Unterschiedes beider Umlaufszeiten beeinflusst.

Es erscheint übrigens nicht angebracht, so lange man nicht weiss, ob eine identische Kometenbahn aufzufinden, die Berechnung der Meteoritenbahn in der obigen Art anzulegen, vielmehr scheint eine Recognoscierungsmethode mit abkürzenden starken Näherungen ganz am Platze. Solche wollen wir daher noch ableiten, um so mehr, als sich hier noch Gelegenheit zu wichtigen Bemerkungen bietet.

In der Regel wird man die Geschwindigkeit der Sternschnuppe der parabolischen Bewegung gemäss, also $V = k\sqrt{\frac{2}{r}}$ annehmen. Ausserdem erlauben wir uns, bei der bekanntlich sehr geringen Excentricität der Erdbahn $r = 1$ und $L = \odot - 90^\circ$ zu setzen. Hiernach kann man den Recognoscierungsformeln eine äusserst einfache Gestalt geben. Unsere dahin führenden Betrachtungen illustriren wir durch Fig. 67.

Fig. 67.



Wir behandeln nun nicht, wie oben, die aus dem Kräfteparallelogramm abzuleitenden Formeln rein analytisch, sondern berücksichtigen die geometrischen Eigenschaften des Parallelogramms, dass keiner der Winkel desselben zwei rechte übersteigen darf, und ferner die Lage der Diagonale. Es soll hiernach δ , d. h. der Winkel zwischen dem Zielpunkte der Erdbewegung und dem Convergenzpunkte, 180° nicht überschreiten und der Zielpunkt der Meteorbewegung soll in diesen Bogen hineinfallen. Es folgt dann sogleich für l die Länge des Zielpunktes der Meteorbewegung, dass:

$$\begin{aligned} l &< \lambda, & \text{wenn } \lambda - L < 180^\circ \\ l &> L, \\ l &> \lambda, & \text{wenn } \lambda - L > 180^\circ \\ l &< L, \end{aligned}$$

Dieses festgesetzt, wird auch der Winkel δ nach der Formel:

$$\begin{aligned}\cos \delta &= \cos \beta \cos (\lambda - L) \\ &= \cos \beta \cos (\lambda - \odot + 90^\circ) \\ &= -\cos \beta \sin (\lambda - \odot)\end{aligned}$$

vollkommen bestimmt. Ferner hat man immer sehr angenähert:

$$\frac{\sin (\delta - w)}{\sin \delta} = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad (\text{genauer} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}r})$$

und dann weiter:

$$\begin{aligned}\frac{tg w}{tg \delta} &= \frac{cotg (l - \odot)}{cotg (\lambda - \odot)} \\ \frac{\sin w}{\sin \delta} &= \frac{\sin b}{\sin \beta} \\ \frac{tg b}{tg \beta} &= \frac{\sin (l - L)}{\sin (\lambda - L)} = \frac{\cos (l - \odot)}{\cos (\lambda - \odot)} \\ \pm tg i &= \frac{tg b}{\sin (\odot - l)} = -\frac{tg \beta cotg (l - \odot)}{\cos (\lambda - \odot)} \\ &= \frac{tg w}{tg \delta} \cdot \frac{tg \beta}{\sin (\odot - \lambda)}.\end{aligned}$$

Setzen wir hier für $\sin (\odot - \lambda)$ seinen Werth aus der Gleichung:

$$\cos \delta = \cos \beta \sin (\odot - \lambda)$$

ein, so erhalten wir:

$$\pm tg i = \frac{\sin \beta}{\sin \delta} \cdot tg w.$$

Das doppelte Vorzeichen kommt wegen der Unterscheidung, ob $\oslash = \odot$ oder ob $= 180^\circ + \odot$, und ist so zu wählen, dass $tg i$ positiv wird.

Da nach den obigen Betrachtungen $\sin \delta$ sowohl wie $\sin w$ stets positiv sind, so ist auch $\frac{\sin b}{\sin \beta}$ positiv, d. h. es sind stets b und β entweder beide nördlich oder beide südlich. Dieser Umstand überhebt uns der Mühe, b selbst zu berechnen, und es ist einfach:

$$\odot = \begin{cases} \oslash, & \text{wenn } \beta \text{ positiv,} \\ \oslash, & \text{wenn } \beta \text{ negativ.} \end{cases}$$

Die Identität der Meteorbahn mit einer Kometenbahn muss für sehr wahrscheinlich, beinahe für gewiss gelten, wenn nicht bloss \oslash und i einer Kometenbahn mit den entsprechenden Werthen der Meteorbahn übereinstimmen, sondern auch ausserdem der Radius vector für den beobachteten Durchgang durch den Knoten nahe gleich r oder gleich der Einheit wird. Die entsprechende Bedingungsgleichung lautet:

$$\begin{aligned}1 = r &= \frac{q}{\cos \frac{1}{2} v^2} \\ &= \frac{q}{\cos \frac{1}{2} (\pi - \oslash)^2}, \quad \text{wenn } \beta \text{ positiv,}\end{aligned}$$

und

$$= \frac{q}{\cos \frac{1}{2} (\pi - \oslash)^2}, \quad \text{wenn } \beta \text{ negativ.}$$

Man kann schliesslich auch noch den Sinn der Bewegung, ob direct, ob retrograd, ermitteln, ohne l berechnen zu müssen. Es ist aus den obigen Betrachtungen leicht zu erkennen, dass die Bewegung direct ist, wenn $w < 90^\circ$, retrograd, wenn $w > 90^\circ$.

Hundertundzweiunddreissigste Vorlesung.

Zusammenstellung von Formeln für die Recognoscirung von Identitäten zwischen Meteorströmen und Kometenbahnen. Rechnungsbeispiel.

Es seien:

$$\begin{array}{l} \lambda \text{ die Länge} \\ \beta \text{ die Breite} \\ \odot \text{ die Länge} \\ r \text{ der Radius vector} \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{des Convergenzpunktes,} \\ \\ \text{der Sonne,} \end{array}$$

so berechne man:

$$\cos \delta = \cos \beta \sin (\odot - \lambda), \text{ wobei } \delta < 180^\circ$$

$$\frac{\sin (\delta - w)}{\sin \delta} = \sqrt{1 - \frac{1}{2} r} \text{ (oder auch } = \sqrt{\frac{1}{2}}), \text{ wobei } w \begin{array}{l} < \delta \\ > 0^\circ, \end{array}$$

es wird dann sein:

$$\begin{array}{l} \odot = \varnothing\varnothing \text{ (bei positivem } \beta) \\ \odot = \oslash\oslash \text{ (bei negativem } \beta) \end{array}$$

$$\pm \operatorname{tg} i = \frac{\sin \beta}{\sin \delta} \cdot \operatorname{tg} w \text{ (} \operatorname{tg} i \text{ immer positiv).}$$

Bewegung direct, wenn w ein spitzer Winkel, retrograd, wenn w stumpf.

Eine Kometenbahn, die nahezu ebenfalls diese Werthe von $\oslash\oslash$ und i hat, bei gleichem Sinne der Bewegung, ist mit höchster Wahrscheinlichkeit mit der des Meteorstromes für identisch zu halten, wenn nahe:

$$\frac{q}{\sin \frac{1}{2} \{(\pi - \oslash\oslash) + (\oslash\oslash - \odot)\}^2} = r (= 1).$$

Beispiel. Der gut constatirte Sternschnuppenfall des 20. April hat nach Alexander Herschel seinen Divergenzpunkt in $281^\circ,6$ der Länge und $+ 57^\circ,0$ der Breite. Man wünscht zu wissen, ob derselbe auf die Bahn eines bekannten Kometen führt. Es wird in diesem Falle:

$$\begin{array}{llll} \lambda = 101^\circ 36' & \beta = - 57^\circ 0' & \odot = 30^\circ 0' & r = 1,0054 \\ \delta = 121^\circ 7' & \delta - w = 37^\circ 8' & w = 83^\circ 59' & \end{array}$$

hiernach dann also:

$$\begin{array}{l} \oslash\oslash = 30^\circ 0' \\ i = 83^\circ 52' \end{array}$$

Direct.

Sehen wir ein Kometenverzeichniss durch, so finden wir bei dem Kometen I. 1861 berechnet:

$$\begin{array}{l} \oslash\oslash = 29^\circ 46' \\ i = 79^\circ 46' \end{array}$$

Direct

und da bei diesem Kometen:

$$\frac{q}{\sin \frac{1}{2} \{(\pi - \oslash\oslash) + (\oslash\oslash - \odot)\}^2} = 1,0026,$$

so ist die Wahrscheinlichkeit der Beziehung zwischen dem Sternschnuppenfall des 20. April und dem ersten Kometen von 1866 sehr gross ¹⁾).

Anderes Beispiel. Nach Heis tritt beinahe gleichzeitig mit dem bekannten Radiationspunkte der Leoniden unter anderen auch der folgende zu spielen an, dessen Länge zu $56^{\circ} 2'$ und dessen Breite zu $+ 24^{\circ} 36'$ nach Heis'scher Bestimmung sein würde. Führt derselbe auf eine Kometenbahn?

Wir haben, wenn wir den 12. November hier als Zeit des Maximums annehmen:

$$\begin{array}{llll} \lambda = 236^{\circ} 2' & \beta = - 24^{\circ} 36' & \odot = 230^{\circ} 0' & r = 0,9892 \\ \delta = 94^{\circ} 29' & w = 50^{\circ} 26' & \oslash = 230^{\circ} 0' & i = 26^{\circ} 51', \end{array}$$

also für diese Meteore:

$$\begin{array}{l} \oslash = 230^{\circ} 0' \\ i = 26^{\circ} 51' \\ \text{Direct.} \end{array}$$

Bei dem Kometen des Jahres 1695 ist, auf das Aequinoctium von 1860 reducirt:

$$\begin{array}{l} \oslash = 218^{\circ} 24' \\ i = 22^{\circ} 0'. \end{array}$$

Die Bewegung ist ebenfalls direct und:

$$\frac{q}{\sin^{1/2} \{(\pi - \oslash) + (\oslash - \odot)\}} = 0,8531.$$

Die Elemente des Kometen 1695 sind nicht sehr sicher bekannt, lassen sich aber nicht mit denen des Meteorstromes in befriedigende Uebereinstimmung bringen, wie eine genauere Untersuchung zeigt. Von denen des Kometen I. 1866, welcher, wie wir wissen, dem Novemberstrom der Leoniden entspricht, unterscheiden sich die obigen Elemente des Novemberstromes aus dem Perseus ganz und gar dadurch, dass bei letzterem die Bewegung direct ist.

¹⁾ Noch grösser, als nach Professor Dr. Galle's Rechnung in Nr. 1635 der „Astronom. Nachrichten“, wo für die Meteore $i = 89^{\circ}$ gefunden wird.

A N H A N G.

H Ü L F S - T A F E L N.

Von den nachfolgenden **HÜLFSTAFELN** sind nach erfolgter Verständigung entnommen worden:

Tafel I, IV, V, VI, VII, VIII, X

aus „Watson's Theoretical Astronomy“ published by J. B. Lippincott Company, Philadelphia u. London 1868.

Tafel II, IIa, III, IIIa

aus „Albrecht, Formeln und Hülftafeln für geographische Ortsbestimmungen“. 2. Auflage. Leipzig 1879, W. Engelmann.

Tafel XII, XIII

aus „Gauss, Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium“ Hamburg 1809, wieder abgedruckt u. herausgeb. von E. J. Schering. Gotha 1871, Friedr. Andr. Perthes.

Tafel XIV, XV aus „Oppolzer's Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten“. II. Bd. Leipzig, Verlag von W. Engelmann.

Tafel XVII

aus „Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1858“. Berlin 1855, Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung.

Tafel XVIII

aus „Bremiker's Logarithmisch-Trigonometrische Tafeln mit fünf Decimalstellen“. Berlin 1872, Weidmann'sche Buchhandlung.

Tafel XIX ist aus der ersten Auflage übernommen worden; Tafel IX, IXa und XX wurde bereits für die zweite Auflage neu entworfen; Tafel XI und XVI wurde für die 3. Ausgabe neu entworfen.

Zu Tafel: VI, VII, VIII, IX und IXa, X, XI, XII und XIII, XIV und XV, XVI, XVII, XVIII, vergleiche man bezüglich Seite: 42, 43, 44, 52, 278, 281, 405, 453, 471 und 473, 570, 737. Die vor der allgemeinen Constantentafel XX gegebene Tafel XIX der Gauss'schen Constanten für die nicht identischen Cometenbahnen gehört zu Seite 317.

Tafel I.

Geocentrische Breite und Logarithmus des Erd-Radius.

Argument φ = Geographische Breite.

Abplattung = $\frac{1}{299.15}$

φ	$\varphi - \varphi'$	Diff.	$\log \varrho$	Diff.	φ	$\varphi - \varphi'$	Diff.	$\log \varrho$	Diff.
0 0	0 0.00	"	0.0000 0000		35 0	10 48.25	1.38	9.999 5248	
1 0	0 24.02	24.02	0.0000 0006	4	10	49.63	1.35	5208	40
2 0	0 48.02	24.00	0.0000 0082	14	20	50.98	1.33	5160	50
3 0	1 11.95	23.93	0.0001 0061	21	30	52.31	1.31	5120	40
4 0	1 35.80	23.85	0.0002 0030	31	40	53.62	1.28	5080	40
5 0	1 59.54	23.74	0.0003 0891	39	50	54.90	1.26	5040	40
6 0	2 23.12	23.58	0.0004 9843	48	36 0	10 56.16	1.25	9.999 5009	40
7 0	2 46.54	23.42	0.0006 9786	57	10	57.41	1.22	4960	40
8 0	3 9.76	23.22	0.0008 9721	65	20	58.63	1.19	4920	40
9 0	3 32.74	22.98	0.0010 9648	73	30	59.82	1.18	4888	41
10 0	3 55.47	22.73	0.0012 9566	82	40	1.00	1.15	4848	41
11 0	4 17.92	22.45	0.0014 9470	90	50	2.15	1.13	4807	41
12 0	4 40.06	22.14	0.0016 9377	99	37 0	11 3.28	1.11	9.999 4767	41
13 0	5 1.85	21.79	0.0018 9271	106	10	4.39	1.08	4726	41
14 0	5 23.28	21.43	0.0020 9157	114	20	5.47	1.07	4686	41
15 0	5 44.33	21.05	0.0022 9035	122	30	6.54	1.04	4645	41
16 0	6 4.95	20.62	0.0024 8905	130	40	7.58	1.01	4604	41
17 0	6 25.14	20.19	0.0026 8768	137	50	8.59	1.00	4563	41
18 0	6 44.86	19.72	0.0028 8624	144	38 0	11 9.59	0.97	9.999 4522	41
19 0	7 4.09	19.21	0.0030 8472	152	10	10.56	0.95	4481	41
20 0	7 22.80	18.71	0.0032 8314	158	20	11.51	0.93	4440	41
21 0	7 40.99	18.19	0.0034 8149	165	30	12.44	0.90	4399	41
22 0	7 58.61	17.62	0.0036 7977	172	40	13.34	0.88	4358	41
23 0	8 15.66	17.05	0.0038 7799	178	50	14.22	0.86	4317	41
24 0	8 32.10	16.44	0.0040 7614	185	39 0	11 15.08	0.84	9.999 4276	42
25 0	8 47.93	15.83	0.0042 7424	190	10	15.92	0.81	4234	42
26 0	9 3.12	15.19	0.0044 7228	196	20	16.73	0.79	4193	42
27 0	9 17.65	14.53	0.0046 7027	201	30	17.52	0.77	4152	42
28 0	9 31.50	13.85	0.0048 6820	207	40	18.29	0.75	4110	42
29 0	9 44.66	13.16	0.0050 6608	212	50	19.04	0.72	4069	42
30 0	9 57.12	12.46	0.0052 6392	216	40 0	11 19.76	0.70	9.999 4027	42
10	9 59.12	2.00	0.0054 6355	37	10	20.46	0.67	3985	42
20	10 1.11	1.99	0.0056 6319	36	20	21.13	0.66	3944	42
30	3.07	1.97	0.0058 6282	37	30	21.79	0.63	3902	42
40	5.02	1.95	0.0060 6245	37	40	22.42	0.60	3860	42
50	6.94	1.92	0.0062 6208	37	50	23.02	0.59	3819	42
31 0	10 8.85	1.91	0.0064 6171	37	41 0	11 23.61	0.56	9.999 3777	42
10	10.73	1.88	0.0066 6134	37	10	24.17	0.55	3735	42
20	12.59	1.86	0.0068 6096	38	20	24.70	0.52	3693	42
30	14.44	1.85	0.0070 6059	38	30	25.22	0.50	3651	42
40	16.26	1.82	0.0072 6021	38	40	25.71	0.47	3609	42
50	18.06	1.80	0.0074 5984	38	50	26.18	0.44	3567	42
32 0	10 19.84	1.78	0.0076 5946	38	42 0	11 26.62	0.42	9.999 3525	42
10	21.60	1.76	0.0078 5908	38	10	27.04	0.40	3483	42
20	23.34	1.74	0.0080 5870	38	20	27.44	0.38	3441	42
30	25.05	1.71	0.0082 5832	38	30	27.82	0.35	3399	42
40	26.75	1.70	0.0084 5794	38	40	28.17	0.33	3357	42
50	28.43	1.68	0.0086 5755	39	50	28.50	0.30	3315	42
33 0	10 30.08	1.65	0.0088 5717	39	43 0	11 28.80	0.28	9.999 3273	43
10	31.71	1.63	0.0090 5678	39	10	29.08	0.26	3230	42
20	33.32	1.61	0.0092 5640	39	20	29.34	0.24	3188	42
30	34.91	1.59	0.0094 5601	39	30	29.58	0.21	3146	42
40	36.48	1.57	0.0096 5562	39	40	29.79	0.19	3104	42
50	38.03	1.55	0.0098 5523	39	50	29.98	0.16	3062	43
34 0	10 39.55	1.52	0.0099 5484	39	44 0	11 30.14	0.15	9.999 3019	42
10	41.06	1.51	0.0101 5445	39	10	30.29	0.12	2977	42
20	42.54	1.48	0.0103 5406	39	20	30.41	0.09	2935	42
30	44.00	1.46	0.0105 5367	39	30	30.50	0.07	2892	42
40	45.44	1.44	0.0107 5327	40	40	30.57	0.05	2850	42
50	46.86	1.42	0.0109 5288	40	50	30.62	0.03	2808	42
35 0	10 48.25	1.39	0.0110 5248	40	45 0	11 30.65		9.999 2766	

Tafel I.

Geocentrische Breite und Logarithmus des Erd-Radius.

Argument φ = Geographische Breite.

Abplattung = $\frac{1}{299.16}$.

φ	$\varphi - \varphi'$	Diff.	$\log \varrho$	Diff.	φ	$\varphi - \varphi'$	Diff.	$\log \varrho$	Diff.
° ' "	' " "	"			° ' "	' " "	"		
45 0	11 30.65	0.00	9.999 2766	43	55 0	10 49.74	1.38	9.999 0275	40
10	30.65	0.02	2723	42	10	48.36	1.39	0235	40
20	30.63	0.05	2681	42	20	46.97	1.42	0195	40
30	30.58	0.07	2639	43	30	45.55	1.44	0155	40
40	30.51	0.09	2596	42	40	44.11	1.46	0116	39
50	30.42	0.11	2554	42	50	42.65	1.49	0076	40
46 0	11 30.31	0.14	9.999 2512	42	56 0	41.16	1.51	9.999 0037	39
10	30.17	0.16	2470	43	10	39.65	1.52	9.998 9998	39
20	30.01	0.19	2427	42	20	38.13	1.55	9958	40
30	29.82	0.21	2385	42	30	36.58	1.57	9919	39
40	29.61	0.23	2343	43	40	35.01	1.60	9880	39
50	29.38	0.26	2300	42	50	33.41	1.61	9841	39
47 0	11 29.12	0.27	9.999 2258	42	57 0	31.80	1.64	9.998 9802	38
10	28.85	0.31	2216	42	10	30.16	1.66	9764	39
20	28.54	0.32	2174	42	20	28.50	1.67	9725	39
30	28.22	0.35	2132	43	30	26.83	1.70	9686	39
40	27.87	0.37	2089	42	40	25.13	1.73	9648	38
50	27.50	0.40	2047	42	50	23.40	1.74	9610	39
48 0	11 27.10	0.41	9.999 2005	42	58 0	21.66	1.76	9.998 9571	38
10	26.69	0.45	1963	42	10	19.90	1.79	9533	38
20	26.24	0.46	1921	42	20	18.11	1.80	9495	38
30	25.78	0.49	1879	42	30	16.31	1.83	9457	38
40	25.29	0.51	1837	42	40	14.48	1.85	9419	38
50	24.78	0.54	1795	42	50	12.63	1.86	9382	37
49 0	11 24.24	0.55	9.999 1753	42	59 0	10.77	1.89	9.998 9344	37
10	23.69	0.58	1711	42	10	8.88	1.91	9307	37
20	23.11	0.61	1669	42	20	6.97	1.93	9269	38
30	22.50	0.63	1627	41	30	5.04	1.96	9232	37
40	21.87	0.65	1586	42	40	3.08	1.97	9195	37
50	21.22	0.67	1544	42	50	1.11	1.99	9158	37
50 0	11 20.55	0.70	9.999 1502	42	60 0	9 59.12	12.38	9.998 9121	219
10	19.85	0.72	1460	41	61 0	9 40.74	13.09	8902	214
20	19.13	0.74	1419	42	62 0	9 33.05	13.80	8688	209
30	18.39	0.76	1377	42	63 0	9 19.55	14.49	8479	204
40	17.63	0.79	1335	41	64 0	9 5.30	15.15	8275	198
50	16.84	0.82	1294	42	65 0	8 50.21	15.81	8077	193
51 0	11 16.02	0.83	9.999 1252	41	66 0	8 34.40	16.43	9.998 7884	187
10	15.19	0.86	1211	41	67 0	8 17.07	17.05	7697	180
20	14.33	0.88	1170	42	68 0	8 0.02	17.63	7517	175
30	13.45	0.90	1128	41	69 0	7 43.20	18.21	7342	168
40	12.55	0.93	1087	41	70 0	7 25.08	18.75	7174	161
50	11.62	0.95	1046	41	71 0	7 0.33	19.27	7013	154
52 0	11 10.67	0.97	9.999 1005	42	72 0	6 47.00	19.78	9.998 6859	146
10	9.70	0.99	0963	41	73 0	6 27.28	20.25	6713	140
20	8.71	1.02	0922	41	74 0	6 7.03	20.70	6573	132
30	7.69	1.03	0881	41	75 0	5 40.33	21.13	6441	124
40	6.66	1.06	0840	40	76 0	5 25.20	21.53	6317	116
50	5.60	1.09	0800	41	77 0	5 3.07	21.90	6201	108
53 0	11 4.51	1.11	9.999 0759	41	78 0	4 41.77	22.24	9.998 6093	100
10	3.40	1.13	0718	41	79 0	4 19.53	22.57	5993	92
20	2.27	1.15	0677	40	80 0	3 56.06	22.86	5901	83
30	1.12	1.18	0637	41	81 0	3 34.10	23.12	5818	75
40	59.94	1.20	0596	40	82 0	3 10.08	23.35	5743	67
50	58.74	1.22	0556	41	83 0	2 47.03	23.56	5676	57
54 0	10 57.52	1.24	9.999 0515	40	84 0	2 24.07	23.74	9.998 5619	49
10	56.28	1.26	0475	40	85 0	2 0.33	23.89	5570	40
20	55.02	1.29	0435	40	86 0	1 30.44	24.01	5530	32
30	53.73	1.31	0395	40	87 0	1 12.43	24.00	5498	22
40	52.42	1.33	0355	40	88 0	0 48.34	24.16	5476	13
50	51.09	1.35	0315	40	89 0	0 24.18	24.18	5463	5
55 0	10 49.74		9.999 0275		90 0	0 0.00		9.998 5458	

Tafel II.

Verwandlung der Mittleren Zeit in Sternzeit.

	0m			1m			2m			3m					
0 ^s	0 ^h	0 ^m	0 ^s	6 ^h	5 ^m	15 ^s	12 ^h	10 ^m	20 ^s	18 ^h	15 ^m	44 ^s	0 ^h 00	0 ^m	0 ^s
1	0	6	5	6	11	20	12	16	34	18	21	49	0.00	0	0
2	0	12	10	6	17	25	12	22	40	18	27	54	0.01	0	4
3	0	18	16	6	23	30	12	28	45	18	33	59	0.02	0	7
4	0	24	21	6	29	36	12	34	50	18	40	5	0.03	0	11
5	0	30	26	6	35	41	12	40	55	18	46	10	0.04	0	15
6	0	36	31	6	41	46	12	47	1	18	52	15	0.05	0	18
7	0	42	37	6	47	51	12	53	6	18	58	20	0.06	0	22
8	0	48	42	6	53	56	12	59	11	19	4	26	0.07	0	26
9	0	54	47	7	0	2	13	5	16	19	10	31	0.08	0	29
10	1	0	52	7	6	7	13	11	21	19	16	36	0.09	0	33
11	1	6	58	7	12	12	13	17	27	19	22	41	0.10	0	37
12	1	13	3	7	18	17	13	23	32	19	28	47	0.11	0	40
13	1	19	8	7	24	23	13	29	37	19	34	52	0.12	0	44
14	1	25	13	7	30	28	13	35	42	19	40	57	0.13	0	47
15	1	31	19	7	36	33	13	41	48	19	47	2	0.14	0	51
16	1	37	24	7	42	38	13	47	53	19	53	7	0.15	0	55
17	1	43	29	7	48	44	13	53	58	19	59	13	0.16	0	58
18	1	49	34	7	54	49	14	0	3	20	5	18	0.17	1	2
19	1	55	40	8	0	54	14	6	9	20	11	23	0.18	1	6
20	2	1	45	8	6	59	14	12	14	20	17	28	0.19	1	9
21	2	7	50	8	13	5	14	18	19	20	23	34	0.20	1	13
22	2	13	55	8	19	10	14	24	24	20	29	39	0.21	1	17
23	2	20	1	8	25	15	14	30	30	20	35	44	0.22	1	20
24	2	26	6	8	31	20	14	36	35	20	41	49	0.23	1	24
25	2	32	11	8	37	26	14	42	40	20	47	55	0.24	1	28
26	2	38	16	8	43	31	14	48	45	20	54	0	0.25	1	31
27	2	44	22	8	49	36	14	54	51	21	0	5	0.26	1	35
28	2	50	27	8	55	41	15	0	56	21	6	10	0.27	1	39
29	2	56	32	9	1	47	15	7	1	21	12	16	0.28	1	42
30	3	2	37	9	7	52	15	13	6	21	18	21	0.29	1	46
31	3	8	43	9	13	57	15	19	12	21	24	26	0.30	1	50
32	3	14	48	9	20	2	15	25	17	21	30	31	0.31	1	53
33	3	20	53	9	26	8	15	31	22	21	36	37	0.32	1	57
34	3	26	58	9	32	13	15	37	27	21	42	42	0.33	2	1
35	3	33	3	9	38	18	15	43	33	21	48	47	0.34	2	4
36	3	39	9	9	44	23	15	49	38	21	54	52	0.35	2	8
37	3	45	14	9	50	28	15	55	43	22	0	58	0.36	2	11
38	3	51	19	9	56	34	16	1	48	22	7	3	0.37	2	15
39	3	57	24	10	2	39	16	7	54	22	13	8	0.38	2	19
40	4	3	30	10	8	44	16	13	59	22	19	13	0.39	2	22
41	4	9	35	10	14	49	16	20	4	22	25	19	0.40	2	26
42	4	15	40	10	20	55	16	26	9	22	31	24	0.41	2	30
43	4	21	45	10	27	0	16	32	14	22	37	29	0.42	2	33
44	4	27	51	10	33	5	16	38	20	22	43	34	0.43	2	37
45	4	33	56	10	39	10	16	44	25	22	49	39	0.44	2	41
46	4	40	1	10	45	16	16	50	30	22	55	45	0.45	2	44
47	4	46	6	10	51	21	16	56	35	23	1	50	0.46	2	48
48	4	52	12	10	57	26	17	2	41	23	7	55	0.47	2	52
49	4	58	17	11	3	31	17	8	46	23	14	0	0.48	2	55
50	5	4	22	11	9	37	17	14	51	23	20	6	0.49	2	59
51	5	10	27	11	15	42	17	20	56	23	26	11	0.50	3	3
52	5	16	33	11	21	47	17	27	2	23	32	16			
53	5	22	38	11	27	52	17	33	7	23	38	21			
54	5	28	43	11	33	58	17	39	12	23	44	27			
55	5	34	48	11	40	3	17	45	17	23	50	32			
56	5	40	54	11	46	8	17	51	23	23	56	37			
57	5	46	59	11	52	13	17	57	28	24	2	42			
58	5	53	4	11	58	19	18	3	33	24	8	48			
59	5	59	9	12	4	24	18	9	38	24	14	53			
60	6	5	15	12	10	29	18	15	44	24	20	58			

Tafel IIa.

Verwandlung der Mittleren Zeit in Sternzeit.

Mittlere Zeit	Reduction	Mittlere Zeit	Reduction	Mittlere Zeit	Reduction
		0 ^m	+ 0 ^s .000	0 ^h	+ 0 ^s .000
		1	0.164	1	0.003
		2	0.329	2	0.005
		3	0.493	3	0.008
		4	0.657	4	0.011
		5	0.821	5	0.014
		6	0.986	6	0.016
		7	1.150	7	0.019
		8	1.314	8	0.022
		9	1.478	9	0.025
		10	1.643	10	0.027
		11	1.807	11	0.030
		12	1.971	12	0.033
		13	2.136	13	0.036
		14	2.300	14	0.038
		15	2.464	15	0.041
		16	2.628	16	0.044
		17	2.793	17	0.047
		18	2.957	18	0.049
		19	3.121	19	0.052
		20	3.285	20	0.055
		21	3.450	21	0.057
		22	3.614	22	0.060
		23	3.778	23	0.063
		24	3.943	24	0.066
		25	4.107	25	0.068
		26	4.271	26	0.071
		27	4.435	27	0.074
		28	4.600	28	0.077
		29	4.764	29	0.079
		30	4.928	30	0.082
		31	5.093	31	0.085
		32	5.257	32	0.088
		33	5.421	33	0.090
		34	5.585	34	0.093
		35	5.750	35	0.096
		36	5.914	36	0.099
		37	6.078	37	0.101
		38	6.242	38	0.104
		39	6.407	39	0.107
		40	6.571	40	0.110
		41	6.735	41	0.112
		42	6.900	42	0.115
		43	7.064	43	0.118
		44	7.228	44	0.120
		45	7.392	45	0.123
		46	7.557	46	0.126
		47	7.721	47	0.129
		48	7.885	48	0.131
		49	8.049	49	0.134
		50	8.214	50	0.137
		51	8.378	51	0.140
		52	8.542	52	0.142
		53	8.707	53	0.145
		54	8.871	54	0.148
		55	9.035	55	0.151
		56	9.199	56	0.153
		57	9.364	57	0.156
		58	9.528	58	0.159
		59	9.692	59	0.162
		60	9.856	60	0.164
0 ^h	+ 0 ^m 0 ^s .000				
1	0 9.856				
2	0 19.713				
3	0 29.569				
4	0 39.426				
5	0 49.282				
6	0 59.139				
7	1 8.995				
8	1 18.852				
9	1 28.708				
10	1 38.565				
11	1 48.421				
12	1 58.278				
13	2 8.134				
14	2 17.991				
15	2 27.847				
16	2 37.704				
17	2 47.560				
18	2 57.417				
19	3 7.273				
20	3 17.129				
21	3 26.986				
22	3 36.842				
23	3 46.699				
24	3 56.555				

Tafel III.

Verwandlung der Sternzeit in Mittlere Zeit.

0m				1m			2m			3m						
Os	Oh	Om	Os	6h	6m	15s	12h	12m	29s	18h	18m	44s				
1	0	6	6	6	12	21	12	18	35	18	24	50				
2	0	12	12	6	18	27	12	24	42	18	30	56				
3	0	18	19	6	24	33	12	30	48	18	37	2				
4	0	24	25	6	30	40	12	36	54	18	43	9				
5	0	30	31	6	36	46	12	43	0	18	49	15	0.00	Om	Os	0.50
6	0	36	37	6	42	52	12	49	7	18	55	21	0.01	0	4	0.51
7	0	42	44	6	48	58	12	55	13	19	1	27	0.02	0	7	0.52
8	0	48	50	6	55	4	13	1	19	19	7	34	0.03	0	11	0.53
9	0	54	56	7	1	11	13	7	25	19	13	40	0.04	0	15	0.54
10	1	1	2	7	7	17	13	13	31	19	19	46	0.05	0	18	0.55
11	1	7	9	7	13	23	13	19	38	19	25	52	0.06	0	22	0.56
12	1	13	15	7	19	29	13	25	44	19	31	59	0.07	0	26	0.57
13	1	19	21	7	25	36	13	31	50	19	38	5	0.08	0	29	0.58
14	1	25	27	7	31	42	13	37	56	19	44	11	0.09	0	33	0.59
15	1	31	34	7	37	48	13	44	3	19	50	17	0.10	0	37	0.60
16	1	37	40	7	43	54	13	50	9	19	56	23	0.11	0	40	0.61
17	1	43	46	7	50	1	13	56	15	20	2	30	0.12	0	44	0.62
18	1	49	52	7	56	7	14	2	21	20	8	36	0.13	0	48	0.63
19	1	55	59	8	2	13	14	8	28	20	14	42	0.14	0	51	0.64
20	2	2	5	8	8	19	14	14	34	20	20	48	0.15	0	55	0.65
21	2	8	11	8	14	26	14	20	40	20	26	55	0.16	0	59	0.66
22	2	14	17	8	20	32	14	26	46	20	33	1	0.17	1	2	0.67
23	2	20	24	8	26	38	14	32	53	20	39	7	0.18	1	6	0.68
24	2	26	30	8	32	44	14	38	59	20	45	13	0.19	1	10	0.69
25	2	32	36	8	38	51	14	45	5	20	51	20	0.20	1	13	0.70
26	2	38	42	8	44	57	14	51	11	20	57	26	0.21	1	17	0.71
27	2	44	49	8	51	3	14	57	18	21	3	32	0.22	1	21	0.72
28	2	50	55	8	57	9	15	3	24	21	9	38	0.23	1	24	0.73
29	2	57	1	9	3	16	15	9	30	21	15	45	0.24	1	28	0.74
30	3	3	7	9	9	22	15	15	36	21	21	51	0.25	1	32	0.75
31	3	9	14	9	15	28	15	21	43	21	27	57	0.26	1	35	0.76
32	3	15	20	9	21	34	15	27	49	21	34	3	0.27	1	39	0.77
33	3	21	26	9	27	41	15	33	55	21	40	10	0.28	1	43	0.78
34	3	27	32	9	33	47	15	40	1	21	46	16	0.29	1	46	0.79
35	3	33	38	9	39	53	15	46	8	21	52	22	0.30	1	50	0.80
36	3	39	45	9	45	59	15	52	14	21	58	28	0.31	1	54	0.81
37	3	45	51	9	52	5	15	58	20	22	4	35	0.32	1	57	0.82
38	3	51	57	9	58	12	16	4	26	22	10	41	0.33	2	1	0.83
39	3	58	3	10	4	18	16	10	33	22	16	47	0.34	2	5	0.84
40	4	4	10	10	10	24	16	16	39	22	22	53	0.35	2	8	0.85
41	4	10	16	10	16	30	16	22	45	22	29	0	0.36	2	12	0.86
42	4	16	22	10	22	37	16	28	51	22	35	6	0.37	2	16	0.87
43	4	22	28	10	28	43	16	34	57	22	41	12	0.38	2	19	0.88
44	4	28	35	10	34	49	16	41	4	22	47	18	0.39	2	23	0.89
45	4	34	41	10	40	55	16	47	10	22	53	24	0.40	2	26	0.90
46	4	40	47	10	47	2	16	53	16	22	59	31	0.41	2	30	0.91
47	4	46	53	10	53	8	16	59	22	23	5	37	0.42	2	34	0.92
48	4	53	0	10	59	14	17	5	29	23	11	43	0.43	2	37	0.93
49	4	59	6	11	5	20	17	11	35	23	17	49	0.44	2	41	0.94
50	5	5	12	11	11	27	17	17	41	23	23	56	0.45	2	45	0.95
51	5	11	18	11	17	33	17	23	47	23	30	2	0.46	2	48	0.96
52	5	17	25	11	23	39	17	29	54	23	36	8	0.47	2	52	0.97
53	5	23	31	11	29	45	17	36	0	23	42	14	0.48	2	56	0.98
54	5	29	37	11	35	52	17	42	6	23	48	21	0.49	2	59	0.99
55	5	35	43	11	41	58	17	48	12	23	54	27	0.50	3	3	1.00
56	5	41	50	11	48	4	17	54	19	24	0	33				
57	5	47	56	11	54	10	18	0	25	24	6	39				
58	5	54	2	12	0	17	18	6	31	24	12	46				
59	6	0	8	12	6	23	18	12	37	24	18	52				
60	6	6	15	12	12	29	18	18	44	24	24	58				

Tafel III a.

Verwandlung der Sternzeit in Mittlere Zeit.

Sternzeit	Reduction	Sternzeit	Reduction	Sternzeit	Reduction
		0 ^m	— 0.000	0 ^s	— 0.000
		1	0.164	1	0.003
		2	0.328	2	0.005
		3	0.491	3	0.008
		4	0.655	4	0.011
		5	0.819	5	0.014
		6	0.983	6	0.016
		7	1.147	7	0.019
		8	1.311	8	0.022
		9	1.474	9	0.025
		10	1.638	10	0.027
		11	1.802	11	0.030
		12	1.966	12	0.033
		13	2.130	13	0.035
		14	2.294	14	0.038
		15	2.457	15	0.041
		16	2.621	16	0.044
		17	2.785	17	0.046
		18	2.949	18	0.049
		19	3.113	19	0.052
		20	3.277	20	0.055
		21	3.440	21	0.057
		22	3.604	22	0.060
		23	3.768	23	0.063
		24	3.932	24	0.066
		25	4.096	25	0.068
		26	4.259	26	0.071
		27	4.423	27	0.074
		28	4.587	28	0.076
		29	4.751	29	0.079
		30	4.915	30	0.082
		31	5.079	31	0.085
		32	5.242	32	0.087
		33	5.406	33	0.090
		34	5.570	34	0.093
		35	5.734	35	0.096
		36	5.898	36	0.098
		37	6.062	37	0.101
		38	6.225	38	0.104
		39	6.389	39	0.106
		40	6.553	40	0.109
		41	6.717	41	0.112
		42	6.881	42	0.115
		43	7.045	43	0.117
		44	7.208	44	0.120
		45	7.372	45	0.123
		46	7.536	46	0.126
		47	7.700	47	0.128
		48	7.864	48	0.131
		49	8.027	49	0.134
		50	8.191	50	0.137
		51	8.355	51	0.139
		52	8.519	52	0.142
		53	8.683	53	0.145
		54	8.847	54	0.147
		55	9.010	55	0.150
		56	9.174	56	0.153
		57	9.338	57	0.156
		58	9.502	58	0.158
		59	9.666	59	0.161
		60	9.830	60	0.164
0 ^h	— 0 ^m 0.000				
1	0 9.830				
2	0 19.659				
3	0 29.489				
4	0 39.318				
5	0 49.148				
6	0 58.977				
7	1 8.807				
8	1 18.636				
9	1 28.466				
10	1 38.296				
11	1 48.125				
12	1 57.955				
13	2 7.784				
14	2 17.614				
15	2 27.443				
16	2 37.273				
17	2 47.102				
18	2 56.932				
19	3 6.762				
20	3 16.591				
21	3 26.421				
22	3 36.250				
23	3 46.080				
24	3 55.909				

Tafel IV.

Verwandlung von Stunden, Minuten und Secunden in Decimaltheile
des Tages.

Stund.	Decimal.	Min.	Decimal.	Min.	Decimal.	Sec.	Decimal.	Sec.	Decimal.
1	0.0416 +	1	.000694 +	31	.021527 +	1	.0000116	31	.0003588
2	.0833 +	2	.001388 +	32	.022222 +	2	.0000231	32	.0003704
3	.1250 +	3	.002083 +	33	.022916 +	3	.0000347	33	.0003819
4	.1666 +	4	.002777 +	34	.023611 +	4	.0000463	34	.0003935
5	.2083 +	5	.003472 +	35	.024305 +	5	.0000579	35	.0004051
6	.2500 +	6	.004166 +	36	.025000 +	6	.0000694	36	.0004167
7	0.2916 +	7	.004861 +	37	.025694 +	7	.0000810	37	.0004282
8	.3333 +	8	.005555 +	38	.026388 +	8	.0000925	38	.0004398
9	.3750 +	9	.006250 +	39	.027083 +	9	.0001042	39	.0004514
10	.4166 +	10	.006944 +	40	.027777 +	10	.0001157	40	.0004630
11	.4583 +	11	.007638 +	41	.028472 +	11	.0001273	41	.0004745
12	.5000 +	12	.008333 +	42	.029166 +	12	.0001389	42	.0004861
13	.5416 +	13	.009027 +	43	.029861 +	13	.0001505	43	.0004977
14	.5833 +	14	.009722 +	44	.030555 +	14	.0001620	44	.0005093
15	.6250 +	15	.010416 +	45	.031250 +	15	.0001736	45	.0005208
16	.6666 +	16	.011111 +	46	.031944 +	16	.0001852	46	.0005324
17	.7083 +	17	.011805 +	47	.032638 +	17	.0001968	47	.0005440
18	.7500 +	18	.012500 +	48	.033333 +	18	.0002083	48	.0005556
19	.7916 +	19	.013194 +	49	.034027 +	19	.0002199	49	.0005671
20	.8333 +	20	.013888 +	50	.034722 +	20	.0002315	50	.0005787
21	.8750 +	21	.014583 +	51	.035416 +	21	.0002431	51	.0005903
22	.9166 +	22	.015277 +	52	.036111 +	22	.0002546	52	.0006019
23	.9583 +	23	.015972 +	53	.036805 +	23	.0002662	53	.0006134
24	1.0000 +	24	.016666 +	54	.037500 +	24	.0002778	54	.0006250
		25	.017361 +	55	.038194 +	25	.0002894	55	.0006366
		26	.018055 +	56	.038888 +	26	.0003009	56	.0006481
		27	.018750 +	57	.039583 +	27	.0003125	57	.0006597
		28	.019444 +	58	.040277 +	28	.0003241	58	.0006713
		29	.020138 +	59	.040972 +	29	.0003356	59	.0006829
		30	.020833 +	60	.041666 +	30	.0003472	60	.0006944

Das zur Abkürzung gesetzte Zeichen + bedeutet, dass die folgenden Decimalen sämtlich gleich der letzten angegeben sind.

Tafel V.

Anzahl der seit Beginn des Jahres verfloßenen Tage.

Datum	Gemein- Jahr	Schalt- Jahr
Januar 0.0	0	0
Februar 0.0	31	31
März 0.0	59	60
April 0.0	90	91
Mai 0.0	120	121
Juni 0.0	151	152
Juli 0.0	181	182
August 0.0	212	213
September 0.0	243	244
Oktober 0.0	273	274
November 0.0	304	305
Dezember 0.0	334	335

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	0°		1°		2°		3°	
	M.	Diff. 1".	M.	Diff. 1".	M.	Diff. 1".	M.	Diff. 1".
0'	0.000000	181.81	0.654532	181.83	1.309263	181.92	1.964393	182.05
1	0.010908	181.81	0.665442	181.83	1.320178	181.92	1.975316	182.06
2	0.021817	181.81	0.676352	181.83	1.331093	181.92	1.986240	182.06
3	0.032725	181.81	0.687262	181.84	1.342008	181.92	1.997164	182.06
4	0.043633	181.81	0.698172	181.84	1.352923	181.92	2.008087	182.07
5	0.054542	181.81	0.709082	181.84	1.363839	181.93	2.019011	182.07
6	0.065450	181.81	0.719993	181.84	1.374755	181.93	2.029936	182.07
7	0.076358	181.81	0.730903	181.84	1.385670	181.93	2.040860	182.07
8	0.087267	181.81	0.741813	181.84	1.396586	181.93	2.051785	182.08
9	0.098175	181.81	0.752724	181.84	1.407502	181.93	2.062709	182.08
10	0.109083	181.81	0.763634	181.84	1.418418	181.94	2.073634	182.08
11	0.119992	181.81	0.774545	181.84	1.429334	181.94	2.084559	182.08
12	0.130900	181.81	0.785456	181.84	1.440251	181.94	2.095485	182.09
13	0.141808	181.81	0.796366	181.85	1.451167	181.94	2.106410	182.09
14	0.152717	181.81	0.807277	181.85	1.462083	181.94	2.117335	182.09
15	0.163625	181.81	0.818188	181.85	1.473000	181.95	2.128261	182.10
16	0.174534	181.81	0.829099	181.85	1.483917	181.95	2.139187	182.10
17	0.185442	181.81	0.840010	181.85	1.494834	181.95	2.150114	182.10
18	0.196350	181.81	0.850921	181.85	1.505751	181.95	2.161040	182.11
19	0.207259	181.81	0.861832	181.85	1.516668	181.95	2.171966	182.11
20	0.218167	181.81	0.872743	181.85	1.527585	181.96	2.182894	182.11
21	0.229076	181.81	0.883654	181.86	1.538503	181.96	2.193820	182.12
22	0.239984	181.81	0.894566	181.86	1.549420	181.96	2.204747	182.12
23	0.250893	181.81	0.905478	181.86	1.560338	181.96	2.215674	182.12
24	0.261801	181.81	0.916389	181.86	1.571256	181.96	2.226602	182.13
25	0.272710	181.81	0.927301	181.86	1.582174	181.97	2.237529	182.13
26	0.283619	181.81	0.938212	181.86	1.593092	181.97	2.248457	182.13
27	0.294527	181.81	0.949124	181.86	1.604010	181.97	2.259385	182.14
28	0.305436	181.81	0.960036	181.86	1.614928	181.97	2.270313	182.14
29	0.316345	181.81	0.970948	181.87	1.625847	181.97	2.281242	182.14
30	0.327253	181.81	0.981860	181.87	1.636766	181.98	2.292170	182.14
31	0.338162	181.81	0.992772	181.87	1.647684	181.98	2.303099	182.15
32	0.349071	181.81	1.003684	181.87	1.658603	181.98	2.314028	182.15
33	0.359980	181.81	1.014596	181.87	1.669522	181.98	2.324957	182.15
34	0.370888	181.81	1.025509	181.87	1.680441	181.99	2.335887	182.16
35	0.381797	181.81	1.036421	181.87	1.691361	181.99	2.346816	182.16
36	0.392706	181.81	1.047334	181.87	1.702280	181.99	2.357746	182.16
37	0.403615	181.81	1.058246	181.88	1.713200	181.99	2.368676	182.17
38	0.414524	181.82	1.069159	181.88	1.724120	182.00	2.379606	182.17
39	0.425433	181.82	1.080072	181.88	1.735039	182.00	2.390536	182.17
40	0.436342	181.82	1.090985	181.88	1.745960	182.00	2.401467	182.18
41	0.447251	181.82	1.101898	181.88	1.756880	182.00	2.412398	182.18
42	0.458160	181.82	1.112811	181.89	1.767800	182.01	2.423329	182.18
43	0.469069	181.82	1.123724	181.89	1.778721	182.01	2.434260	182.19
44	0.479979	181.82	1.134637	181.89	1.789641	182.01	2.445191	182.19
45	0.490888	181.82	1.145550	181.89	1.800562	182.01	2.456123	182.19
46	0.501797	181.82	1.156464	181.89	1.811483	182.02	2.467055	182.20
47	0.512706	181.82	1.167377	181.89	1.822404	182.02	2.477987	182.20
48	0.523616	181.82	1.178291	181.89	1.833325	182.02	2.488919	182.20
49	0.534525	181.82	1.189205	181.90	1.844247	182.02	2.499851	182.21
50	0.545435	181.82	1.200119	181.90	1.855168	182.03	2.510784	182.21
51	0.556344	181.82	1.211033	181.90	1.866090	182.03	2.521717	182.22
52	0.567254	181.82	1.221947	181.90	1.877012	182.04	2.532650	182.22
53	0.578163	181.83	1.232861	181.90	1.887934	182.04	2.543583	182.22
54	0.589073	181.83	1.243775	181.91	1.898856	182.04	2.554517	182.23
55	0.599983	181.83	1.254689	181.91	1.909779	182.04	2.565450	182.23
56	0.610892	181.83	1.265604	181.91	1.920701	182.04	2.576384	182.23
57	0.621802	181.83	1.276518	181.91	1.931624	182.05	2.587319	182.24
58	0.632712	181.83	1.287433	181.91	1.942547	182.05	2.598253	182.24
59	0.643622	181.83	1.298348	181.91	1.953470	182.05	2.609187	182.24
60	0.654532	181.83	1.309263	181.92	1.964393	182.05	2.620122	182.25

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	4 ⁰		5 ⁰		6 ⁰		7 ⁹	
	M.	Diff. 1".	M.	Diff. 1".	M.	Diff. 1".	M.	Diff. 1".
0'	2.620122	182.25	3.270051	182.50	3.934182	182.80	4.592917	183.17
1	2.631057	182.25	3.287002	182.50	3.945151	182.81	4.603907	183.18
2	2.641993	182.26	3.298552	182.51	3.950119	182.82	4.614898	183.18
3	2.652928	182.26	3.309593	182.51	3.967088	182.82	4.625889	183.19
4	2.663864	182.26	3.320454	182.52	3.978058	182.83	4.636880	183.19
5	2.674800	182.27	3.331408	182.52	3.989028	182.83	4.647872	183.20
6	2.685736	182.27	3.342350	182.53	3.999998	182.84	4.658864	183.21
7	2.696672	182.27	3.353308	182.53	4.010968	182.84	4.669857	183.21
8	2.707609	182.28	3.364260	182.54	4.021939	182.85	4.680850	183.22
9	2.718546	182.28	3.375212	182.54	4.032911	182.86	4.691843	183.23
10	2.729483	182.29	3.386165	182.55	4.043882	182.86	4.702837	183.24
11	2.740420	182.29	3.397118	182.55	4.054854	182.87	4.713831	183.24
12	2.751358	182.29	3.408071	182.56	4.065826	182.87	4.724826	183.25
13	2.762295	182.30	3.419024	182.56	4.076799	182.88	4.735821	183.25
14	2.773233	182.30	3.429978	182.57	4.087772	182.88	4.746816	183.26
15	2.784172	182.31	3.440932	182.57	4.098745	182.89	4.757812	183.27
16	2.795110	182.31	3.451887	182.58	4.109718	182.90	4.768809	183.27
17	2.806049	182.31	3.462841	182.58	4.120692	182.90	4.779805	183.28
18	2.816988	182.32	3.473796	182.59	4.131667	182.91	4.790802	183.28
19	2.827927	182.32	3.484752	182.59	4.142641	182.91	4.801800	183.29
20	2.838867	182.33	3.495707	182.60	4.153616	182.92	4.812797	183.30
21	2.849806	182.33	3.506663	182.60	4.164592	182.93	4.823796	183.31
22	2.860746	182.33	3.517619	182.61	4.175568	182.93	4.834793	183.32
23	2.871686	182.34	3.528575	182.61	4.186544	182.94	4.845794	183.32
24	2.882627	182.34	3.539532	182.61	4.197520	182.94	4.856793	183.33
25	2.893567	182.35	3.550489	182.62	4.208497	182.95	4.867793	183.34
26	2.904508	182.35	3.561447	182.62	4.219474	182.95	4.878793	183.34
27	2.915449	182.36	3.572404	182.63	4.230451	182.96	4.889794	183.35
28	2.926391	182.36	3.583362	182.63	4.241429	182.97	4.900795	183.36
29	2.937332	182.36	3.594320	182.64	4.252408	182.97	4.911797	183.36
30	2.948274	182.37	3.605279	182.64	4.263386	182.98	4.922799	183.37
31	2.959217	182.37	3.616238	182.65	4.274365	182.99	4.933801	183.38
32	2.970159	182.37	3.627197	182.65	4.285344	182.99	4.944804	183.38
33	2.981102	182.38	3.638156	182.66	4.296324	183.00	4.955807	183.39
34	2.992045	182.38	3.649116	182.66	4.307304	183.00	4.966811	183.40
35	3.002988	182.39	3.660076	182.67	4.318284	183.01	4.977815	183.41
36	3.013931	182.39	3.671037	182.68	4.329265	183.01	4.988820	183.41
37	3.024875	182.39	3.681997	182.68	4.340246	183.02	4.999825	183.42
38	3.035819	182.40	3.692958	182.69	4.351228	183.03	5.010830	183.43
39	3.046763	182.40	3.703920	182.69	4.362210	183.03	5.021836	183.43
40	3.057707	182.41	3.714881	182.70	4.373192	183.04	5.032842	183.44
41	3.068652	182.41	3.725843	182.70	4.384175	183.05	5.043849	183.45
42	3.079597	182.42	3.736806	182.71	4.395158	183.05	5.054856	183.46
43	3.090542	182.42	3.747768	182.71	4.406141	183.06	5.065864	183.46
44	3.101488	182.43	3.758731	182.72	4.417125	183.06	5.076872	183.47
45	3.112433	182.43	3.769694	182.72	4.428109	183.07	5.087880	183.48
46	3.123379	182.44	3.780658	182.72	4.439093	183.08	5.098889	183.48
47	3.134325	182.44	3.791622	182.73	4.450078	183.08	5.109898	183.49
48	3.145272	182.44	3.802586	182.74	4.461064	183.09	5.120908	183.50
49	3.156219	182.45	3.813551	182.74	4.472049	183.10	5.131918	183.51
50	3.167166	182.45	3.824515	182.75	4.483035	183.10	5.142929	183.51
51	3.178113	182.46	3.835481	182.76	4.494022	183.11	5.153940	183.52
52	3.189061	182.46	3.846446	182.76	4.505008	183.12	5.164951	183.53
53	3.200009	182.47	3.857412	182.77	4.515995	183.12	5.175963	183.54
54	3.210957	182.47	3.868378	182.77	4.526983	183.13	5.186975	183.54
55	3.221905	182.48	3.879345	182.78	4.537971	183.14	5.197988	183.55
56	3.232854	182.48	3.890312	182.78	4.548959	183.14	5.209002	183.56
57	3.243803	182.49	3.901279	182.79	4.559948	183.15	5.220015	183.57
58	3.254752	182.49	3.912246	182.79	4.570937	183.15	5.231029	183.57
59	3.265702	182.49	3.923214	182.80	4.581927	183.16	5.242044	183.58
60	3.276651	182.50	3.934182	182.80	4.592917	183.17	5.253059	183.59

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	8°		9°		10°		11°	
	M.	Diff. 1".	M.	Diff. 1".	M.	Diff. 1".	M.	Diff. 1".
0'	5.253059	183.59	5.914815	184.06	6.578391	184.60	7.243997	185.19
1	5.264075	183.59	5.925859	184.07	6.589467	184.61	7.255109	185.20
2	5.275090	183.60	5.936904	184.08	6.600544	184.62	7.266222	185.21
3	5.286107	183.61	5.947949	184.09	6.611622	184.63	7.277335	185.22
4	5.297124	183.62	5.958995	184.10	6.622700	184.64	7.288449	185.23
5	5.308141	183.62	5.970041	184.11	6.633778	184.65	7.299563	185.25
6	5.319159	183.63	5.981087	184.11	6.644857	184.66	7.310678	185.26
7	5.330177	183.64	5.992134	184.12	6.655937	184.67	7.321793	185.27
8	5.341195	183.65	6.003182	184.13	6.667017	184.67	7.332909	185.28
9	5.352214	183.66	6.014230	184.14	6.678098	184.68	7.344026	185.29
10	5.363234	183.66	6.025279	184.15	6.689179	184.69	7.355144	185.30
11	5.374254	183.67	6.036328	184.16	6.700261	184.70	7.366262	185.31
12	5.385275	183.68	6.047378	184.17	6.711343	184.71	7.377381	185.32
13	5.396296	183.69	6.058428	184.18	6.722426	184.72	7.388500	185.33
14	5.407317	183.69	6.069479	184.18	6.733510	184.73	7.399620	185.34
15	5.418339	183.70	6.080530	184.19	6.744594	184.74	7.410741	185.35
16	5.429361	183.71	6.091582	184.20	6.755679	184.75	7.421862	185.36
17	5.440384	183.72	6.102634	184.21	6.766764	184.76	7.432983	185.37
18	5.451407	183.73	6.113687	184.22	6.777850	184.77	7.444106	185.38
19	5.462431	183.73	6.124740	184.23	6.788937	184.78	7.455230	185.39
20	5.473455	183.74	6.135794	184.24	6.800024	184.79	7.466354	185.40
21	5.484480	183.75	6.146849	184.25	6.811112	184.80	7.477478	185.41
22	5.495505	183.75	6.157904	184.25	6.822200	184.81	7.488603	185.42
23	5.506530	183.76	6.168959	184.26	6.833289	184.82	7.499729	185.43
24	5.517556	183.77	6.180015	184.27	6.844378	184.83	7.510855	185.44
25	5.528583	183.78	6.191072	184.28	6.855468	184.84	7.521982	185.46
26	5.539610	183.79	6.202129	184.29	6.866559	184.85	7.533110	185.47
27	5.550637	183.79	6.213187	184.30	6.877650	184.86	7.544239	185.48
28	5.561665	183.80	6.224245	184.31	6.888742	184.87	7.555368	185.49
29	5.572693	183.81	6.235304	184.32	6.899834	184.88	7.566497	185.50
30	5.583722	183.82	6.246363	184.32	6.910927	184.89	7.577628	185.51
31	5.594752	183.83	6.257422	184.33	6.922021	184.90	7.588759	185.52
32	5.605782	183.83	6.268482	184.34	6.933115	184.91	7.599890	185.53
33	5.616812	183.84	6.279543	184.35	6.944210	184.92	7.611022	185.54
34	5.627843	183.85	6.290605	184.36	6.955305	184.93	7.622155	185.55
35	5.638874	183.86	6.301667	184.37	6.966401	184.94	7.633289	185.57
36	5.649906	183.87	6.312729	184.38	6.977498	184.95	7.644423	185.58
37	5.660938	183.87	6.323792	184.39	6.988595	184.96	7.655558	185.59
38	5.671971	183.88	6.334855	184.40	6.999693	184.97	7.666694	185.60
39	5.683004	183.89	6.345919	184.41	7.010791	184.98	7.677830	185.61
40	5.694038	183.90	6.356984	184.41	7.021890	184.99	7.688967	185.62
41	5.705072	183.91	6.368049	184.42	7.032990	185.00	7.700104	185.63
42	5.716106	183.92	6.379115	184.43	7.044090	185.01	7.711242	185.64
43	5.727141	183.92	6.390181	184.44	7.055191	185.02	7.722381	185.65
44	5.738177	183.93	6.401248	184.45	7.066292	185.03	7.733521	185.66
45	5.749213	183.94	6.412315	184.46	7.077394	185.04	7.744661	185.68
46	5.760250	183.95	6.423383	184.47	7.088497	185.05	7.755802	185.69
47	5.771287	183.96	6.434451	184.48	7.099600	185.06	7.766943	185.70
48	5.782325	183.96	6.445520	184.49	7.110704	185.07	7.778085	185.71
49	5.793363	183.97	6.456590	184.50	7.121808	185.08	7.789228	185.72
50	5.804401	183.98	6.467660	184.51	7.132913	185.09	7.800372	185.73
51	5.815440	183.99	6.478731	184.52	7.144019	185.10	7.811516	185.74
52	5.826480	184.00	6.489802	184.52	7.155125	185.11	7.822661	185.75
53	5.837520	184.01	6.500874	184.53	7.166232	185.12	7.833807	185.76
54	5.848561	184.01	6.511946	184.54	7.177340	185.13	7.844953	185.78
55	5.859602	184.02	6.523019	184.55	7.188448	185.14	7.856100	185.79
56	5.870644	184.03	6.534092	184.56	7.199557	185.15	7.867247	185.80
57	5.881686	184.04	6.545166	184.57	7.210666	185.16	7.878396	185.81
58	5.892728	184.05	6.556241	184.58	7.221776	185.17	7.889545	185.82
59	5.903771	184.06	6.567316	184.59	7.232886	185.18	7.900694	185.83
60	5.914815	184.06	6.578391	184.60	7.243997	185.19	7.911845	185.84

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	12°		13°		14°		15°	
	M.	Diff. 1".	M.	Diff. 1".	M.	Diff. 1".	M.	Diff. 1".
0'	7.911845	185.84	8.582146	186.56	9.255120	187.33	9.930984	188.16
1	7.922995	185.86	8.593340	186.57	9.266360	187.34	9.942274	188.18
2	7.934147	185.87	8.604535	186.58	9.277601	187.35	9.953565	188.19
3	7.945300	185.88	8.615730	186.59	9.288842	187.37	9.964857	188.21
4	7.956453	185.89	8.626926	186.61	9.300085	187.38	9.976149	188.22
5	7.967606	185.90	8.638123	186.62	9.311328	187.40	9.987443	188.23
6	7.978761	185.91	8.649320	186.63	9.322572	187.41	9.998738	188.25
7	7.989916	185.92	8.660518	186.64	9.333817	187.42	10.010033	188.26
8	8.001072	185.93	8.671717	186.66	9.345063	187.44	10.021329	188.28
9	8.012228	185.95	8.682917	186.67	9.356310	187.45	10.032626	188.29
10	8.023385	185.96	8.694117	186.68	9.367557	187.46	10.043924	188.31
11	8.034543	185.97	8.705318	186.69	9.378805	187.48	10.055223	188.32
12	8.045702	185.98	8.716520	186.71	9.390054	187.49	10.066523	188.34
13	8.056861	185.99	8.727723	186.72	9.401304	187.50	10.077823	188.35
14	8.068021	186.00	8.738927	186.73	9.412555	187.52	10.089125	188.37
15	8.079181	186.02	8.750131	186.74	9.423806	187.53	10.100427	188.38
16	8.090343	186.03	8.761336	186.76	9.435058	187.54	10.111730	188.39
17	8.101505	186.04	8.772542	186.77	9.446311	187.56	10.123035	188.41
18	8.112668	186.05	8.783748	186.78	9.457565	187.57	10.134340	188.42
19	8.123831	186.06	8.794955	186.79	9.468820	187.59	10.145646	188.44
20	8.134995	186.07	8.806163	186.81	9.480076	187.60	10.156952	188.45
21	8.146160	186.09	8.817372	186.82	9.491332	187.61	10.168260	188.47
22	8.157326	186.10	8.828582	186.83	9.502589	187.63	10.179568	188.48
23	8.168492	186.11	8.839792	186.84	9.513847	187.64	10.190878	188.50
24	8.179659	186.12	8.851003	186.86	9.525106	187.65	10.202188	188.51
25	8.190826	186.13	8.862215	186.87	9.536366	187.67	10.213499	188.53
26	8.201995	186.15	8.873427	186.88	9.547626	187.68	10.224812	188.54
27	8.213164	186.16	8.884641	186.90	9.558888	187.70	10.236125	188.56
28	8.224334	186.17	8.895855	186.91	9.570150	187.71	10.247439	188.57
29	8.235504	186.18	8.907070	186.92	9.581413	187.72	10.258753	188.59
30	8.246675	186.19	8.918286	186.93	9.592676	187.74	10.270069	188.60
31	8.257847	186.20	8.929502	186.95	9.603941	187.75	10.281386	188.62
32	8.269020	186.22	8.940719	186.96	9.615207	187.77	10.292703	188.63
33	8.280193	186.23	8.951937	186.97	9.626473	187.78	10.304021	188.65
34	8.291367	186.24	8.963156	186.99	9.637740	187.79	10.315341	188.66
35	8.302542	186.25	8.974376	187.00	9.649008	187.81	10.326661	188.68
36	8.313717	186.26	8.985596	187.01	9.660277	187.82	10.337982	188.69
37	8.324893	186.28	8.996817	187.02	9.671547	187.84	10.349304	188.71
38	8.336070	186.29	9.008039	187.04	9.682817	187.85	10.360627	188.72
39	8.347248	186.30	9.019262	187.05	9.694088	187.86	10.371951	188.74
40	8.358426	186.31	9.030485	187.06	9.705361	187.88	10.383275	188.75
41	8.369605	186.32	9.041709	187.08	9.716634	187.89	10.394601	188.77
42	8.380785	186.34	9.052934	187.09	9.727908	187.91	10.405927	188.78
43	8.391966	186.35	9.064160	187.10	9.739182	187.92	10.417255	188.80
44	8.403147	186.36	9.075387	187.12	9.750458	187.93	10.428583	188.81
45	8.414329	186.37	9.086614	187.13	9.761734	187.95	10.439912	188.83
46	8.425512	186.38	9.097842	187.14	9.773012	187.96	10.451242	188.84
47	8.436695	186.40	9.109071	187.16	9.784290	187.98	10.462573	188.86
48	8.447879	186.41	9.120301	187.17	9.795569	187.99	10.473905	188.87
49	8.459064	186.42	9.131531	187.18	9.806849	188.00	10.485238	188.89
50	8.470250	186.43	9.142763	187.20	9.818129	188.02	10.496572	188.90
51	8.481436	186.45	9.153995	187.21	9.829410	188.03	10.507907	188.92
52	8.492623	186.46	9.165228	187.22	9.840693	188.05	10.519242	188.93
53	8.503811	186.47	9.176462	187.23	9.851977	188.06	10.530579	188.95
54	8.515000	186.48	9.187696	187.25	9.863261	188.08	10.541916	188.97
55	8.526189	186.49	9.198931	187.26	9.874546	188.09	10.553255	188.98
56	8.537379	186.51	9.210167	187.27	9.885832	188.10	10.564594	189.00
57	8.548569	186.52	9.221404	187.29	9.897118	188.12	10.575934	189.01
58	8.559761	186.53	9.232642	187.30	9.908406	188.13	10.587276	189.03
59	8.570953	186.54	9.243880	187.31	9.919694	188.15	10.598618	189.04
60	8.582146	186.56	9.255120	187.33	9.930984	188.16	10.609961	189.06

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	16°		17°		18°		19°	
	M.	Diff. 1".	M.	Diff. 1".	M.	Diff. 1".	M.	Diff. 1".
0'	10.609961	189.06	11.292277	190.02	11.978162	191.04	12.667850	192.13
1	10.621305	189.07	11.303679	190.03	11.989625	191.06	12.679379	192.15
2	10.632649	189.09	11.315082	190.05	12.001089	191.08	12.690908	192.17
3	10.643995	189.10	11.326485	190.07	12.012554	191.09	12.702439	192.19
4	10.655342	189.12	11.337889	190.08	12.024021	191.11	12.713970	192.21
5	10.666690	189.14	11.349295	190.10	12.035488	191.13	12.725503	192.22
6	10.678038	189.15	11.360701	190.12	12.046956	191.15	12.737037	192.24
7	10.689388	189.17	11.372109	190.13	12.058425	191.16	12.748573	192.26
8	10.700738	189.18	11.383517	190.15	12.069896	191.18	12.760109	192.28
9	10.712090	189.20	11.394927	190.17	12.081367	191.20	12.771646	192.30
10	10.723442	189.21	11.406337	190.18	12.092840	191.22	12.783185	192.32
11	10.734795	189.23	11.417749	190.20	12.104313	191.24	12.794724	192.34
12	10.746149	189.24	11.429161	190.22	12.115788	191.25	12.806265	192.36
13	10.757505	189.26	11.440575	190.23	12.127264	191.27	12.817807	192.37
14	10.768861	189.28	11.451989	190.25	12.138741	191.29	12.829350	192.39
15	10.780218	189.29	11.463405	190.27	12.150219	191.31	12.840894	192.41
16	10.791576	189.31	11.474821	190.28	12.161698	191.32	12.852440	192.43
17	10.802935	189.32	11.486239	190.30	12.173178	191.34	12.863986	192.45
18	10.814295	189.34	11.497657	190.32	12.184659	191.36	12.875534	192.47
19	10.825655	189.35	11.509077	190.33	12.196141	191.38	12.887082	192.49
20	10.837017	189.37	11.520497	190.35	12.207624	191.40	12.898632	192.51
21	10.848380	189.39	11.531919	190.37	12.219108	191.41	12.910183	192.53
22	10.859744	189.40	11.543342	190.39	12.230594	191.43	12.921736	192.55
23	10.871108	189.42	11.554765	190.40	12.242080	191.45	12.933289	192.56
24	10.882474	189.43	11.566190	190.42	12.253568	191.47	12.944843	192.58
25	10.893840	189.45	11.577616	190.44	12.265057	191.49	12.956399	192.60
26	10.905208	189.47	11.589042	190.45	12.276546	191.50	12.967956	192.62
27	10.916576	189.48	11.600470	190.47	12.288037	191.52	12.979514	192.64
28	10.927946	189.50	11.611899	190.49	12.299529	191.54	12.991073	192.66
29	10.939316	189.51	11.623328	190.50	12.311022	191.56	13.002633	192.68
30	10.950687	189.53	11.634759	190.52	12.322516	191.58	13.014195	192.70
31	10.962059	189.55	11.646191	190.54	12.334011	191.60	13.025757	192.72
32	10.973433	189.56	11.657624	190.56	12.345508	191.61	13.037321	192.74
33	10.984807	189.58	11.669057	190.57	12.357005	191.63	13.048886	192.76
34	10.996182	189.59	11.680492	190.59	12.368503	191.65	13.060452	192.78
35	11.007558	189.61	11.691928	190.61	12.380003	191.67	13.072019	192.80
36	11.018935	189.63	11.703365	190.62	12.391504	191.69	13.083587	192.82
37	11.030313	189.64	11.714803	190.64	12.403006	191.70	13.095157	192.83
38	11.041692	189.66	11.726242	190.66	12.414509	191.72	13.106727	192.85
39	11.053072	189.67	11.737682	190.68	12.426013	191.74	13.118299	192.87
40	11.064453	189.69	11.749123	190.69	12.437517	191.76	13.129872	192.89
41	11.075835	189.71	11.760565	190.71	12.449023	191.78	13.141446	192.91
42	11.087218	189.72	11.772008	190.73	12.460531	191.80	13.153022	192.93
43	11.098602	189.74	11.783452	190.74	12.472039	191.81	13.164598	192.95
44	11.109987	189.76	11.794897	190.76	12.483548	191.83	13.176176	192.97
45	11.121372	189.77	11.806344	190.78	12.495059	191.85	13.187755	192.99
46	11.132759	189.79	11.817791	190.80	12.506571	191.87	13.199335	193.01
47	11.144147	189.80	11.829239	190.81	12.518083	191.89	13.210916	193.03
48	11.155536	189.82	11.840689	190.83	12.529597	191.91	13.222498	193.05
49	11.166925	189.84	11.852139	190.85	12.541112	191.93	13.234082	193.07
50	11.178316	189.85	11.863590	190.87	12.552628	191.94	13.245667	193.09
51	11.189708	189.87	11.875043	190.88	12.564145	191.96	13.257253	193.11
52	11.201100	189.89	11.886496	190.90	12.575664	191.98	13.268840	193.13
53	11.212494	189.90	11.897951	190.92	12.587183	192.00	13.280428	193.15
54	11.223889	189.92	11.909407	190.94	12.598704	192.02	13.292017	193.17
55	11.235284	189.93	11.920863	190.95	12.610225	192.04	13.303608	193.19
56	11.246681	189.95	11.932321	190.97	12.621748	192.06	13.315200	193.21
57	11.258078	189.97	11.943780	190.99	12.633272	192.07	13.326793	193.23
58	11.269477	189.98	11.955239	191.01	12.644797	192.09	13.338387	193.25
59	11.280876	190.00	11.966700	191.02	12.656323	192.11	13.349982	193.27
60	11.292277	190.02	11.978162	191.04	12.667850	192.13	13.361579	193.29

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	20°		21°		22°		23°	
	M.	Diff. 1".	M.	Diff. 1".	M.	Diff. 1".	M.	Diff. 1".
0'	13.361579	193.29	14.059591	194.51	14.762133	195.80	15.469459	197.17
1	13.373177	193.31	14.071262	194.53	14.773882	195.83	15.481290	197.19
2	13.384776	193.33	14.082935	194.55	14.785632	195.85	15.493122	197.21
3	13.396376	193.35	14.094608	194.57	14.797384	195.87	15.504956	197.24
4	13.407977	193.37	14.106283	194.59	14.809137	195.89	15.516791	197.26
5	13.419580	193.39	14.117960	194.61	14.820891	195.91	15.528627	197.28
6	13.431183	193.41	14.129637	194.64	14.832647	195.94	15.540465	197.31
7	13.442788	193.43	14.141316	194.66	14.844403	195.96	15.552304	197.33
8	13.454394	193.45	14.152996	194.68	14.856161	195.98	15.564144	197.35
9	13.466002	193.47	14.164677	194.70	14.867921	196.00	15.575986	197.38
10	13.477610	193.49	14.176360	194.72	14.879682	196.03	15.587830	197.40
11	13.489220	193.51	14.188044	194.74	14.891444	196.05	15.599675	197.43
12	13.500831	193.53	14.199729	194.76	14.903208	196.07	15.611521	197.45
13	13.512443	193.55	14.211415	194.78	14.914973	196.09	15.623369	197.47
14	13.524056	193.57	14.223103	194.81	14.926739	196.12	15.635218	197.50
15	13.535671	193.59	14.234792	194.83	14.938506	196.14	15.647068	197.52
16	13.547287	193.61	14.246482	194.85	14.950275	196.16	15.658920	197.54
17	13.558904	193.63	14.258174	194.87	14.962045	196.18	15.670773	197.57
18	13.570522	193.65	14.269867	194.89	14.973817	196.20	15.682628	197.59
19	13.582141	193.67	14.281561	194.91	14.985590	196.23	15.694484	197.61
20	13.593762	193.69	14.293256	194.93	14.997365	196.25	15.706342	197.64
21	13.605383	193.71	14.304953	194.95	15.009140	196.27	15.718201	197.66
22	13.617006	193.73	14.316651	194.98	15.020917	196.30	15.730061	197.69
23	13.628631	193.75	14.328350	195.00	15.032696	196.32	15.741923	197.71
24	13.640256	193.77	14.340050	195.02	15.044475	196.34	15.753786	197.73
25	13.651883	193.79	14.351752	195.04	15.056256	196.36	15.765651	197.76
26	13.663511	193.81	14.363455	195.06	15.068039	196.39	15.777517	197.78
27	13.675140	193.83	14.375159	195.08	15.079823	196.41	15.789385	197.80
28	13.686770	193.85	14.386865	195.10	15.091608	196.43	15.801254	197.83
29	13.698401	193.87	14.398572	195.13	15.103394	196.45	15.813124	197.85
30	13.710034	193.89	14.410280	195.15	15.115182	196.48	15.824996	197.88
31	13.721668	193.91	14.421990	195.17	15.126971	196.50	15.836870	197.90
32	13.733303	193.93	14.433700	195.19	15.138762	196.52	15.848744	197.92
33	13.744940	193.95	14.445412	195.21	15.150554	196.54	15.860620	197.95
34	13.756577	193.97	14.457126	195.23	15.162348	196.57	15.872498	197.97
35	13.768216	193.99	14.468841	195.26	15.174142	196.59	15.884377	198.00
36	13.779856	194.01	14.480557	195.28	15.185938	196.61	15.896258	198.02
37	13.791498	194.03	14.492274	195.30	15.197736	196.64	15.908140	198.04
38	13.803140	194.05	14.503992	195.32	15.209535	196.66	15.920023	198.07
39	13.814784	194.07	14.515712	195.34	15.221335	196.68	15.931908	198.09
40	13.826429	194.09	14.527434	195.36	15.233137	196.70	15.943794	198.12
41	13.838075	194.11	14.539156	195.39	15.244940	196.73	15.955682	198.14
42	13.849723	194.14	14.550880	195.41	15.256744	196.75	15.967571	198.17
43	13.861372	194.16	14.562605	195.43	15.268550	196.77	15.979462	198.19
44	13.873022	194.18	14.574331	195.45	15.280357	196.80	15.991354	198.21
45	13.884673	194.20	14.586059	195.47	15.292165	196.82	16.003248	198.24
46	13.896325	194.22	14.597788	195.50	15.303975	196.84	16.015143	198.26
47	13.907979	194.24	14.609519	195.52	15.315786	196.87	16.027039	198.29
48	13.919634	194.26	14.621250	195.54	15.327599	196.89	16.038937	198.31
49	13.931290	194.28	14.632983	195.56	15.339413	196.91	16.050836	198.34
50	13.942948	194.30	14.644718	195.58	15.351228	196.94	16.062737	198.36
51	13.954606	194.32	14.656453	195.60	15.363045	196.96	16.074639	198.38
52	13.966266	194.34	14.668190	195.63	15.374863	196.98	16.086543	198.41
53	13.977927	194.36	14.679929	195.65	15.386683	197.00	16.098449	198.43
54	13.989590	194.38	14.691668	195.67	15.398504	197.03	16.110355	198.46
55	14.001254	194.41	14.703409	195.69	15.410326	197.05	16.122263	198.48
56	14.012919	194.43	14.715151	195.71	15.422150	197.07	16.134173	198.51
57	14.024585	194.45	14.726895	195.74	15.433975	197.10	16.146084	198.53
58	14.036252	194.47	14.738640	195.76	15.445802	197.12	16.157997	198.56
59	14.047921	194.49	14.750386	195.78	15.457630	197.14	16.169911	198.58
60	14.059591	194.51	14.762133	195.80	15.469459	197.17	16.181826	198.60

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	24°		25°		26°		27°	
	M.	Diff. 1".	M.	Diff. 1".	M.	Diff. 1".	M.	Diff. 1".
0'	16.181826	198.60	16.899499	200.12	17.622747	201.70	18.351847	203.37
1	16.193743	198.63	16.911507	200.14	17.634850	201.73	18.364050	203.40
2	16.205662	198.65	16.923516	200.17	17.646954	201.76	18.376255	203.42
3	16.217582	198.68	16.935527	200.19	17.659060	201.78	18.388461	203.45
4	16.229503	198.70	16.947539	200.22	17.671168	201.81	18.400669	203.48
5	16.241426	198.73	16.959553	200.24	17.683278	201.84	18.412879	203.51
6	16.253350	198.75	16.971568	200.27	17.695389	201.87	18.425090	203.54
7	16.265276	198.78	16.983585	200.30	17.707502	201.89	18.437303	203.57
8	16.277204	198.80	16.995604	200.32	17.719616	201.92	18.449518	203.59
9	16.289133	198.83	17.007624	200.35	17.731732	201.95	18.461735	203.62
10	16.301063	198.85	17.019646	200.37	17.743850	201.97	18.473953	203.65
11	16.312995	198.88	17.031669	200.40	17.755969	202.00	18.486173	203.68
12	16.324928	198.90	17.043694	200.43	17.768090	202.03	18.498395	203.71
13	16.336863	198.93	17.055720	200.45	17.780213	202.06	18.510618	203.74
14	16.348799	198.95	17.067748	200.48	17.792337	202.08	18.522843	203.77
15	16.360737	198.97	17.079777	200.50	17.804462	202.11	18.535070	203.80
16	16.372670	199.00	17.091808	200.53	17.816590	202.14	18.547299	203.82
17	16.384617	199.02	17.103841	200.56	17.828719	202.17	18.559529	203.85
18	16.396559	199.05	17.115875	200.58	17.840850	202.19	18.571761	203.88
19	16.408503	199.07	17.127911	200.61	17.852982	202.22	18.583995	203.91
20	16.420448	199.10	17.139948	200.64	17.865116	202.25	18.596230	203.94
21	16.432395	199.12	17.151987	200.66	17.877252	202.28	18.608467	203.97
22	16.444343	199.15	17.164028	200.69	17.889389	202.30	18.620706	204.00
23	16.456292	199.17	17.176070	200.71	17.901528	202.33	18.632947	204.03
24	16.468243	199.20	17.188114	200.74	17.913669	202.36	18.645190	204.05
25	16.480196	199.22	17.200159	200.77	17.925811	202.39	18.657434	204.08
26	16.492151	199.25	17.212206	200.79	17.937955	202.41	18.669679	204.11
27	16.504107	199.27	17.224254	200.82	17.950101	202.44	18.681927	204.14
28	16.516064	199.30	17.236304	200.85	17.962248	202.47	18.694177	204.17
29	16.528022	199.33	17.248356	200.87	17.974397	202.50	18.706428	204.20
30	16.539983	199.35	17.260409	200.90	17.986548	202.52	18.718680	204.23
31	16.551945	199.38	17.272464	200.93	17.998700	202.55	18.730935	204.26
32	16.563908	199.40	17.284520	200.95	18.010854	202.58	18.743191	204.29
33	16.575873	199.43	17.296578	200.98	18.023010	202.61	18.755449	204.32
34	16.587839	199.45	17.308637	201.00	18.035167	202.64	18.767709	204.35
35	16.599807	199.48	17.320698	201.03	18.047326	202.66	18.779971	204.37
36	16.611776	199.50	17.332761	201.06	18.059487	202.69	18.792234	204.40
37	16.623747	199.53	17.344825	201.08	18.071649	202.72	18.804499	204.43
38	16.635719	199.55	17.356891	201.11	18.083813	202.75	18.816767	204.46
39	16.647693	199.58	17.368959	201.14	18.095979	202.78	18.829036	204.49
40	16.659669	199.60	17.381028	201.16	18.108146	202.80	18.841305	204.52
41	16.671646	199.63	17.393098	201.19	18.120315	202.83	18.853577	204.55
42	16.683624	199.65	17.405171	201.22	18.132486	202.86	18.865851	204.58
43	16.695604	199.68	17.417245	201.24	18.144658	202.89	18.878127	204.61
44	16.707586	199.70	17.429320	201.27	18.156832	202.92	18.890404	204.64
45	16.719569	199.73	17.441397	201.30	18.169008	202.94	18.902684	204.67
46	16.731553	199.76	17.453476	201.32	18.181186	202.97	18.914965	204.70
47	16.743539	199.78	17.465556	201.35	18.193365	203.00	18.927247	204.73
48	16.755527	199.81	17.477638	201.38	18.205546	203.03	18.939532	204.76
49	16.767516	199.83	17.489722	201.41	18.217728	203.06	18.951818	204.79
50	16.779507	199.86	17.501807	201.43	18.229912	203.08	18.964106	204.81
51	16.791499	199.88	17.513894	201.46	18.242098	203.11	18.976396	204.84
52	16.803493	199.91	17.525982	201.49	18.254286	203.14	18.988687	204.87
53	16.815488	199.94	17.538072	201.51	18.266475	203.17	19.000981	204.90
54	16.827485	199.96	17.550163	201.54	18.278666	203.20	19.013276	204.93
55	16.839484	199.99	17.562257	201.57	18.290859	203.23	19.025573	204.96
56	16.851484	200.01	17.574352	201.59	18.303053	203.25	19.037871	204.99
57	16.863485	200.04	17.586448	201.62	18.315249	203.28	19.050172	205.02
58	16.875488	200.06	17.598546	201.65	18.327447	203.31	19.062474	205.05
59	16.887493	200.09	17.610646	201.68	18.339646	203.34	19.074778	205.08
60	16.899499	200.12	17.622747	201.70	18.351847	203.37	19.087084	205.11

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	28°		29°		30°		31°	
	M.	Diff. 1".	M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	19.087084	205.11	19.828747	206.94	1.313 3849	44.08	1.329 0430	42.92
1	19.099391	205.14	19.841164	206.97	.313 6493	44.06	.329 3004	42.91
2	19.111701	205.17	19.853583	207.00	.313 9136	44.04	.329 5578	42.89
3	19.124012	205.20	19.866004	207.03	.314 1778	44.02	.329 8151	42.87
4	19.136325	205.23	19.878427	207.06	.314 4419	44.00	.330 0723	42.85
5	19.148639	205.26	19.890852	207.09	1.314 7058	43.98	1.330 3293	42.83
6	19.160956	205.29	19.903279	207.13	.314 9696	43.96	.330 5862	42.81
7	19.173274	205.32	19.915707	207.16	.315 2333	43.94	.330 8431	42.80
8	19.185594	205.35	19.928137	207.19	.315 4969	43.92	.331 0998	42.78
9	19.197916	205.38	19.940569	207.22	.315 7604	43.90	.331 3564	42.76
10	19.210240	205.41	19.953003	207.25	1.316 0237	43.88	1.331 6129	42.74
11	19.222566	205.44	19.965439	207.28	.316 2869	43.86	.331 8693	42.72
12	19.234893	205.47	19.977877	207.31	.316 5500	43.84	.332 1255	42.70
13	19.247222	205.50	19.990317	207.34	.316 8130	43.82	.332 3817	42.69
14	19.259553	205.53	20.002759	207.38	.317 0759	43.80	.332 6378	42.67
15	19.271885	205.56	20.015202	207.41	1.317 3386	43.78	1.332 8937	42.65
16	19.284220	205.59	20.027647	207.44	.317 6013	43.76	.333 1496	42.63
17	19.296556	205.62	20.040095	207.47	.317 8638	43.74	.333 4053	42.61
18	19.308894	205.65	20.052544	207.50	.318 1262	43.72	.333 6609	42.59
19	19.321234	205.68	20.064995	207.53	.318 3885	43.70	.333 9164	42.58
20	19.333576	205.71	20.077448	207.57	1.318 6506	43.68	1.334 1718	42.56
21	19.345920	205.74	20.089903	207.60	.318 9127	43.67	.334 4271	42.54
22	19.358265	205.77	20.102360	207.63	.319 1746	43.65	.334 6823	42.52
23	19.370612	205.80	20.114818	207.66	.319 4364	43.63	.334 9374	42.50
24	19.382961	205.83	20.127279	207.69	.319 6981	43.61	.335 1924	42.49
25	19.395312	205.86	20.139741	207.72	1.319 9597	43.59	1.335 4472	42.47
26	19.407665	205.89	20.152206	207.76	.320 2212	43.57	.335 7020	42.45
27	19.420019	205.92	20.164672	207.79	.320 4825	43.55	.335 9567	42.43
28	19.432375	205.95	20.177140	207.82	.320 7438	43.53	.336 2112	42.41
29	19.444734	205.98	20.189610	207.85	.321 0049	43.51	.336 4656	42.40
30	19.457094	206.01	20.202082	207.88	1.321 2659	43.49	1.336 7199	42.38
31	19.469455	206.04	20.214556	207.91	.321 5268	43.47	.336 9742	42.36
32	19.481819	206.08	20.227032	207.95	.321 7875	43.45	.337 2283	42.34
33	19.494184	206.11	20.239510	207.98	.322 0482	43.43	.337 4823	42.33
34	19.506551	206.14	20.251989	208.01	.322 3087	43.41	.337 7362	42.31
35	19.518921	206.17	20.264471	208.04	1.322 5692	43.40	* 1.337 9900	42.29
36	19.531292	206.20	20.276954	208.07	.322 8295	43.38	.338 2437	42.27
37	19.543664	206.23	20.289440	208.11	.323 0897	43.36	.338 4972	42.25
38	19.556039	206.26	20.301927	208.14	.323 3498	43.34	.338 7507	42.24
39	19.568415	206.29	20.314416	208.17	.323 6097	43.32	.339 0041	42.22
40	19.580794	206.32	20.326907	208.20	1.323 8696	43.30	1.339 2573	42.20
41	19.593174	206.35	20.339400	208.24	.324 1294	43.28	.339 5105	42.18
42	19.605556	206.38	20.351895	208.27	.324 3890	43.26	.339 7635	42.17
43	19.617939	206.41	20.364392	208.30	.324 6485	43.24	.340 0165	42.15
44	19.630325	206.44	20.376891	208.33	.324 9079	43.22	.340 2693	42.13
45	19.642713	206.47	20.389392	208.36	1.325 1672	43.21	1.340 5221	42.11
46	19.655102	206.50	20.401895	208.39	.325 4263	43.19	.340 7747	42.10
47	19.667493	206.53	20.414399	208.43	.325 6854	43.17	.341 0272	42.08
48	19.679886	206.57	20.426906	208.46	.325 9443	43.15	.341 2796	42.06
49	19.692281	206.60	20.439415	208.49	.326 2032	43.13	.341 5319	42.04
50	19.704678	206.63	20.451925	208.52	1.326 4619	43.11	1.341 7841	42.03
51	19.717076	206.66	20.464437	208.56	.326 7205	43.09	.342 0362	42.01
52	19.729477	206.69	20.476952	208.59	.326 9790	43.07	.342 2882	41.99
53	19.741879	206.72	20.489468	208.62	.327 2374	43.05	.342 5401	41.97
54	19.754283	206.75	20.501986	208.65	.327 4957	43.04	.342 7919	41.96
55	19.766689	206.78	20.514506	208.69	1.327 7538	43.02	1.343 0436	41.94
56	19.779097	206.81	20.527029	208.72	.328 0119	43.00	.343 2952	41.92
57	19.791507	206.84	20.539553	208.75	.328 2698	42.98	.343 5467	41.90
58	19.803919	206.88	20.552079	208.78	.328 5276	42.96	.343 7980	41.89
59	19.816332	206.91	20.564607	208.82	.328 7853	42.94	.344 0493	41.87
60	19.828747	206.94	20.577137	208.85	1.329 0430	42.92	1.344 3005	41.85

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	32°			33°			34°			35°		
	log M.	Diff. 1".		log M.	Diff. 1".		log M.	Diff. 1".		log M.	Diff. 1".	
0'	1.344 3005	41.85		1.359 1859	40.86		1.373 7251	39.93		1.387 9418	39.06	
1	.344 5515	41.84		.359 4310	40.84		.373 9646	39.91		.388 1761	39.05	
2	.344 8025	41.82		.359 6760	40.82		.374 2041	39.90		.388 4104	39.04	
3	.345 0534	41.80		.359 9209	40.81		.374 4434	39.88		.388 6446	39.02	
4	.345 3041	41.78		.360 1657	40.79		.374 6827	39.87		.388 8787	39.01	
5	1.345 5548	41.77		1.360 4104	40.78		1.374 9218	39.85		1.389 1127	38.99	
6	.345 8053	41.75		.360 6550	40.76		.375 1609	39.84		.389 3466	38.98	
7	.346 0558	41.73		.360 8995	40.74		.375 3999	39.82		.389 5804	38.97	
8	.346 3061	41.72		.361 1439	40.73		.375 6388	39.81		.389 8142	38.95	
9	.346 5564	41.70		.361 3883	40.71		.375 8776	39.79		.390 0479	38.94	
10	1.346 8065	41.68		1.361 6325	40.70		1.376 1164	39.78		1.390 2815	38.93	
11	.347 0565	41.66		.361 8766	40.68		.376 3550	39.77		.390 5150	38.91	
12	.347 3065	41.65		.362 1207	40.66		.376 5935	39.75		.390 7484	38.90	
13	.347 5563	41.63		.362 3646	40.65		.376 8320	39.74		.390 9817	38.88	
14	.347 8060	41.61		.362 6084	40.63		.377 0703	39.72		.391 2150	38.87	
15	1.348 0557	41.60		1.362 8522	40.62		1.377 3086	39.71		1.391 4482	38.86	
16	.348 3052	41.58		.363 0959	40.60		.377 5468	39.69		.391 6813	38.84	
17	.348 5546	41.56		.363 3394	40.59		.377 7849	39.68		.391 9143	38.83	
18	.348 8040	41.55		.363 5829	40.57		.378 0230	39.66		.392 1472	38.82	
19	.349 0532	41.53		.363 8263	40.56		.378 2609	39.65		.392 3801	38.80	
20	1.349 3023	41.51		1.364 0696	40.54		1.378 4987	39.64		1.392 6128	38.79	
21	.349 5513	41.50		.364 3128	40.52		.378 7365	39.62		.392 8455	38.77	
22	.349 8003	41.48		.364 5559	40.51		.378 9742	39.61		.393 0781	38.76	
23	.350 0491	41.46		.364 7989	40.49		.379 2117	39.59		.393 3107	38.75	
24	.350 2978	41.45		.365 0418	40.48		.379 4492	39.58		.393 5431	38.73	
25	1.350 5464	41.43		1.365 2846	40.46		1.379 6866	39.56		1.393 7755	38.72	
26	.350 7950	41.41		.365 5273	40.45		.379 9240	39.55		.394 0078	38.71	
27	.351 0434	41.40		.365 7699	40.43		.380 1612	39.53		.394 2400	38.69	
28	.351 2917	41.38		.366 0125	40.41		.380 3983	39.52		.394 4721	38.68	
29	.351 5399	41.36		.366 2549	40.40		.380 6354	39.50		.394 7041	38.67	
30	1.351 7880	41.35		1.366 4973	40.38		1.380 8724	39.49		1.394 9361	38.65	
31	.352 0361	41.33		.366 7395	40.37		.381 1093	39.47		.395 1680	38.64	
32	.352 2840	41.31		.366 9817	40.35		.381 3461	39.46		.395 3998	38.63	
33	.352 5318	41.30		.367 2238	40.34		.381 5828	39.45		.395 6315	38.61	
34	.352 7795	41.28		.367 4657	40.32		.381 8194	39.43		.395 8631	38.60	
35	1.353 0272	41.26		1.367 7076	40.31		1.382 0559	39.42		1.396 0947	38.59	
36	.353 2747	41.25		.367 9494	40.29		.382 2924	39.40		.396 3262	38.57	
37	.353 5221	41.23		.368 1911	40.28		.382 5288	39.39		.396 5576	38.56	
38	.353 7694	41.21		.368 4327	40.26		.382 7651	39.37		.396 7889	38.55	
39	.354 0167	41.20		.368 6742	40.25		.383 0013	39.36		.397 0201	38.53	
40	1.354 2638	41.18		1.368 9157	40.23		1.383 2374	39.35		1.397 2513	38.52	
41	.354 5108	41.16		.369 1570	40.21		.383 4734	39.33		.397 4823	38.51	
42	.354 7578	41.15		.369 3983	40.20		.383 7093	39.32		.397 7133	38.49	
43	.355 0046	41.13		.369 6394	40.18		.383 9452	39.30		.397 9442	38.48	
44	.355 2513	41.11		.369 8805	40.17		.384 1809	39.29		.398 1751	38.47	
45	1.355 4980	41.10		1.370 1214	40.15		1.384 4166	39.27		1.398 4058	38.45	
46	.355 7445	41.08		.370 3623	40.14		.384 6522	39.26		.398 6365	38.44	
47	.355 9909	41.07		.370 6031	40.12		.384 8878	39.25		.398 8671	38.43	
48	.356 2373	41.05		.370 8438	40.11		.385 1232	39.23		.399 0976	38.41	
49	.356 4836	41.03		.371 0844	40.09		.385 3585	39.22		.399 3281	38.40	
50	1.356 7297	41.02		1.371 3249	40.08		1.385 5938	39.20		1.399 5584	38.39	
51	.356 9758	41.00		.371 5654	40.06		.385 8290	39.19		.399 7887	38.37	
52	.357 2217	40.98		.371 8057	40.05		.386 0641	39.18		.400 0189	38.36	
53	.357 4676	40.97		.372 0459	40.03		.386 2991	39.16		.400 2491	38.35	
54	.357 7134	40.95		.372 2861	40.02		.386 5340	39.15		.400 4791	38.33	
55	1.357 9590	40.94		1.372 5261	40.00		1.386 7689	39.13		1.400 7091	38.32	
56	.358 2046	40.92		.372 7661	39.99		.387 0036	39.12		.400 9390	38.31	
57	.358 4501	40.90		.373 0060	39.97		.387 2383	39.11		.401 1688	38.30	
58	.358 6954	40.89		.373 2458	39.96		.387 4729	39.09		.401 3985	38.28	
59	.358 9407	40.87		.373 4855	39.94		.387 7074	39.08		.401 6282	38.27	
60	1.359 1859	40.86		1.373 7251	39.93		1.387 9418	39.06		1.401 8578	38.26	

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	36°			37°			38°			39°		
	log M.	Diff. 1".		log M.	Diff. 1".		log M.	Diff. 1".		log M.	Diff. 1".	
0'	1.401 8578	38.26		1.415 4930	37.50		1.428 8662	36.80		1.441 9943	36.14	
1	.402 0873	38.24		.415 7180	37.49		.429 0869	36.79		.442 2111	36.13	
2	.402 3107	38.23		.415 9429	37.47		.429 3076	36.78		.442 4279	36.12	
3	.402 5400	38.22		.416 1678	37.46		.429 5283	36.77		.442 6446	36.11	
4	.402 7753	38.20		.416 3925	37.45		.429 7488	36.75		.442 8612	36.10	
5	1.403 0045	38.19		1.416 6172	37.44		1.429 9693	36.74		1.443 0778	36.09	
6	.403 2330	38.18		.416 8419	37.43		.430 1897	36.73		.443 2943	36.08	
7	.403 4626	38.17		.417 0664	37.41		.430 4101	36.72		.443 5107	36.07	
8	.403 6919	38.15		.417 2909	37.40		.430 6304	36.71		.443 7271	36.06	
9	.403 9205	38.14		.417 5153	37.39		.430 8506	36.70		.443 9434	36.05	
10	1.404 1493	38.13		1.417 7396	37.38		1.431 0708	36.69		1.444 1597	36.04	
11	.404 3780	38.12		.417 9639	37.37		.431 2909	36.68		.444 3758	36.03	
12	.404 6067	38.10		.418 1881	37.36		.431 5109	36.66		.444 5920	36.02	
13	.404 8352	38.09		.418 4122	37.35		.431 7308	36.65		.444 8080	36.00	
14	.405 0637	38.08		.418 6362	37.33		.431 9507	36.64		.445 0240	35.99	
15	1.405 2921	38.06		1.418 8602	37.32		1.432 1705	36.63		1.445 2400	35.98	
16	.405 5205	38.05		.419 0841	37.31		.432 3903	36.62		.445 4558	35.97	
17	.405 7488	38.03		.419 3079	37.30		.432 6100	36.61		.445 6716	35.96	
18	.405 9769	38.02		.419 5317	37.29		.432 8296	36.60		.445 8874	35.95	
19	.406 2051	38.01		.419 7554	37.27		.433 0491	36.59		.446 1031	35.94	
20	1.406 4331	38.00		1.419 9790	37.26		1.433 2686	36.57		1.446 3187	35.93	
21	.406 6611	37.99		.420 2026	37.25		.433 4881	36.56		.446 5343	35.92	
22	.406 8880	37.97		.420 4260	37.24		.433 7074	36.55		.446 7498	35.91	
23	.407 1168	37.96		.420 6494	37.23		.433 9267	36.54		.446 9652	35.90	
24	.407 3445	37.95		.420 8728	37.22		.434 1459	36.53		.447 1806	35.89	
25	1.407 5721	37.94		1.421 0960	37.20		1.434 3651	36.52		1.447 3959	35.88	
26	.407 7997	37.92		.421 3192	37.19		.434 5842	36.51		.447 6112	35.87	
27	.408 0272	37.91		.421 5423	37.18		.434 8032	36.50		.447 8263	35.86	
28	.408 2547	37.90		.421 7654	37.17		.435 0221	36.49		.448 0415	35.85	
29	.408 4820	37.89		.421 9884	37.16		.435 2410	36.48		.448 2565	35.84	
30	1.408 7093	37.87		1.422 2113	37.15		1.435 4598	36.47		1.448 4715	35.83	
31	.408 9365	37.86		.422 4341	37.13		.435 6786	36.46		.448 6865	35.82	
32	.409 1636	37.85		.422 6569	37.12		.435 8973	36.44		.448 9014	35.81	
33	.409 3907	37.84		.422 8796	37.11		.436 1159	36.43		.449 1162	35.80	
34	.409 6177	37.82		.423 1022	37.10		.436 3345	36.42		.449 3309	35.79	
35	1.409 8446	37.81		1.423 3248	37.09		1.436 5530	36.41		1.449 5456	35.78	
36	.410 0714	37.80		.423 5473	37.08		.436 7714	36.40		.449 7603	35.77	
37	.410 2981	37.78		.423 7697	37.06		.436 9898	36.39		.449 9749	35.76	
38	.410 5248	37.77		.423 9920	37.05		.437 2081	36.38		.450 1894	35.75	
39	.410 7514	37.76		.424 2143	37.04		.437 4263	36.37		.450 4038	35.74	
40	1.410 9780	37.75		1.424 4365	37.03		1.437 6445	36.36		1.450 6182	35.73	
41	.411 2044	37.74		.424 6586	37.02		.437 8626	36.35		.450 8325	35.72	
42	.411 4308	37.72		.424 8807	37.01		.438 0806	36.34		.451 0468	35.71	
43	.411 6571	37.71		.425 1027	36.99		.438 2986	36.32		.451 2610	35.70	
44	.411 8833	37.70		.425 3246	36.98		.438 5165	36.31		.451 4752	35.69	
45	1.412 1095	37.69		1.425 5465	36.97		1.438 7344	36.30		1.451 6893	35.68	
46	.412 3356	37.68		.425 7683	36.96		.438 9522	36.29		.451 9033	35.67	
47	.412 5616	37.66		.425 9900	36.95		.439 1699	36.28		.452 1173	35.66	
48	.412 7875	37.65		.426 2117	36.94		.439 3875	36.27		.452 3312	35.65	
49	.413 0134	37.64		.426 4333	36.92		.439 6051	36.26		.452 5450	35.64	
50	1.413 2392	37.63		1.426 6548	36.91		1.439 8226	36.25		1.452 7588	35.63	
51	.413 4649	37.61		.426 8762	36.90		.440 0401	36.24		.452 9725	35.62	
52	.413 6905	37.60		.427 0976	36.89		.440 2575	36.23		.453 1862	35.61	
53	.413 9161	37.59		.427 3189	36.88		.440 4748	36.22		.453 3998	35.60	
54	.414 1416	37.58		.427 5402	36.87		.440 6921	36.20		.453 6134	35.59	
55	1.414 3670	37.56		1.427 7613	36.86		1.440 9093	36.19		1.453 8269	35.58	
56	.414 5924	37.55		.427 9824	36.85		.441 1264	36.18		.454 0403	35.57	
57	.414 8176	37.54		.428 2035	36.83		.441 3436	36.17		.454 2537	35.56	
58	.415 0429	37.53		.428 4244	36.82		.441 5605	36.16		.454 4670	35.55	
59	.415 2680	37.51		.428 6453	36.81		.441 7774	36.15		.454 6802	35.54	
60	1.415 4930	37.50		1.428 8662	36.80		1.441 9943	36.14		1.454 8934	35.53	

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	40°		41°		42°		43°	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	1.454 8934	35.53	1.467 5782	34.95	1.480 0627	34.41	1.492 3597	33.91
1	.455 1065	35.52	.467 7879	34.94	.480 2691	34.40	.492 5631	33.90
2	.455 3196	35.51	.467 9976	34.93	.480 4755	34.40	.492 7665	33.89
3	.455 5326	35.50	.468 2071	34.92	.480 6819	34.39	.492 9698	33.88
4	.455 7456	35.49	.468 4166	34.91	.480 8882	34.38	.493 1731	33.87
5	1.455 9585	35.48	1.468 6261	34.90	1.481 0944	34.37	1.493 3764	33.87
6	.456 1713	35.47	.468 8355	34.90	.481 3006	34.36	.493 5796	33.86
7	.456 3841	35.46	.469 0448	34.89	.481 5068	34.35	.493 7827	33.85
8	.456 5968	35.45	.469 2541	34.88	.481 7129	34.34	.493 9858	33.84
9	.456 8094	35.44	.469 4634	34.87	.481 9189	34.33	.494 1888	33.83
10	1.457 0220	35.43	1.469 6725	34.86	1.482 1249	34.33	1.494 3918	33.83
11	.457 2346	35.42	.469 8817	34.85	.482 3308	34.32	.494 5948	33.82
12	.457 4470	35.41	.470 0907	34.84	.482 5367	34.31	.494 7977	33.81
13	.457 6595	35.40	.470 2998	34.83	.482 7425	34.30	.495 0005	33.80
14	.457 8718	35.39	.470 5087	34.82	.482 9483	34.29	.495 2033	33.79
15	1.458 0841	35.38	1.470 7176	34.81	1.483 1540	34.28	1.495 4061	33.79
16	.458 2964	35.37	.470 9265	34.80	.483 3597	34.28	.495 6088	33.78
17	.458 5086	35.36	.471 1353	34.79	.483 5653	34.27	.495 8114	33.77
18	.458 7207	35.35	.471 3440	34.79	.483 7709	34.26	.496 0140	33.76
19	.458 9328	35.34	.471 5527	34.78	.483 9764	34.25	.496 2166	33.75
20	1.459 1448	35.33	1.471 7613	34.77	1.484 1819	34.24	1.496 4191	33.75
21	.459 3567	35.32	.471 9699	34.76	.484 3873	34.23	.496 6216	33.74
22	.459 5686	35.31	.472 1784	34.75	.484 5927	34.22	.496 8240	33.73
23	.459 7805	35.30	.472 3869	34.74	.484 7980	34.22	.497 0264	33.72
24	.459 9922	35.29	.472 5953	34.73	.485 0033	34.21	.497 2287	33.71
25	1.460 2040	35.28	1.472 8037	34.73	1.485 2085	34.20	1.497 4310	33.71
26	.460 4156	35.27	.473 0120	34.72	.485 4137	34.19	.497 6332	33.70
27	.460 6272	35.26	.473 2203	34.71	.485 6188	34.18	.497 8354	33.69
28	.460 8388	35.25	.473 4285	34.70	.485 8239	34.17	.498 0376	33.68
29	.461 0503	35.24	.473 6366	34.69	.486 0289	34.16	.498 2396	33.68
30	1.461 2617	35.23	1.473 8447	34.68	1.486 2338	34.16	1.498 4417	33.67
31	.461 4731	35.23	.474 0527	34.67	.486 4388	34.15	.498 6437	33.66
32	.461 6844	35.22	.474 2607	34.66	.486 6436	34.14	.498 8456	33.65
33	.461 8957	35.21	.474 4686	34.65	.486 8484	34.13	.499 0475	33.65
34	.462 1069	35.20	.474 6765	34.64	.487 0532	34.12	.499 2494	33.64
35	1.462 3180	35.19	1.474 8843	34.63	1.487 2579	34.12	1.499 4512	33.63
36	.462 5291	35.18	.475 0921	34.62	.487 4626	34.11	.499 6530	33.62
37	.462 7401	35.17	.475 2998	34.61	.487 6672	34.10	.499 8547	33.62
38	.462 9511	35.16	.475 5075	34.61	.487 8718	34.09	.500 0563	33.61
39	.463 1620	35.15	.475 7151	34.60	.488 0763	34.08	.500 2580	33.60
40	1.463 3729	35.14	1.475 9227	34.59	1.488 2807	34.07	1.500 4595	33.59
41	.463 5837	35.13	.476 1302	34.58	.488 4852	34.07	.500 6611	33.58
42	.463 7944	35.12	.476 3376	34.57	.488 6895	34.06	.500 8625	33.58
43	.464 0051	35.11	.476 5450	34.56	.488 8939	34.05	.501 0640	33.57
44	.464 2158	35.10	.476 7524	34.55	.489 0981	34.04	.501 2654	33.56
45	1.464 4263	35.09	1.476 9596	34.54	1.489 3023	34.03	1.501 4667	33.55
46	.464 6369	35.08	.477 1669	34.54	.489 5065	34.02	.501 6680	33.55
47	.464 8473	35.07	.477 3741	34.53	.489 7106	34.02	.501 8693	33.54
48	.465 0577	35.06	.477 5812	34.52	.489 9147	34.01	.502 0705	33.53
49	.465 2681	35.05	.477 7883	34.51	.490 1187	34.00	.502 2716	33.52
50	1.465 4784	35.04	1.477 9953	34.50	1.490 3227	33.99	1.502 4727	33.51
51	.465 6886	35.04	.478 2023	34.49	.490 5266	33.98	.502 6738	33.51
52	.465 8988	35.03	.478 4092	34.48	.490 7305	33.97	.502 8748	33.50
53	.466 1090	35.02	.478 6161	34.47	.490 9343	33.96	.503 0758	33.49
54	.466 3190	35.01	.478 8229	34.46	.491 1381	33.95	.503 2767	33.48
55	1.466 5290	35.00	1.479 0297	34.46	1.491 3418	33.95	1.503 4776	33.48
56	.466 7390	34.99	.479 2364	34.45	.491 5455	33.94	.503 6784	33.47
57	.466 9489	34.98	.479 4430	34.44	.491 7491	33.93	.503 8792	33.46
58	.467 1587	34.97	.479 6496	34.43	.491 9527	33.92	.504 0800	33.45
59	.467 3685	34.96	.479 8562	34.42	.492 1562	33.91	.504 2807	33.44
60	1.467 5782	34.95	1.480 0627	34.41	1.492 3597	33.91	1.504 4813	33.44

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	44°		45°		46°		47°	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	1.504 4813	33.44	1.516 4390	32.00	1.528 2435	32.59	1.539 9048	32.20
1	.504 6819	33.43	.516 6370	32.99	.528 4390	32.58	.540 0980	32.20
2	.504 8825	33.42	.516 8349	32.98	.528 6344	32.57	.540 2912	32.19
3	.505 0830	33.42	.517 0328	32.98	.528 8299	32.57	.540 4843	32.18
4	.505 2835	33.41	.517 2306	32.97	.529 0252	32.56	.540 6774	32.18
5	1.505 4839	33.40	1.517 4284	32.96	1.529 2206	32.55	1.540 8705	32.17
6	.505 6843	33.39	.517 6262	32.96	.529 4159	32.55	.541 0635	32.17
7	.505 8846	33.39	.517 8239	32.95	.529 6112	32.54	.541 2564	32.16
8	.506 0849	33.38	.518 0216	32.94	.529 8064	32.53	.541 4494	32.15
9	.506 2852	33.37	.518 2192	32.93	.530 0016	32.53	.541 6423	32.15
10	1.506 4854	33.36	1.518 4168	32.93	1.530 1967	32.52	1.541 8352	32.14
11	.506 6855	33.36	.518 6143	32.92	.530 3918	32.51	.542 0280	32.14
12	.506 8856	33.35	.518 8118	32.91	.530 5869	32.51	.542 2208	32.13
13	.507 0857	33.34	.519 0093	32.91	.530 7819	32.50	.542 4135	32.12
14	.507 2857	33.33	.519 2067	32.90	.530 9769	32.49	.542 6063	32.11
15	1.507 4857	33.33	1.519 4041	32.89	1.531 1719	32.49	1.542 7989	32.11
16	.507 6856	33.32	.519 6014	32.89	.531 3668	32.48	.542 9916	32.10
17	.507 8855	33.31	.519 7987	32.88	.531 5616	32.48	.543 1842	32.10
18	.508 0853	33.30	.519 9960	32.87	.531 7565	32.47	.543 3768	32.09
19	.508 2851	33.29	.520 1932	32.86	.531 9513	32.46	.543 5693	32.09
20	1.508 4849	33.29	1.520 3904	32.86	1.532 1460	32.46	1.543 7618	32.08
21	.508 6846	33.28	.520 5875	32.85	.532 3407	32.45	.543 9543	32.08
22	.508 8843	33.27	.520 7846	32.84	.532 5354	32.44	.544 1467	32.07
23	.509 0839	33.27	.520 9816	32.84	.532 7300	32.44	.544 3391	32.06
24	.509 2835	33.26	.521 1786	32.83	.532 9246	32.43	.544 5315	32.06
25	1.509 4830	33.25	1.521 3756	32.82	1.533 1192	32.43	1.544 7238	32.05
26	.509 6825	33.24	.521 5725	32.82	.533 3137	32.42	.544 9161	32.04
27	.509 8819	33.24	.521 7694	32.81	.533 5082	32.42	.545 1083	32.04
28	.510 0813	33.23	.521 9662	32.80	.533 7027	32.41	.545 3005	32.03
29	.510 2807	33.22	.522 1630	32.80	.533 8971	32.40	.545 4927	32.03
30	1.510 4800	33.21	1.522 3598	32.79	1.534 0914	32.39	1.545 6849	32.02
31	.510 6792	33.21	.522 5565	32.78	.534 2858	32.39	.545 8770	32.02
32	.510 8785	33.20	.522 7531	32.78	.534 4801	32.38	.546 0690	32.01
33	.511 0776	33.19	.522 9498	32.78	.534 6743	32.37	.546 2611	32.00
34	.511 2768	33.18	.523 1464	32.77	.534 8685	32.37	.546 4531	32.00
35	1.511 4759	33.18	1.523 3429	32.76	1.535 0627	32.36	1.546 6450	31.99
36	.511 6749	33.17	.523 5394	32.75	.535 2568	32.35	.546 8370	31.98
37	.511 8739	33.16	.523 7359	32.74	.535 4509	32.35	.547 0289	31.98
38	.512 0729	33.15	.523 9323	32.73	.535 6450	32.34	.547 2207	31.97
39	.512 2718	33.15	.524 1287	32.73	.535 8390	32.33	.547 4125	31.97
40	1.512 4707	33.14	1.524 3251	32.72	1.536 0330	32.33	1.547 6043	31.96
41	.512 6695	33.13	.524 5214	32.71	.536 2270	32.32	.547 7961	31.96
42	.512 8683	33.13	.524 7176	32.71	.536 4209	32.32	.547 9878	31.95
43	.513 0670	33.12	.524 9138	32.70	.536 6148	32.31	.548 1795	31.94
44	.513 2657	33.11	.525 1100	32.70	.536 8086	32.30	.548 3711	31.94
45	1.513 4644	33.11	1.525 3062	32.69	1.537 0024	32.30	1.548 5627	31.93
46	.513 6630	33.10	.525 5023	32.68	.537 1962	32.29	.548 7543	31.93
47	.513 8615	33.09	.525 6983	32.67	.537 3899	32.28	.548 9458	31.92
48	.514 0601	33.08	.525 8944	32.67	.537 5836	32.28	.549 1373	31.91
49	.514 2586	33.07	.526 0903	32.66	.537 7772	32.27	.549 3288	31.91
50	1.514 4570	33.07	1.526 2863	32.65	1.537 9708	32.26	1.549 5202	31.90
51	.514 6554	33.06	.526 4822	32.64	.538 1644	32.26	.549 7116	31.90
52	.514 8537	33.05	.526 6780	32.64	.538 3579	32.25	.549 9030	31.89
53	.515 0520	33.05	.526 8739	32.63	.538 5514	32.25	.550 0943	31.88
54	.515 2503	33.04	.527 0696	32.62	.538 7449	32.24	.550 2856	31.88
55	1.515 4485	33.04	1.527 2654	32.62	1.538 9383	32.23	1.550 4769	31.87
56	.515 6467	33.03	.527 4611	32.61	.539 1317	32.23	.550 6681	31.87
57	.515 8449	33.02	.527 6567	32.61	.539 3250	32.22	.550 8593	31.86
58	.516 0430	33.01	.527 8524	32.60	.539 5183	32.21	.551 0504	31.86
59	.516 2410	33.01	.528 0479	32.60	.539 7116	32.21	.551 2416	31.85
60	1.516 4390	33.00	1.528 2435	32.59	1.539 9048	32.20	1.551 4326	31.85

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	48°		49°		50°		51°	
	log M.	Diff. 1''.	log M.	Diff. 1''.	log M.	Diff. 1''.	log M.	Diff. 1''.
0'	1.551 4326	31.85	1.562 8360	31.51	1.574 1234	31.20	1.585 3031	30.91
1	.551 6237	31.84	.563 0250	31.51	.574 3106	31.20	.585 4886	30.91
2	.551 8147	31.83	.563 2140	31.50	.574 4977	31.19	.585 6740	30.90
3	.552 0057	31.83	.563 4030	31.50	.574 6849	31.19	.585 8594	30.90
4	.552 1966	31.82	.563 5920	31.49	.574 8720	31.18	.586 0448	30.89
5	1.552 3876	31.82	1.563 7809	31.48	1.575 0590	31.18	1.586 2302	30.89
6	.552 5784	31.81	.563 9698	31.48	.575 2461	31.17	.586 4155	30.89
7	.552 7693	31.80	.564 1586	31.47	.575 4331	31.17	.586 6008	30.88
8	.552 9601	31.80	.564 3475	31.47	.575 6201	31.16	.586 7859	30.87
9	.553 1508	31.79	.564 5363	31.46	.575 8070	31.16	.586 9713	30.87
10	1.553 3416	31.79	1.564 7250	31.46	1.575 9939	31.15	1.587 1565	30.87
11	.553 5323	31.78	.564 9138	31.45	.576 1808	31.15	.587 3417	30.86
12	.553 7230	31.78	.565 1025	31.45	.576 3677	31.14	.587 5268	30.86
13	.553 9136	31.77	.565 2911	31.44	.576 5546	31.14	.587 7120	30.85
14	.554 1042	31.76	.565 4798	31.44	.576 7414	31.13	.587 8971	30.85
15	1.554 2948	31.76	1.565 6684	31.43	1.576 9281	31.13	1.588 0821	30.84
16	.554 4853	31.75	.565 8569	31.43	.577 1149	31.12	.588 2672	30.84
17	.554 6758	31.75	.566 0455	31.42	.577 3016	31.12	.588 4522	30.83
18	.554 8663	31.74	.566 2340	31.41	.577 4883	31.11	.588 6372	30.83
19	.555 0567	31.74	.566 4225	31.41	.577 6749	31.11	.588 8222	30.83
20	1.555 2472	31.73	1.566 6109	31.40	1.577 8615	31.10	1.589 0071	30.82
21	.555 4375	31.73	.566 7993	31.40	.578 0481	31.10	.589 1920	30.82
22	.555 6279	31.72	.566 9877	31.39	.578 2347	31.09	.589 3769	30.81
23	.555 8182	31.71	.567 1761	31.39	.578 4213	31.09	.589 5618	30.81
24	.556 0084	31.71	.567 3644	31.38	.578 6078	31.08	.589 7466	30.80
25	1.556 1987	31.70	1.567 5527	31.38	1.578 7942	31.08	1.589 9314	30.80
26	.556 3888	31.70	.567 7409	31.37	.578 9807	31.07	.590 1162	30.79
27	.556 5790	31.69	.567 9291	31.37	.579 1671	31.07	.590 3009	30.79
28	.556 7691	31.68	.568 1173	31.36	.579 3535	31.06	.590 4857	30.78
29	.556 9592	31.68	.568 3055	31.36	.579 5399	31.06	.590 6704	30.78
30	1.557 1493	31.67	1.568 4936	31.35	1.579 7262	31.06	1.590 8550	30.78
31	.557 3393	31.67	.568 6817	31.35	.579 9125	31.05	.591 0397	30.77
32	.557 5293	31.66	.568 8698	31.34	.580 0988	31.04	.591 2243	30.77
33	.557 7193	31.66	.569 0579	31.34	.580 2851	31.04	.591 4089	30.76
34	.557 9092	31.65	.569 2459	31.33	.580 4713	31.03	.591 5935	30.76
35	1.558 0991	31.65	1.569 4338	31.33	1.580 6575	31.03	1.591 7780	30.75
36	.558 2890	31.64	.569 6218	31.32	.580 8430	31.03	.591 9625	30.75
37	.558 4788	31.64	.569 8097	31.32	.581 0298	31.02	.592 1470	30.75
38	.558 6686	31.63	.569 9976	31.31	.581 2159	31.02	.592 3315	30.74
39	.558 8584	31.62	.570 1854	31.30	.581 4020	31.01	.592 5159	30.74
40	1.559 0482	31.62	1.570 3733	31.30	1.581 5880	31.01	1.592 7003	30.73
41	.559 2379	31.61	.570 5611	31.29	.581 7740	31.00	.592 8847	30.73
42	.559 4275	31.61	.570 7488	31.29	.581 9600	31.00	.593 0690	30.72
43	.559 6172	31.60	.570 9366	31.28	.582 1460	30.99	.593 2534	30.72
44	.559 8068	31.60	.571 1243	31.28	.582 3319	30.99	.593 4377	30.72
45	1.559 9963	31.59	1.571 3119	31.28	1.582 5179	30.98	1.593 6219	30.71
46	.560 1859	31.59	.571 4996	31.27	.582 7037	30.98	.593 8062	30.71
47	.560 3754	31.58	.571 6872	31.27	.582 8890	30.97	.593 9904	30.70
48	.560 5648	31.57	.571 8748	31.26	.583 0754	30.97	.594 1740	30.70
49	.560 7543	31.57	.572 0623	31.26	.583 2612	30.96	.594 3588	30.69
50	1.560 9437	31.56	1.572 2499	31.25	1.583 4470	30.96	1.594 5429	30.69
51	.561 1331	31.56	.572 4373	31.25	.583 6327	30.95	.594 7270	30.68
52	.561 3224	31.55	.572 6248	31.24	.583 8184	30.95	.594 9111	30.68
53	.561 5117	31.55	.572 8123	31.24	.584 0041	30.94	.595 0952	30.68
54	.561 7010	31.54	.572 9997	31.23	.584 1898	30.94	.595 2792	30.67
55	1.561 8902	31.54	1.573 1870	31.23	1.584 3754	30.94	1.595 4633	30.67
56	.562 0794	31.53	.573 3743	31.22	.584 5610	30.93	.595 6473	30.66
57	.562 2686	31.53	.573 5616	31.22	.584 7466	30.93	.595 8312	30.66
58	.562 4578	31.52	.573 7489	31.21	.584 9321	30.92	.596 0151	30.65
59	.562 6469	31.52	.573 9362	31.21	.585 1176	30.92	.596 1990	30.65
60	1.562 8360	31.51	1.574 1234	31.20	1.585 3031	30.91	1.596 3829	30.65

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	52°		53°		54°		55°	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	1.596 3829	30.65	1.607 3703	30.40	1.618 2724	30.17	1.629 0959	29.96
1	.596 5668	30.64	.607 5527	30.39	.618 4534	30.17	.629 2757	29.96
2	.596 7506	30.64	.607 7350	30.39	.618 6344	30.16	.629 4554	29.96
3	.596 9344	30.63	.607 9174	30.39	.618 8153	30.16	.629 6351	29.95
4	.597 1182	30.63	.608 0997	30.38	.618 9963	30.16	.629 8148	29.95
5	1.597 3020	30.62	1.608 2820	30.38	1.619 1772	30.15	1.629 9945	29.95
6	.597 4857	30.62	.608 4642	30.38	.619 3581	30.15	.630 1742	29.94
7	.597 6694	30.62	.608 6465	30.37	.619 5390	30.15	.630 3538	29.94
8	.597 8531	30.61	.608 8287	30.37	.619 7199	30.14	.630 5335	29.94
9	.598 0368	30.61	.609 0109	30.36	.619 9007	30.14	.630 7131	29.93
10	1.598 2204	30.60	1.609 1931	30.36	1.620 0816	30.14	1.630 8927	29.93
11	.598 4040	30.60	.609 3752	30.36	.620 2623	30.13	.631 0722	29.93
12	.598 5876	30.59	.609 5573	30.35	.620 4431	30.13	.631 2518	29.92
13	.598 7711	30.59	.609 7394	30.35	.620 6239	30.12	.631 4313	29.92
14	.598 9547	30.59	.609 9215	30.34	.620 8046	30.12	.631 6108	29.92
15	1.599 1382	30.58	1.610 1036	30.34	1.620 9853	30.12	1.631 7903	29.91
16	.599 3217	30.58	.610 2856	30.34	.621 1660	30.11	.631 9698	29.91
17	.599 5051	30.57	.610 4676	30.33	.621 3467	30.11	.632 1492	29.91
18	.599 6885	30.57	.610 6496	30.33	.621 5274	30.11	.632 3286	29.90
19	.599 8719	30.57	.610 8315	30.32	.621 7080	30.10	.632 5081	29.90
20	1.600 0553	30.56	1.611 0135	30.32	1.621 8886	30.10	1.632 6875	29.90
21	.600 2387	30.56	.611 1954	30.32	.622 0692	30.10	.632 8668	29.89
22	.600 4220	30.55	.611 3773	30.31	.622 2497	30.09	.633 0462	29.89
23	.600 6053	30.55	.611 5591	30.31	.622 4303	30.09	.633 2255	29.89
24	.600 7886	30.55	.611 7410	30.31	.622 6108	30.09	.633 4048	29.88
25	1.600 9718	30.54	1.611 9228	30.30	1.622 7913	30.08	1.633 5841	29.88
26	.601 1551	30.54	.612 1046	30.30	.622 9718	30.08	.633 7634	29.88
27	.601 3383	30.53	.612 2864	30.29	.623 1523	30.08	.633 9427	29.87
28	.601 5214	30.53	.612 4681	30.29	.623 3327	30.07	.634 1219	29.87
29	.601 7046	30.52	.612 6499	30.29	.623 5131	30.07	.634 3011	29.87
30	1.601 8877	30.52	1.612 8316	30.28	1.623 6935	30.06	1.634 4803	29.86
31	.602 0708	30.52	.613 0132	30.28	.623 8739	30.06	.634 6595	29.86
32	.602 2539	30.51	.613 1949	30.28	.624 0543	30.06	.634 8387	29.86
33	.602 4370	30.51	.613 3765	30.27	.624 2346	30.05	.635 0178	29.86
34	.602 6200	30.50	.613 5582	30.27	.624 4149	30.05	.635 1969	29.85
35	1.602 8030	30.50	1.613 7398	30.26	1.624 5952	30.05	1.635 3760	29.85
36	.602 9860	30.50	.613 9213	30.26	.624 7755	30.04	.635 5551	29.85
37	.603 1690	30.49	.614 1029	30.26	.624 9557	30.04	.635 7342	29.84
38	.603 3519	30.49	.614 2844	30.25	.625 1360	30.04	.635 9132	29.84
39	.603 5348	30.48	.614 4659	30.25	.625 3162	30.03	.636 0922	29.84
40	1.603 7177	30.48	1.614 6474	30.25	1.625 4964	30.03	1.636 2713	29.83
41	.603 9005	30.47	.614 8288	30.24	.625 6765	30.03	.636 4502	29.83
42	.604 0834	30.47	.615 0103	30.24	.625 8567	30.02	.636 6292	29.83
43	.604 2662	30.47	.615 1917	30.23	.626 0368	30.02	.636 8082	29.82
44	.604 4490	30.46	.615 3731	30.23	.626 2169	30.02	.636 9871	29.82
45	1.604 6317	30.46	1.615 5545	30.23	1.626 3970	30.01	1.637 1660	29.82
46	.604 8145	30.45	.615 7358	30.22	.626 5771	30.01	.637 3449	29.82
47	.604 9972	30.45	.615 9171	30.22	.626 7571	30.01	.637 5238	29.81
48	.605 1799	30.45	.616 0984	30.22	.626 9372	30.00	.637 7027	29.81
49	.605 3626	30.44	.616 2797	30.21	.627 1172	30.00	.637 8815	29.81
50	1.605 5452	30.44	1.616 4610	30.21	1.627 2972	30.00	1.638 0603	29.80
51	.605 7278	30.43	.616 6422	30.20	.627 4771	29.99	.638 2391	29.80
52	.605 9104	30.43	.616 8234	30.20	.627 6571	29.99	.638 4179	29.80
53	.606 0930	30.43	.617 0046	30.20	.627 8370	29.99	.638 5967	29.79
54	.606 2755	30.42	.617 1858	30.19	.628 0169	29.98	.638 7754	29.79
55	1.606 4581	30.42	1.617 3669	30.19	1.628 1968	29.98	1.638 9542	29.79
56	.606 6406	30.42	.617 5481	30.19	.628 3766	29.98	.639 1329	29.78
57	.606 8230	30.41	.617 7292	30.18	.628 5565	29.97	.639 3116	29.78
58	.607 0055	30.41	.617 9102	30.18	.628 7363	29.97	.639 4902	29.78
59	.607 1879	30.40	.618 0913	30.17	.628 9161	29.97	.639 6689	29.77
60	1.607 3703	30.40	1.618 2724	30.17	1.629 0959	29.96	1.639 8475	29.77

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	56°		57°		58°		59°	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	1.639 8475	29.77	1.650 5336	29.60	1.661 1601	29.44	1.671 7331	29.30
1	.640 0262	29.77	.650 7112	29.60	.661 3368	29.44	.671 9089	29.30
2	.640 2048	29.77	.650 8887	29.59	.661 5134	29.44	.672 0846	29.30
3	.640 3833	29.76	.651 0663	29.59	.661 6900	29.43	.672 2604	29.29
4	.640 5619	29.76	.651 2438	29.59	.661 8666	29.43	.672 4362	29.29
5	1.640 7405	29.76	1.651 4213	29.58	1.662 0432	29.43	1.672 6119	29.29
6	.640 9190	29.75	.651 5988	29.58	.662 2197	29.43	.672 7876	29.29
7	.641 0975	29.75	.651 7763	29.58	.662 3963	29.42	.672 9634	29.28
8	.641 2760	29.75	.651 9538	29.58	.662 5728	29.42	.673 1391	29.28
9	.641 4545	29.74	.652 1312	29.57	.662 7493	29.42	.673 3147	29.28
10	1.641 6329	29.74	1.652 3086	29.57	1.662 9258	29.42	1.673 4904	29.28
11	.641 8114	29.74	.652 4861	29.57	.663 1023	29.41	.673 6661	29.28
12	.641 9898	29.74	.652 6635	29.57	.663 2788	29.41	.673 8417	29.27
13	.642 1682	29.73	.652 8408	29.56	.663 4553	29.41	.674 0174	29.27
14	.642 3466	29.73	.653 0182	29.56	.663 6317	29.41	.674 1930	29.27
15	1.642 5250	29.73	1.653 1956	29.56	1.663 8082	29.40	1.674 3686	29.27
16	.642 7033	29.72	.653 3729	29.55	.663 9846	29.40	.674 5442	29.27
17	.642 8816	29.72	.653 5502	29.55	.664 1610	29.40	.674 7198	29.26
18	.643 0599	29.72	.653 7275	29.55	.664 3374	29.40	.674 8954	29.26
19	.643 2382	29.71	.653 9048	29.55	.664 5137	29.39	.675 0709	29.26
20	1.643 4165	29.71	1.654 0821	29.54	1.664 6901	29.39	1.675 2465	29.26
21	.643 5948	29.71	.654 2593	29.54	.664 8664	29.39	.675 4220	29.25
22	.643 7730	29.71	.654 4366	29.54	.665 0428	29.39	.675 5975	29.25
23	.643 9513	29.70	.654 6138	29.54	.665 2191	29.39	.675 7730	29.25
24	.644 1295	29.70	.654 7910	29.53	.665 3954	29.38	.675 9485	29.25
25	1.644 3077	29.70	1.654 9682	29.53	1.665 5717	29.38	1.676 1240	29.25
26	.644 4858	29.69	.655 1454	29.53	.665 7480	29.38	.676 2995	29.24
27	.644 6640	29.69	.655 3225	29.53	.665 9242	29.38	.676 4749	29.24
28	.644 8421	29.69	.655 4997	29.52	.666 1005	29.37	.676 6504	29.24
29	.645 0203	29.69	.655 6768	29.52	.666 2767	29.37	.676 8258	29.24
30	1.645 1984	29.68	1.655 8539	29.52	1.666 4529	29.37	1.677 0012	29.24
31	.645 3765	29.68	.656 0310	29.51	.666 6291	29.37	.677 1766	29.23
32	.645 5545	29.68	.656 2081	29.51	.666 8053	29.36	.677 3520	29.23
33	.645 7326	29.67	.656 3852	29.51	.666 9815	29.36	.677 5274	29.23
34	.645 9106	29.67	.656 5622	29.51	.667 1577	29.36	.677 7028	29.23
35	1.646 0886	29.67	1.656 7392	29.50	1.667 3338	29.36	1.677 8781	29.23
36	.646 2666	29.67	.656 9163	29.50	.667 5100	29.35	.678 0535	29.22
37	.646 4449	29.66	.657 0933	29.50	.667 6861	29.35	.678 2288	29.22
38	.646 6229	29.66	.657 2703	29.50	.667 8622	29.35	.678 4041	29.22
39	.646 8005	29.66	.657 4472	29.49	.668 0383	29.35	.678 5794	29.22
40	1.646 9785	29.65	1.657 6242	29.49	1.668 2144	29.35	1.678 7547	29.22
41	.647 1564	29.65	.657 8011	29.49	.668 3904	29.34	.678 9300	29.21
42	.647 3343	29.65	.657 9781	29.49	.668 5665	29.34	.679 1053	29.21
43	.647 5122	29.65	.658 1550	29.48	.668 7425	29.34	.679 2806	29.21
44	.647 6900	29.64	.658 3318	29.48	.668 9185	29.34	.679 4558	29.21
45	1.647 8679	29.64	1.658 5087	29.48	1.669 0945	29.33	1.679 6310	29.20
46	.648 0457	29.64	.658 6855	29.48	.669 2705	29.33	.679 8063	29.20
47	.648 2235	29.63	.658 8624	29.47	.669 4465	29.33	.679 9815	29.20
48	.648 4013	29.63	.659 0393	29.47	.669 6225	29.33	.680 1567	29.20
49	.648 5791	29.63	.659 2161	29.47	.669 7984	29.32	.680 3319	29.20
50	1.648 7569	29.63	1.659 3929	29.47	1.669 9744	29.32	1.680 5070	29.19
51	.648 9346	29.62	.659 5697	29.46	.670 1503	29.32	.680 6822	29.19
52	.649 1123	29.62	.659 7465	29.46	.670 3262	29.32	.680 8574	29.19
53	.649 2901	29.62	.659 9232	29.46	.670 5021	29.32	.681 0325	29.19
54	.649 4677	29.61	.660 1000	29.46	.670 6780	29.31	.681 2076	29.19
55	1.649 6454	29.61	1.660 2767	29.45	1.670 8539	29.31	1.681 3827	29.18
56	.649 8231	29.61	.660 4534	29.45	.671 0298	29.31	.681 5578	29.18
57	.650 0007	29.61	.660 6301	29.45	.671 2056	29.31	.681 7329	29.18
58	.650 1784	29.60	.660 8068	29.45	.671 3814	29.30	.681 9080	29.18
59	.650 3560	29.60	.660 9835	29.44	.671 5573	29.30	.682 0831	29.18
60	1.650 5336	29.60	1.661 1601	29.44	1.671 7331	29.30	1.682 2581	29.17

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	60°		61°		62°		63°	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	1.682 2581	29.17	1.692 7408	29.07	1.703 1866	28.97	1.713 6006	28.89
1	.682 4332	29.17	.692 9152	29.06	.703 3004	28.97	.713 7739	28.89
2	.682 6082	29.17	.693 0896	29.06	.703 5342	28.97	.713 9473	28.89
3	.682 7832	29.17	.693 2640	29.06	.703 7080	28.97	.714 1206	28.88
4	.682 9582	29.17	.693 4383	29.06	.703 8818	28.96	.714 2939	28.88
5	1.683 1332	29.16	1.693 6127	29.06	1.704 0556	28.96	1.714 4672	28.88
6	.683 3082	29.16	.693 7870	29.05	.704 2293	28.96	.714 6405	28.88
7	.683 4832	29.16	.693 9613	29.05	.704 4031	28.96	.714 8138	28.88
8	.683 6581	29.16	.694 1356	29.05	.704 5768	28.96	.714 9870	28.88
9	.683 8331	29.16	.694 3099	29.05	.704 7506	28.96	.715 1603	28.88
10	1.684 0080	29.16	1.694 4842	29.05	1.704 9243	28.96	1.715 3336	28.88
11	.684 1830	29.15	.694 6585	29.04	.705 0981	28.95	.715 5068	28.88
12	.684 3579	29.15	.694 8328	29.04	.705 2718	28.95	.715 6801	28.87
13	.684 5328	29.15	.695 0070	29.04	.705 4455	28.95	.715 8533	28.87
14	.684 7077	29.15	.695 1813	29.04	.705 6192	28.95	.716 0266	28.87
15	1.684 8826	29.14	1.695 3555	29.04	1.705 7929	28.95	1.716 1998	28.87
16	.685 0574	29.14	.695 5298	29.04	.705 9666	28.95	.716 3730	28.87
17	.685 2323	29.14	.695 7040	29.04	.706 1402	28.95	.716 5462	28.87
18	.685 4071	29.14	.695 8782	29.03	.706 3139	28.94	.716 7194	28.87
19	.685 5820	29.14	.696 0524	29.03	.706 4875	28.94	.716 8926	28.87
20	1.685 7568	29.14	1.696 2266	29.03	1.706 6612	28.94	1.717 0658	28.86
21	.685 9316	29.13	.696 4008	29.03	.706 8348	28.94	.717 2390	28.86
22	.686 1064	29.13	.696 5750	29.03	.707 0085	28.94	.717 4122	28.86
23	.686 2812	29.13	.696 7491	29.03	.707 1821	28.94	.717 5853	28.86
24	.686 4560	29.13	.696 9233	29.02	.707 3557	28.94	.717 7585	28.86
25	1.686 6308	29.13	1.697 0974	29.02	1.707 5293	28.93	1.717 9317	28.86
26	.686 8055	29.13	.697 2716	29.02	.707 7029	28.93	.718 1048	28.86
27	.686 9803	29.12	.697 4457	29.02	.707 8765	28.93	.718 2780	28.86
28	.687 1550	29.12	.697 6198	29.02	.708 0501	28.93	.718 4511	28.86
29	.687 3297	29.12	.697 7939	29.02	.708 2237	28.93	.718 6242	28.85
30	1.687 5044	29.12	1.697 9680	29.02	1.708 3972	28.93	1.718 7974	28.85
31	.687 6791	29.12	.698 1421	29.01	.708 5708	28.93	.718 9705	28.85
32	.687 8538	29.11	.698 3162	29.01	.708 7444	28.92	.719 1436	28.85
33	.688 0285	29.11	.698 4902	29.01	.708 9179	28.92	.719 3167	28.85
34	.688 2032	29.11	.698 6643	29.01	.709 0914	28.92	.719 4898	28.85
35	1.688 3778	29.11	1.698 8383	29.01	1.709 2650	28.92	1.719 6629	28.85
36	.688 5525	29.11	.699 0124	29.01	.709 4385	28.92	.719 8360	28.85
37	.688 7271	29.10	.699 1864	29.00	.709 6120	28.92	.720 0090	28.85
38	.688 9017	29.10	.699 3604	29.00	.709 7855	28.92	.720 1821	28.84
39	.689 0764	29.10	.699 5345	29.00	.709 9590	28.92	.720 3552	28.84
40	1.689 2510	29.10	1.699 7085	29.00	1.710 1325	28.91	1.720 5282	28.84
41	.689 4256	29.10	.699 8824	29.00	.710 3060	28.91	.720 7013	28.84
42	.689 6001	29.09	.700 0564	29.00	.710 4794	28.91	.720 8743	28.84
43	.689 7747	29.09	.700 2304	29.00	.710 6529	28.91	.721 0474	28.84
44	.689 9493	29.09	.700 4044	28.99	.710 8263	28.91	.721 2204	28.84
45	1.690 1238	29.09	1.700 5783	28.99	1.710 9998	28.91	1.721 3934	28.84
46	.690 2984	29.09	.700 7523	28.99	.711 1732	28.91	.721 5665	28.84
47	.690 4729	29.09	.700 9262	28.99	.711 3467	28.90	.721 7395	28.84
48	.690 6474	29.09	.701 1001	28.99	.711 5201	28.90	.721 9125	28.83
49	.690 8219	29.08	.701 2741	28.99	.711 6935	28.90	.722 0855	28.83
50	1.690 9964	29.08	1.701 4480	28.98	1.711 8669	28.90	1.722 2585	28.83
51	.691 1709	29.08	.701 6219	28.98	.712 0403	28.90	.722 4315	28.83
52	.691 3454	29.08	.701 7958	28.98	.712 2137	28.90	.722 6044	28.83
53	.691 5199	29.08	.701 9697	28.98	.712 3871	28.90	.722 7774	28.83
54	.691 6943	29.08	.702 1435	28.98	.712 5605	28.90	.722 9504	28.83
55	1.691 8688	29.07	1.702 3174	28.98	1.712 7339	28.90	1.723 1233	28.83
56	.692 0432	29.07	.702 4913	28.98	.712 9072	28.89	.723 2963	28.83
57	.692 2176	29.07	.702 6651	28.97	.713 0806	28.89	.723 4693	28.82
58	.692 3920	29.07	.702 8389	28.97	.713 2539	28.89	.723 6422	28.82
59	.692 5664	29.07	.703 0128	28.97	.713 4273	28.89	.723 8151	28.82
60	1.692 7408	29.07	1.703 1866	28.97	1.713 6006	28.89	1.723 9881	28.82

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	64°		65°		66°		67°	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	1.723 9881	28.82	1.734 3539	28.77	1.744 7031	28.73	1.755 0405	28.70
1	.724 1610	28.82	.734 5265	28.77	.744 8755	28.73	.755 2127	28.70
2	.724 3339	28.82	.734 6991	28.77	.745 0479	28.73	.755 3849	28.70
3	.724 5068	28.82	.734 8718	28.77	.745 2202	28.73	.755 5571	28.70
4	.724 6798	28.82	.735 0444	28.77	.745 3926	28.73	.755 7293	28.70
5	1.724 8527	28.82	1.735 2169	28.76	1.745 5650	28.73	1.755 9015	28.70
6	.725 0256	28.82	.735 3895	28.76	.745 7373	28.73	.756 0737	28.70
7	.725 1984	28.81	.735 5621	28.76	.745 9097	28.73	.756 2459	28.70
8	.725 3713	28.81	.735 7347	28.76	.746 0820	28.72	.756 4181	28.70
9	.725 5442	28.81	.735 9073	28.76	.746 2544	28.72	.756 5903	28.70
10	1.725 7171	28.81	1.736 0798	28.76	1.746 4267	28.72	1.756 7625	28.70
11	.725 8900	28.81	.736 2524	28.76	.746 5991	28.72	.756 9347	28.70
12	.726 0628	28.81	.736 4250	28.76	.746 7714	28.72	.757 1069	28.70
13	.726 2357	28.81	.736 5975	28.76	.746 9437	28.72	.757 2791	28.70
14	.726 4085	28.81	.736 7701	28.76	.747 1161	28.72	.757 4513	28.70
15	1.726 5814	28.81	1.736 9426	28.76	1.747 2884	28.72	1.757 6235	28.70
16	.726 7542	28.81	.737 1152	28.76	.747 4607	28.72	.757 7957	28.70
17	.726 9270	28.81	.737 2877	28.76	.747 6330	28.72	.757 9679	28.70
18	.727 0999	28.80	.737 4602	28.76	.747 8054	28.72	.758 1401	28.70
19	.727 2727	28.80	.737 6328	28.75	.747 9777	28.72	.758 3123	28.70
20	1.727 4455	28.80	1.737 8053	28.75	1.748 1500	28.72	1.758 4844	28.70
21	.727 6183	28.80	.737 9778	28.75	.748 3223	28.72	.758 6566	28.70
22	.727 7911	28.80	.738 1503	28.75	.748 4946	28.72	.758 8288	28.70
23	.727 9639	28.80	.738 3228	28.75	.748 6669	28.72	.759 0010	28.70
24	.728 1367	28.80	.738 4953	28.75	.748 8392	28.72	.759 1731	28.70
25	1.728 3095	28.80	1.738 6679	28.75	1.749 0115	28.72	1.759 3453	28.70
26	.728 4823	28.80	.738 8404	28.75	.749 1838	28.72	.759 5175	28.70
27	.728 6551	28.80	.739 0129	28.75	.749 3561	28.72	.759 6897	28.70
28	.728 8279	28.80	.739 1853	28.75	.749 5284	28.72	.759 8618	28.69
29	.729 0006	28.79	.739 3578	28.75	.749 7007	28.71	.760 0340	28.69
30	1.729 1734	28.79	1.739 5303	28.75	1.749 8730	28.71	1.760 2062	28.69
31	.729 3461	28.79	.739 7028	28.75	.750 0453	28.71	.760 3783	28.69
32	.729 5189	28.79	.739 8753	28.75	.750 2176	28.71	.760 5505	28.69
33	.729 6916	28.79	.740 0477	28.75	.750 3898	28.71	.760 7227	28.69
34	.729 8644	28.79	.740 2202	28.74	.750 5621	28.71	.760 8948	28.69
35	1.730 0371	28.79	1.740 3927	28.74	1.750 7344	28.71	1.761 0670	28.69
36	.730 2099	28.79	.740 5651	28.74	.750 9067	28.71	.761 2392	28.69
37	.730 3826	28.79	.740 7376	28.74	.751 0789	28.71	.761 4113	28.69
38	.730 5553	28.79	.740 9101	28.74	.751 2512	28.71	.761 5835	28.69
39	.730 7280	28.79	.741 0825	28.74	.751 4234	28.71	.761 7556	28.69
40	1.730 9007	28.78	1.741 2550	28.74	1.751 5957	28.71	1.761 9278	28.69
41	.731 0735	28.78	.741 4274	28.74	.751 7680	28.71	.762 0999	28.69
42	.731 2462	28.78	.741 5998	28.74	.751 9402	28.71	.762 2721	28.69
43	.731 4189	28.78	.741 7723	28.74	.752 1125	28.71	.762 4442	28.69
44	.731 5915	28.78	.741 9447	28.74	.752 2847	28.71	.762 6164	28.69
45	1.731 7642	28.78	1.742 1171	28.74	1.752 4570	28.71	1.762 7885	28.69
46	.731 9369	28.78	.742 2896	28.74	.752 6292	28.71	.762 9607	28.69
47	.732 1096	28.78	.742 4620	28.74	.752 8015	28.71	.763 1328	28.69
48	.732 2823	28.78	.742 6344	28.74	.752 9737	28.71	.763 3050	28.69
49	.732 4549	28.78	.742 8068	28.74	.753 1460	28.71	.763 4771	28.69
50	1.732 6276	28.78	1.742 9792	28.74	1.753 3182	28.71	1.763 6493	28.69
51	.732 8002	28.78	.743 1516	28.73	.753 4904	28.71	.763 8214	28.69
52	.732 9729	28.77	.743 3240	28.73	.753 6627	28.71	.763 9936	28.69
53	.733 1455	28.77	.743 4964	28.73	.753 8349	28.71	.764 1657	28.69
54	.733 3182	28.77	.743 6688	28.73	.754 0071	28.70	.764 3379	28.69
55	1.733 4908	28.77	1.743 8412	28.73	1.754 1794	28.70	1.764 5100	28.69
56	.733 6635	28.77	.744 0136	28.73	.754 3516	28.70	.764 6821	28.69
57	.733 8361	28.77	.744 1860	28.73	.754 5238	28.70	.764 8543	28.69
58	.734 0087	28.77	.744 3584	28.73	.754 6960	28.70	.765 0264	28.69
59	.734 1813	28.77	.744 5308	28.73	.754 8682	28.70	.765 1985	28.69
60	1.734 3539	28.77	1.744 7031	28.73	1.755 0405	28.70	1.765 3707	28.69

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	68°		69°		70°		71°	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	1.765 3707	28.69	1.775 6985	28.69	1.786 0284	28.70	1.796 3650	28.73
1	.765 5428	28.69	.775 8706	28.69	.786 2006	28.70	.796 5374	28.73
2	.765 7150	28.69	.776 0427	28.69	.786 3728	28.70	.796 7097	28.73
3	.765 8871	28.69	.776 2149	28.69	.786 5450	28.70	.796 8821	28.73
4	.766 0592	28.69	.776 3870	28.69	.786 7172	28.70	.797 0545	28.73
5	1.766 2314	28.69	1.776 5591	28.69	1.786 8894	28.70	1.797 2268	28.73
6	.766 4035	28.69	.776 7313	28.69	.787 0617	28.70	.797 3992	28.73
7	.766 5756	28.69	.776 9034	28.69	.787 2339	28.70	.797 5716	28.73
8	.766 7478	28.69	.777 0755	28.69	.787 4061	28.70	.797 7440	28.73
9	.766 9199	28.69	.777 2477	28.69	.787 5783	28.70	.797 9164	28.73
10	1.767 0920	28.69	1.777 4198	28.69	1.787 7506	28.70	1.798 0888	28.73
11	.767 2642	28.69	.777 5920	28.69	.787 9228	28.71	.798 2611	28.73
12	.767 4363	28.69	.777 7641	28.69	.788 0950	28.71	.798 4335	28.73
13	.767 6084	28.69	.777 9363	28.69	.788 2673	28.71	.798 6060	28.73
14	.767 7805	28.69	.778 1084	28.69	.788 4395	28.71	.798 7784	28.73
15	1.767 9527	28.69	1.778 2806	28.69	1.788 6117	28.71	1.798 9508	28.73
16	.768 1248	28.69	.778 4527	28.69	.788 7840	28.71	.799 1232	28.74
17	.768 2969	28.69	.778 6248	28.69	.788 9562	28.71	.799 2956	28.74
18	.768 4691	28.69	.778 7970	28.69	.789 1284	28.71	.799 4680	28.74
19	.768 6412	28.69	.778 9691	28.69	.789 3007	28.71	.799 6404	28.74
20	1.768 8133	28.69	1.779 1413	28.69	1.789 4730	28.71	1.799 8128	28.74
21	.768 9854	28.69	.779 3140	28.69	.789 6452	28.71	.799 9853	28.74
22	.769 1576	28.69	.779 4862	28.69	.789 8175	28.71	.800 1577	28.74
23	.769 3297	28.69	.779 6584	28.69	.789 9897	28.71	.800 3301	28.74
24	.769 5018	28.69	.779 8299	28.69	.790 1620	28.71	.800 5026	28.74
25	1.769 6740	28.69	1.780 0021	28.69	1.790 3342	28.71	1.800 6750	28.74
26	.769 8461	28.69	.780 1742	28.69	.790 5065	28.71	.800 8475	28.74
27	.770 0182	28.69	.780 3464	28.69	.790 6788	28.71	.801 0199	28.74
28	.770 1903	28.69	.780 5185	28.69	.790 8510	28.71	.801 1924	28.74
29	.770 3625	28.69	.780 6907	28.69	.791 0233	28.71	.801 3648	28.74
30	1.770 5346	28.69	1.780 8629	28.69	1.791 1956	28.71	1.801 5373	28.74
31	.770 7067	28.69	.781 0350	28.69	.791 3678	28.71	.801 7107	28.74
32	.770 8788	28.69	.781 2072	28.69	.791 5401	28.71	.801 8822	28.74
33	.771 0510	28.69	.781 3793	28.69	.791 7124	28.71	.802 0547	28.75
34	.771 2231	28.69	.781 5515	28.69	.791 8847	28.71	.802 2271	28.75
35	1.771 3952	28.69	1.781 7237	28.69	1.792 0570	28.71	1.802 3996	28.75
36	.771 5673	28.69	.781 8959	28.69	.792 2293	28.71	.802 5721	28.75
37	.771 7395	28.69	.782 0680	28.70	.792 4016	28.72	.802 7446	28.75
38	.771 9116	28.69	.782 2402	28.70	.792 5738	28.72	.802 9171	28.75
39	.772 0837	28.69	.782 4124	28.70	.792 7461	28.72	.803 0896	28.75
40	1.772 2559	28.69	1.782 5845	28.70	1.792 9184	28.72	1.803 2621	28.75
41	.772 4280	28.69	.782 7567	28.70	.793 0907	28.72	.803 4346	28.75
42	.772 6001	28.69	.782 9289	28.70	.793 2630	28.72	.803 6071	28.75
43	.772 7722	28.69	.783 1011	28.70	.793 4354	28.72	.803 7796	28.75
44	.772 9444	28.69	.783 2732	28.70	.793 6077	28.72	.803 9521	28.75
45	1.773 1165	28.69	1.783 4454	28.70	1.793 7800	28.72	1.804 1246	28.75
46	.773 2886	28.69	.783 6176	28.70	.793 9523	28.72	.804 2971	28.75
47	.773 4607	28.69	.783 7898	28.70	.794 1246	28.72	.804 4697	28.75
48	.773 6329	28.69	.783 9620	28.70	.794 2969	28.72	.804 6422	28.76
49	.773 8050	28.69	.784 1342	28.70	.794 4693	28.72	.804 8147	28.76
50	1.773 9771	28.69	1.784 3064	28.70	1.794 6416	28.72	1.804 9873	28.76
51	.774 1493	28.69	.784 4786	28.70	.794 8139	28.72	.805 1598	28.76
52	.774 3214	28.69	.784 6508	28.70	.794 9862	28.72	.805 3324	28.76
53	.774 4935	28.69	.784 8230	28.70	.795 1586	28.72	.805 5049	28.76
54	.774 6657	28.69	.784 9952	28.70	.795 3309	28.72	.805 6775	28.76
55	1.774 8378	28.69	1.785 1674	28.70	1.795 5033	28.72	1.805 8500	28.76
56	.775 0099	28.69	.785 3396	28.70	.795 6756	28.72	.806 0226	28.76
57	.775 1821	28.69	.785 5118	28.70	.795 8480	28.72	.806 1952	28.76
58	.775 3542	28.69	.785 6840	28.70	.796 0203	28.73	.806 3677	28.76
59	.775 5263	28.69	.785 8562	28.70	.796 1927	28.73	.806 5403	28.76
60	1.775 6985	28.69	1.786 0284	28.70	1.796 3650	28.73	1.806 7129	28.76

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	72°		73°		74°		75°	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	1.806 7129	28.76	1.817 0765	28.81	1.827 4602	28.88	1.837 8686	28.95
1	.806 8855	28.76	.817 2494	28.81	.827 6335	28.88	.838 0423	28.95
2	.807 0581	28.77	.817 4222	28.82	.827 8068	28.88	.838 2160	28.95
3	.807 2307	28.77	.817 5951	28.82	.827 9800	28.88	.838 3898	28.95
4	.807 4033	28.77	.817 7680	28.82	.828 1533	28.88	.838 5635	28.96
5	1.807 5759	28.77	1.817 9410	28.82	1.828 3266	28.88	1.838 7372	28.96
6	.807 7485	28.77	.818 1139	28.82	.828 4999	28.88	.838 9110	28.96
7	.807 9211	28.77	.818 2868	82.82	.828 6732	28.88	.839 0847	28.96
8	.808 0937	28.77	.818 4597	82.82	.828 8465	28.88	.839 2585	28.96
9	.808 2663	28.77	.818 6326	82.82	.829 0198	28.89	.839 4323	28.96
10	1.808 4389	28.77	1.818 8056	28.82	1.829 1931	28.89	1.839 6060	28.96
11	.808 6116	28.77	.818 9785	28.82	.829 3665	28.89	.839 7798	28.97
12	.808 7842	28.77	.819 1515	28.83	.829 5398	28.89	.839 9536	28.97
13	.808 9568	28.77	.819 3244	28.83	.829 7131	28.89	.840 1274	28.97
14	.809 1295	28.77	.819 4974	28.83	.829 8865	28.89	.840 3012	28.97
15	1.809 3021	28.78	1.819 6704	28.83	1.830 0599	28.89	1.840 4751	28.97
16	.809 4748	28.78	.819 8433	28.83	.830 2332	28.89	.840 6489	28.97
17	.809 6474	28.78	.820 0163	28.83	.830 4066	28.90	.840 8227	28.97
18	.809 8201	28.78	.820 1893	28.83	.830 5800	28.90	.840 9966	28.97
19	.809 9928	28.78	.820 3623	28.83	.830 7533	28.90	.841 1704	28.98
20	1.810 1655	28.78	1.820 5353	28.83	1.830 9267	28.90	1.841 3443	28.98
21	.810 3381	28.78	.820 7083	28.83	.831 1001	28.90	.841 5182	28.98
22	.810 5108	28.78	.820 8813	28.84	.831 2735	28.90	.841 6921	28.98
23	.810 6835	28.78	.821 0543	28.84	.831 4470	28.90	.841 8659	28.98
24	.810 8562	28.78	.821 2273	28.84	.831 6204	28.90	.842 0398	28.98
25	1.811 0289	28.78	1.821 4003	28.84	1.831 7938	28.91	1.842 2138	28.98
26	.811 2016	28.78	.821 5734	28.84	.831 9672	28.91	.842 3877	28.99
27	.811 3743	28.78	.821 7464	28.84	.832 1407	28.91	.842 5616	28.99
28	.811 5470	28.79	.821 9194	28.84	.832 3141	28.91	.842 7355	28.99
29	.811 7197	28.79	.822 0925	28.84	.832 4876	28.91	.842 9095	28.99
30	1.811 8924	28.79	1.822 2656	28.84	1.832 6611	28.91	1.843 0834	28.99
31	.812 0652	28.79	.822 4386	28.84	.832 8345	28.91	.843 2574	28.99
32	.812 2379	28.79	.822 6117	28.85	.833 0080	28.92	.843 4313	29.00
33	.812 4106	28.79	.822 7848	28.85	.833 1815	28.92	.843 6053	29.00
34	.812 5834	28.79	.822 9578	28.85	.833 3550	28.92	.843 7793	29.00
35	1.812 7561	28.79	1.823 1309	28.85	1.833 5285	28.92	1.843 9533	29.00
36	.812 9289	28.79	.823 3040	28.85	.833 7020	28.92	.844 1273	29.00
37	.813 1016	28.79	.823 4771	28.85	.833 8755	28.92	.844 3013	29.00
38	.813 2744	28.79	.823 6502	28.85	.834 0491	28.92	.844 4753	29.00
39	.813 4472	28.79	.823 8233	28.85	.834 2226	28.92	.844 6494	29.01
40	1.813 6199	28.80	1.823 9965	28.85	1.834 3961	28.92	1.844 8234	29.01
41	.813 7927	28.80	.824 1696	28.85	.834 5697	28.93	.844 9974	29.01
42	.813 9655	28.80	.824 3427	28.86	.834 7432	28.93	.845 1715	29.01
43	.814 1383	28.80	.824 5159	28.86	.834 9168	28.93	.845 3456	29.01
44	.814 3111	28.80	.824 6890	28.86	.835 0904	28.93	.845 5196	29.01
45	1.814 4839	28.80	1.824 8622	28.86	1.835 2640	28.93	1.845 6937	29.01
46	.814 6567	28.80	.825 0353	28.86	.835 4376	28.93	.845 8678	29.02
47	.814 8295	28.80	.825 2085	28.86	.835 6112	28.93	.846 0419	29.02
48	.815 0023	28.80	.825 3816	28.86	.835 7848	28.93	.846 2160	29.02
49	.815 1751	28.80	.825 5548	28.86	.835 9584	28.94	.846 3901	29.02
50	1.815 3479	28.80	1.825 7280	28.86	1.836 1320	28.94	1.846 5643	29.02
51	.815 5208	28.81	.825 9012	28.87	.836 3056	28.94	.846 7384	29.02
52	.815 6936	28.81	.826 0744	28.87	.836 4792	28.94	.846 9125	29.03
53	.815 8664	28.81	.826 2476	28.87	.836 6529	28.94	.847 0867	29.03
54	.816 0393	28.81	.826 4208	28.87	.836 8265	28.94	.847 2609	29.03
55	1.816 2121	28.81	1.826 5940	28.87	1.837 0002	28.94	1.847 4350	29.03
56	.816 3850	28.81	.826 7673	28.87	.837 1739	28.95	.847 6092	29.03
57	.816 5578	28.81	.826 9405	28.87	.837 3475	28.95	.847 7834	29.03
58	.816 7307	28.81	.827 1137	28.87	.837 5212	28.95	.847 9576	29.03
59	.816 9036	28.81	.827 2870	28.87	.837 6949	28.95	.848 1318	29.04
60	1.817 0765	28.81	1.827 4602	28.88	1.837 8686	28.95	1.848 3060	29.04

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	76°		77°		78°		79°	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	1.848 3060	29.04	1.858 7769	29.14	1.869 2857	29.25	1.879 8369	29.37
1	.848 4803	29.04	.858 9517	29.14	.869 4612	29.25	.880 0131	29.37
2	.848 6545	29.04	.859 1266	29.14	.869 6367	29.25	.880 1894	29.38
3	.848 8287	29.04	.859 3014	29.14	.869 8122	29.25	.880 3656	29.38
4	.849 0030	29.04	.859 4763	29.15	.869 9878	29.26	.880 5419	29.38
5	1.849 1773	29.04	1.859 6512	29.15	1.870 1633	29.26	1.880 7182	29.38
6	.849 3515	29.05	.859 8260	29.15	.870 3389	29.26	.880 8945	29.38
7	.849 5258	29.05	.860 0009	29.15	.870 5144	29.26	.881 0708	29.39
8	.849 7001	29.05	.860 1758	29.15	.870 6900	29.26	.881 2471	29.39
9	.849 8744	29.05	.860 3507	29.15	.870 8656	29.26	.881 4235	29.39
10	1.850 0487	29.05	1.860 5256	29.15	1.871 0412	29.27	1.881 5998	29.39
11	.850 2231	29.05	.860 7006	29.16	.871 2168	29.27	.881 7762	29.39
12	.850 3974	29.06	.860 8755	29.16	.871 3924	29.27	.881 9526	29.40
13	.850 5717	29.06	.861 0505	29.16	.871 5681	29.27	.882 1290	29.40
14	.850 7461	29.06	.861 2254	29.16	.871 7437	29.28	.882 3054	29.40
15	1.850 9204	29.06	1.861 4004	29.16	1.871 9194	29.28	1.882 4818	29.40
16	.851 0948	29.06	.861 5754	29.16	.872 0950	29.28	.882 6582	29.41
17	.851 2692	29.06	.861 7504	29.17	.872 2707	29.28	.882 8347	29.41
18	.851 4436	29.07	.861 9254	29.17	.872 4464	29.28	.883 0112	29.41
19	.851 6180	29.07	.862 1004	29.17	.872 6221	29.29	.883 1876	29.41
20	1.851 7924	29.07	1.862 2754	29.17	1.872 7979	29.29	1.883 3641	29.42
21	.851 9668	29.07	.862 4505	29.17	.872 9736	29.29	.883 5406	29.42
22	.852 1412	29.07	.862 6255	29.18	.873 1493	29.29	.883 7171	29.42
23	.852 3157	29.07	.862 8006	29.18	.873 3251	29.29	.883 8937	29.42
24	.852 4901	29.07	.862 9756	29.18	.873 5008	29.30	.884 0702	29.42
25	1.852 6646	29.08	1.863 1507	29.18	1.873 6766	29.30	1.884 2468	29.43
26	.852 8391	29.08	.863 3258	29.18	.873 8524	29.30	.884 4233	29.43
27	.853 0135	29.08	.863 5009	29.18	.874 0282	29.30	.884 5999	29.43
28	.853 1880	29.08	.863 6760	29.19	.874 2041	29.30	.884 7765	29.43
29	.853 3625	29.08	.863 8512	29.19	.874 3799	29.31	.884 9531	29.44
30	1.853 5370	29.09	1.864 0263	29.19	1.874 5557	29.31	1.885 1297	29.44
31	.853 7115	29.09	.864 2015	29.19	.874 7316	29.31	.885 3064	29.44
32	.853 8861	29.09	.864 3766	29.19	.874 9074	29.31	.885 4830	29.44
33	.854 0606	29.09	.864 5518	29.20	.875 0833	29.31	.885 6597	29.45
34	.854 2351	29.09	.864 7270	29.20	.875 2592	29.32	.885 8364	29.45
35	1.854 4097	29.09	1.864 9022	29.20	1.875 4351	29.32	1.886 0131	29.45
36	.854 5843	29.10	.865 0774	29.20	.875 6111	29.32	.886 1898	29.45
37	.854 7588	29.10	.865 2526	29.20	.875 7870	29.32	.886 3665	29.45
38	.854 9334	29.10	.865 4278	29.20	.875 9629	29.32	.886 5432	29.46
39	.855 1080	29.10	.865 6030	29.21	.876 1389	29.33	.886 7200	29.46
40	1.855 2826	29.10	1.865 7783	29.21	1.876 3148	29.33	1.886 8967	29.46
41	.855 4572	29.10	.865 9536	29.21	.876 4908	29.33	.887 0735	29.46
42	.855 6319	29.11	.866 1288	29.21	.876 6668	29.33	.887 2503	29.47
43	.855 8065	29.11	.866 3041	29.21	.876 8428	29.33	.887 4271	29.47
44	.855 9811	29.11	.866 4794	29.22	.877 0188	29.34	.887 6039	29.47
45	1.856 1558	29.11	1.866 6547	29.22	1.877 1949	29.34	1.887 7807	29.47
46	.856 3305	29.11	.866 8301	29.22	.877 3709	29.34	.887 9576	29.48
47	.856 5052	29.11	.867 0054	29.22	.877 5470	29.34	.888 1344	29.48
48	.856 6799	29.12	.867 1807	29.22	.877 7230	29.34	.888 3113	29.48
49	.856 8546	29.12	.867 3561	29.23	.877 8991	29.35	.888 4882	29.48
50	1.857 0293	29.12	1.867 5314	29.23	1.878 0752	29.35	1.888 6651	29.48
51	.857 2040	29.12	.867 7068	29.23	.878 2513	29.35	.888 8420	29.49
52	.857 3787	29.12	.867 8822	29.23	.878 4275	29.35	.889 0189	29.49
53	.857 5534	29.12	.868 0576	29.23	.878 6036	29.35	.889 1959	29.49
54	.857 7282	29.13	.868 2330	29.24	.878 7797	29.36	.889 3728	29.49
55	1.857 9030	29.13	1.868 4084	29.24	1.878 9559	29.36	1.889 5498	29.49
56	.858 0777	29.13	.868 5839	29.24	.879 1321	29.36	.889 7268	29.50
57	.858 2525	29.13	.868 7593	29.24	.879 3082	29.36	.889 9038	29.50
58	.858 4273	29.13	.868 9348	29.24	.879 4844	29.36	.890 0808	29.50
59	.858 6021	29.13	.869 1102	29.25	.879 6606	29.37	.890 2578	29.51
60	1.858 7769	29.14	1.869 2857	29.25	1.879 8369	29.37	1.890 4349	29.51

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	80°		81°		82°		83°	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	1.890 4349	29.51	1.901 0841	29.66	1.911 7893	29.82	1.922 5548	29.99
1	.890 6119	29.51	.901 2621	29.66	.911 9682	29.82	.922 7347	29.99
2	.890 7890	29.51	.901 4400	29.66	.912 1471	29.82	.922 9147	30.00
3	.890 9661	29.51	.901 6180	29.66	.912 3261	29.83	.923 0947	30.00
4	.891 1432	29.52	.901 7960	29.67	.912 5050	29.83	.923 2747	30.00
5	1.891 3203	29.52	1.901 9740	29.67	1.912 6840	29.83	1.923 4548	30.01
6	.891 4974	29.52	.902 1521	29.67	.912 8630	29.84	.923 6348	30.01
7	.891 6745	29.52	.902 3301	29.67	.913 0420	29.84	.923 8149	30.01
8	.891 8517	29.53	.902 5082	29.68	.913 2211	29.84	.923 9950	30.02
9	.892 0289	29.53	.902 6862	29.68	.913 4001	29.84	.924 1751	30.02
10	1.892 2061	29.53	1.902 8643	29.68	1.913 5792	29.85	1.924 3552	30.02
11	.892 3833	29.53	.903 0424	29.69	.913 7583	29.85	.924 5354	30.03
12	.892 5605	29.54	.903 2105	29.69	.913 9374	29.85	.924 7155	30.03
13	.892 7377	29.54	.903 3987	29.69	.914 1165	29.85	.924 8957	30.03
14	.892 9149	29.54	.903 5768	29.69	.914 2956	29.86	.925 0759	30.03
15	1.893 0922	29.54	1.903 7550	29.70	1.914 4748	29.86	1.925 2561	30.04
16	.893 2695	29.55	.903 9332	29.70	.914 6540	29.86	.925 4364	30.04
17	.893 4467	29.55	.904 1114	29.70	.914 8331	29.87	.925 6166	30.04
18	.893 6240	29.55	.904 2896	29.70	.915 0124	29.87	.925 7969	30.05
19	.893 8013	29.55	.904 4678	29.71	.915 1916	29.87	.925 9772	30.05
20	1.893 9787	29.56	1.904 6461	29.71	1.915 3708	29.87	1.926 1575	30.05
21	.894 1560	29.56	.904 8243	29.71	.915 5501	29.88	.926 3378	30.06
22	.894 3334	29.56	.905 0026	29.71	.915 7294	29.88	.926 5182	30.06
23	.894 5108	29.56	.905 1809	29.72	.915 9087	29.88	.926 6986	30.06
24	.894 6882	29.57	.905 3592	29.72	.916 0880	29.89	.926 8789	30.07
25	1.894 8656	29.57	1.905 5376	29.72	1.916 2673	29.89	1.927 0593	30.07
26	.895 0430	29.57	.905 7159	29.73	.916 4466	29.89	.927 2398	30.07
27	.895 2204	29.57	.905 8943	29.73	.916 6260	29.90	.927 4202	30.08
28	.895 3979	29.58	.906 0726	29.73	.916 8054	29.90	.927 6007	30.08
29	.895 5753	29.58	.906 2510	29.73	.916 9848	29.90	.927 7811	30.08
30	1.895 7528	29.58	1.906 4294	29.74	1.917 1642	29.90	1.927 9616	30.08
31	.895 9303	29.58	.906 6079	29.74	.917 3436	29.91	.928 1422	30.09
32	.896 1078	29.59	.906 7863	29.74	.917 5231	29.91	.928 3227	30.09
33	.896 2854	29.59	.906 9648	29.74	.917 7025	29.91	.928 5032	30.09
34	.896 4628	29.59	.907 1432	29.75	.917 8820	29.92	.928 6838	30.10
35	1.896 6404	29.59	1.907 3217	29.75	1.918 0615	29.92	1.928 8644	30.10
36	.896 8180	29.60	.907 5002	29.75	.918 2410	29.92	.929 0450	30.10
37	.896 9955	29.60	.907 6787	29.75	.918 4206	29.92	.929 2256	30.11
38	.897 1732	29.60	.907 8573	29.76	.918 6001	29.93	.929 4063	30.11
39	.897 3508	29.60	.908 0358	29.76	.918 7797	29.93	.929 5869	30.11
40	1.897 5284	29.61	1.908 2144	29.76	1.918 9593	29.93	1.929 7676	30.12
41	.897 7060	29.61	.908 3930	29.77	.919 1389	29.94	.929 9483	30.12
42	.897 8837	29.61	.908 5716	29.77	.919 3185	29.94	.930 1291	30.12
43	.898 0614	29.61	.908 7502	29.77	.919 4982	29.94	.930 3098	30.13
44	.898 2390	29.62	.908 9288	29.77	.919 6778	29.94	.930 4906	30.13
45	1.898 4168	29.62	1.909 1075	29.78	1.919 8575	29.95	1.930 6713	30.13
46	.898 5945	29.62	.909 2862	29.78	.920 0372	29.95	.930 8521	30.13
47	.898 7722	29.62	.909 4648	29.78	.920 2169	29.95	.931 0330	30.14
48	.898 9500	29.63	.909 6436	29.78	.920 3966	29.96	.931 2138	30.14
49	.899 1277	29.63	.909 8223	29.79	.920 5764	29.96	.931 3946	30.14
50	1.899 3055	29.63	1.910 0010	29.79	1.920 7561	29.96	1.931 5755	30.15
51	.899 4833	29.63	.910 1798	29.79	.920 9359	29.97	.931 7564	30.15
52	.899 6611	29.64	.910 3585	29.80	.921 1157	29.97	.931 9373	30.15
53	.899 8389	29.64	.910 5373	29.80	.921 2956	29.97	.932 1183	30.16
54	.900 0168	29.64	.910 7161	29.80	.921 4754	29.98	.932 2992	30.16
55	1.900 1946	29.64	1.910 8949	29.80	1.921 6552	29.98	1.932 4802	30.16
56	.900 3725	29.65	.911 0738	29.81	.921 8351	29.98	.932 6612	30.17
57	.900 5504	29.65	.911 2526	29.81	.922 0150	29.98	.932 8422	30.17
58	.900 7283	29.65	.911 4315	29.81	.922 1949	29.99	.933 0232	30.17
59	.900 9062	29.66	.911 6104	29.82	.922 3748	29.99	.933 2043	30.18
60	1.901 0841	29.66	1.911 7893	29.82	1.922 5548	29.99	1.933 3853	30.18

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	84°			85°			86°			87°		
	log M.	Diff. 1".		log M.	Diff. 1".		log M.	Diff. 1".		log M.	Diff. 1".	
0'	1.933 3853	30.18		1.944 2856	30.38		1.955 2602	30.59		1.966 3140	30.82	
1	.933 5604	30.18		.944 4678	30.38		.955 4438	30.60		.966 4990	30.82	
2	.933 7475	30.19		.944 6502	30.39		.955 6274	30.60		.966 6839	30.83	
3	.933 9287	30.19		.944 8325	30.39		.955 8110	30.60		.966 8689	30.83	
4	.934 1098	30.19		.945 0148	30.39		.955 9946	30.61		.967 0539	30.84	
5	1.934 2910	30.20		1.945 1972	30.40		1.956 1783	30.61		1.967 2389	30.84	
6	.934 4722	30.20		.945 3790	30.40		.956 3619	30.61		.967 4240	30.84	
7	.934 6533	30.20		.945 5620	30.40		.956 5456	30.62		.967 6090	30.85	
8	.934 8346	30.21		.945 7444	30.41		.956 7294	30.62		.967 7941	30.85	
9	.935 0158	30.21		.945 9269	30.41		.956 9131	30.63		.967 9792	30.85	
10	1.935 1971	30.21		1.946 1094	30.41		1.957 0969	30.63		1.968 1644	30.86	
11	.935 3784	30.22		.946 2919	30.42		.957 2807	30.63		.968 3496	30.86	
12	.935 5597	30.22		.946 4744	30.42		.957 4645	30.64		.968 5347	30.87	
13	.935 7410	30.22		.946 6569	30.42		.957 6483	30.64		.968 7200	30.87	
14	.935 9223	30.22		.946 8395	30.43		.957 8322	30.64		.968 9052	30.87	
15	1.936 1037	30.23		1.947 0221	30.43		1.958 0160	30.65		1.969 0905	30.88	
16	.936 2851	30.23		.947 2047	30.44		.958 1999	30.65		.969 2757	30.88	
17	.936 4665	30.23		.947 3873	30.44		.958 3839	30.66		.969 4610	30.89	
18	.936 6479	30.24		.947 5699	30.44		.958 5678	30.66		.969 6464	30.89	
19	.936 8293	30.24		.947 7526	30.45		.958 7518	30.66		.969 8317	30.89	
20	1.937 0108	30.24		1.947 9353	30.45		1.958 9358	30.67		1.970 0171	30.90	
21	.937 1922	30.25		.948 1180	30.45		.959 1198	30.67		.970 2025	30.90	
22	.937 3737	30.25		.948 3007	30.46		.959 3038	30.67		.970 3879	30.91	
23	.937 5553	30.25		.948 4834	30.46		.959 4879	30.68		.970 5734	30.91	
24	.937 7368	30.26		.948 6662	30.46		.959 6720	30.68		.970 7589	30.91	
25	1.937 9184	30.26		1.948 8490	30.47		1.959 8561	30.69		1.970 9443	30.92	
26	.938 0999	30.26		.949 0318	30.47		.960 0402	30.69		.971 1299	30.92	
27	.938 2815	30.27		.949 2146	30.47		.960 2243	30.69		.971 3154	30.93	
28	.938 4632	30.27		.949 3975	30.48		.960 4085	30.70		.971 5010	30.93	
29	.938 6448	30.27		.949 5804	30.48		.960 5927	30.70		.971 6866	30.93	
30	1.938 8264	30.28		1.949 7633	30.48		1.960 7769	30.70		1.971 8722	30.94	
31	.939 0081	30.28		.949 9462	30.49		.960 9612	30.71		.972 0578	30.94	
32	.939 1898	30.28		.950 1291	30.49		.961 1454	30.71		.972 2435	30.95	
33	.939 3715	30.29		.950 3121	30.50		.961 3297	30.71		.972 4292	30.95	
34	.939 5533	30.29		.950 4951	30.50		.961 5140	30.72		.972 6149	30.95	
35	1.939 7350	30.29		1.950 6781	30.50		1.961 6983	30.72		1.972 8006	30.96	
36	.939 9168	30.30		.950 8611	30.51		.961 8827	30.73		.972 9864	30.96	
37	.940 0986	30.30		.951 0441	30.51		.962 0671	30.73		.973 1722	30.97	
38	.940 2804	30.30		.951 2272	30.51		.962 2515	30.73		.973 3580	30.97	
39	.940 4623	30.31		.951 4103	30.52		.962 4359	30.74		.973 5438	30.97	
40	1.940 6441	30.31		1.951 5934	30.52		1.962 6203	30.74		1.973 7297	30.98	
41	.940 8260	30.31		.951 7766	30.52		.962 8048	30.75		.973 9156	30.98	
42	.941 0079	30.32		.951 9597	30.53		.962 9893	30.75		.974 1015	30.99	
43	.941 1898	30.32		.952 1429	30.53		.963 1738	30.75		.974 2874	30.99	
44	.941 3717	30.32		.952 3261	30.53		.963 3583	30.76		.974 4734	30.99	
45	1.941 5537	30.33		1.952 5093	30.54		1.963 5429	30.76		1.974 6593	31.00	
46	.941 7357	30.33		.952 6925	30.54		.963 7275	30.77		.974 8454	31.00	
47	.941 9177	30.34		.952 8758	30.55		.963 9121	30.77		.975 0314	31.01	
48	.942 0997	30.34		.953 0591	30.55		.964 0967	30.77		.975 2174	31.01	
49	.942 2817	30.34		.953 2424	30.55		.964 2814	30.78		.975 4035	31.01	
50	1.942 4638	30.35		1.953 4257	30.56		1.964 4660	30.78		1.975 5896	31.02	
51	.942 6459	30.35		.953 6091	30.56		.964 6507	30.78		.975 7757	31.02	
52	.942 8280	30.35		.953 7924	30.56		.964 8354	30.79		.975 9619	31.03	
53	.943 0101	30.36		.953 9758	30.57		.965 0202	30.79		.976 1481	31.03	
54	.943 1923	30.36		.954 1592	30.57		.965 2050	30.80		.976 3343	31.04	
55	1.943 3744	30.36		1.954 3427	30.57		1.965 3897	30.80		1.976 5205	31.04	
56	.943 5566	30.37		.954 5262	30.58		.965 5746	30.80		.976 7067	31.04	
57	.943 7388	30.37		.954 7096	30.58		.965 7594	30.81		.976 8930	31.05	
58	.943 9211	30.37		.954 8931	30.59		.965 9442	30.81		.977 0793	31.05	
59	.944 1033	30.38		.955 0766	30.59		.966 1291	30.81		.977 2656	31.06	
60	1.944 2856	30.38		1.955 2602	30.59		1.966 3140	30.82		1.977 4520	31.06	

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	88°		89°		90°		91°	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	1.977 4520	31.06	1.988 6789	31.31	2.000 0000	31.58	2.011 4203	31.87
1	.977 6383	31.06	.988 8668	31.32	.000 1895	31.59	.011 6115	31.87
2	.977 8247	31.07	.989 0548	31.32	.000 3790	31.59	.011 8027	31.88
3	.978 0112	31.07	.989 2427	31.33	.000 5686	31.60	.011 9940	31.88
4	.978 1976	31.08	.989 4307	31.33	.000 7582	31.60	.012 1853	31.89
5	1.978 3841	31.08	1.989 6187	31.34	2.000 9478	31.60	2.012 3766	31.89
6	.978 5706	31.08	.989 8067	31.34	.001 1375	31.61	.012 5680	31.89
7	.978 7571	31.09	.989 9948	31.34	.001 3272	31.61	.012 7594	31.90
8	.978 9436	31.09	.990 1829	31.35	.001 5169	31.62	.012 9508	31.90
9	.979 1302	31.10	.990 3710	31.35	.001 7066	31.62	.013 1422	31.91
10	1.979 3168	31.10	1.990 5591	31.36	2.001 8963	31.63	2.013 3337	31.91
11	.979 5034	31.11	.990 7473	31.36	.002 0861	31.63	.013 5252	31.92
12	.979 6901	31.11	.990 9355	31.37	.002 2759	31.64	.013 7167	31.92
13	.979 8768	31.11	.991 1237	31.37	.002 4658	31.64	.013 9083	31.93
14	.980 0635	31.12	.991 3119	31.38	.002 6557	31.65	.014 0999	31.93
15	1.980 2502	31.12	1.991 5002	31.38	1.002 8456	31.65	2.014 2915	31.94
16	.980 4369	31.13	.991 6885	31.38	.003 0355	31.66	.014 4831	31.94
17	.980 6237	31.13	.991 8768	31.39	.003 2254	31.66	.014 6748	31.95
18	.980 8105	31.13	.992 0651	31.39	.003 4154	31.67	.014 8665	31.95
19	.980 9973	31.14	.992 2535	31.40	.003 6054	31.67	.015 0582	31.96
20	1.981 1842	31.14	1.992 4419	31.40	2.003 7955	31.68	2.015 2500	31.96
21	.981 3710	31.15	.992 6304	31.41	.003 9855	31.68	.015 4418	31.97
22	.981 5579	31.15	.992 8188	31.41	.004 1756	31.68	.015 6336	31.97
23	.981 7449	31.16	.993 0073	31.42	.004 3658	31.69	.015 8255	31.98
24	.981 9318	31.16	.993 1958	31.42	.004 5559	31.69	.016 0174	31.98
25	1.982 1188	31.16	1.993 3843	31.42	1.004 7461	31.70	2.016 2093	31.99
26	.982 3058	31.17	.993 5729	31.43	.004 9363	31.70	.016 4012	31.99
27	.982 4928	31.17	.993 7615	31.43	.005 1265	31.71	.016 5932	32.00
28	.982 6798	31.18	.993 9501	31.44	.005 3168	31.71	.016 7852	32.00
29	.982 8669	31.18	.994 1387	31.44	.005 5071	31.72	.016 9772	32.01
30	1.983 0540	31.18	1.994 3274	31.45	2.005 6974	31.72	2.017 1693	32.01
31	.983 2411	31.19	.994 5161	31.45	.005 8878	31.73	.017 3614	32.02
32	.983 4283	31.19	.994 7048	31.46	.006 0781	31.73	.017 5535	32.02
33	.983 6155	31.20	.994 8936	31.46	.006 2685	31.74	.017 7456	32.03
34	.983 8027	31.20	.995 0823	31.46	.006 4590	31.74	.017 9378	32.03
35	1.983 9899	31.21	1.995 2711	31.47	2.006 6494	31.75	2.018 1300	32.04
36	.984 1772	31.21	.995 4600	31.47	.006 8399	31.75	.018 3223	32.04
37	.984 3644	31.22	.995 6488	31.48	.007 0304	31.76	.018 5145	32.05
38	.984 5517	31.22	.995 8377	31.48	.007 2210	31.76	.018 7068	32.05
39	.984 7391	31.22	.996 0266	31.49	.007 4116	31.77	.018 8992	32.06
40	1.984 9264	31.23	1.996 2155	31.49	2.007 6022	31.77	2.019 0915	32.06
41	.985 1138	31.23	.996 4045	31.50	.007 7928	31.77	.019 2839	32.07
42	.985 3012	31.24	.996 5935	31.50	.007 9835	31.78	.019 4763	32.07
43	.985 4886	31.24	.996 7825	31.51	.008 1742	31.78	.019 6688	32.08
44	.985 6761	31.24	.996 9716	31.51	.008 3649	31.79	.019 8613	32.08
45	1.985 8636	31.25	1.997 1606	31.51	2.008 5556	31.79	2.020 0538	32.09
46	.986 0511	31.25	.997 3497	31.52	.008 7464	31.80	.020 2463	32.09
47	.986 2386	31.26	.997 5389	31.52	.008 9372	31.80	.020 4389	32.10
48	.986 4262	31.26	.997 7280	31.53	.009 1280	31.81	.020 6315	32.10
49	.986 6138	31.27	.997 9172	31.53	.009 3189	31.81	.020 8241	32.11
50	1.986 8014	31.27	1.998 1064	31.54	0.009 5098	31.82	2.021 0168	32.11
51	.986 9890	31.28	.998 2956	31.54	.009 7007	31.82	.021 2095	32.12
52	.987 1767	31.28	.998 4849	31.55	.009 8917	31.83	.021 4022	32.12
53	.987 3644	31.28	.998 6742	31.55	.010 0826	31.83	.021 5949	32.13
54	.987 5521	31.29	.998 8635	31.56	.010 2736	31.84	.021 7877	32.13
55	1.987 7398	31.29	1.999 0529	31.56	2.010 4647	31.84	2.021 9805	32.14
56	.987 9276	31.30	.999 2422	31.56	.010 6557	31.85	.022 1734	32.14
57	.988 1154	31.30	.999 4316	31.57	.010 8468	31.85	.022 3662	32.15
58	.988 3032	31.31	.999 6211	31.57	.011 0380	31.86	.022 5591	32.15
59	.988 4911	31.31	.999 8105	31.58	.011 2291	31.86	.022 7521	32.16
60	1.988 6789	31.31	2.000 0000	31.58	2.011 4203	31.87	2.022 9450	32.16

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	92°		93°		94°		95°	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	2.022 9450	32.16	2.034 5797	32.48	2.046 3296	32.80	2.058 2005	33.15
1	.023 1380	32.17	.034 7745	32.48	.046 5264	32.81	.058 3994	33.15
2	.023 3311	32.17	.034 9694	32.49	.046 7233	32.82	.058 5983	33.16
3	.023 5241	32.18	.035 1644	32.49	.046 9202	32.82	.058 7973	33.16
4	.023 7172	32.18	.035 3593	32.50	.047 1172	32.83	.058 9963	33.17
5	2.023 9103	32.19	2.035 5543	32.50	2.047 3141	32.83	2.059 1953	33.18
6	.024 1035	32.19	.035 7494	32.51	.047 5111	32.84	.059 3944	33.18
7	.024 2967	32.20	.035 9444	32.51	.047 7082	32.84	.059 5935	33.19
8	.024 4899	32.20	.036 1395	32.52	.047 9053	32.85	.059 7927	33.19
9	.024 6831	32.21	.036 3347	32.52	.048 1024	32.85	.059 9919	33.20
10	2.024 8764	32.21	2.036 5298	32.53	2.048 2995	32.86	2.060 1911	33.21
11	.025 0697	32.22	.036 7250	32.53	.048 4967	32.87	.060 3904	33.21
12	.025 2630	32.22	.036 9202	32.54	.048 6939	32.87	.060 5897	33.22
13	.025 4564	32.23	.037 1155	32.54	.048 8912	32.88	.060 7890	33.22
14	.025 6498	32.23	.037 3108	32.55	.049 0884	32.88	.060 9884	33.23
15	2.025 8432	32.24	2.037 5061	32.55	2.049 2857	32.89	2.061 1878	33.24
16	.026 0367	32.24	.037 7015	32.56	.049 4831	32.89	.061 3872	33.24
17	.026 2301	32.25	.037 8969	32.57	.049 6805	32.90	.061 5867	33.25
18	.026 4236	32.26	.038 0923	32.57	.049 8879	32.90	.061 7862	33.25
19	.026 6172	32.26	.038 2877	32.58	.050 0753	32.91	.061 9857	33.26
20	2.026 8108	32.27	2.038 4812	32.58	2.050 2728	32.92	2.062 1853	33.27
21	.027 0044	32.27	.038 6787	32.59	.050 4703	32.92	.062 3849	33.27
22	.027 1980	32.28	.038 8743	32.59	.050 6679	32.93	.062 5846	33.28
23	.027 3917	32.28	.039 0699	32.60	.050 8655	32.93	.062 7842	33.28
24	.027 5854	32.29	.039 2655	32.61	.051 0631	32.94	.062 9840	33.29
25	2.027 7791	32.29	2.039 4611	32.61	2.051 2608	32.95	2.063 1837	33.30
26	.027 9729	32.30	.039 6568	32.62	.051 4585	32.95	.063 3835	33.30
27	.028 1667	32.30	.039 8525	32.62	.051 6562	32.96	.063 5833	33.31
28	.028 3605	32.31	.040 0482	32.63	.051 8539	32.96	.063 7832	33.31
29	.028 5544	32.31	.040 2440	32.63	.052 0517	32.97	.063 9831	33.32
30	2.028 7483	32.32	2.040 4399	32.64	2.052 2496	32.97	2.064 1831	33.33
31	.028 9422	32.32	.040 6357	32.64	.052 4474	32.98	.064 3830	33.33
32	.029 1361	32.33	.040 8316	32.65	.052 6453	32.98	.064 5830	33.34
33	.029 3301	32.33	.041 0275	32.65	.052 8432	32.99	.064 7831	33.34
34	.029 5241	32.34	.041 2234	32.66	.053 0412	33.00	.064 9832	33.35
35	2.029 7182	32.34	2.041 4194	32.67	2.053 2392	33.00	2.065 1833	33.36
36	.029 9123	32.35	.041 6154	32.67	.053 4372	33.01	.065 3834	33.36
37	.030 1064	32.35	.041 8114	32.68	.053 6353	33.01	.065 5836	33.37
38	.030 3005	32.36	.042 0075	32.68	.053 8334	33.02	.065 7839	33.37
39	.030 4947	32.36	.042 2036	32.69	.054 0315	33.03	.065 9841	33.38
40	2.030 6889	32.37	2.042 3998	32.69	2.054 2297	33.03	2.066 1844	33.39
41	.030 8831	32.37	.042 5960	32.70	.054 4279	33.04	.066 3847	33.39
42	.031 0774	32.38	.042 7922	32.70	.054 6262	33.04	.066 5851	33.40
43	.031 2717	32.39	.042 9884	32.71	.054 8244	33.05	.066 7855	33.40
44	.031 4660	32.39	.043 1847	32.71	.055 0227	33.05	.066 9860	33.41
45	2.031 6604	32.40	2.043 3810	32.72	2.055 2211	33.06	2.067 1865	33.42
46	.031 8548	32.40	.043 5773	32.73	.055 4195	33.07	.067 3870	33.42
47	.032 0492	32.41	.043 7737	32.73	.055 6179	33.07	.067 5875	33.43
48	.032 2437	32.41	.043 9701	32.74	.055 8163	33.08	.067 7881	33.43
49	.032 4382	32.42	.044 1665	32.74	.056 0148	33.08	.067 9887	33.44
50	2.032 6327	32.42	2.044 3630	32.75	2.056 2133	33.09	2.068 1894	33.45
51	.032 8272	32.43	.044 5595	32.75	.056 4119	33.10	.068 3901	33.45
52	.033 0218	32.43	.044 7561	32.76	.056 6105	33.10	.068 5908	33.46
53	.033 2164	32.44	.044 9526	32.76	.056 8091	33.11	.068 7916	33.47
54	.033 4111	32.44	.045 1492	32.77	.057 0078	33.11	.068 9924	33.47
55	2.033 6058	32.45	2.045 3459	32.78	2.057 2065	33.12	2.069 1933	33.48
56	.033 8005	32.45	.045 5426	32.78	.057 4052	33.12	.069 3942	33.48
57	.033 9952	32.46	.045 7393	32.79	.057 6040	33.13	.069 5951	33.49
58	.034 1900	32.47	.045 9360	32.79	.057 8028	33.14	.069 7960	33.50
59	.034 3848	32.47	.046 1328	32.80	.058 0016	33.14	.069 9970	33.50
60	2.034 5797	32.48	2.046 3296	32.80	2.058 2005	33.15	2.070 1980	33.51

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	96 ⁰		97 ⁰		98 ⁰		99 ⁰	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	2.070 1980	33.51	2.082 3282	33.88	2.094 5971	34.28	2.107 0109	34.69
1	.070 3991	33.51	.082 5316	33.89	.094 8028	34.29	.107 2190	34.70
2	.070 6002	33.52	.082 7349	33.90	.095 0085	34.29	.107 4272	34.70
3	.070 8014	33.53	.082 9383	33.90	.095 2143	34.30	.107 6355	34.71
4	.071 0025	33.53	.083 1418	33.91	.095 4201	34.31	.107 8437	34.72
5	2.071 2037	33.54	2.083 3453	33.92	2.095 6260	34.31	2.108 0521	34.72
6	.071 4050	33.54	.083 5488	33.92	.095 8318	34.32	.108 2604	34.73
7	.071 6063	33.55	.083 7523	33.93	.096 0378	34.33	.108 4689	34.74
8	.071 8076	33.56	.083 9559	33.94	.096 2438	34.33	.108 6773	34.75
9	.072 0090	33.56	.084 1596	33.94	.096 4498	34.34	.108 8858	34.75
10	2.072 2104	33.57	2.084 3633	33.95	2.096 6558	34.35	2.109 0944	34.76
11	.072 4118	33.58	.084 5670	33.96	.096 8619	34.35	.109 3029	34.77
12	.072 6133	33.58	.084 7707	38.96	.097 0681	34.36	.109 5116	34.77
13	.072 8148	33.59	.084 9745	33.97	.097 2742	34.37	.109 7202	34.78
14	.073 0163	33.59	.085 1783	33.98	.097 4804	34.37	.109 9289	34.79
15	2.073 2179	33.60	2.085 3822	33.98	2.097 6867	34.38	2.110 1377	34.80
16	.073 4195	33.61	.085 5861	33.99	.097 8930	34.39	.110 3465	34.80
17	.073 6212	33.61	.085 7901	33.99	.098 0993	34.39	.110 5553	34.81
18	.073 8229	33.62	.085 9941	34.00	.098 3057	34.40	.110 7642	34.82
19	.074 0246	33.63	.086 1981	34.01	.098 5121	34.41	.110 9731	34.82
20	2.074 2264	33.63	2.086 4021	34.01	2.098 7186	34.41	2.111 1821	34.83
21	.074 4282	33.64	.086 6062	34.02	.098 9251	34.42	.111 3911	34.84
22	.074 6301	33.64	.086 8104	34.03	.099 1316	34.43	.111 6001	34.85
23	.074 8320	33.65	.087 0146	34.03	.099 3382	34.43	.111 8092	34.85
24	.075 0339	33.66	.087 2188	34.04	.099 5449	34.44	.112 0184	34.86
25	2.075 2358	33.66	2.087 4231	34.05	2.099 7515	34.45	2.112 2275	34.87
26	.075 4378	33.67	.087 6274	34.05	.099 9582	34.45	.112 4368	34.87
27	.075 6399	33.67	.087 8317	34.06	.100 1650	34.46	.112 6460	34.88
28	.075 8419	33.68	.088 0361	34.07	.100 3718	34.47	.112 8553	34.89
29	.076 0440	33.69	.088 2405	34.07	.100 5786	34.48	.113 0647	34.90
30	2.076 2462	33.69	2.088 4449	34.08	2.100 7855	34.48	2.113 2741	34.90
31	.076 4484	33.70	.088 6494	34.09	.100 9924	34.49	.113 4835	34.91
32	.076 6507	33.71	.088 8540	34.09	.101 1993	34.50	.113 6930	34.92
33	.076 8529	33.71	.089 0586	34.10	.101 4063	34.50	.113 9025	34.92
34	.077 0552	33.72	.089 2632	34.11	.101 6134	34.51	.114 1121	34.93
35	2.077 2575	33.73	2.089 4678	34.11	2.101 8204	34.52	2.114 3217	34.94
36	.077 4599	33.73	.089 6725	34.12	.102 0276	34.52	.114 5313	34.95
37	.077 6623	33.74	.089 8772	34.12	.102 2347	34.53	.114 7410	34.95
38	.077 8647	33.74	.090 0820	34.13	.102 4419	34.54	.114 9508	34.96
39	.078 0672	33.75	.090 2868	34.14	.102 6492	34.54	.115 1605	34.97
40	2.078 2697	33.76	2.090 4917	34.15	2.102 8564	34.55	2.115 3704	34.97
41	.078 4723	33.76	.090 6966	34.15	.103 0638	34.56	.115 5802	34.98
42	.078 6749	33.77	.090 9015	34.16	.103 2711	34.56	.115 7901	34.99
43	.078 8775	33.78	.091 1065	34.17	.103 4785	34.57	.116 0001	35.00
44	.079 0802	33.78	.091 3115	34.17	.103 6860	34.58	.116 2101	35.00
45	2.079 2829	33.79	2.091 5165	34.18	2.103 8935	34.59	2.116 4201	35.01
46	.079 4857	33.80	.091 7216	34.19	.104 1010	34.59	.116 6301	35.02
47	.079 6885	33.80	.091 9268	34.19	.104 3086	34.60	.116 8403	35.02
48	.079 8913	33.81	.092 1319	34.20	.104 5162	34.61	.117 0505	35.03
49	.080 0942	33.81	.092 3371	34.20	.104 7239	34.61	.117 2607	35.04
50	2.080 2971	33.82	2.092 5424	34.21	2.104 9316	34.62	2.117 4710	35.05
51	.080 5000	33.83	.092 7477	34.22	.105 1393	34.63	.117 6813	35.05
52	.080 7030	33.83	.092 9530	34.22	.105 3471	34.63	.117 8916	35.06
53	.080 9060	33.84	.093 1584	34.23	.105 5549	34.64	.118 1020	35.07
54	.081 1091	33.85	.093 3638	34.24	.105 7628	34.65	.118 3124	35.08
55	2.081 3122	33.85	2.093 5692	34.25	2.105 9707	34.66	2.118 5229	35.08
56	.081 5153	33.86	.093 7747	34.25	.106 1786	34.66	.118 7334	35.09
57	.081 7185	33.87	.093 9803	34.26	.106 3866	34.67	.118 9440	35.10
58	.081 9217	33.87	.094 1858	34.27	.106 5947	34.68	.119 1546	35.10
59	.082 1249	33.88	.094 3914	34.27	.106 8027	34.68	.119 3652	35.11
60	2.082 3282	33.88	2.094 5971	34.28	2.107 0109	34.69	2.119 5759	35.12

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	100°		101°		102°		103°	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	2.119 5759	35.12	2.132 2989	35.57	2.145 1866	36.03	2.158 2460	36.52
1	.119 7867	35.13	.132 5123	35.57	.145 4028	36.04	.158 4652	36.53
2	.119 9974	35.13	.132 7258	35.58	.145 6191	36.05	.158 6844	36.54
3	.120 2083	35.14	.132 9393	35.59	.145 8354	36.06	.158 9036	36.55
4	.120 4191	35.15	.133 1529	35.60	.146 0518	36.07	.159 1229	36.55
5	2.120 6301	35.16	2.133 3665	35.61	2.146 2682	36.07	2.159 3423	36.56
6	.120 8410	35.16	.133 5802	35.61	.146 4847	36.08	.159 5617	36.57
7	.121 0520	35.17	.133 7939	35.62	.146 7012	36.09	.159 7811	36.58
8	.121 2630	35.18	.134 0076	35.63	.146 9178	36.10	.160 0006	36.59
9	.121 4741	35.19	.134 2214	35.64	.147 1344	36.11	.160 2202	36.60
10	2.121 6853	35.19	2.134 4352	35.64	2.147 3510	36.11	2.160 4398	36.60
11	.121 8965	35.20	.134 6491	35.65	.147 5677	36.12	.160 6594	36.61
12	.122 1077	35.21	.134 8631	35.66	.147 7845	36.13	.160 8791	36.62
13	.122 3190	35.21	.135 0770	35.67	.148 0013	36.14	.161 0989	36.63
14	.122 5303	35.22	.135 2910	35.67	.148 2182	36.15	.161 3187	36.64
15	2.122 7416	35.23	2.135 5051	35.68	2.148 4351	36.15	2.161 5385	36.65
16	.122 9530	35.24	.135 7192	35.69	.148 6520	36.16	.161 7584	36.65
17	.123 1644	35.24	.135 9334	35.70	.148 8690	36.17	.161 9784	36.66
18	.123 3759	35.25	.136 1476	35.71	.149 0861	36.18	.162 1984	36.67
19	.123 5875	35.26	.136 3619	35.71	.149 3032	36.19	.162 4185	36.68
20	2.123 7990	35.27	2.136 5762	35.72	2.149 5203	36.19	2.162 6386	36.69
21	.124 0107	35.27	.136 7905	35.73	.149 7375	36.20	.162 8587	36.70
22	.124 2223	35.28	.137 0049	35.74	.149 9547	36.21	.163 0789	36.70
23	.124 4340	35.29	.137 2193	35.74	.150 1720	36.22	.163 2992	36.71
24	.124 6458	35.30	.137 4338	35.75	.150 3893	36.23	.163 5195	36.72
25	2.124 8576	35.30	2.137 6484	35.76	2.150 6067	36.23	2.163 7398	36.73
26	.125 0694	35.31	.137 8630	35.77	.150 8242	36.24	.163 9602	36.74
27	.125 2813	35.32	.138 0776	35.77	.151 0417	36.25	.164 1807	36.74
28	.125 4933	35.33	.138 2922	35.78	.151 2592	36.26	.164 4012	36.75
29	.125 7052	35.33	.138 5070	35.79	.151 4768	36.27	.164 6218	36.76
30	2.125 9173	35.34	2.138 7217	35.80	2.151 6944	36.28	2.164 8424	36.77
31	.126 1293	35.35	.138 9365	35.81	.151 9121	36.28	.165 0630	36.78
32	.126 3414	35.35	.139 1514	35.81	.152 1298	36.29	.165 2837	36.79
33	.126 5536	35.36	.139 3663	35.82	.152 3476	36.30	.165 5045	36.80
34	.126 7658	35.37	.139 5813	35.83	.152 5654	36.31	.165 7253	36.81
35	2.126 9780	35.38	2.139 7963	35.84	2.152 7833	36.32	2.165 9462	36.81
36	.127 1903	35.39	.140 0113	35.84	.153 0012	36.32	.166 1671	36.82
37	.127 4027	35.39	.140 2264	35.85	.153 2192	36.33	.166 3881	36.83
38	.127 6151	35.40	.140 4415	35.86	.153 4372	36.34	.166 6091	36.84
39	.127 8275	35.41	.140 6567	35.87	.153 6552	36.35	.166 8301	36.85
40	2.128 0400	35.42	2.140 8720	35.88	2.153 8734	36.35	2.167 0513	36.86
41	.128 2525	35.42	.141 0873	35.88	.154 0915	36.36	.167 2724	36.87
42	.128 4650	35.43	.141 3026	35.89	.154 3097	36.37	.167 4936	36.87
43	.128 6776	35.44	.141 5180	35.90	.154 5280	36.38	.167 7149	36.88
44	.128 8903	35.45	.141 7334	35.91	.154 7463	36.39	.167 9362	36.89
45	2.129 1030	35.45	2.141 9489	35.92	2.154 9647	36.40	2.168 1576	36.90
46	.129 3157	35.46	.142 1644	35.92	.155 1831	36.41	.168 3790	36.91
47	.129 5285	35.47	.142 3799	35.93	.155 4015	36.41	.168 6005	36.92
48	.129 7414	35.48	.142 5955	35.94	.155 6200	36.42	.168 8220	36.93
49	.129 9542	35.48	.142 8112	35.95	.155 8386	36.43	.169 0436	36.93
50	2.130 1672	35.49	2.143 0269	35.96	2.156 0572	36.44	2.169 2652	36.94
51	.130 3801	35.50	.143 2427	35.96	.156 2759	36.45	.169 4869	36.95
52	.130 5931	35.51	.143 4585	35.97	.156 4946	36.46	.169 7087	36.96
53	.130 8062	35.51	.143 6743	35.98	.156 7133	36.46	.169 9304	36.97
54	.131 0193	35.52	.143 8902	35.99	.156 9321	36.47	.170 1523	36.98
55	2.131 2325	35.53	2.144 1062	36.00	2.157 1510	36.48	2.170 3742	36.99
56	.131 4457	35.54	.144 3222	36.00	.157 3699	36.49	.170 5961	36.99
57	.131 6589	35.54	.144 5382	36.01	.157 5889	36.50	.170 8181	37.00
58	.131 8722	35.55	.144 7543	36.02	.157 8079	36.50	.171 0401	37.01
59	.132 0855	35.56	.144 9704	36.03	.158 0269	36.51	.171 2622	37.02
60	2.132 2989	35.57	2.145 1866	36.03	2.158 2460	36.52	2.171 4844	37.03

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	104°		105°		106°		107°	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	2.171 4844	37.03	2.184 9092	37.56	2.198 5282	38.11	2.212 3493	38.68
1	.171 7066	37.04	.185 1346	37.57	.198 7568	38.12	.212 5814	38.69
2	.171 9288	37.05	.185 3600	37.57	.198 9856	38.13	.212 8136	38.70
3	.172 1511	37.05	.185 5855	37.58	.199 2144	38.14	.213 0458	38.71
4	.172 3735	37.06	.185 8110	37.59	.199 4432	38.14	.213 2781	38.72
5	2.172 5959	37.07	2.186 0366	37.60	2.199 6721	38.15	2.213 5104	38.73
6	.172 8184	37.08	.186 2622	37.61	.199 9010	38.16	.213 7428	38.74
7	.173 0409	37.09	.186 4879	37.62	.200 1300	38.17	.213 9753	38.75
8	.173 2634	37.10	.186 7137	37.63	.200 3591	38.18	.214 2078	38.76
9	.173 4860	37.11	.186 9395	37.64	.200 5882	38.19	.214 4404	38.77
10	2.173 7087	37.12	2.187 1653	37.65	2.200 8174	38.20	2.214 6730	38.78
11	.173 9314	37.12	.187 3912	37.66	.201 0467	38.21	.214 9057	38.79
12	.174 1542	37.13	.187 6172	37.67	.201 2760	38.22	.215 1385	38.80
13	.174 3770	37.14	.187 8432	37.67	.201 5053	38.23	.215 3713	38.81
14	.174 5999	37.15	.188 0693	37.68	.201 7347	38.24	.215 6042	38.82
15	2.174 8228	37.16	2.188 2954	37.69	2.201 9642	38.25	2.215 8371	38.83
16	.175 0458	37.17	.188 5216	37.70	.202 1937	38.26	.216 0701	38.84
17	.175 2688	37.18	.188 7478	37.71	.202 4233	38.27	.216 3032	38.85
18	.175 4919	37.18	.188 9741	37.72	.202 6529	38.28	.216 5363	38.86
19	.175 7150	37.19	.189 2005	37.73	.202 8826	38.29	.216 7694	38.87
20	2.175 9382	37.20	2.189 4269	37.74	2.203 1123	38.30	2.217 0027	38.88
21	.176 1615	37.21	.189 6533	37.75	.203 3421	38.31	.217 2360	38.89
22	.176 3848	37.22	.189 8798	37.76	.203 5720	38.31	.217 4693	38.90
23	.176 6081	37.23	.190 1064	37.77	.203 8019	38.32	.217 7027	38.91
24	.176 8315	37.24	.190 3330	37.77	.204 0319	38.33	.217 9362	38.92
25	2.177 0550	37.25	2.190 5597	37.78	2.204 2619	38.34	2.218 1697	38.93
26	.177 2785	37.25	.190 7864	37.79	.204 4920	38.35	.218 4033	38.94
27	.177 5020	37.26	.191 0132	37.80	.204 7222	38.36	.218 6369	38.95
28	.177 7256	37.27	.191 2401	37.81	.204 9524	38.37	.218 8706	38.96
29	.177 9493	37.28	.191 4670	37.82	.205 1826	38.38	.219 1044	38.97
30	2.178 1730	37.29	2.191 6939	37.83	2.205 4129	38.39	2.219 3382	38.98
31	.178 3968	37.30	.191 9209	37.84	.205 6433	38.40	.219 5721	38.99
32	.178 6206	37.31	.192 1480	37.85	.205 8737	38.41	.219 8061	39.00
33	.178 8445	37.32	.192 3751	37.86	.206 1042	38.42	.220 0401	39.01
34	.179 0684	37.33	.192 6023	37.87	.206 3348	38.43	.220 2741	39.02
35	2.179 2924	37.33	2.192 8295	37.88	2.206 5654	38.44	2.220 5082	39.03
36	.179 5164	37.34	.193 0568	37.88	.206 7961	38.45	.220 7424	39.04
37	.179 7405	37.35	.193 2841	37.89	.207 0268	38.46	.220 9767	39.05
38	.179 9646	37.36	.193 5115	37.90	.207 2575	38.47	.221 2110	39.06
39	.180 1888	37.37	.193 7389	37.91	.207 4884	38.48	.221 4453	39.07
40	2.180 4131	37.38	2.193 9664	37.92	2.207 7193	38.49	2.221 6797	39.08
41	.180 6374	37.39	.194 1940	37.93	.207 9502	38.50	.221 9142	39.09
42	.180 8617	37.40	.194 4216	37.94	.208 1812	38.51	.222 1488	39.10
43	.181 0861	37.41	.194 6493	37.95	.208 4123	38.52	.222 3834	39.11
44	.181 3106	37.41	.194 8770	37.96	.208 6434	38.53	.222 6180	39.12
45	2.181 5351	37.42	2.195 1048	37.97	2.208 8746	38.54	2.222 8528	39.13
46	.181 7597	37.43	.195 3326	37.98	.209 1058	38.54	.223 0876	39.14
47	.181 9843	37.44	.195 5605	37.99	.209 3371	38.55	.223 3224	39.15
48	.182 1089	37.45	.195 7885	38.00	.209 5685	38.56	.223 5573	39.16
49	.182 4337	37.46	.196 0165	38.00	.209 7999	38.57	.223 7923	39.17
50	2.182 6584	37.47	2.196 2445	38.01	2.210 0314	38.58	2.224 0273	39.18
51	.182 8833	37.48	.196 4726	38.02	.210 2629	38.59	.224 2624	39.19
52	.183 1082	37.49	.196 7008	38.03	.210 4945	38.60	.224 4975	39.20
53	.183 3331	37.49	.196 9290	38.04	.210 7261	38.61	.224 7327	39.21
54	.183 5581	37.50	.197 1573	38.05	.210 9578	38.62	.224 9680	39.22
55	2.183 7831	37.51	2.197 3856	38.06	2.211 1896	38.63	2.225 2033	39.23
56	.184 0082	37.52	.197 6140	38.07	.211 4214	38.64	.225 4387	39.24
57	.184 2334	37.53	.197 8425	38.08	.211 6533	38.65	.225 6741	39.25
58	.184 4586	37.54	.198 0710	38.09	.211 8852	38.66	.225 9096	39.26
59	.184 6839	37.55	.198 2995	38.10	.212 1172	38.67	.226 1452	39.27
60	2.184 9092	37.56	2.198 5282	38.11	2.212 3493	38.68	2.226 3808	39.28

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	108°		109°		110°		111°	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	2.226 3808	39.28	2.240 6314	39.90	2.255 1099	40.54	2.269 8255	41.21
1	.226 6165	39.29	.240 8708	39.91	.255 3532	40.55	.270 0728	41.23
2	.226 8523	39.30	.241 1103	39.92	.255 5965	40.56	.270 3202	41.24
3	.227 0881	39.31	.241 3498	39.93	.255 8399	40.58	.270 5676	41.25
4	.227 3240	39.32	.241 5894	39.94	.256 0834	40.59	.270 8152	41.26
5	2.227 5599	39.33	2.241 8291	29.95	2.256 3270	40.60	2.271 0628	41.27
6	.227 7959	39.34	.242 0688	39.96	.256 5706	40.61	.271 3104	41.28
7	.228 0320	39.35	.242 3086	39.97	.256 8143	40.62	.271 5582	41.29
8	.228 2681	39.36	.242 5485	39.98	.257 0580	40.63	.271 8060	41.30
9	.228 5043	39.37	.242 7884	39.99	.257 3019	40.64	.272 0538	41.32
10	2.228 7405	39.38	2.243 0284	40.00	2.257 5458	40.65	2.272 3018	41.33
11	.228 9768	39.39	.243 2685	40.01	.257 7897	40.66	.272 5498	41.34
12	.229 2131	39.40	.243 5086	40.02	.258 0337	40.68	.272 7979	41.35
13	.229 4496	39.41	.243 7488	40.03	.258 2778	40.69	.273 0460	41.36
14	.229 6861	39.42	.243 9890	40.05	.258 5220	40.70	.273 2942	41.38
15	2.229 9226	39.43	2.244 2293	40.06	2.258 7662	40.71	2.273 5425	41.39
16	.230 1592	39.44	.244 4697	40.07	.259 0105	40.72	.273 7909	41.40
17	.230 3959	39.45	.244 7101	40.08	.259 2548	40.73	.274 0393	41.41
18	.230 6326	39.46	.244 9506	40.09	.259 4992	40.74	.274 2878	41.42
19	.230 8694	39.47	.245 1912	40.10	.259 7437	40.75	.274 5364	41.43
20	2.231 1063	39.48	2.245 4318	40.11	2.259 9883	40.76	2.274 7850	41.44
21	.231 3432	39.49	.245 6725	40.12	.260 2329	40.78	.275 0337	41.46
22	.231 5802	39.50	.245 9132	40.13	.260 4776	40.79	.275 2825	41.47
23	.231 8172	39.51	.246 1541	40.14	.260 7223	40.80	.275 5313	41.48
24	.232 0543	39.52	.246 3949	40.15	.260 9671	40.81	.275 7802	41.49
25	2.232 2915	39.53	2.246 6359	40.16	2.261 2120	40.82	2.276 0292	41.50
26	.232 5287	39.54	.246 8769	40.17	.261 4570	40.83	.276 2783	41.51
27	.232 7660	39.55	.247 1180	40.18	.261 7020	40.84	.276 5274	41.53
28	.233 0033	39.56	.247 3591	40.19	.261 9471	40.85	.276 7766	41.54
29	.233 2407	39.57	.247 6003	40.21	.262 1922	40.86	.277 0258	41.55
30	2.233 4782	39.58	2.247 8416	40.22	2.262 4374	40.88	2.277 2752	41.56
31	.233 7157	39.59	.248 0829	40.23	.262 6827	40.89	.277 5246	41.57
32	.233 9533	39.60	.248 3243	40.24	.262 9281	40.90	.277 7740	41.58
33	.234 1910	39.61	.248 5658	40.25	.263 1735	40.91	.278 0236	41.60
34	.234 4287	39.63	.248 8073	40.26	.263 4190	40.92	.278 2732	41.61
35	2.234 6665	39.64	2.249 0489	40.27	2.263 6645	40.93	2.278 5229	41.62
36	.234 9043	39.65	.249 2906	40.28	.263 9102	40.94	.278 7726	41.63
37	.235 1422	39.66	.249 5323	40.29	.264 1559	40.95	.279 0224	41.64
38	.235 3802	39.67	.249 7741	40.30	.264 4016	40.96	.279 2723	41.65
39	.235 6183	39.68	.250 0159	40.31	.264 6474	40.98	.279 5223	41.67
40	2.235 8563	39.69	2.250 2578	40.32	2.264 8933	40.99	2.279 7723	41.68
41	.236 0945	39.70	.250 4998	40.34	.265 1393	41.00	.280 0224	41.69
42	.236 3327	39.71	.250 7419	40.35	.265 3853	41.01	.280 2726	41.70
43	.236 5710	39.72	.250 9840	40.36	.265 6314	41.02	.280 5228	41.71
44	.236 8093	39.73	.251 2262	40.37	.265 8776	41.03	.280 7731	41.72
45	2.237 0478	39.74	2.251 4684	40.38	2.266 1238	41.04	2.281 0235	41.74
46	.237 2862	39.75	.251 7107	40.39	.266 3701	41.06	.281 2740	41.75
47	.237 5247	39.76	.251 9531	40.40	.266 6165	41.07	.281 5245	41.76
48	.237 7633	39.77	.252 1955	40.41	.266 8629	41.08	.281 7751	41.77
49	.238 0020	39.78	.252 4380	40.42	.267 1094	41.09	.282 0258	41.78
50	2.238 2407	39.79	2.252 6806	40.43	2.267 3560	41.10	2.282 2765	41.80
51	.238 4795	39.80	.252 9232	40.44	.267 6026	41.11	.282 5273	41.81
52	.238 7284	39.81	.253 1659	40.46	.267 8493	41.12	.282 7782	41.82
53	.238 9573	39.82	.253 4087	40.47	.268 0961	41.13	.283 0291	41.83
54	.239 1962	39.83	.253 6515	40.48	.268 3430	41.15	.283 2801	41.84
55	2.239 4353	39.84	2.253 8944	40.49	2.268 5899	41.16	2.283 5312	41.85
56	.239 6744	39.86	.254 1374	40.50	.268 8369	41.17	.283 7824	41.87
57	.239 9135	39.87	.254 3804	40.51	.269 0839	41.18	.284 0336	41.88
58	.240 1528	39.88	.254 6235	40.52	.269 3310	41.19	.284 2849	41.89
59	.240 3921	39.89	.254 8666	40.53	.269 5782	41.20	.284 5363	41.90
60	2.240 6314	39.90	2.255 1099	40.54	2.269 8255	41.21	2.284 7878	41.91

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	112°			113°			114°			115°		
	log M.	Diff. 1".		log M.	Diff. 1".		log M.	Diff. 1".		log M.	Diff. 1".	
0'	2.284 7878	41.91		2.300 0067	42.64		2.315 4927	43.40		2.331 2564	44.18	
1	.285 0393	41.93		.300 2626	42.65		.315 7531	43.41		.331 5216	44.20	
2	.285 2909	41.94		.300 5186	42.67		.316 0136	43.42		.331 7868	44.21	
3	.285 5425	41.95		.300 7746	42.68		.316 2742	43.44		.332 0521	44.22	
4	.285 7943	41.96		.301 0307	42.69		.316 5348	43.45		.332 3175	44.24	
5	2.286 0461	41.97		2.301 2869	42.70		2.316 7956	43.46		2.332 5830	44.25	
6	.286 2979	41.99		.301 5431	42.72		.317 0564	43.47		.332 8485	44.26	
7	.286 5499	42.00		.301 7995	42.73		.317 3173	43.49		.333 1141	44.28	
8	.286 8019	42.01		.302 0559	42.74		.317 5782	43.50		.333 3799	44.29	
9	.287 0540	42.02		.302 3123	42.75		.317 8393	43.51		.333 6456	44.31	
10	2.287 3062	42.03		2.302 5689	42.76		2.318 1004	43.53		2.333 9115	44.32	
11	.287 5584	42.04		.302 8255	42.78		.318 3616	43.54		.334 1775	44.33	
12	.287 8107	42.06		.303 0822	42.79		.318 6229	43.55		.334 4435	44.34	
13	.288 0631	42.07		.303 3390	42.80		.318 8842	43.56		.334 7096	44.36	
14	.288 3155	42.08		.303 5958	42.81		.319 1456	43.58		.334 9758	44.37	
15	2.288 5680	42.09		2.303 8528	42.83		2.319 4072	43.59		2.335 2421	44.39	
16	.288 8206	42.10		.304 1098	42.84		.319 6687	43.60		.335 5084	44.40	
17	.289 0733	42.12		.304 3668	42.85		.319 9304	43.62		.335 7749	44.41	
18	.289 3260	42.13		.304 6240	42.86		.320 1921	43.63		.336 0414	44.43	
19	.289 5788	42.14		.304 8812	42.88		.320 4540	43.64		.336 3080	44.44	
20	2.289 8317	42.15		2.305 1385	42.89		2.320 7159	43.66		2.336 5747	44.45	
21	.290 0847	42.16		.305 3959	42.90		.320 9778	43.67		.336 8414	44.47	
22	.290 3377	42.18		.305 6533	42.91		.321 2399	43.68		.337 1083	44.48	
23	.290 5908	42.19		.305 9109	42.93		.321 5020	43.69		.337 3752	44.49	
24	.290 8440	42.20		.306 1685	42.94		.321 7642	43.70		.337 6422	44.51	
25	2.291 0972	42.21		2.306 4261	42.95		2.322 0265	43.72		2.337 9093	44.52	
26	.291 3505	42.22		.306 6839	42.96		.322 2889	43.73		.338 1705	44.53	
27	.291 6039	42.24		.306 9417	42.98		.322 5513	43.75		.338 4437	44.55	
28	.291 8574	42.25		.307 1996	42.99		.322 8139	43.76		.338 7111	44.56	
29	.292 1109	42.26		.307 4576	43.00		.323 0765	43.77		.338 9785	44.58	
30	2.292 3645	42.27		2.307 7157	43.02		2.323 3391	43.79		2.339 2460	44.59	
31	.292 6182	42.29		.307 9738	43.03		.323 6019	43.80		.339 5135	44.60	
32	.292 8719	42.30		.308 2320	43.04		.323 8647	43.81		.339 7812	44.62	
33	.293 1258	42.31		.308 4903	43.05		.324 1277	43.83		.340 0490	44.63	
34	.293 3797	42.32		.308 7486	43.07		.324 3907	43.84		.340 3168	44.64	
35	2.293 6336	42.33		2.309 0071	43.08		2.324 6537	43.85		2.340 5847	44.66	
36	.293 8877	42.35		.309 2650	43.09		.324 9169	43.87		.340 8527	44.67	
37	.294 1418	42.36		.309 5242	43.10		.325 1801	43.88		.341 1207	44.69	
38	.294 3960	42.37		.309 7828	43.12		.325 4434	43.89		.341 3889	44.70	
39	.294 6503	42.38		.310 0416	43.13		.325 7068	43.91		.341 6571	44.71	
40	2.294 9046	42.40		2.310 3004	43.14		2.325 9703	43.92		2.341 9255	44.73	
41	.295 1590	42.41		.310 5593	43.15		.326 2339	43.93		.342 1939	44.74	
42	.295 4135	42.42		.310 8182	43.17		.326 4975	43.94		.342 4623	44.75	
43	.295 6680	42.43		.311 0773	43.18		.326 7612	43.96		.342 7309	44.77	
44	.295 9227	42.44		.311 3364	43.19		.327 0250	43.97		.342 9995	44.78	
45	2.296 1774	42.46		2.311 5956	43.21		2.327 2889	43.98		2.343 2683	44.80	
46	.296 4321	42.47		.311 8549	43.22		.327 5528	44.00		.343 5371	44.81	
47	.296 6870	42.48		.312 1142	43.23		.327 8168	44.01		.343 8060	44.82	
48	.296 9419	42.49		.312 3736	43.24		.328 0809	44.02		.344 0750	44.84	
49	.297 1969	42.51		.312 6331	43.26		.328 3451	44.04		.344 3440	44.85	
50	2.297 4520	42.52		2.312 8927	43.27		2.328 6094	44.05		2.344 6132	44.86	
51	.297 7071	42.53		.313 1524	43.28		.328 8737	44.06		.344 8824	44.88	
52	.297 9623	42.54		.313 4121	43.29		.329 1382	44.08		.345 1517	44.89	
53	.298 2176	42.55		.313 6719	43.31		.329 4027	44.09		.345 4211	44.91	
54	.298 4730	42.57		.313 9318	43.32		.329 6672	44.10		.345 6906	44.92	
55	2.298 7284	42.58		2.314 1917	43.33		2.329 9319	44.12		2.345 9601	44.93	
56	.298 9839	42.59		.314 4518	43.35		.330 1967	44.13		.346 2298	44.95	
57	.299 2395	42.60		.314 7119	43.36		.330 4615	44.14		.346 4995	44.96	
58	.299 4952	42.61		.314 9721	43.37		.330 7264	44.16		.346 7693	44.97	
59	.299 7509	42.63		.315 2323	43.38		.330 9914	44.17		.347 0392	44.99	
60	2.300 0067	42.64		2.315 4927	43.40		2.331 2564	44.18		2.347 3092	45.00	

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	116°		117°		118°		119°	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	2.347 3002	45.00	2.363 6626	45.86	2.380 3290	46.74	2.397 3210	47.66
1	.347 5792	45.02	.363 9378	45.87	.380 6095	46.76	.397 6070	47.68
2	.347 8494	45.03	.364 2131	45.88	.380 8901	46.77	.397 8931	47.70
3	.348 1196	45.04	.364 4885	45.90	.381 1708	46.79	.398 1794	47.71
4	.348 3899	45.06	.364 7039	45.91	.381 4515	46.80	.398 4657	47.73
5	2.348 6603	45.07	2.365 0394	45.93	2.381 7324	46.82	2.398 7521	47.74
6	.348 9308	45.09	.365 3150	45.94	.382 0133	46.83	.399 0386	47.76
7	.349 2014	45.10	.365 5907	45.96	.382 2944	46.85	.399 3252	47.77
8	.349 4720	45.11	.365 8665	45.97	.382 5755	46.86	.399 6119	47.79
9	.349 7428	45.13	.366 1423	45.99	.382 8567	46.88	.399 8987	47.81
10	2.350 0136	45.14	2.366 4183	46.00	2.383 1380	46.89	2.400 1856	47.82
11	.350 2845	45.16	.366 6944	46.01	.383 4194	46.91	.400 4725	47.84
12	.350 5554	45.17	.366 9705	46.03	.383 7009	46.92	.400 7596	47.85
13	.350 8265	45.18	.367 2467	46.04	.383 9825	46.94	.401 0468	47.87
14	.351 0977	45.20	.367 5230	46.06	.384 2642	46.95	.401 3340	47.89
15	2.351 3689	45.21	2.367 7994	46.07	2.384 5460	46.97	2.401 6214	47.90
16	.351 6402	45.23	.368 0759	46.09	.384 8278	46.98	.401 9088	47.92
17	.351 9116	45.24	.368 3525	46.10	.385 1098	46.99	.402 1964	47.93
18	.352 1831	45.25	.368 6291	46.12	.385 3918	47.01	.402 4840	47.95
19	.352 4547	45.27	.368 9059	46.13	.385 6739	47.03	.402 7718	47.97
20	2.352 7263	45.28	2.369 1827	46.15	2.385 9562	47.05	2.403 0596	47.98
21	.352 9981	45.30	.369 4596	46.16	.386 2385	47.06	.403 3475	48.00
22	.353 2699	45.31	.369 7367	46.18	.386 5209	47.08	.403 6356	48.01
23	.353 5418	45.33	.370 0138	46.19	.386 8034	47.09	.403 9237	48.03
24	.353 8138	45.34	.370 2909	46.21	.387 0860	47.11	.404 2119	48.04
25	2.354 0859	45.35	2.370 5682	46.22	2.387 3687	47.12	2.404 5002	48.06
26	.354 3581	45.37	.370 8456	46.24	.387 6514	47.14	.404 7886	48.08
27	.354 6303	45.38	.371 1230	46.25	.387 9343	47.15	.405 0771	48.09
28	.354 9027	45.40	.371 4006	46.26	.388 2173	47.17	.405 3657	48.11
29	.355 1751	45.41	.371 6782	46.28	.388 5003	47.18	.405 6544	48.12
30	2.355 4476	45.42	2.371 9559	46.29	2.388 7835	47.20	2.405 9432	48.14
31	.355 7202	45.44	.372 2337	46.31	.389 0667	47.21	.406 2321	48.16
32	.355 9928	45.45	.372 5116	46.32	.389 3500	47.23	.406 5211	48.17
33	.356 2656	45.47	.372 7896	46.34	.389 6335	47.24	.406 8102	48.19
34	.356 5385	45.48	.373 0677	46.35	.389 9170	47.26	.407 0993	48.20
35	2.356 8114	45.50	2.373 3459	46.37	2.390 2006	47.28	2.407 3886	48.22
36	.357 0844	45.51	.373 6241	46.38	.390 4843	47.29	.407 6780	48.24
37	.357 3575	45.52	.373 9024	46.40	.390 7681	47.31	.407 9674	48.25
38	.357 6307	45.54	.374 1809	46.41	.391 0519	47.32	.408 2570	48.27
39	.357 9040	45.55	.374 4594	46.43	.391 3359	47.34	.408 5467	48.28
40	2.358 1773	45.57	2.374 7380	46.44	2.391 6200	47.35	2.408 8364	48.30
41	.358 4508	45.58	.375 0167	46.46	.391 9042	47.37	.409 1263	48.32
42	.358 7243	45.60	.375 2955	46.47	.392 1884	47.38	.409 4162	48.33
43	.358 9979	45.61	.375 5744	46.49	.392 4728	47.40	.409 7063	48.35
44	.359 2716	45.62	.375 8533	46.50	.392 7572	47.41	.409 9964	48.37
45	2.359 5454	45.64	2.376 1324	46.51	2.393 0417	47.43	2.410 2866	48.38
46	.359 8193	45.65	.376 4115	46.53	.393 3264	47.45	.410 5770	48.40
47	.360 0933	45.67	.376 6908	46.55	.393 6111	47.46	.410 8674	48.41
48	.360 3673	45.68	.376 9701	46.56	.393 8959	47.48	.411 1579	48.43
49	.360 6415	45.70	.377 2495	46.58	.394 1808	47.49	.411 4486	48.45
50	2.360 9157	45.71	2.377 5290	46.59	2.394 4658	47.51	2.411 7393	48.46
51	.361 1900	45.72	.377 8086	46.60	.394 7509	47.52	.412 0301	48.48
52	.361 4644	45.74	.378 0883	46.62	.395 0361	47.54	.412 3210	48.49
53	.361 7389	45.75	.378 3681	46.64	.395 3214	47.55	.412 6120	48.51
54	.362 0134	45.77	.378 6479	46.65	.395 6067	47.57	.412 9031	48.53
55	2.362 2881	45.78	2.378 9279	46.67	2.395 8922	47.59	2.413 1944	48.54
56	.362 5628	45.80	.379 2079	46.68	.396 1778	47.60	.413 4857	48.56
57	.362 8376	45.81	.379 4881	46.70	.396 4634	47.62	.413 7771	48.58
58	.363 1126	45.82	.379 7683	46.71	.396 7492	47.63	.414 0686	48.59
59	.363 3876	45.84	.380 0486	46.73	.397 0350	47.65	.414 3602	48.61
60	2.363 6626	45.86	2.380 3290	46.74	2.397 3210	47.66	2.414 6519	48.62

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	120°		121°		122°		123°	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	2.414 6519	48.62	2.432 3356	49.62	2.450 3868	50.67	2.468 8205	51.75
1	.414 9437	48.64	.432 6334	49.64	.450 6908	50.68	.469 1311	51.77
2	.415 2356	48.66	.432 9313	49.66	.450 9950	50.70	.469 4418	51.79
3	.415 5276	48.67	.433 2293	49.68	.451 2992	50.72	.469 7526	51.81
4	.415 8197	48.69	.433 5274	49.69	.451 6036	50.74	.470 0634	51.82
5	2.416 1119	48.71	2.433 8257	49.71	2.451 9081	50.75	2.470 3744	51.84
6	.416 4042	48.72	.434 1240	49.73	.452 2127	50.77	.470 6856	51.86
7	.416 6965	48.74	.434 4224	49.74	.452 5174	50.79	.470 9968	51.88
8	.416 9890	48.76	.434 7209	49.76	.452 8222	50.81	.471 3081	51.90
9	.417 2816	48.77	.435 0195	49.78	.453 1271	50.83	.471 6196	51.92
10	2.417 5743	48.79	2.435 3182	49.80	2.453 4321	50.84	2.471 9311	51.94
11	.417 8671	48.81	.435 6171	49.81	.453 7372	50.86	.472 2428	51.95
12	.418 1600	48.82	.435 9160	49.83	.454 0424	50.88	.472 5540	51.97
13	.418 4529	48.84	.436 2150	49.85	.454 3477	50.90	.472 8665	51.99
14	.418 7460	48.85	.436 5141	49.86	.454 6532	50.92	.473 1785	52.01
15	2.419 0392	48.87	2.436 8134	49.88	2.454 9587	50.93	2.473 4906	52.03
16	.419 3325	48.89	.437 1127	49.90	.455 2644	50.95	.473 8028	52.05
17	.419 6258	48.90	.437 4122	49.92	.455 5701	50.97	.474 1152	52.07
18	.419 9193	48.92	.437 7117	49.93	.455 8760	50.99	.474 4276	52.09
19	.420 2129	48.94	.438 0114	49.95	.456 1820	51.00	.474 7402	52.10
20	2.420 5066	48.95	2.438 3111	49.97	2.456 4881	51.02	2.475 0529	52.12
21	.420 8003	48.97	.438 6110	49.98	.456 7943	51.04	.475 3657	52.14
22	.421 0942	48.99	.438 9109	50.00	.457 1006	51.06	.475 6786	52.16
23	.421 3882	49.00	.439 2110	50.02	.457 4070	51.08	.475 9916	52.18
24	.421 6822	49.02	.439 5112	50.04	.457 7135	51.09	.476 3047	52.20
25	2.421 9764	49.03	2.439 8114	50.05	2.458 0201	51.11	2.476 6180	52.22
26	.422 2707	49.05	.440 1118	50.07	.458 3268	51.13	.476 9313	52.23
27	.422 5650	49.07	.440 4123	50.09	.458 6337	51.15	.477 2448	52.25
28	.422 8595	49.09	.440 7129	50.11	.458 9400	51.17	.477 5584	52.27
29	.423 1541	49.10	.441 0136	50.12	.459 2477	51.18	.477 8721	52.29
30	2.423 4488	49.12	2.441 3143	50.14	2.459 5548	51.20	2.478 1859	52.31
31	.423 7435	49.14	.441 6152	50.16	.459 8621	51.22	.478 4998	52.33
32	.424 0384	49.15	.441 9162	50.18	.460 1695	51.24	.478 8138	52.35
33	.424 3334	49.17	.442 2173	50.19	.460 4770	51.26	.479 1280	52.37
34	.424 6284	49.19	.442 5185	50.21	.460 7846	51.28	.479 4422	52.39
35	2.424 9236	49.20	2.442 8199	50.23	2.461 0923	51.29	2.479 7566	52.40
36	.425 2189	49.22	.443 1213	50.24	.461 4001	51.31	.480 0711	52.42
37	.425 5142	49.24	.443 4228	50.26	.461 7080	51.33	.480 3857	52.44
38	.425 8097	49.25	.443 7244	50.28	.462 0161	51.35	.480 7004	52.46
39	.426 1053	49.27	.444 0261	50.30	.462 3242	51.37	.481 0152	52.48
40	2.426 4010	49.29	2.444 3280	50.31	2.462 6325	51.38	2.481 3301	52.50
41	.426 6967	49.30	.444 6299	50.33	.462 9408	51.40	.481 6452	52.52
42	.426 9926	49.32	.444 9320	50.35	.463 2493	51.42	.481 9604	52.54
43	.427 2886	49.34	.445 2341	50.37	.463 5579	51.44	.482 2750	52.56
44	.427 5847	49.35	.445 5364	50.38	.463 8660	51.46	.482 5910	52.58
45	2.427 8808	49.37	2.445 8387	50.40	2.464 1754	51.48	2.482 9065	52.59
46	.428 1771	49.39	.446 1412	50.42	.464 4843	51.49	.483 2222	52.61
47	.428 4735	49.40	.446 4437	50.44	.464 7933	51.51	.483 5379	52.63
48	.428 7700	49.42	.446 7464	50.45	.465 1024	51.53	.483 8537	52.65
49	.429 0665	49.44	.447 0492	50.47	.465 4116	51.55	.484 1697	52.67
50	2.429 3632	49.46	2.447 3521	50.49	2.465 7210	51.57	2.484 4858	52.69
51	.429 6600	49.47	.447 6551	50.51	.466 0305	51.59	.484 8020	52.71
52	.429 9569	49.49	.447 9582	50.53	.466 3400	51.60	.485 1183	52.73
53	.430 2539	49.51	.448 2614	50.54	.466 6497	51.62	.485 4347	52.75
54	.430 5510	49.52	.448 5647	50.56	.466 9595	51.64	.485 7513	52.77
55	2.430 8482	49.54	2.448 8681	50.58	2.467 2694	51.66	2.486 0679	52.78
56	.431 1455	49.56	.449 1716	50.60	.467 5794	51.68	.486 3847	52.80
57	.431 4428	49.57	.449 4753	50.61	.467 8895	51.70	.486 7016	52.82
58	.431 7403	49.59	.449 7790	50.63	.468 1997	51.71	.487 0186	52.84
59	.432 0379	49.61	.450 0828	50.65	.468 5101	51.73	.487 3357	52.86
60	2.432 3356	49.62	2.450 3868	50.67	2.468 8205	51.75	2.487 6520	52.88

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	124°			125°			126°			127°		
	log M.	Diff. 1''.		log M.	Diff. 1''.		log M.	Diff. 1''.		log M.	Diff. 1''.	
0'	2.487 6529	52.88		2.506 9006	54.06		2.526 5813	55.29		2.546 7135	56.57	
1	.487 9702	52.90		.507 2251	54.08		.526 9131	55.31		.547 0530	56.59	
2	.488 2877	52.92		.507 5490	54.10		.527 2450	55.33		.547 3926	56.61	
3	.488 6053	52.94		.507 8742	54.12		.527 5771	55.35		.547 7323	56.63	
4	.488 9230	52.96		.508 1990	54.14		.527 9092	55.37		.548 0722	56.65	
5	2.489 2408	52.98		2.508 5239	54.16		2.528 2415	55.39		2.548 4122	56.68	
6	.489 5587	53.00		.508 8489	54.18		.528 5739	55.41		.548 7523	56.70	
7	.489 8767	53.02		.509 1741	54.20		.528 9065	55.43		.549 0926	56.72	
8	.490 1949	53.03		.509 4993	54.22		.529 2391	55.45		.549 4330	56.74	
9	.490 5132	53.05		.509 8247	54.24		.529 5719	55.48		.549 7735	56.76	
10	2.490 8315	53.07		2.510 1502	54.26		2.529 9048	55.50		2.550 1141	56.79	
11	.491 1500	53.09		.510 4758	54.28		.530 2379	55.52		.550 4549	56.81	
12	.491 4686	53.11		.510 8016	54.30		.530 5710	55.54		.550 7958	56.83	
13	.491 7874	53.13		.511 1274	54.32		.530 9043	55.56		.551 1369	56.85	
14	.492 1063	53.15		.511 4534	54.34		.531 2378	55.58		.551 4781	56.87	
15	2.492 4252	53.17		2.511 7795	54.36		2.531 5713	55.60		2.551 8194	56.90	
16	.492 7443	53.19		.512 1057	54.38		.531 9050	55.62		.552 1608	56.92	
17	.493 0635	53.21		.512 4321	54.40		.532 2388	55.64		.552 5024	56.94	
18	.493 3828	53.23		.512 7586	54.42		.532 5727	55.67		.552 8441	56.96	
19	.493 7023	53.25		.513 0852	54.44		.532 9068	55.69		.553 1859	56.98	
20	2.494 0218	53.27		2.513 4119	54.46		2.533 2410	55.71		2.553 5279	57.01	
21	.494 3415	53.29		.513 7387	54.48		.533 5753	55.73		.553 8700	57.03	
22	.494 6613	53.31		.514 0657	54.50		.533 9097	55.75		.554 2122	57.05	
23	.494 9812	53.33		.514 3927	54.52		.534 2443	55.77		.554 5546	57.07	
24	.495 3012	53.35		.514 7199	54.54		.534 5790	55.79		.554 8971	57.10	
25	2.495 6213	53.37		2.515 0473	54.56		2.534 9138	55.81		2.555 2398	57.12	
26	.495 9416	53.39		.515 3747	54.58		.535 2487	55.84		.555 5825	57.14	
27	.496 2619	53.41		.515 7023	54.60		.535 5838	55.86		.555 9254	57.16	
28	.496 5824	53.42		.516 0300	54.63		.535 9190	55.88		.556 2685	57.18	
29	.496 9030	53.44		.516 3578	54.65		.536 2543	55.90		.556 6116	57.21	
30	2.497 2238	53.46		2.516 6857	54.67		2.536 5898	55.92		2.556 9549	57.23	
31	.497 5446	53.48		.517 0138	54.69		.536 9254	55.94		.557 2984	57.25	
32	.497 8656	53.50		.517 3420	54.71		.537 2611	55.96		.557 6420	57.27	
33	.498 1867	53.52		.517 6703	54.73		.537 5970	55.98		.557 9857	57.29	
34	.498 5079	53.54		.517 9987	54.75		.537 9329	56.01		.558 3295	57.32	
35	2.498 8292	53.56		2.518 3273	54.77		2.538 2690	56.03		2.558 6735	57.34	
36	.499 1506	53.58		.518 6559	54.79		.538 6052	56.05		.559 0176	57.36	
37	.499 4721	53.60		.518 9847	54.81		.538 9416	56.07		.559 3618	57.38	
38	.499 7938	53.62		.519 3137	54.83		.539 2781	56.09		.559 7062	57.41	
39	.500 1156	53.64		.519 6427	54.85		.539 6147	56.11		.560 0507	57.43	
40	2.500 4375	53.66		2.519 9719	54.87		2.539 9514	56.13		2.560 3953	57.45	
41	.500 7595	53.68		.520 3012	54.89		.540 2883	56.15		.560 7401	57.47	
42	.501 0817	53.70		.520 6306	54.91		.540 6253	56.18		.561 0850	57.50	
43	.501 4039	53.72		.520 9601	54.93		.540 9625	56.20		.561 4301	57.52	
44	.501 7263	53.74		.521 2898	54.95		.541 2997	56.22		.561 7753	57.54	
45	2.502 0488	53.76		2.521 6196	54.97		2.541 6371	56.24		2.562 1206	57.56	
46	.502 3714	53.78		.521 9495	54.99		.541 9740	56.26		.562 4660	57.59	
47	.502 6942	53.80		.522 2795	55.02		.542 3123	56.29		.562 8116	57.61	
48	.503 0170	53.82		.522 6097	55.04		.542 6500	56.31		.563 1574	57.63	
49	.503 3400	53.84		.522 9400	55.06		.542 9880	56.33		.563 5032	57.65	
50	2.503 6631	53.86		2.523 2704	55.08		2.543 3200	56.35		2.563 8492	57.68	
51	.503 9863	53.88		.523 6009	55.10		.543 6641	56.37		.564 1953	57.70	
52	.504 3096	53.90		.523 9316	55.12		.544 0024	56.39		.564 5416	57.72	
53	.504 6331	53.92		.524 2624	55.14		.544 3409	56.42		.564 8880	57.74	
54	.504 9567	53.94		.524 5933	55.16		.544 6794	56.44		.565 2345	57.77	
55	2.505 2804	53.96		2.524 9243	55.18		2.545 0181	56.46		2.565 5812	57.79	
56	.505 6042	53.98		.525 2555	55.20		.545 3569	56.48		.565 9280	57.81	
57	.505 9282	54.00		.525 5867	55.22		.545 6959	56.50		.566 2750	57.84	
58	.506 2522	54.02		.525 9181	55.24		.546 0350	56.52		.566 6221	57.86	
59	.506 5763	54.04		.526 2497	55.26		.546 3742	56.55		.566 9693	57.88	
60	2.506 9006	54.06		2.526 5813	55.29		2.546 7135	56.57		2.567 3166	57.90	

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	128°		129°		130°		131°	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	2.567 3166	57.90	2.588 4112	59.30	2.610 0188	60.75	2.632 1622	62.28
1	.567 6641	57.93	.588 7670	59.32	.610 3834	60.78	.632 5360	62.30
2	.568 0117	57.95	.589 1230	59.35	.610 7481	60.80	.632 9099	62.33
3	.568 3595	57.97	.589 4792	59.37	.611 1130	60.83	.633 2839	62.35
4	.568 7074	57.99	.589 8355	59.39	.611 4781	60.85	.633 6581	62.38
5	2.569 0554	58.02	2.590 1919	59.42	2.611 8433	60.88	2.634 0325	62.41
6	.569 4036	58.04	.590 5485	59.44	.612 2086	60.90	.634 4070	62.43
7	.569 7519	58.06	.590 9052	59.47	.612 5741	60.93	.634 7817	62.46
8	.570 1004	58.09	.591 2620	59.49	.612 9397	60.95	.635 1565	62.48
9	.570 4490	58.11	.591 6190	59.51	.613 3055	60.98	.635 5315	62.51
10	2.570 7977	58.13	2.591 9762	59.54	2.613 6715	61.00	2.635 9066	62.54
11	.571 1465	58.15	.592 3335	59.56	.614 0376	61.03	.636 2819	62.56
12	.571 4955	58.18	.592 6909	59.58	.614 4038	61.05	.636 6573	62.59
13	.571 8447	58.20	.593 0485	59.61	.614 7702	61.08	.637 0329	62.61
14	.572 1939	58.22	.593 4062	59.63	.615 1368	61.10	.637 4087	62.64
15	2.572 5434	58.25	2.593 7641	59.66	2.615 5035	61.13	2.637 7846	62.67
16	.572 8929	58.27	.594 1221	59.68	.615 8703	61.15	.638 1607	62.69
17	.573 2426	58.29	.594 4803	59.70	.616 2373	61.18	.638 5369	62.72
18	.573 5924	58.32	.594 8386	59.73	.616 6045	61.20	.638 9133	62.75
19	.573 9424	58.34	.595 1970	59.75	.616 9718	61.23	.639 2899	62.77
20	2.574 2925	58.36	2.595 5556	59.78	2.617 3392	61.25	2.639 6666	62.80
21	.574 6427	58.38	.595 9143	59.80	.617 7068	61.28	.640 0435	62.82
22	.574 9931	58.41	.596 2732	59.82	.618 0746	61.30	.640 4205	62.85
23	.575 3436	58.43	.596 6322	59.85	.618 4425	61.33	.640 7977	62.88
24	.575 6943	58.45	.596 9914	59.87	.618 8105	61.36	.641 1750	62.90
25	2.576 0451	58.48	2.597 3507	59.90	2.619 1787	61.38	2.641 5525	62.93
26	.576 3960	58.50	.597 7102	59.92	.619 5471	61.41	.641 9302	62.96
27	.576 7471	58.52	.598 0698	59.95	.619 9156	61.44	.642 3080	62.98
28	.577 0983	58.55	.598 4295	59.97	.620 2843	61.46	.642 6860	63.01
29	.577 4496	58.57	.598 7894	59.99	.620 6531	61.48	.643 0641	63.04
30	2.577 8011	58.59	2.599 1494	60.02	2.621 0220	61.51	2.643 4424	63.06
31	.578 1528	58.62	.599 5096	60.04	.621 3911	61.53	.643 8209	63.09
32	.578 5045	58.64	.599 8699	60.07	.621 7604	61.56	.644 1995	63.12
33	.578 8564	58.66	.600 2304	60.09	.622 1298	61.58	.644 5783	63.14
34	.579 2085	58.69	.600 5910	60.12	.622 4994	61.61	.644 9572	63.17
35	2.579 5607	58.71	2.600 9518	60.14	2.622 8691	61.63	2.645 3363	63.19
36	.579 9130	58.73	.601 3127	60.16	.623 2390	61.66	.645 7155	63.22
37	.580 2655	58.76	.601 6738	60.19	.623 6091	61.68	.646 0940	63.25
38	.580 6181	58.78	.602 0350	60.21	.623 9793	61.71	.646 4745	63.27
39	.580 9708	58.80	.602 3963	60.24	.624 3496	61.74	.646 8542	63.30
40	2.581 3237	58.83	2.602 7578	60.26	2.624 7201	61.76	2.647 2341	63.33
41	.581 6768	58.85	.603 1195	60.29	.625 0907	61.79	.647 6142	63.35
42	.582 0299	58.87	.603 4813	60.31	.625 4615	61.81	.647 9944	63.38
43	.582 3832	58.90	.603 8432	60.34	.625 8325	61.84	.648 3748	63.41
44	.582 8267	58.92	.604 2053	60.36	.626 2036	61.86	.648 7553	63.44
45	2.583 0903	58.94	2.604 5675	60.38	2.626 5748	61.89	2.649 1360	63.46
46	.583 4440	58.97	.604 9299	60.41	.626 9462	61.91	.649 5168	63.49
47	.583 7979	58.99	.605 2924	60.43	.627 3178	61.94	.649 8978	63.52
48	.584 1519	59.01	.605 6551	60.46	.627 6895	61.97	.650 2790	63.54
49	.584 5061	59.04	.606 0179	60.48	.628 0614	61.99	.650 6603	63.57
50	2.584 8604	59.06	2.606 3809	60.51	2.628 4334	62.02	2.651 0418	63.60
51	.585 2148	59.09	.606 7440	60.53	.628 8056	62.04	.651 4235	63.62
52	.585 5694	59.11	.607 1073	60.56	.629 1780	62.07	.651 8053	63.65
53	.585 9241	59.13	.607 4707	60.58	.629 5505	62.09	.652 1873	63.68
54	.586 2790	59.16	.607 8343	60.61	.629 9231	62.12	.652 5695	63.70
55	2.586 6340	59.18	2.608 1980	60.63	2.630 2959	62.15	2.652 9518	63.73
56	.586 9891	59.20	.608 5618	60.66	.630 6689	62.17	.653 3342	63.76
57	.587 3444	59.23	.608 9258	60.68	.631 0420	62.20	.653 7168	63.79
58	.587 6999	59.25	.609 2901	60.70	.631 4152	62.22	.654 0996	63.81
59	.588 0555	59.27	.609 6544	60.73	.631 7887	62.25	.654 4826	63.84
60	2.588 4112	59.30	2.610 0188	60.75	2.632 1622	62.28	2.654 8657	63.87

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	132°			133°			134°			135°		
	log M.	Diff. 1".		log M.	Diff. 1".		log M.	Diff. 1".		log M.	Diff. 1".	
0'	2.654 8657	63.87		2.678 1547	65.53		2.702 0562	67.27		2.726 5990	69.09	
1	.655 2490	63.89		.678 5480	65.56		.702 4000	67.30		.727 0137	69.12	
2	.655 6324	63.92		.678 9414	65.59		.702 8638	67.33		.727 4285	69.15	
3	.656 0160	63.95		.679 3350	65.61		.703 2679	67.36		.727 8435	69.19	
4	.656 3998	63.97		.679 7288	65.64		.703 6721	67.39		.728 2587	69.22	
5	2.656 7837	64.00		2.680 1227	65.67		2.704 0766	67.42		2.728 6741	69.25	
6	.657 1678	64.03		.680 5168	65.70		.704 4812	67.45		.729 0897	69.28	
7	.657 5521	64.06		.680 9111	65.73		.704 8860	67.48		.729 5055	69.31	
8	.657 9365	64.08		.681 3056	65.76		.705 2909	67.51		.729 9215	69.34	
9	.658 3211	64.11		.681 7002	65.79		.705 6961	67.54		.730 3376	69.37	
10	2.658 7058	64.14		2.682 0950	65.81		2.706 1014	67.57		2.730 7539	69.40	
11	.659 0907	64.17		.682 4900	65.84		.706 5069	67.60		.731 1705	69.44	
12	.659 4758	64.19		.682 8851	65.87		.706 9126	67.63		.731 5872	69.47	
13	.659 8611	64.22		.683 2804	65.90		.707 3184	67.66		.732 0041	69.50	
14	.660 2465	64.25		.683 6759	65.93		.707 7244	67.69		.732 4212	69.53	
15	2.660 6320	64.28		2.684 0716	65.96		2.708 1307	67.72		2.732 8385	69.56	
16	.661 0178	64.30		.684 4674	65.99		.708 5371	67.75		.733 2559	69.59	
17	.661 4037	64.33		.684 8634	66.01		.708 9436	67.78		.733 6736	69.62	
18	.661 7897	64.36		.685 2596	66.04		.709 3504	67.81		.734 0914	69.66	
19	.662 1760	64.38		.685 6559	66.07		.709 7573	67.84		.734 5094	69.69	
20	2.662 5623	64.41		2.686 0524	66.10		2.710 1645	67.87		2.734 9277	69.72	
21	.662 9489	64.44		.686 4491	66.13		.710 5718	67.90		.735 3461	69.75	
22	.663 3356	64.47		.686 8460	66.16		.710 9792	67.93		.735 7647	69.78	
23	.663 7225	64.49		.687 2430	66.19		.711 3869	67.96		.736 1835	69.81	
24	.664 1096	64.52		.687 6402	66.22		.711 7947	67.99		.736 6025	69.85	
25	2.664 4968	64.55		2.688 0376	66.25		2.712 2028	68.02		2.737 0216	69.88	
26	.664 8842	64.57		.688 4352	66.27		.712 6110	68.05		.737 4410	69.91	
27	.665 2717	64.60		.688 8329	66.30		.713 0194	68.08		.737 8605	69.94	
28	.665 6594	64.63		.689 2308	66.33		.713 4279	68.11		.738 2803	69.97	
29	.666 0473	64.66		.689 6289	66.36		.713 8367	68.14		.738 7002	70.00	
30	2.666 4354	64.69		2.690 0272	66.39		2.714 2456	68.17		2.739 1203	70.04	
31	.666 8236	64.72		.690 4256	66.42		.714 6547	68.20		.739 5406	70.07	
32	.667 2120	64.74		.690 8242	66.45		.715 0640	68.23		.739 9612	70.10	
33	.667 6005	64.77		.691 2230	66.48		.715 4735	68.26		.740 3819	70.13	
34	.667 9892	64.80		.691 6219	66.51		.715 8832	68.29		.740 8027	70.16	
35	2.668 3781	64.83		2.692 0210	66.54		2.716 2930	68.32		2.741 2238	70.20	
36	.668 7672	64.86		.692 4203	66.56		.716 7031	68.35		.741 6451	70.23	
37	.669 1564	64.88		.692 8198	66.59		.717 1133	68.38		.742 0666	70.26	
38	.669 5457	64.91		.693 2194	66.62		.717 5237	68.41		.742 4882	70.29	
39	.669 9353	64.94		.693 6193	66.65		.717 9342	68.44		.742 9101	70.32	
40	2.670 3250	64.97		2.694 0193	66.68		2.718 3450	68.48		2.743 3321	70.36	
41	.670 7149	65.00		.694 4194	66.71		.718 7560	68.51		.743 7543	70.39	
42	.671 1050	65.02		.694 8198	66.74		.719 1671	68.54		.744 1768	70.42	
43	.671 4952	65.05		.695 2203	66.77		.719 5784	68.57		.744 5994	70.45	
44	.671 8856	65.08		.695 6210	66.80		.719 9899	68.60		.745 0222	70.48	
45	2.672 2761	65.11		2.696 0219	66.83		2.720 4016	68.63		2.745 4452	70.52	
46	.672 6668	65.13		.696 4229	66.86		.720 8135	68.66		.745 8684	70.55	
47	.673 0577	65.16		.696 8242	66.89		.721 2255	68.69		.746 2918	70.58	
48	.673 4488	65.19		.697 2256	66.92		.721 6377	68.72		.746 7154	70.61	
49	.673 8400	65.22		.697 6272	66.95		.722 0502	68.75		.747 1391	70.65	
50	2.674 2314	65.25		2.698 0289	66.97		2.722 4628	68.78		2.747 5631	70.68	
51	.674 6230	65.28		.698 4308	67.00		.722 8756	68.81		.747 9873	70.71	
52	.675 0147	65.30		.698 8330	67.03		.723 2885	68.84		.748 4116	70.74	
53	.675 4066	65.33		.699 2353	67.06		.723 7017	68.88		.748 8362	70.78	
54	.675 7987	65.36		.699 6377	67.09		.724 1150	68.91		.749 2609	70.81	
55	2.676 1909	65.39		2.700 0404	67.12		2.724 5286	68.94		2.749 6859	70.84	
56	.676 5833	65.42		.700 4432	67.15		.724 9423	68.97		.750 1110	70.87	
57	.676 9759	65.44		.700 8462	67.18		.725 3562	69.00		.750 5364	70.90	
58	.677 3687	65.47		.701 2494	67.21		.725 7703	69.03		.750 9619	70.94	
59	.677 7616	65.50		.701 6527	67.24		.726 1846	69.06		.751 3876	70.97	
60	2.678 1547	65.53		2.702 0562	67.27		2.726 5990	69.09		2.751 8135	71.00	

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	136 ⁰		137 ⁰		138 ⁰		139 ⁰	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	2.751 8135	71.00	2.777 7322	73.01	2.804 3895	75.11	2.831 8224	77.32
1	.752 2396	71.03	.778 1703	73.04	.804 8403	75.14	.832 2864	77.35
2	.752 6659	71.07	.778 6087	73.07	.805 2912	75.18	.832 7506	77.39
3	.753 0925	71.10	.779 0472	73.11	.805 7424	75.21	.833 2151	77.43
4	.753 5192	71.13	.779 4859	73.14	.806 1938	75.25	.833 6798	77.47
5	2.753 9461	71.17	2.779 9249	73.18	2.806 6454	75.29	2.834 1447	77.50
6	.754 3732	71.20	.780 3641	73.21	.807 0973	75.32	.834 6098	77.54
7	.754 8004	71.23	.780 8034	73.24	.807 5493	75.36	.835 0752	77.58
8	.755 2279	71.26	.781 2430	73.28	.808 0016	75.40	.835 5408	77.62
9	.755 6556	71.30	.781 6828	73.31	.808 4541	75.43	.836 0066	77.66
10	2.756 0835	71.33	2.782 1228	73.35	2.808 9068	75.47	2.836 4727	77.69
11	.756 5116	71.36	.782 5630	73.38	.809 3597	75.50	.836 9390	77.73
12	.756 9399	71.40	.783 0034	73.42	.809 8128	75.54	.837 4055	77.77
13	.757 3683	71.43	.783 4440	73.45	.810 2662	75.58	.837 8722	77.81
14	.757 7970	71.46	.783 8848	73.49	.810 7197	75.61	.838 3392	77.85
15	2.758 2259	71.49	2.784 3258	73.53	2.811 1735	75.65	2.838 8064	77.89
16	.758 6549	71.53	.784 7671	73.56	.811 6275	75.69	.839 2738	77.92
17	.759 0842	71.56	.785 2085	73.59	.812 0817	75.72	.839 7414	77.96
18	.759 5137	71.59	.785 6502	73.63	.812 5362	75.76	.840 2093	78.00
19	.759 9433	71.63	.786 0920	73.66	.812 9908	75.79	.840 6774	78.04
20	2.760 3732	71.66	2.786 5341	73.70	2.813 4457	75.83	2.841 1458	78.08
21	.760 8032	71.69	.786 9764	73.73	.813 9008	75.87	.841 6144	78.11
22	.761 2335	71.73	.787 4189	73.76	.814 3561	75.90	.842 0832	78.15
23	.761 6639	71.76	.787 8615	73.80	.814 8117	75.94	.842 5522	78.19
24	.762 0946	71.79	.788 3044	73.83	.815 2674	75.98	.843 0215	78.23
25	2.762 5255	71.83	2.788 7476	73.87	2.815 7234	76.01	2.843 4909	78.27
26	.762 9565	71.86	.789 1909	73.90	.816 1796	76.05	.843 9607	78.31
27	.763 3878	71.89	.789 6344	73.94	.816 6360	76.09	.844 4306	78.35
28	.763 8192	71.93	.790 0781	73.97	.817 0927	76.12	.844 9008	78.38
29	.764 2509	71.96	.790 5221	74.01	.817 5495	76.16	.845 3712	78.42
30	2.764 6827	71.99	2.790 9662	74.04	2.818 0066	76.20	2.845 8419	78.46
31	.765 1148	72.03	.791 4106	74.08	.818 4639	76.23	.846 3128	78.50
32	.765 5470	72.06	.791 8552	74.11	.818 9214	76.27	.846 7839	78.54
33	.765 9795	72.09	.792 3000	74.15	.819 3792	76.31	.847 2553	78.58
34	.766 4121	72.13	.792 7450	74.18	.819 8371	76.34	.847 7268	78.62
35	2.766 8450	72.16	2.793 1902	74.22	2.820 2953	76.38	2.848 1986	78.66
36	.767 2781	72.19	.793 6356	74.25	.820 7537	76.42	.848 6707	78.69
37	.767 7113	72.23	.794 0813	74.29	.821 2123	76.46	.849 1430	78.73
38	.768 1448	72.26	.794 5271	74.32	.821 6712	76.49	.849 6155	78.77
39	.768 5784	72.29	.794 9731	74.36	.822 1302	76.53	.850 0882	78.81
40	2.769 0123	72.33	2.795 4194	74.40	2.822 5895	76.57	2.850 5612	78.85
41	.769 4464	72.36	.795 8659	74.43	.823 0491	76.60	.851 0344	78.89
42	.769 8806	72.39	.796 3126	74.47	.823 5088	76.64	.851 5079	78.93
43	.770 3151	72.43	.796 7595	74.50	.823 9688	76.68	.851 9816	78.97
44	.770 7498	72.46	.797 2066	74.54	.824 4289	76.72	.852 4555	79.01
45	2.771 1846	72.50	2.797 6539	74.58	2.824 8894	76.75	2.852 9297	79.05
46	.771 6197	72.53	.798 1015	74.61	.825 3500	76.79	.853 4041	79.08
47	.772 0550	72.56	.798 5492	74.64	.825 8108	76.83	.853 8787	79.12
48	.772 4905	72.60	.798 9972	74.68	.826 2710	76.87	.854 3535	79.16
49	.772 9262	72.63	.799 4454	74.71	.826 7322	76.90	.854 8286	79.20
50	2.773 3621	72.67	2.799 8938	74.75	2.827 1947	76.94	2.855 3040	79.24
51	.773 7982	72.70	.800 3424	74.79	.827 6565	76.98	.855 7795	79.28
52	.774 2344	72.73	.800 7912	74.82	.828 1185	77.01	.856 2553	79.32
53	.774 6709	72.77	.801 2402	74.86	.828 5807	77.05	.856 7314	79.36
54	.775 1077	72.80	.801 6895	74.89	.829 0431	77.09	.857 2077	79.40
55	2.775 5446	72.84	2.802 1390	74.93	2.829 5058	77.13	2.857 6842	79.44
56	.775 9817	72.87	.802 5886	74.96	.829 9686	77.16	.858 1609	79.48
57	.776 4190	72.90	.803 0385	75.00	.830 4317	77.20	.858 6379	79.52
58	.776 8565	72.94	.803 4886	75.04	.830 8951	77.24	.859 1151	79.56
59	.777 2942	72.97	.803 9390	75.08	.831 3586	77.28	.859 5926	79.60
60	2.777 7322	73.01	2.804 3895	75.11	2.831 8224	77.32	2.860 0703	79.64

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	140°		141°		142°		143°	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	2.860 0703	79.64	2.880 1754	82.08	2.910 1831	84.65	2.950 1420	87.37
1	.860 5482	79.68	.880 6680	82.12	.910 6011	84.70	.950 6664	87.41
2	.861 0264	79.72	.890 1600	82.16	.920 1004	84.74	.951 1910	87.46
3	.861 5048	79.76	.890 6540	82.20	.920 7080	84.78	.951 7159	87.50
4	.861 9835	79.80	.891 1473	82.25	.921 2160	84.83	.952 2411	87.55
5	2.862 4624	79.84	2.891 6409	82.29	2.921 7200	84.87	2.952 7665	87.60
6	.862 9415	79.88	.892 1348	82.33	.922 2253	84.92	.953 2923	87.65
7	.863 4209	79.92	.892 6289	82.37	.922 7450	84.96	.953 8183	87.69
8	.863 9005	79.96	.893 1233	82.41	.923 2549	85.01	.954 3446	87.74
9	.864 3803	80.00	.893 6179	82.46	.923 7650	85.05	.954 8711	87.79
10	2.864 8604	80.04	2.894 1127	82.50	2.924 2755	85.10	2.955 3980	87.83
11	.865 3408	80.08	.894 6078	82.54	.924 7862	85.14	.955 9251	87.88
12	.865 8213	80.12	.895 1032	82.58	.925 2972	85.18	.956 4525	87.93
13	.866 3021	80.16	.895 5989	82.63	.925 8084	85.23	.956 9802	87.97
14	.866 7832	80.20	.896 0948	82.67	.926 3199	85.27	.957 5082	88.02
15	2.867 2645	80.24	2.896 5909	82.71	2.926 8317	85.32	2.958 0365	88.07
16	.867 7460	80.28	.897 0873	82.75	.927 3437	85.36	.958 5651	88.11
17	.868 2278	80.32	.897 5839	82.79	.927 8560	85.41	.959 0939	88.16
18	.868 7098	80.36	.898 0808	82.84	.928 3686	85.45	.959 6230	88.21
19	.869 1921	80.40	.898 5780	82.88	.928 8814	85.50	.960 1524	88.26
20	2.869 6746	80.44	2.899 0754	82.92	2.929 3945	85.54	2.960 6821	88.30
21	.870 1573	80.48	.899 5730	82.96	.929 9079	85.59	.961 2120	88.35
22	.870 6403	80.52	.900 0709	83.01	.930 4216	85.63	.961 7423	88.40
23	.871 1235	80.56	.900 5691	83.05	.930 9355	85.68	.962 2728	88.45
24	.871 6070	80.60	.901 0675	83.09	.931 4497	85.72	.962 7036	88.49
25	2.872 0907	80.64	2.901 5662	83.13	2.931 9641	85.77	2.963 3347	88.54
26	.872 5747	80.68	.902 0651	83.18	.932 4788	85.81	.963 8661	88.59
27	.873 0589	80.72	.902 5643	83.22	.932 9938	85.86	.964 3978	88.64
28	.873 5433	80.76	.903 0638	83.26	.933 5091	85.91	.964 9297	88.68
29	.874 0280	80.80	.903 5635	83.31	.934 0247	85.95	.965 4620	88.73
30	2.874 5129	80.84	2.904 0635	83.35	2.934 5405	85.99	2.965 9945	88.78
31	.874 9981	80.88	.904 5637	83.39	.935 0565	86.04	.966 5273	88.83
32	.875 4835	80.92	.905 0642	83.43	.935 5729	86.08	.967 0604	88.87
33	.875 9692	80.96	.905 5649	83.48	.936 0895	86.13	.967 5938	88.92
34	.876 4551	81.01	.906 0659	83.52	.936 6064	86.17	.968 1275	88.97
35	2.876 9413	81.05	2.906 5672	83.56	2.937 1236	86.22	2.968 6615	89.02
36	.877 4277	81.09	.907 0687	83.61	.937 6410	86.26	.969 1957	89.07
37	.877 9143	81.13	.907 5704	83.65	.938 1587	86.31	.969 7303	89.12
38	.878 4012	81.17	.908 0725	83.69	.938 6767	86.35	.970 2651	89.17
39	.878 8883	81.21	.908 5748	83.74	.939 1950	86.40	.970 8002	89.21
40	2.879 3757	81.25	2.909 0773	83.78	2.939 7135	86.45	2.971 3356	89.26
41	.879 8633	81.29	.909 5801	83.82	.940 2323	86.49	.971 8713	89.31
42	.880 3512	81.33	.910 0832	83.87	.940 7514	86.54	.972 4073	89.36
43	.880 8393	81.37	.910 5865	83.91	.941 2708	86.58	.972 9436	89.40
44	.881 3277	81.42	.911 0901	83.95	.941 7904	86.63	.973 4801	89.45
45	2.881 8163	81.46	2.911 5940	83.99	2.942 3103	86.67	2.974 0170	89.50
46	.882 3052	81.50	.912 0981	84.04	.942 8305	86.72	.974 5541	89.55
47	.882 7943	81.54	.912 6024	84.08	.943 3510	86.77	.975 0916	89.60
48	.883 2837	81.58	.913 1070	84.13	.943 8717	86.81	.975 6293	89.65
49	.883 7733	81.62	.913 6119	84.17	.944 3927	86.86	.976 1673	89.69
50	2.884 2631	81.66	2.914 1171	84.22	2.944 9140	86.90	2.976 7056	89.74
51	.884 7532	81.70	.914 6225	84.26	.945 4355	86.95	.977 2442	89.79
52	.885 2436	81.75	.915 1282	84.30	.945 9574	87.00	.977 7831	89.84
53	.885 7342	81.79	.915 6341	84.34	.946 4795	87.04	.978 3223	89.89
54	.886 2251	81.83	.916 1403	84.39	.947 0019	87.09	.978 8618	89.94
55	2.886 7162	81.87	2.916 6468	84.43	2.947 5245	87.13	2.979 4015	89.99
56	.887 2075	81.91	.917 1535	84.48	.948 0475	87.18	.979 9416	90.03
57	.887 6991	81.95	.917 6605	84.52	.948 5707	87.23	.980 4820	90.08
58	.888 1910	81.99	.918 1678	84.56	.949 0942	87.27	.981 1226	90.13
59	.888 6831	82.04	.918 6753	84.61	.949 6180	87.32	.981 6636	90.18
60	2.889 1754	82.08	2.919 1831	84.65	2.950 1420	87.37	2.982 1048	90.23

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	144°		145°		146°		147°	
	log M.	Diff. 1''.	log M.	Diff. 1''.	log M.	Diff. 1''.	log M.	Diff. 1''.
0'	2.982 1048	90.23	3.015 1281	93.26	3.049 2733	96.47	3.084 6070	99.87
1	.982 6463	90.28	.015 6878	93.31	.049 8522	96.52	.085 2064	99.92
2	.983 1882	90.33	.016 2478	93.36	.050 4315	96.58	.085 8061	99.98
3	.983 7303	90.38	.016 8082	93.42	.051 0112	96.63	.086 4062	100.04
4	.984 2727	90.43	.017 3688	93.47	.051 5911	96.69	.087 0066	100.10
5	2.984 8154	90.48	3.017 9298	93.52	3.052 1714	96.74	3.087 6073	100.16
6	.985 3584	90.53	.018 4911	93.57	.052 7520	96.80	.088 2085	100.22
7	.985 9017	90.58	.019 0526	93.62	.053 3329	96.85	.088 8099	100.28
8	.986 4453	90.63	.019 6145	93.68	.053 9142	96.91	.089 4118	100.33
9	.986 9892	90.67	.020 1768	93.73	.054 4959	96.96	.090 0140	100.39
10	2.987 5334	90.72	3.020 7393	93.78	3.055 0778	97.01	3.090 6165	100.45
11	.988 0779	90.77	.021 3021	93.83	.055 6601	97.07	.091 2194	100.51
12	.988 6227	90.82	.021 8653	93.89	.056 2427	97.13	.091 8226	100.57
13	.989 1678	90.87	.022 4288	93.94	.056 8256	97.19	.092 4262	100.63
14	.989 7132	90.92	.022 9926	93.99	.057 4089	97.24	.093 0302	100.69
15	2.990 2589	90.97	3.023 5567	94.04	3.057 9925	97.30	3.093 6345	100.75
16	.990 8049	91.02	.024 1211	94.10	.058 5765	97.35	.094 2392	100.81
17	.991 3512	91.07	.024 6859	94.15	.059 1608	97.41	.094 8442	100.87
18	.991 8977	91.12	.025 2509	94.20	.059 7454	97.47	.095 4496	100.93
19	.992 4446	91.17	.025 8163	94.26	.060 3304	97.52	.096 0553	100.98
20	2.992 9918	91.22	3.026 3820	94.31	3.060 9157	97.58	3.096 6614	101.04
21	.993 5393	91.27	.026 9480	94.36	.061 5013	97.63	.097 2678	101.10
22	.994 0871	91.32	.027 5143	94.41	.062 0873	97.69	.097 8746	101.16
23	.994 6351	91.37	.028 0810	94.47	.062 6736	97.75	.098 4818	101.22
24	.995 1835	91.42	.028 6479	94.52	.063 2602	97.80	.099 0893	101.28
25	2.995 7322	91.47	3.029 2152	94.57	3.063 8472	97.86	3.099 6972	101.34
26	.996 2812	91.52	.029 7828	94.63	.064 4345	97.91	.100 3054	101.40
27	.996 8305	91.57	.030 3507	94.68	.065 0222	97.97	.100 9140	101.46
28	.997 3801	91.62	.030 9190	94.73	.065 6101	98.03	.101 5230	101.52
29	.997 9300	91.67	.031 4875	94.79	.066 1985	98.08	.102 1323	101.58
30	2.998 4802	91.72	3.032 0564	94.84	3.066 7872	98.14	3.102 7420	101.64
31	.999 0307	91.77	.032 6256	94.89	.067 3762	98.20	.103 3520	101.70
32	.999 5815	91.82	.033 1951	94.94	.067 9655	98.25	.103 9624	101.76
33	3.000 1326	91.87	.033 7650	95.00	.068 5552	98.31	.104 5732	101.82
34	.000 6840	91.93	.034 3351	95.05	.069 1453	98.37	.105 1843	101.88
35	3.001 2357	91.98	3.034 9056	95.11	3.069 7357	98.42	3.105 7958	101.94
36	.001 7877	92.03	.035 4764	95.16	.070 3264	98.48	.106 4076	102.00
37	.002 3400	92.08	.036 0475	95.22	.070 9174	98.54	.107 0198	102.07
38	.002 8926	92.13	.036 6190	95.27	.071 5088	98.60	.107 6324	102.13
39	.003 4456	92.18	.037 1908	95.32	.072 1006	98.65	.108 2454	102.19
40	3.003 9988	92.23	3.037 7629	95.38	3.072 6927	98.71	3.108 8587	102.25
41	.004 5523	92.28	.038 3353	95.43	.073 2851	98.77	.109 4723	102.31
42	.005 1062	92.33	.038 9080	95.48	.073 8779	98.82	.110 0864	102.37
43	.005 6603	92.38	.039 4811	95.54	.074 4710	98.88	.110 7008	102.43
44	.006 2148	92.44	.040 0545	95.60	.075 0645	98.94	.111 3155	102.49
45	3.006 7696	92.49	3.040 6282	95.65	3.075 6583	99.00	3.111 9306	102.55
46	.007 3246	92.54	.041 2023	95.70	.076 2524	99.05	.112 5461	102.61
47	.007 8800	92.59	.041 7767	95.76	.076 8469	99.11	.113 1620	102.67
48	.008 4357	92.64	.042 3514	95.81	.077 4418	99.17	.113 7782	102.73
49	.008 9917	92.69	.042 9264	95.86	.078 0370	99.23	.114 3948	102.80
50	3.009 5480	92.74	3.043 5017	95.92	3.078 6325	99.28	3.115 0118	102.86
51	.010 1046	92.79	.044 0774	95.97	.079 2284	99.34	.115 6291	102.92
52	.010 6615	92.85	.044 6534	96.03	.079 8246	99.40	.116 2468	102.98
53	.011 2188	92.90	.045 2297	96.08	.080 4212	99.46	.116 8649	103.04
54	.011 7763	92.95	.045 8064	96.14	.081 0181	99.52	.117 4833	103.10
55	3.012 3342	93.00	3.046 3834	96.19	3.081 6154	99.57	3.118 1022	103.16
56	.012 8923	93.05	.046 9607	96.25	.082 2130	99.63	.118 7213	103.23
57	.013 4508	93.10	.047 5383	96.30	.082 8110	99.69	.119 3409	103.29
58	.014 0096	93.16	.048 1163	96.36	.083 4093	99.75	.119 9608	103.35
59	.014 5687	93.21	.048 6946	96.41	.084 0080	99.81	.120 5811	103.41
60	3.015 1281	93.26	3.049 2733	96.47	3.084 6070	99.87	3.121 2018	103.48

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	148 ⁰		149 ⁰		150 ⁰		151 ⁰	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	3.121 2018	103.48	3.159 1367	107.31	3.198 4984	111.41	3.239 3820	115.77
1	.121 8228	103.54	.159 7808	107.38	.199 1671	111.48	.240 0768	115.85
2	.122 4442	103.60	.160 4253	107.45	.199 8361	111.55	.240 7722	115.92
3	.123 0660	103.66	.161 0702	107.51	.200 5056	111.62	.241 4680	116.00
4	.123 6882	103.72	.161 7154	107.58	.201 1755	111.69	.242 1642	116.08
5	3.124 3107	103.79	3.162 3611	107.65	3.201 8459	111.76	3.242 8608	116.15
6	.124 9336	103.85	.163 0072	107.71	.202 5166	111.83	.243 5580	116.23
7	.125 5569	103.91	.163 6536	107.78	.203 1878	111.90	.244 2556	116.30
8	.126 1805	103.97	.164 3005	107.85	.203 8594	111.97	.244 9536	116.38
9	.126 8045	104.04	.164 9478	107.91	.204 5315	112.04	.245 6521	116.45
10	3.127 4289	104.10	3.165 5955	107.98	3.205 2040	112.11	3.246 3511	116.53
11	.128 0537	104.16	.166 2435	108.04	.205 8769	112.18	.247 0505	116.61
12	.128 6789	104.22	.166 8920	108.11	.206 5502	112.26	.247 7503	116.68
13	.129 3044	104.29	.167 5409	108.18	.207 2239	112.33	.248 4507	116.76
14	.129 9303	104.35	.168 1901	108.25	.207 8981	112.40	.249 1515	116.84
15	3.130 5566	104.41	3.168 8398	108.31	3.208 5727	112.47	3.249 8527	116.91
16	.131 1833	104.48	.169 4899	108.38	.209 2478	112.54	.250 5544	116.99
17	.131 8103	104.54	.170 1404	108.45	.209 9232	112.61	.251 2566	117.07
18	.132 4377	104.60	.170 7913	108.51	.210 5991	112.69	.251 9592	117.14
19	.133 0655	104.67	.171 4426	108.58	.211 2755	112.76	.252 6623	117.22
20	3.133 6937	104.73	3.172 0942	108.65	3.211 9522	112.83	3.253 3658	117.30
21	.134 3223	104.79	.172 7463	108.72	.212 6294	112.90	.254 0698	117.37
22	.134 9512	104.86	.173 3988	108.78	.213 3070	112.97	.254 7743	117.45
23	.135 5805	104.92	.174 0517	108.85	.213 9851	113.05	.255 4792	117.53
24	.136 2102	104.98	.174 7051	108.92	.214 6636	113.12	.256 1846	117.60
25	3.136 8403	105.05	3.175 3588	108.99	3.215 3425	113.19	3.256 8905	117.68
26	.137 4708	105.11	.176 0129	109.06	.216 0219	113.26	.257 5968	117.76
27	.138 1016	105.17	.176 6674	109.12	.216 7017	113.34	.258 3036	117.84
28	.138 7329	105.24	.177 3224	109.19	.217 3819	113.41	.259 0109	117.91
29	.139 3645	105.30	.177 9777	109.26	.218 0626	113.48	.259 7186	117.99
30	3.139 9965	105.36	3.178 6335	109.33	3.218 7437	113.55	3.260 4268	118.07
31	.140 6289	105.43	.179 2897	109.40	.219 4252	113.63	.261 1354	118.15
32	.141 2616	105.49	.179 9462	109.46	.220 1072	113.70	.261 8446	118.23
33	.141 8948	105.55	.180 6032	109.53	.220 7896	113.77	.262 5542	118.30
34	.142 5283	105.62	.181 2606	109.60	.221 4724	113.84	.263 2642	118.38
35	3.143 1622	105.68	3.181 9184	109.67	3.222 1557	113.92	3.263 9747	118.46
36	.143 7965	105.75	.182 5766	109.74	.222 8395	113.99	.264 6857	118.54
37	.144 4312	105.81	.183 2353	109.81	.223 5236	114.06	.265 3972	118.62
38	.145 0663	105.87	.183 8943	109.87	.224 2082	114.14	.266 1091	118.70
39	.145 7018	105.94	.184 5538	109.94	.224 8933	114.21	.266 8216	118.77
40	3.146 3376	106.00	3.185 2136	110.01	3.225 5788	114.28	3.267 5345	118.85
41	.146 9739	106.07	.185 8739	110.08	.226 2647	114.36	.268 2478	118.93
42	.147 6105	106.14	.186 5346	110.15	.226 9511	114.43	.268 9616	119.01
43	.148 2475	106.20	.187 1957	110.22	.227 6379	114.51	.269 6759	119.09
44	.148 8849	106.27	.187 8572	110.29	.228 3252	114.58	.270 3907	119.17
45	3.149 5227	106.33	3.188 5192	110.36	3.229 0129	114.65	3.271 1060	119.25
46	.150 1609	106.40	.189 1815	110.43	.229 7010	114.73	.271 8217	119.33
47	.150 7995	106.46	.189 8443	110.50	.230 3896	114.80	.272 5379	119.41
48	.151 4385	106.53	.190 5075	110.57	.231 0786	114.88	.273 2546	119.49
49	.152 0778	106.59	.191 1711	110.64	.231 7681	114.95	.273 9717	119.57
50	3.152 7176	106.66	3.191 8351	110.71	3.232 4581	115.03	3.274 6894	119.65
51	.153 3577	106.72	.192 4996	110.77	.233 1484	115.10	.275 4075	119.73
52	.153 9983	106.79	.193 1644	110.84	.233 8392	115.17	.276 1261	119.81
53	.154 6392	106.85	.193 8297	110.91	.234 5305	115.25	.276 8452	119.89
54	.155 2805	106.92	.194 4954	110.98	.235 2222	115.32	.277 5647	119.97
55	3.155 9222	106.99	3.195 1615	111.05	3.235 9144	115.40	3.278 2848	120.05
56	.156 5643	107.05	.195 8281	111.12	.236 6070	115.47	.279 0053	120.13
57	.157 2068	107.12	.196 4950	111.19	.237 3001	115.55	.279 7203	120.21
58	.157 8497	107.18	.197 1624	111.26	.237 9936	115.62	.280 4477	120.29
59	.158 4930	107.25	.197 8302	111.34	.238 6876	115.70	.281 1697	120.37
60	3.159 1367	107.31	3.198 4984	111.41	3.239 3820	115.77	3.281 8921	120.45

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	152°		153°		154°		155°	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	3.281 8921	120.45	3.326 1448	125.46	3.372 2684	130.85	3.420 4064	136.66
1	.282 6151	120.53	.326 8978	125.55	.373 0538	130.94	.421 2266	136.76
2	.283 3385	120.61	.327 6513	125.63	.373 8397	131.04	.422 0475	136.86
3	.284 0624	120.69	.328 4054	125.72	.374 6262	131.13	.422 8690	136.96
4	.284 7868	120.77	.329 1600	125.81	.375 4133	131.22	.423 6910	137.06
5	3.285 5116	120.85	3.329 9151	125.89	3.376 2009	131.32	3.424 5137	137.16
6	.286 2370	120.93	.330 6707	125.98	.376 9890	131.41	.425 3370	137.26
7	.286 9628	121.01	.331 4268	126.07	.377 7778	131.50	.426 1609	137.37
8	.287 6891	121.10	.332 1835	126.16	.378 5671	131.60	.426 9854	137.47
9	.288 4160	121.18	.332 9407	126.24	.379 3570	131.69	.427 8105	137.57
10	3.289 1433	121.26	3.333 6984	126.33	3.380 1474	131.79	3.428 6362	137.67
11	.289 8711	121.34	.334 4567	126.42	.380 9384	131.88	.429 4626	137.77
12	.290 5993	121.42	.335 2154	126.51	.381 7300	131.98	.430 2895	137.88
13	.291 3281	121.50	.335 9747	126.59	.382 5221	132.07	.431 1171	137.98
14	.292 0574	121.59	.336 7346	126.68	.383 3148	132.16	.431 9452	138.08
15	3.292 7872	121.67	3.337 4949	126.77	3.384 1081	132.26	3.432 7740	138.18
16	.293 5174	121.75	.338 2558	126.86	.384 9019	132.35	.433 6034	138.29
17	.294 2481	121.83	.339 0172	126.95	.385 6963	132.45	.434 4334	138.39
18	.294 9794	121.91	.339 7792	127.03	.386 4913	132.54	.435 2641	138.49
19	.295 7111	122.00	.340 5417	127.12	.387 2869	132.64	.436 0953	138.59
20	3.296 4433	122.08	3.341 3047	127.21	3.388 0830	132.73	3.436 9272	138.70
21	.297 1761	122.16	.342 0682	127.30	.388 8797	132.83	.437 7597	138.80
22	.297 9093	122.24	.342 8323	127.39	.389 6770	132.93	.438 5928	138.90
23	.298 6430	122.33	.343 5969	127.48	.390 4749	133.02	.439 4266	139.01
24	.299 3772	122.41	.344 3620	127.57	.391 2733	133.12	.440 2609	139.11
25	3.300 1119	122.49	3.345 1277	127.66	3.392 0723	133.22	3.441 0959	139.22
26	.300 8471	122.58	.345 8939	127.75	.392 8719	133.31	.441 9315	139.32
27	.301 5828	122.66	.346 6606	127.84	.393 6720	133.41	.442 7677	139.42
28	.302 3190	122.74	.347 4279	127.93	.394 4728	133.50	.443 6046	139.53
29	.303 0557	122.83	.348 1958	128.02	.395 2741	133.60	.444 4421	139.63
30	3.303 7929	122.91	3.348 9641	128.11	3.396 0760	133.70	3.445 2802	139.74
31	.304 5306	122.99	.349 7330	128.19	.396 8785	133.79	.446 1189	139.84
32	.305 2688	123.08	.350 5024	128.28	.397 6815	133.89	.446 9583	139.95
33	.306 0075	123.16	.351 2724	128.37	.398 4852	133.99	.447 7983	140.05
34	.306 7468	123.24	.352 0429	128.46	.399 2894	134.09	.448 6389	140.16
35	3.307 4865	123.33	3.352 8140	128.55	3.400 0942	134.19	3.449 4802	140.26
36	.308 2267	123.41	.353 5856	128.65	.400 8996	134.28	.450 3221	140.37
37	.308 9674	123.50	.354 3577	128.74	.401 7056	134.38	.451 1646	140.47
38	.309 7086	123.58	.355 1304	128.83	.402 5122	134.48	.452 0077	140.57
39	.310 4504	123.66	.355 9037	128.92	.403 3193	134.57	.452 8515	140.68
40	3.311 1926	123.75	3.356 6774	129.01	3.404 1270	134.67	3.453 6959	140.79
41	.311 9354	123.83	.357 4517	129.10	.404 9354	134.77	.454 5410	140.90
42	.312 6786	123.92	.358 2266	129.19	.405 7443	134.87	.455 3867	141.00
43	.313 4224	124.00	.359 0020	129.28	.406 5538	134.97	.456 2330	141.11
44	.314 1667	124.09	.359 7780	129.37	.407 3639	135.07	.457 0800	141.21
45	3.314 9115	124.17	3.360 5545	129.46	3.408 1746	135.16	3.457 9276	141.32
46	.315 6567	124.26	.361 3316	129.56	.408 9859	135.26	.458 7759	141.43
47	.316 4025	124.34	.362 1092	129.65	.409 7977	135.36	.459 6248	141.54
48	.317 1489	124.43	.362 8873	129.74	.410 6102	135.46	.460 4743	141.64
49	.317 8957	124.51	.363 6660	129.83	.411 4233	135.56	.461 3245	141.75
50	3.318 6430	124.60	3.364 4453	129.92	3.412 2369	135.66	3.462 1753	141.86
51	.319 3909	124.68	.365 2251	130.01	.413 0512	135.76	.463 0268	141.97
52	.320 1392	124.77	.366 0055	130.11	.413 8660	135.86	.463 8789	142.07
53	.320 8881	124.86	.366 7864	130.20	.414 6815	135.96	.464 7317	142.18
54	.321 6375	124.94	.367 5679	130.29	.415 4975	136.06	.465 5851	142.29
55	3.322 3874	125.03	3.368 3499	130.38	3.416 3142	136.16	3.466 4392	142.40
56	.323 1379	125.11	.369 1325	130.48	.417 1314	136.26	.467 2939	142.51
57	.323 8888	125.20	.369 9156	130.57	.417 9492	136.36	.468 1492	142.61
58	.324 6403	125.29	.370 6993	130.66	.418 7677	136.46	.469 0052	142.72
59	.325 3923	125.37	.371 4836	130.76	.419 5867	136.56	.469 8619	142.83
60	3.326 1448	125.46	3.372 2684	130.85	3.420 4064	136.66	3.470 7192	142.94

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	156°		157°		158°		159°	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	3.470 7192	142.94	3.523 3875	149.75	3.578 6154	157.17	3.636 6351	165.28
1	.471 5772	143.05	.524 2864	149.87	.579 5588	157.30	.637 6272	165.42
2	.472 4358	143.16	.525 1860	149.99	.580 5030	157.43	.638 6202	165.56
3	.473 2951	143.27	.526 0863	150.11	.581 4480	157.56	.639 6140	165.71
4	.474 1550	143.38	.526 9873	150.23	.582 3937	157.69	.640 6087	165.85
5	3.475 0156	143.49	3.527 8800	150.35	3.583 3403	157.82	3.641 6042	165.99
6	.475 8769	143.60	.528 7915	150.47	.584 2876	157.95	.642 6006	166.13
7	.476 7388	143.71	.529 6947	150.59	.585 2357	158.08	.643 5978	166.28
8	.477 6014	143.82	.530 5985	150.71	.586 1846	158.21	.644 5959	166.42
9	.478 4646	143.93	.531 5031	150.83	.587 1342	158.34	.645 5948	166.56
10	3.479 3285	144.04	3.532 4085	150.95	3.588 0847	158.47	3.646 5946	166.71
11	.480 1931	144.15	.533 3145	151.07	.589 0359	158.61	.647 5953	166.85
12	.481 0583	144.26	.534 2213	151.19	.589 9880	158.74	.648 5968	166.99
13	.481 9242	144.37	.535 1288	151.31	.590 9408	158.87	.649 5992	167.14
14	.482 7907	144.48	.536 0370	151.43	.591 8944	159.00	.650 6025	167.28
15	3.483 6579	144.59	3.536 9459	151.55	3.592 8488	159.13	3.651 6066	167.42
16	.484 5258	144.70	.537 8556	151.67	.593 8040	159.26	.652 6116	167.57
17	.485 3944	144.81	.538 7660	151.79	.594 7600	159.40	.653 6175	167.72
18	.486 2636	144.93	.539 6771	151.91	.595 7167	159.53	.654 6242	167.86
19	.487 1335	145.04	.540 5890	152.04	.596 6743	159.66	.655 6318	168.01
20	3.488 0040	145.15	3.541 5015	152.16	3.597 6327	159.79	3.656 6403	168.15
21	.488 8752	145.26	.542 4148	152.28	.598 5919	159.93	.657 6497	168.30
22	.489 7472	145.37	.543 3289	152.40	.599 5518	160.06	.658 6599	168.45
23	.490 6198	145.49	.544 2436	152.52	.600 5126	160.19	.659 6710	168.59
24	.491 4930	145.60	.545 1591	152.65	.601 4742	160.33	.660 6830	168.74
25	3.492 3670	145.71	3.546 0754	152.77	3.602 4365	160.46	3.661 6959	168.89
26	.493 2416	145.82	.546 9924	152.89	.603 3997	160.60	.662 7096	169.03
27	.494 1168	145.94	.547 9101	153.01	.604 3637	160.73	.663 7243	169.18
28	.494 9928	146.05	.548 8285	153.14	.605 3285	160.87	.664 7398	169.33
29	.495 8695	146.16	.549 7477	153.26	.606 2941	161.00	.665 7562	169.48
30	3.496 7468	146.28	3.550 6677	153.38	3.607 2605	161.14	3.666 7735	169.62
31	.497 6248	146.39	.551 5883	153.51	.608 2277	161.27	.667 7917	169.77
32	.498 5035	146.50	.552 5097	153.63	.609 1957	161.41	.668 8108	169.92
33	.499 3828	146.62	.553 4319	153.75	.610 1646	161.54	.669 8308	170.07
34	.500 2629	146.73	.554 3548	153.88	.611 1342	161.68	.670 8516	170.22
35	3.501 1436	146.85	3.555 2785	154.00	3.612 1047	161.81	3.671 8734	170.37
36	.502 0250	146.96	.556 2029	154.13	.613 0760	161.95	.672 8961	170.52
37	.502 9071	147.08	.557 1280	154.25	.614 0481	162.09	.673 9196	170.67
38	.503 7899	147.19	.558 0539	154.38	.615 0210	162.22	.674 9441	170.82
39	.504 6734	147.31	.558 9806	154.50	.615 9948	162.36	.675 9694	170.97
40	3.505 5576	147.42	3.559 9080	154.63	3.616 9693	162.50	3.676 9957	171.12
41	.506 4425	147.54	.560 8361	154.75	.617 9447	162.63	.678 0228	171.27
42	.507 3280	147.65	.561 7650	154.88	.618 9209	162.77	.679 0509	171.42
43	.508 2143	147.77	.562 6947	155.01	.619 8980	162.91	.680 0799	171.57
44	.509 1012	147.88	.563 6251	155.13	.620 8758	163.05	.681 1098	171.72
45	3.509 9889	148.00	3.564 5562	155.26	3.621 8545	163.18	3.682 1406	171.87
46	.510 8772	148.11	.565 4882	155.38	.622 8340	163.32	.683 1723	172.03
47	.511 7662	148.23	.566 4209	155.51	.623 8144	163.46	.684 2049	172.18
48	.512 6560	148.34	.567 3543	155.64	.624 7956	163.60	.685 2384	172.33
49	.513 5464	148.46	.568 2885	155.76	.625 7776	163.74	.686 2728	172.48
50	3.514 4375	148.58	3.569 2235	155.89	3.626 7604	163.88	3.687 3082	172.64
51	.515 3294	148.70	.570 1592	156.02	.627 7441	164.02	.688 3445	172.79
52	.516 2219	148.81	.571 0957	156.15	.628 7287	164.16	.689 3817	172.94
53	.517 1151	148.93	.572 0330	156.27	.629 7140	164.30	.690 4198	173.10
54	.518 0090	149.05	.572 9710	156.40	.630 7002	164.44	.691 4588	173.25
55	3.518 9037	149.17	3.573 9098	156.53	3.631 6873	164.58	3.692 4988	173.40
56	.519 7990	149.28	.574 8494	156.66	.632 6751	164.72	.693 5397	173.56
57	.520 6951	149.40	.575 7897	156.79	.633 6638	164.86	.694 5815	173.71
58	.521 5918	149.52	.576 7308	156.92	.634 6534	165.00	.695 6243	173.87
59	.522 4893	149.64	.577 6727	157.04	.635 6438	165.14	.696 6680	174.02
60	3.523 3875	149.75	3.578 6154	157.17	3.636 6351	165.28	3.697 7126	174.18

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	160°		161°		162°		163°	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	3.697 7126	174.18	3.762 1539	183.99	3.830 3147	194.87	3.902 6107	207.00
1	.698 7581	174.34	.763 2584	184.16	.831 4845	195.06	.903 8534	207.21
2	.699 8046	174.49	.764 3639	184.34	.832 6554	195.25	.905 0973	207.43
3	.700 8520	174.65	.765 4704	184.51	.833 8275	195.44	.906 3425	207.64
4	.701 9003	174.80	.766 5780	184.68	.835 0008	195.64	.907 5890	207.86
5	3.702 9496	174.96	3.767 6867	184.86	3.836 1752	195.83	3.908 8368	208.08
6	.703 9999	175.12	.768 7963	185.03	.837 3508	196.02	.910 0859	208.29
7	.705 0511	175.28	.769 9070	185.20	.838 5275	196.22	.911 3363	208.51
8	.706 1032	175.43	.771 0187	185.38	.839 7054	196.41	.912 5880	208.72
9	.707 1562	175.59	.772 1315	185.55	.840 8844	196.60	.913 8410	208.94
10	3.708 2102	175.75	3.773 2454	185.73	3.842 0646	196.80	3.915 0953	209.16
11	.709 2652	175.91	.774 3603	185.90	.843 2460	196.99	.916 3509	209.38
12	.710 3211	176.07	.775 4762	186.08	.844 4286	197.19	.917 6078	209.60
13	.711 3780	176.22	.776 5932	186.25	.845 6123	197.38	.918 8661	209.81
14	.712 4358	176.38	.777 7112	186.43	.846 7972	197.58	.920 1256	210.03
15	3.713 4946	176.54	3.778 8303	186.60	3.847 9833	197.78	3.921 3865	210.25
16	.714 5543	176.70	.779 9505	186.78	.849 1705	197.97	.922 6487	210.48
17	.715 6150	176.86	.781 0717	186.96	.850 3589	198.17	.923 9122	210.70
18	.716 6766	177.02	.782 1940	187.14	.851 5486	198.37	.925 1770	210.92
19	.717 7392	177.18	.783 3174	187.31	.852 7394	198.57	.926 4432	211.14
20	3.718 8028	177.34	3.784 4418	187.49	3.853 9314	198.76	3.927 7107	211.36
21	.719 8673	177.50	.785 5672	187.67	.855 1245	198.96	.928 9795	211.58
22	.720 9328	177.66	.786 6938	187.85	.856 3189	199.16	.930 2497	211.81
23	.721 9993	177.83	.787 8214	188.03	.857 5145	199.36	.931 5212	212.03
24	.723 0668	178.00	.788 9501	188.21	.858 7112	199.56	.932 7940	212.25
25	3.724 1352	178.15	3.790 0799	188.39	3.859 9092	199.76	3.934 0682	212.48
26	.725 2045	178.31	.791 2108	188.57	.861 1084	199.96	.935 3438	212.70
27	.726 2749	178.47	.792 3427	188.75	.862 3087	200.16	.936 6207	212.93
28	.727 3462	178.63	.793 4757	188.93	.863 5103	200.36	.937 8980	213.15
29	.728 4185	178.80	.794 6098	189.11	.864 7131	200.56	.939 1785	213.38
30	3.729 4918	178.96	3.795 7450	189.29	3.865 9171	200.77	3.940 4595	213.61
31	.730 5661	179.13	.796 8812	189.47	.867 1223	200.97	.941 7418	213.83
32	.731 6413	179.29	.798 0186	189.65	.868 3287	201.17	.943 0254	214.06
33	.732 7176	179.45	.799 1571	189.83	.869 5363	201.37	.944 3105	214.29
34	.733 7948	179.62	.800 2966	190.01	.870 7452	201.58	.945 5969	214.52
35	3.734 8730	179.78	3.801 4372	190.20	3.871 9552	201.78	3.946 8847	214.74
36	.735 9522	179.95	.802 5790	190.38	.873 1665	201.98	.948 1738	214.97
37	.737 0324	180.11	.803 7218	190.56	.874 3791	202.19	.949 4644	215.20
38	.738 1136	180.28	.804 8657	190.65	.875 5928	202.39	.950 7563	215.43
39	.739 1957	180.45	.806 0108	190.93	.876 8078	202.60	.952 0496	215.66
40	3.740 2789	180.61	3.807 1569	191.11	3.878 0240	202.80	3.953 3443	215.90
41	.741 3631	180.78	.808 3041	191.30	.879 2414	203.01	.954 6403	216.13
42	.742 4482	180.94	.809 4525	191.48	.880 4601	203.22	.955 9378	216.36
43	.743 5344	181.11	.810 6020	191.67	.881 6800	203.42	.957 2366	216.59
44	.744 6216	181.28	.811 7525	191.86	.882 9012	203.63	.958 5369	216.82
45	3.745 7097	181.45	3.812 9042	192.04	3.884 1236	203.84	3.959 8385	217.06
46	.746 7989	181.61	.814 0570	192.23	.885 3473	204.05	.961 1416	217.29
47	.747 8891	181.78	.815 2110	192.41	.886 5722	204.26	.962 4460	217.53
48	.748 9803	181.95	.816 3660	192.60	.887 7983	204.46	.963 7510	217.76
49	.750 0725	182.12	.817 5222	192.79	.889 0257	204.67	.965 0592	218.00
50	3.751 1657	182.29	3.818 6795	192.98	3.890 2544	204.88	3.960 3678	218.23
51	.752 2599	182.46	.819 8379	193.16	.891 4843	205.09	.961 6779	218.47
52	.753 3552	182.63	.820 9974	193.35	.892 7155	205.31	.962 9895	218.70
53	.754 4514	182.80	.822 1581	193.54	.893 9480	205.52	.964 3024	218.94
54	.755 5487	182.97	.823 3199	193.73	.895 1817	205.73	.965 6168	219.18
55	3.756 6470	183.14	3.824 4829	193.92	3.896 4167	205.94	3.972 9326	219.42
56	.757 7464	183.31	.825 6470	194.11	.897 6529	206.15	.974 2498	219.66
57	.758 8467	183.48	.826 8122	194.30	.898 8905	206.36	.975 5684	219.90
58	.759 9481	183.65	.827 9785	194.49	.900 1293	206.57	.976 8885	220.13
59	.761 0505	183.82	.829 1460	194.68	.901 3694	206.79	.978 2100	220.37
60	3.762 1539	183.99	3.830 3147	194.87	3.902 6107	207.00	3.979 5330	220.61

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	164 ⁰		165 ⁰		166 ⁰		167 ⁰	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	3.670 5130	220.01	4.061 0673	236.01	4.140 7198	253.57	4.244 5537	273.78
1	.080 8574	220.86	.063 0842	236.28	.151 2422	253.88	.249 1975	274.11
2	.082 1833	221.10	.064 5027	236.56	.152 7664	254.19	.247 8414	274.51
3	.083 5100	221.34	.065 9229	236.83	.154 2925	254.51	.249 4916	274.87
4	.084 8304	221.58	.067 3447	237.11	.155 8205	254.83	.251 1419	275.24
5	.086 1606	221.83	.068 7682	237.39	4.157 3504	255.14	4.252 7944	275.60
6	.087 5013	222.07	.070 1933	237.66	.158 8822	255.46	.254 4401	275.97
7	.088 8445	222.31	.071 6201	237.94	.160 4159	255.78	.256 1061	276.34
8	.090 1601	222.56	.073 0486	238.22	.161 9515	256.10	.257 7952	276.71
9	.091 5051	222.80	.074 4787	238.50	.163 4891	256.42	.259 4266	277.08
10	.092 8427	223.05	4.075 9106	238.78	4.165 0285	256.74	4.261 0902	277.45
11	.094 1817	223.29	.077 3441	239.06	.166 5699	257.09	.262 7560	277.82
12	.095 5222	223.54	.078 7792	239.34	.168 1132	257.38	.264 4240	278.20
13	.096 8642	223.79	.080 2161	239.62	.169 6585	257.70	.266 0943	278.57
14	.098 2077	224.03	.081 6546	239.90	.171 2056	258.02	.267 7669	278.95
15	.099 5527	224.28	4.083 0948	240.18	4.172 7547	258.35	4.269 4417	279.32
16	4.000 8061	224.53	.084 5368	240.46	.174 3058	258.67	.271 1187	279.70
17	.002 2471	224.78	.085 9804	240.75	.175 8588	259.00	.272 7981	280.08
18	.003 5965	225.03	.087 4257	241.03	.177 4138	259.33	.274 4797	280.46
19	.004 9474	225.28	.088 8728	241.32	.178 9707	259.65	.276 1635	280.84
20	4.006 2000	225.53	4.090 3215	241.60	4.180 5296	259.98	4.277 8497	281.22
21	.007 6518	225.78	.091 7720	241.89	.182 0905	260.31	.279 5381	281.60
22	.009 0093	226.04	.093 2242	242.08	.183 6534	260.64	.281 2289	281.98
23	.010 3693	226.29	.094 6781	242.36	.185 2182	260.97	.282 9219	282.36
24	.011 7248	226.54	.096 1337	242.75	.186 7850	261.30	.284 6173	282.75
25	4.013 0848	226.79	4.097 5911	243.04	4.188 3538	261.63	4.286 3149	283.14
26	.014 4463	227.05	.099 0502	243.33	.189 9246	261.96	.288 0149	283.52
27	.015 8093	227.30	.100 5110	243.62	.191 4974	262.30	.289 7172	283.91
28	.017 1739	227.55	.101 9736	243.91	.193 0722	262.63	.291 4218	284.30
29	.018 5400	227.81	.103 4379	244.20	.194 6490	262.97	.293 1288	284.69
30	4.019 9177	228.06	4.104 9040	244.49	4.196 2278	263.30	4.294 8381	285.08
31	.021 2769	228.32	.106 3718	244.78	.197 8086	263.64	.296 5498	285.47
32	.022 6476	228.58	.107 8414	245.08	.199 3915	263.98	.298 2638	285.87
33	.024 0169	228.84	.109 3127	245.37	.200 9764	264.32	.299 9802	286.26
34	.025 3927	229.09	.110 7858	245.67	.202 5633	264.66	.301 6990	286.66
35	4.026 7691	229.35	4.112 2607	245.96	4.204 1523	265.00	4.303 4201	287.05
36	.028 1490	229.62	.113 7374	246.26	.205 7433	265.34	.305 1436	287.45
37	.029 5245	229.88	.115 2158	246.55	.207 3303	265.68	.306 8695	287.85
38	.030 9045	230.14	.116 6960	246.85	.208 9314	266.02	.308 5978	288.25
39	.032 2861	230.40	.118 1780	247.15	.210 5286	266.37	.310 3285	288.65
40	4.033 6693	230.66	4.119 6618	247.45	4.212 1278	266.71	4.312 0616	289.05
41	.035 0549	230.92	.121 1474	247.75	.213 7291	267.06	.313 7971	289.45
42	.036 4404	231.18	.122 6348	248.05	.215 3325	267.40	.315 5350	289.86
43	.037 8281	231.45	.124 1239	248.35	.216 9379	267.75	.317 2753	290.26
44	.039 2177	231.71	.125 6149	248.65	.218 5455	268.10	.319 0181	290.67
45	4.040 6088	231.97	4.127 1077	248.95	4.220 1551	268.44	4.320 7633	291.07
46	.042 0015	232.24	.128 6023	249.25	.221 7668	268.79	.322 5110	291.48
47	.043 3957	232.51	.130 0988	249.56	.223 3806	269.14	.324 2611	291.89
48	.044 7915	232.77	.131 5970	249.86	.224 9965	269.50	.326 0137	292.30
49	.046 1899	233.04	.133 0971	250.17	.226 6146	269.85	.327 7688	292.71
50	4.047 5880	233.31	4.134 5990	250.47	4.228 2347	270.20	4.329 5263	293.13
51	.048 9887	233.57	.135 1028	250.78	.229 8570	270.55	.331 2863	293.54
52	.050 3909	233.84	.137 6084	251.08	.231 4814	270.91	.333 0487	293.95
53	.051 7948	234.11	.139 1158	251.39	.233 1079	271.27	.334 8137	294.37
54	.053 2003	234.38	.140 6251	251.70	.234 7366	271.62	.336 5812	294.79
55	4.054 6074	234.65	4.142 1362	252.01	4.236 3674	271.98	4.338 3511	295.20
56	.056 0161	234.92	.143 6492	252.32	.238 0003	272.34	.340 1236	295.62
57	.057 4264	235.19	.145 1641	252.63	.239 6354	272.70	.341 8986	296.04
58	.058 8384	235.46	.146 6808	252.94	.241 2727	273.06	.343 6762	296.47
59	.060 2520	235.73	.148 1994	253.25	.242 9121	273.42	.345 4562	296.89
60	4.061 6673	236.01	4.149 7198	253.57	4.244 5537	273.78	4.347 2388	297.31

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	168 ⁰		169 ⁰		170 ⁰		171 ⁰	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	4.347 2388	297.31	4.459 1242	325.07	4.581 9445	358.31	4.717 9835	398.87
1	.349 0240	297.74	.461 0761	325.57	.584 0062	358.92	.720 3790	399.62
2	.350 8117	298.16	.463 0311	326.08	.586 2516	359.53	.722 7790	400.38
3	.352 6019	298.59	.464 9891	326.59	.588 4106	360.15	.725 1835	401.14
4	.354 3948	299.02	.466 9501	327.10	.590 5734	360.76	.727 5926	401.90
5	4.356 1902	299.45	4.468 9142	327.61	4.592 7398	361.38	4.730 0063	402.66
6	.357 9882	299.88	.470 8814	328.12	.594 9100	362.00	.732 4245	403.43
7	.359 7888	300.31	.472 8517	328.64	.597 0838	362.62	.734 8474	404.19
8	.361 5919	300.75	.474 8250	329.15	.599 2615	363.25	.737 2749	404.96
9	.363 3977	301.18	.476 8015	329.67	.601 4428	363.88	.739 7070	405.74
10	4.365 2061	301.62	4.478 7811	330.19	4.603 6280	364.50	4.742 1438	406.52
11	.367 0171	302.05	.480 7637	330.71	.605 8160	365.14	.744 5852	407.30
12	.368 8308	302.49	.482 7495	331.23	.608 0096	365.77	.747 0314	408.08
13	.370 6470	302.93	.484 7385	331.75	.610 2061	366.40	.749 4822	408.87
14	.372 4659	303.37	.486 7306	332.28	.612 4064	367.04	.751 9378	409.66
15	4.374 2875	303.81	4.488 7258	332.81	4.614 6106	367.68	4.754 3981	410.45
16	.376 1117	304.26	.490 7242	333.33	.616 8186	368.32	.756 8632	411.24
17	.377 9386	304.70	.492 7258	333.86	.619 0304	368.96	.759 3330	412.04
18	.379 7681	305.15	.494 7306	334.40	.621 2461	369.61	.761 8077	412.84
19	.381 6003	305.59	.496 7386	334.93	.623 4657	370.26	.764 2872	413.65
20	4.383 4352	306.04	4.498 7498	335.46	4.625 6892	370.91	4.766 7715	414.46
21	.385 2728	306.49	.500 7642	336.00	.627 9166	371.56	.769 2606	415.27
22	.387 1131	306.94	.502 7818	336.54	.630 1480	372.21	.771 7547	416.08
23	.388 9561	307.39	.504 8026	337.08	.632 3832	372.87	.774 2536	416.90
24	.390 8019	307.85	.506 8267	337.62	.634 6224	373.53	.776 7574	417.72
25	4.392 6503	308.30	4.508 8541	338.16	4.636 8656	374.19	4.779 2662	418.54
26	.394 5015	308.76	.510 8847	338.71	.639 1127	374.86	.781 7799	419.37
27	.396 3554	309.21	.512 9186	339.26	.641 3639	375.52	.784 2986	420.20
28	.398 2121	309.67	.514 9558	339.80	.643 6100	376.19	.786 8222	421.03
29	.400 0715	310.13	.516 9962	340.35	.645 8781	376.86	.789 3509	421.86
30	4.401 9337	310.59	4.519 0400	340.91	4.648 1413	377.53	4.791 8846	422.70
31	.403 7986	311.06	.521 0871	341.46	.650 4085	378.21	.794 4233	423.54
32	.405 6663	311.52	.523 1376	342.02	.652 6798	378.80	.796 9671	424.39
33	.407 5368	311.99	.525 1913	342.57	.654 9552	379.57	.799 5160	425.24
34	.409 4102	312.45	.527 2484	343.13	.657 2346	380.25	.802 0700	426.09
35	4.411 2863	312.92	4.529 3089	343.69	4.659 5182	380.93	4.804 6291	426.95
36	.413 1652	313.39	.531 3728	344.26	.661 8059	381.62	.807 1934	427.81
37	.415 0469	313.86	.533 4400	344.82	.664 0977	382.31	.809 7628	428.67
38	.416 9315	314.33	.535 5106	345.39	.666 3930	383.00	.812 3374	429.53
39	.418 8189	314.80	.537 5846	345.95	.668 0937	383.70	.814 9172	430.40
40	4.420 7091	315.28	4.539 6620	346.52	4.670 9080	384.39	4.817 5022	431.28
41	.422 6022	315.75	.541 7429	347.09	.673 3064	385.09	.820 0925	432.15
42	.424 4982	316.23	.543 8272	347.67	.675 6101	385.80	.822 6881	433.03
43	.426 3970	316.71	.545 9149	348.24	.677 9300	386.50	.825 2889	433.91
44	.428 2987	317.19	.548 0061	348.82	.680 2571	387.21	.827 8950	434.80
45	4.430 2033	317.67	4.550 1007	349.40	4.682 5825	387.92	4.830 5065	435.69
46	.432 1108	318.16	.552 1989	349.98	.684 9121	388.63	.833 1234	436.59
47	.434 0212	318.64	.554 3005	350.56	.687 2400	389.34	.835 7456	437.48
48	.435 9345	319.13	.556 4056	351.15	.689 5842	390.06	.838 3732	438.38
49	.437 8507	319.61	.558 5143	351.73	.691 9268	390.78	.841 0062	439.29
50	4.439 7698	320.10	4.560 6264	352.32	4.694 2730	391.50	4.843 6446	440.20
51	.441 6919	320.59	.562 7421	352.91	.696 6248	392.23	.846 2886	441.11
52	.443 6169	321.08	.564 8614	353.50	.698 9803	392.96	.848 9380	442.03
53	.445 5449	321.58	.566 9842	354.10	.701 3402	393.68	.851 5929	442.95
54	.447 4758	322.07	.569 1106	354.69	.703 7040	394.42	.854 2533	443.87
55	4.449 4097	322.57	4.571 2405	355.29	4.706 0733	395.15	4.856 9193	444.80
56	.451 3466	323.06	.573 3741	355.89	.708 4464	395.89	.859 5909	445.73
57	.453 2865	323.56	.575 5113	356.49	.710 8240	396.63	.862 2680	446.66
58	.455 2294	324.06	.577 6521	357.10	.713 2060	397.38	.864 9508	447.60
59	.457 1753	324.56	.579 7965	357.70	.715 5925	398.12	.867 6392	448.54
60	4.459 1242	325.07	4.581 9445	358.31	4.717 9835	398.87	4.870 3333	449.49

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

v.	172°		173°		174°		175°	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	4.870 3333	449.49	5.043 3285	514.47	5.243 3165	601.00	5.480 1373	722.00
1	.873 0331	450.44	.046 4101	515.71	.246 9276	602.60	.484 4765	724.42
2	.875 7386	451.39	.049 5171	516.96	.250 5488	604.38	.488 8304	726.87
3	.878 4490	452.35	.052 6226	518.21	.254 1802	606.08	.493 1989	729.33
4	.881 1668	453.31	.055 7356	519.47	.257 8218	607.80	.497 5823	731.80
5	4.883 8806	454.28	5.058 8562	520.73	5.261 4738	609.53	5.501 9806	734.30
6	.886 6182	455.25	.061 9843	522.00	.265 1361	611.26	.506 3939	736.81
7	.889 3526	456.23	.065 1202	523.28	.268 8089	613.00	.510 8223	739.33
8	.892 0929	457.20	.068 2637	524.56	.272 4922	614.75	.515 2659	741.87
9	.894 8391	458.19	.071 4149	525.85	.276 1860	616.52	.519 7248	744.44
10	4.897 5912	459.17	5.074 5738	527.14	5.279 8904	618.29	5.524 1992	747.02
11	.900 3402	460.16	.077 7406	528.44	.283 6055	620.08	.528 6890	749.61
12	.903 1132	461.16	.080 9151	529.75	.287 3313	621.87	.533 1946	752.23
13	.905 8831	462.16	.084 0976	531.06	.291 0680	623.67	.537 7158	754.86
14	.908 6591	463.16	.087 2879	532.38	.294 8154	625.49	.542 2529	757.51
15	4.911 4411	464.17	5.090 4862	533.71	5.298 5738	627.31	5.546 8060	760.18
16	.914 2291	465.18	.093 6924	535.04	.302 3432	629.15	.551 3751	762.87
17	.917 0233	466.20	.096 9067	536.38	.306 1237	631.00	.555 9605	765.58
18	.919 8235	467.22	.100 1290	537.73	.309 9152	632.85	.560 5621	768.31
19	.922 6299	468.25	.103 3594	539.08	.313 7179	634.72	.565 1802	771.05
20	4.925 4425	469.28	5.106 5980	540.44	5.317 5319	636.60	5.569 8148	773.82
21	.928 2612	470.31	.109 8447	541.81	.321 3571	638.49	.574 4661	776.61
22	.931 0862	471.35	.113 0997	543.18	.325 1938	640.39	.579 1341	779.41
23	.933 9174	472.39	.116 3629	544.56	.329 0418	642.30	.583 8190	782.24
24	.936 7549	473.44	.119 6344	545.95	.332 9014	644.23	.588 5210	785.08
25	4.939 5987	474.49	5.122 9143	547.34	5.336 7726	646.16	5.593 2401	787.95
26	.942 4489	475.55	.126 2026	548.74	.340 6554	648.11	.597 9764	790.84
27	.945 3053	476.61	.129 4992	550.15	.344 5499	650.07	.602 7302	793.75
28	.948 1682	477.68	.132 8044	551.57	.348 4562	652.04	.607 5014	796.68
29	.951 0375	478.75	.136 1181	552.99	.352 3744	654.02	.612 2903	799.63
30	4.953 9132	479.83	5.139 4403	554.42	5.356 3045	656.01	5.617 0970	802.60
31	.956 7954	480.91	.142 7711	555.86	.360 2466	658.02	.621 9216	805.60
32	.959 6841	481.99	.146 1106	557.30	.364 2007	660.04	.626 7642	808.62
33	.962 5793	483.08	.149 4588	558.75	.368 1671	662.07	.631 6250	811.66
34	.965 4811	484.18	.152 8157	560.21	.372 1456	664.11	.636 5041	814.72
35	4.968 3894	485.28	5.156 1813	561.68	5.376 1364	666.17	5.641 4017	817.81
36	.971 3044	486.38	.159 5558	563.16	.380 1396	668.24	.646 3179	820.92
37	.974 2260	487.49	.162 9392	564.64	.384 1553	670.32	.651 2528	824.05
38	.977 1543	488.61	.166 3315	566.13	.388 1834	672.41	.656 2005	827.21
39	.980 0893	489.73	.169 7328	567.63	.392 2242	674.52	.661 1793	830.39
40	4.983 0311	490.85	5.173 1431	569.13	5.396 2777	676.64	5.666 1713	833.60
41	.985 9795	491.98	.176 5624	570.65	.400 3439	678.77	.671 1825	836.83
42	.988 9348	493.12	.179 9908	572.17	.404 4229	680.92	.676 2132	840.08
43	.991 8970	494.26	.183 4284	573.70	.408 5149	683.08	.681 2635	843.36
44	.994 8659	495.40	.186 8752	575.24	.412 6199	685.25	.686 3336	846.67
45	4.997 8418	496.55	5.190 3312	576.78	5.416 7379	687.44	5.691 4236	850.00
46	5.000 8246	497.71	.193 7966	578.34	.420 8692	689.64	.696 5337	853.36
47	.003 8143	498.87	.197 2713	579.90	.425 0136	691.85	.701 6640	856.75
48	.006 8111	500.04	.200 7554	581.47	.429 1714	694.08	.706 8147	860.16
49	.009 8148	501.21	.204 2489	583.05	.433 3427	696.33	.711 9860	863.60
50	5.012 8256	502.39	5.207 7520	584.64	5.437 5274	698.59	5.717 1779	867.06
51	.015 8435	503.57	.211 2646	586.23	.441 7258	700.86	.722 3908	870.56
52	.018 8685	504.76	.214 7868	587.84	.445 9378	703.15	.727 6247	874.08
53	.021 9006	505.95	.218 3186	589.45	.450 1636	705.45	.732 8798	877.63
54	.024 9399	507.15	.221 8602	591.07	.454 4032	707.77	.738 1563	881.21
55	5.027 9864	508.36	5.225 4116	592.71	5.458 6568	710.10	5.743 4544	884.82
56	.031 0402	509.57	.228 9727	594.35	.462 9244	712.45	.748 7742	888.46
57	.034 1013	510.79	.232 5437	596.00	.467 2062	714.81	.754 1159	892.13
58	.037 1697	512.01	.236 1247	597.66	.471 5022	717.19	.759 4798	895.83
59	.040 2454	513.24	.239 7156	599.32	.475 8125	719.59	.764 8659	899.56
60	5.043 3285	514.47	5.243 3165	601.00	5.480 1373	722.00	5.770 2745	903.31

Tafel VI.
Die Barker'sche Tafel.

r.	176°		177°		178°		179°	
	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".	log M.	Diff. 1".
0'	5.770 2745	903.3	6.144 6289	1205.3	6.672 5724	1808.8	7.575 4640	3619
1	.775 7058	907.1	.151 8807	1212.0	.683 4709	1824.0	.597 3596	3680
2	.781 1599	910.9	.159 1733	1218.8	.694 4613	1839.5	.619 6295	3744
3	.786 6370	914.8	.166 5070	1225.7	.705 5454	1855.3	.642 2868	3809
4	.792 1374	918.7	.173 8823	1232.7	.716 7248	1871.3	.665 3452	3877
5	5.797 6612	922.6	6.181 2997	1239.8	6.728 0010	1887.5	7.688 8192	3948
6	.803 2086	926.6	.188 7597	1246.9	.739 3758	1904.1	.712 7239	4021
7	.808 7798	930.6	.196 2628	1254.1	.750 8509	1921.0	.737 0756	4097
8	.814 3751	934.6	.203 8095	1261.4	.762 4279	1938.2	.761 8913	4176
9	.819 9946	938.6	.211 4002	1268.8	.774 1090	1955.6	.787 1889	4257
10	5.825 6386	942.7	6.219 0354	1276.3	6.785 8958	1973.4	7.812 9876	4343
11	.831 3073	946.8	.226 7158	1283.8	.797 7904	1991.5	.839 3075	4431
12	.837 0008	951.0	.234 4419	1291.5	.809 7946	2010.0	.866 1702	4524
13	.842 7195	955.2	.242 2142	1299.2	.821 9106	2028.8	.893 5986	4620
14	.848 4634	959.5	.250 0333	1307.1	.834 1404	2048.0	.921 6170	4720
15	5.854 2329	963.7	6.257 8997	1315.0	6.846 4863	2067.5	7.950 2513	4825
16	.860 0282	968.0	.265 8139	1323.0	.858 9503	2087.3	7.979 5292	4935
17	.865 8495	972.4	.273 7766	1331.1	.871 5348	2107.6	8.009 4802	5050
18	.871 6970	976.8	.281 7884	1339.4	.884 2422	2128.3	.040 1361	5170
19	.877 5710	981.2	.289 8499	1347.7	.897 0749	2149.4	.071 5309	5296
20	5.883 4717	985.7	6.297 9617	1356.2	6.910 0353	2170.9	8.103 7011	5428
21	.889 3993	990.2	.306 1244	1364.7	.923 1261	2192.8	.136 6857	5568
22	.895 3542	994.8	.314 3387	1373.3	.936 3498	2215.2	.170 5274	5714
23	.901 3365	999.4	.322 6052	1382.1	.949 7093	2238.0	.205 2717	5869
24	.907 3465	1004.0	.330 9247	1391.0	.963 2073	2261.4	.240 9679	6032
25	5.913 3845	1008.7	6.339 2977	1400.0	6.976 8466	2285.2	8.277 6700	6204
26	.919 4507	1013.4	.347 7249	1409.1	6.990 6304	2309.6	.315 4361	6387
27	.925 5454	1018.1	.356 2072	1418.3	7.004 5616	2334.3	.354 3298	6580
28	.931 6688	1022.9	.364 7451	1427.6	.018 6437	2359.7	.394 4205	6786
29	.937 8213	1027.8	.373 3395	1437.1	.032 8796	2385.7	.435 7542	7004
30	5.944 0030	1032.7	6.381 9910	1446.7	7.047 2729	2412.2	8.478 5044	7238
31	.950 2144	1037.6	.390 7005	1456.4	.061 8271	2439.4	.522 0731	7488
32	.956 4556	1042.6	.399 4687	1466.2	.076 5458	2467.1	.568 3920	7755
33	.962 7269	1047.7	.408 2965	1476.2	.091 4329	2495.4	.615 7739	8042
34	.969 0287	1052.9	.417 1846	1486.4	.106 4921	2524.5	.664 0442	8352
35	5.975 3613	1058.0	6.426 1337	1496.7	7.121 7276	2554.2	8.716 0431	8686
36	.981 7249	1063.2	.435 1449	1507.0	.137 1434	2584.6	.709 2280	9048
37	.988 1198	1068.4	.444 2191	1517.6	.152 7440	2615.8	.824 6779	9441
38	5.994 5464	1073.7	.453 3569	1528.3	.168 5336	2647.6	.882 5925	9870
39	6.001 0050	1079.1	.462 5594	1539.2	.184 5171	2680.4	.943 2018	10340
40	6.007 4958	1084.5	6.471 8275	1550.2	7.200 6993	2713.0	9.006 7600	10857
41	.014 0192	1089.9	.481 1020	1561.3	.217 0850	2748.3	.073 5974	11420
42	.020 5756	1095.4	.490 5041	1572.0	.233 0700	2783.5	.144 0401	12004
43	.027 1652	1101.0	.500 0346	1584.1	.250 4884	2819.7	.218 5102	12773
44	.033 7885	1106.7	.509 5746	1595.8	.267 5170	2856.8	.297 4963	13572
45	6.040 4457	1112.4	6.519 1850	1607.7	7.284 7712	2894.8	9.381 5820	14470
46	.047 1372	1118.1	.528 8069	1619.6	.302 2571	2934.1	.471 4711	15510
47	.053 8634	1123.9	.538 6216	1631.8	.319 9810	2974.2	.568 0247	16704
48	.060 6246	1129.8	.548 4490	1644.2	.337 9404	3015.0	.672 3106	18096
49	.067 4212	1135.7	.558 3530	1656.8	.350 1092	3058.1	.785 0758	19741
50	6.074 2535	1141.7	6.568 3320	1669.6	7.374 6475	3101.7	9.009 8535	21715
51	.081 1219	1147.7	.578 3881	1682.4	.393 3918	3146.8	10.047 1256	24127
52	.088 0209	1153.8	.588 5227	1695.0	.412 4099	3193.0	.200 5829	27144
53	.094 9687	1160.0	.598 7368	1708.9	.431 7097	3240.7	.374 5584	31023
54	.101 9479	1166.3	.609 0317	1722.6	.451 2999	3289.9	.575 3986	36197
55	6.108 9647	1172.6	6.619 4086	1736.4	7.471 1892	3340.3	10.812 9421	43450
56	.116 0196	1179.0	.629 8089	1750.3	.491 3870	3392.6	11.103 6719	
57	.123 1131	1185.4	.640 4141	1764.5	.511 9029	3446.5	11.478 4880	
58	.130 2455	1192.0	.651 0455	1779.0	.532 7472	3502.1	12.006 7617	
59	.137 4173	1198.6	.661 7645	1793.8	.553 9305	3559.6	12.909 8516	
60	6.144 6289	1205.3	6.672 5724	1808.8	7.575 4640	3618.7		

Tafel VII.

Ergänzung der Barker'schen Tafel für grosse Werthe von ν .

w	δ	Diff.	w	δ	Diff.	w	δ	Diff.
\circ	\prime	$''$	\circ	\prime	$''$	\circ	\prime	$''$
155 0	3 23.09		160 0	1 6.70		165 0	0 15.85	
5	19.74	3.35	5	5.33	1.37	10	14.98	0.87
10	16.43	3.31	10	3.97	1.36	20	14.16	0.82
15	13.17	3.26	15	2.64	1.33	30	13.38	0.78
20	9.95	3.22	20	1.33	1.31	40	12.63	0.75
25	6.77	3.18	25	0.04	1.29	50	11.91	0.72
		3.14			1.26			0.69
155 30	3 3.63		160 30	0 58.78		166 0	0 11.22	
35	0.54	3.09	35	57.54	1.24	10	10.57	0.65
40	2 57.49	3.05	40	56.31	1.23	20	9.95	0.62
45	54.48	3.01	45	55.11	1.20	30	9.36	0.59
50	51.51	2.97	50	53.93	1.18	40	8.80	0.56
55	48.58	2.93	55	52.77	1.16	50	8.26	0.54
		2.89			1.14			0.51
156 0	2 45.69		161 0	0 51.63		167 0	0 7.75	
5	42.84	2.85	5	50.50	1.13	10	7.27	0.48
10	40.03	2.81	10	49.40	1.10	20	6.81	0.46
15	37.26	2.77	15	48.32	1.08	30	6.37	0.44
20	34.53	2.73	20	47.26	1.06	40	5.96	0.41
25	31.83	2.70	25	46.21	1.05	50	5.57	0.39
		2.66			1.02			0.37
156 30	2 29.17		161 30	0 45.19		168 0	0 5.20	
35	26.55	2.62	35	44.18	1.01	10	4.84	0.36
40	23.97	2.58	40	43.19	0.99	20	4.51	0.33
45	21.43	2.54	45	42.22	0.97	30	4.20	0.31
50	18.92	2.51	50	41.26	0.96	40	3.90	0.30
55	16.44	2.48	55	40.33	0.93	50	3.62	0.28
		2.44			0.92			0.26
157 0	2 14.00		162 0	0 39.41		169 0	0 3.36	
5	11.59	2.41	5	38.51	0.90	10	3.11	0.25
10	9.22	2.37	10	37.62	0.89	20	2.88	0.23
15	6.89	2.33	15	36.75	0.87	30	2.66	0.22
20	4.58	2.31	20	35.90	0.85	40	2.46	0.20
25	2.31	2.27	25	35.06	0.84	50	2.27	0.19
		2.23			0.82			0.18
157 30	2 0.08		162 30	0 34.24		170 0	0 2.09	
35	1 57.89	2.19	35	33.43	0.81	10	1.92	0.17
40	55.72	2.17	40	32.64	0.79	20	1.76	0.16
45	53.57	2.15	45	31.86	0.78	30	1.62	0.14
50	51.46	2.11	50	31.10	0.76	40	1.48	0.14
55	49.39	2.07	55	30.35	0.75	50	1.35	0.13
		2.04			0.73			0.12
158 0	1 47.35		163 0	0 29.62		171 0	0 1.23	
5	45.34	2.01	5	28.90	0.72	10	1.12	0.11
10	43.35	1.99	10	28.20	0.70	20	1.02	0.10
15	41.39	1.96	15	27.51	0.69	30	0.93	0.09
20	39.47	1.92	20	26.83	0.68	40	0.84	0.09
25	37.57	1.90	25	26.16	0.67	50	0.76	0.08
		1.87			0.65			0.08
158 30	1 35.70		163 30	0 25.51		172 0	0 0.68	
35	33.87	1.83	35	24.88	0.63	10	0.61	0.07
40	32.06	1.81	40	24.25	0.63	20	0.55	0.06
45	30.28	1.78	45	23.64	0.61	30	0.49	0.06
50	28.52	1.76	50	23.04	0.60	40	0.44	0.05
55	26.80	1.72	55	22.45	0.59	50	0.39	0.05
		1.70			0.57			0.04
159 0	1 25.10		164 0	9 21.88		173 0	0 0.35	
5	23.43	1.67	5	21.31	0.57	10	0.31	0.04
10	21.78	1.65	10	20.76	0.55	20	0.27	0.04
15	20.16	1.62	15	20.22	0.54	30	0.24	0.03
20	18.57	1.59	20	19.69	0.53	40	0.21	0.03
25	17.00	1.57	25	19.18	0.51	50	0.19	0.02
		1.55			0.51			0.03
159 30	1 15.45		164 30	0 18.67		174 0	0 0.16	
35	13.94	1.51	35	18.17	0.50	175 0	0 0.07	0.00
40	12.44	1.50	40	17.69	0.48	176 0	0 0.02	0.05
45	10.97	1.47	45	17.21	0.48	177 0	0 0.01	0.01
50	9.53	1.44	50	16.75	0.46	178 0	0 0.00	0.01
55	8.10	1.43	55	16.29	0.46	179 0	0 0.00	0.00
		1.40			0.44			0.00
160 0	1 6.70		165 0	0 15.85		180 0	0 0.00	

Tafel VIII.

Zur Berechnung der seit dem Periheldurchgang verfloßenen Zeit
in der Parabel.

v	$\log N$	Diff.	v	$\log N$	Diff.	v	$\log N$	Diff.
0 0	0.025 5763		30 0	0.020 7913		60 0	0.008 8644	
30	.025 5749	14	30 30	.020 6368	1545	30	.008 6458	2186
1 0	.025 5707	42	31 0	.020 4802	1566	61 0	.008 4277	2181
30	.025 5638	69	30 30	.020 3215	1587	30	.008 2103	2174
2 0	.025 5542	96	32 0	.020 1607	1608	62 0	.007 9934	2169
30	.025 5418	124	30 30	.019 9979	1628	30	.007 7774	2160
		152			1649			2153
3 0	0.025 5266		33 0	0.019 8330		63 0	0.007 5621	
30	.025 5087	179	30 30	.019 6662	1668	30	.007 3477	2144
4 0	.025 4881	206	34 0	.019 4974	1688	64 0	.007 1343	2134
30	.025 4647	234	30 30	.019 3267	1707	30	.006 9220	2123
5 0	.025 4386	261	35 0	.019 1540	1727	65 0	.006 7108	2112
30	.025 4097	289	30 30	.018 9795	1745	30	.006 5008	2100
		316			1765			2086
6 0	0.025 3781		36 0	0.018 8030		66 0	0.006 2922	
30	.025 3437	344	30 30	.018 6248	1782	30	.006 0849	2073
7 0	.025 3066	371	37 0	.018 4448	1800	67 0	.005 8792	2057
30	.025 2668	398	30 30	.018 2629	1819	30	.005 6750	2042
8 0	.025 2243	425	38 0	.018 0794	1835	68 0	.005 4725	2025
30	.025 1791	452	30 30	.017 8941	1853	30	.005 2717	2008
		480			1869			1988
9 0	0.025 1311		39 0	0.017 7072		69 0	0.005 0720	
30	.025 0805	506	30 30	.017 5186	1886	30	.004 8760	1969
10 0	.025 0271	534	40 0	.017 3283	1903	70 0	.004 6811	1949
30	.024 9711	560	30 30	.017 1365	1918	30	.004 4884	1927
11 0	.024 9124	587	41 0	.016 9432	1933	71 0	.004 2980	1904
30	.024 8510	614	30 30	.016 7483	1949	30	.004 1100	1880
		641			1963			1855
12 0	0.024 7869		42 0	0.016 5520		72 0	0.003 9245	
30	.024 7201	668	30 30	.016 3542	1978	30	.003 7416	1829
13 0	.024 6507	694	43 0	.016 1550	1992	73 0	.003 5613	1803
30	.024 5786	721	30 30	.015 9545	2005	30	.003 3839	1774
14 0	.024 5039	747	44 0	.015 7520	2019	74 0	.003 2094	1745
30	.024 4266	773	30 30	.015 5495	2031	30	.003 0380	1714
		800			2045			1682
15 0	0.024 3466		45 0	0.015 3450		75 0	0.002 8698	
30	.024 2641	825	30 30	.015 1394	2059	30	.002 7049	1649
16 0	.024 1789	852	46 0	.014 9320	2073	76 0	.002 5433	1616
30	.024 0911	878	30 30	.014 7247	2079	30	.002 3854	1579
17 0	.024 0008	903	47 0	.014 5157	2090	77 0	.002 2311	1543
30	.023 9079	929	30 30	.014 3057	2100	30	.002 0806	1505
		954			2110			1465
18 0	0.023 8125		48 0	0.014 0947		78 0	0.001 9341	
30	.023 7145	980	30 30	.013 8827	2120	30	.001 7917	1424
19 0	.023 6140	1005	49 0	.013 6695	2129	79 0	.001 6535	1382
30	.023 5109	1031	30 30	.013 4501	2137	30	.001 5199	1339
20 0	.023 4054	1055	50 0	.013 2410	2145	80 0	.001 3903	1293
30	.023 2973	1081	30 30	.013 0203	2153	30	.001 2650	1247
		1105			2160			1198
21 0	0.023 1868		51 0	0.012 8103		81 0	0.001 1458	
30	.023 0738	1130	30 30	.012 5930	2167	30	.001 0309	1149
22 0	.022 9584	1154	52 0	.012 3794	2172	82 0	.000 9211	1098
30	.022 8405	1179	30 30	.012 1585	2179	30	.000 8106	1045
23 0	.022 7202	1203	53 0	.011 9402	2183	83 0	.000 7175	991
30	.022 5975	1227	30 30	.011 7215	2187	30	.000 6240	935
		1251			2191			876
24 0	0.022 4724		54 0	0.011 5024		84 0	0.000 5364	
30	.022 3449	1275	30 30	.011 2820	2195	30	.000 4540	818
25 0	.022 2151	1298	55 0	.011 0632	2197	85 0	.000 3790	750
30	.022 0829	1322	30 30	.010 8432	2200	30	.000 3090	694
26 0	.021 9484	1345	56 0	.010 6231	2201	86 0	.000 2408	628
30	.021 8116	1368	30 30	.010 4029	2202	30	.000 1906	562
		1390			2202			493
27 0	0.021 6726		57 0	0.010 1827		87 0	0.000 1413	
30	.021 5312	1414	30 30	.009 9625	2202	30	.000 0990	423
28 0	.021 3876	1430	58 0	.009 7424	2201	88 0	.000 0639	351
30	.021 2418	1458	30 30	.009 5225	2209	30	.000 0363	276
29 0	.021 0938	1480	59 0	.009 3028	2207	89 0	.000 0163	200
30	.020 9436	1502	30 30	.009 0834	2204	30	.000 0041	122
		1523			2200			41
30 0	0.020 7913		60 0	0.008 8644		90 0	0.000 0000	

Tafel VIII.

Zur Berechnung der seit dem Periheldurchgang verfloffenen Zeit
in der Parabel.

e	$\log N'$	Diff.	e	$\log N'$	Diff.	e	$\log N'$	Diff.
90 0	0.000 0000		120 0	0.963 1069		150 0	0.889 0321	
30	0.009 0876	124	30	.002 0074	10995	30	.887 8738	11583
91 0	.009 9507	309	121 0	.000 8071	11103	151 0	.886 7259	11479
30	.009 8893	614	30	.959 7704	11207	30	.885 5887	11372
92 0	.000 8039	854	122 0	.958 6454	11310	152 0	.884 4627	11260
30	.009 6944	1095	30	.957 5046	11408	30	.883 3481	11146
93 0	0.009 5613	1331	123 0	0.956 3542	11504	153 0	0.882 2411	11026
30	.009 4046	1567	30	.955 1945	11597	30	.881 1552	10903
94 0	.009 2246	1800	124 0	.954 0258	11687	154 0	.880 0775	10777
30	.009 0215	2031	30	.952 8483	11775	30	.879 0129	10646
95 0	.008 7955	2260	125 0	.951 6624	11859	155 0	.877 9616	10513
30	.008 5408	2487	30	.950 4684	11940	30	.876 9242	10374
96 0	0.008 2757	2711	126 0	0.949 2666	12018	156 0	0.875 9010	10232
30	.007 9824	2933	30	.948 0573	12093	30	.874 8922	10088
97 0	.007 6669	3155	127 0	.946 8408	12165	157 0	.873 8984	9938
30	.007 3297	3372	30	.945 6174	12234	30	.872 9198	9786
98 0	.006 9708	3589	128 0	.944 3875	12290	158 0	.871 9569	9629
30	.006 5906	3802	30	.943 1513	12362	30	.871 0090	9470
99 0	0.006 1891	4015	129 0	0.941 9092	12421	159 0	0.870 0792	9307
30	.005 7666	4225	30	.940 6615	12477	30	.869 1652	9140
100 0	.005 3234	4432	130 0	.939 4085	12530	160 0	.868 2683	8969
30	.004 8596	4638	30	.938 1506	12579	30	.867 3886	8797
101 0	.004 3755	4841	131 0	.936 8881	12625	161 0	.866 5266	8620
30	.003 8712	5043	30	.935 6213	12668	30	.865 6827	8439
102 0	0.003 3470	5242	132 0	0.934 3506	12707	162 0	0.864 8570	8257
30	.002 8031	5439	30	.933 0763	12743	30	.864 0500	8070
103 0	.002 2397	5634	133 0	.931 7987	12776	163 0	.863 2620	7880
30	.001 6570	5827	30	.930 5183	12804	30	.862 4932	7688
104 0	.001 0553	6017	134 0	.929 2353	12830	164 0	.861 7439	7493
30	.000 4347	6206	30	.927 9501	12852	30	.861 0145	7294
105 0	0.000 7956	6391	135 0	0.926 6630	12871	165 0	0.860 3053	7092
30	.989 1380	6576	30	.925 3745	12885	30	.859 6194	6889
106 0	.988 4622	6758	136 0	.924 0848	12897	166 0	.858 9482	6682
30	.987 7685	6937	30	.922 7943	12905	30	.858 3010	6472
107 0	.987 0571	7114	137 0	.921 5035	12908	167 0	.857 6750	6260
30	.986 3281	7290	30	.920 2126	12909	30	.857 0704	6046
108 0	.985 5819	7462	138 0	0.918 9220	12906	168 0	0.856 4875	5829
30	.984 8186	7633	30	.917 6321	12899	30	.855 9266	5609
109 0	.984 0385	7801	139 0	.916 3433	12888	169 0	.855 3878	5388
30	.983 2418	7967	30	.915 0559	12874	30	.854 8714	5164
110 0	.982 4288	8130	140 0	.913 7703	12856	170 0	.854 3775	4939
30	.981 5977	8292	30	.912 4870	12833	30	.853 9065	4710
111 0	0.980 7545	8451	141 0	0.911 2062	12808	171 0	0.853 4584	4481
30	.979 8938	8607	30	.909 9283	12779	30	.853 0335	4249
112 0	.979 0177	8761	142 0	.908 6538	12745	172 0	.852 6310	4016
30	.978 1264	8913	30	.907 3831	12707	30	.852 2538	3781
113 0	.977 2202	9062	143 0	.906 1164	12667	173 0	.851 8994	3544
30	.976 2993	9209	30	.904 8542	12622	30	.851 5687	3307
114 0	0.975 3640	9353	144 0	0.903 5909	12574	174 0	0.851 2620	3067
30	.974 4145	9495	30	.902 3449	12526	30	.850 9794	2826
115 0	.973 4510	9635	145 0	.901 0985	12464	175 0	.850 7209	2585
30	.972 4739	9771	30	.899 8582	12403	30	.850 4868	2341
116 0	.971 4833	9906	146 0	.898 6243	12339	176 0	.850 2770	2098
30	.970 4799	10037	30	.897 3972	12271	30	.850 0917	1853
117 0	0.969 4629	10167	147 0	0.896 1774	12198	177 0	0.849 9309	1608
30	.968 4337	10292	30	.894 9652	12122	30	.849 7948	1361
118 0	.967 3920	10417	148 0	.893 7610	12042	178 0	.849 6833	1115
30	.966 3382	10538	30	.892 5652	11958	30	.849 5906	867
119 0	.965 2726	10656	149 0	.891 3782	11870	179 0	.849 5346	620
30	.964 1954	10772	30	.890 2004	11778	30	.849 4974	372
120 0	0.963 1069	10885	150 0	0.889 0321	11683	180 0	0.849 4850	124

Tafel IX.

Für nahezu parabolische Bahnen.

$$\varepsilon = \frac{1-e}{1+e}; \tau = \operatorname{tg} \frac{v}{2}, \quad M = \frac{Dt}{q^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+\varepsilon}}; \operatorname{tg} \frac{1}{2} v = U \operatorname{tg} \frac{1}{2} w.$$

Hyperbel $\varepsilon \tau^2$	$\log C$	Differenz	$\log D$	Differenz
— 0.300	9.960 8905		9.893 4503	
— 0.299	9.961 0382	1477	9.893 7364	2861
0.298	9.961 1858	1476	9.894 0218	2854
0.297	9.961 3332	1474	9.894 3067	2849
0.296	9.961 4805	1473	9.894 5911	2844
0.295	9.961 6276	1471	9.894 8748	2837
— 0.294	9.961 7746	1470	9.895 1580	2832
0.293	9.961 9215	1469	9.895 4406	2826
0.292	9.962 0682	1467	9.895 7226	2820
0.291	9.962 2148	1466	9.896 0040	2814
0.290	9.962 3612	1464	9.896 2849	2809
— 0.289	9.962 5075	1463	9.896 5654	2805
0.288	9.962 6537	1462	9.896 8453	2799
0.287	9.962 7998	1461	9.897 1246	2793
0.286	9.962 9457	1459	9.897 4034	2788
0.285	9.963 0915	1458	9.897 6817	2783
— 0.284	9.963 2371	1456	9.897 9594	2777
0.283	9.963 3826	1455	9.898 2366	2772
0.282	9.963 5280	1454	9.898 5132	2766
0.281	9.963 6732	1452	9.898 7893	2761
0.280	9.963 8183	1451	9.899 0648	2755
— 0.279	9.963 9633	1450	9.899 3399	2751
0.278	9.964 1081	1448	9.899 6144	2745
0.277	9.964 2528	1447	9.899 8885	2741
0.276	9.964 3974	1446	9.900 1620	2735
0.275	9.964 5418	1444	9.900 4349	2729
— 0.274	9.964 6861	1443	9.900 7072	2724
0.273	9.964 8303	1442	9.900 9792	2719
0.272	9.964 9743	1440	9.901 2506	2714
0.271	9.965 1182	1439	9.901 5215	2709
0.270	9.965 2620	1438	9.901 7918	2703
— 0.269	9.965 4057	1437	9.902 0617	2699
0.268	9.965 5492	1435	9.902 3310	2693
0.267	9.965 6926	1434	9.902 5999	2689
0.266	9.965 8358	1432	9.902 8682	2683
0.265	9.965 9789	1431	9.903 1361	2679
— 0.264	9.966 1219	1430	9.903 4034	2673
0.263	9.966 2648	1429	9.903 6702	2668
0.262	9.966 4075	1427	9.903 9365	2663
0.261	9.966 5501	1426	9.904 2022	2657
0.260	9.966 6926	1425	9.904 4675	2653
— 0.259	9.966 8350	1424	9.904 7323	2648
0.258	9.966 9772	1422	9.904 9967	2644
0.257	9.967 1193	1421	9.905 2605	2638
0.256	9.967 2613	1420	9.905 5239	2634
0.255	9.967 4031	1418	9.905 7867	2628
— 0.254	9.967 5448	1417	9.906 0491	2624
0.253	9.967 6864	1416	9.906 3109	2618
0.252	9.967 8278	1414	9.906 5723	2614
0.251	9.967 9691	1413	9.906 8331	2608
0.250	9.968 1103	1412	9.907 0935	2604
— 0.249	9.968 2514	1411	9.907 3535	2600
0.248	9.968 3924	1410	9.907 6129	2594
0.247	9.968 5332	1408	9.907 8719	2590
0.246	9.968 6739	1407	9.908 1304	2585
0.245	9.968 8145	1406	9.908 3885	2581
— 0.244	9.968 9549	1404	9.908 6460	2575
0.243	9.969 0952	1403	9.908 9031	2571
0.242	9.969 2354	1402	9.909 1597	2566
0.241	9.969 3755	1401	9.909 4158	2561
0.240	9.969 5154	1399	9.909 6714	2556

Tafel IX.

Für nahezu parabolische Bahnen.

$$\varepsilon = \frac{1-e}{1+e}; \tau = \operatorname{tg} \frac{v}{2}; M = \frac{Dt}{a^{3/2} \sqrt{1+\varepsilon}}; \operatorname{tg} \frac{v}{2} = C \operatorname{tg} \frac{w}{2}.$$

Hyperbel $\varepsilon \tau^2$	$\log C$	Differenz	$\log D$	Differenz
— 0.240	9.969 5154		9.909 6714	
— 0.239	9.969 6552	1398	9.909 9266	2552
0.238	9.969 7949	1397	9.910 1814	2548
0.237	9.969 9345	1396	9.910 4357	2543
0.236	9.970 0740	1395	9.910 6895	2538
0.235	9.970 2133	1393	9.910 9428	2533
— 0.234	9.970 3525	1392	9.911 1957	2529
0.233	9.970 4916	1391	9.911 4482	2525
0.232	9.970 6306	1390	9.911 7001	2519
0.231	9.970 7694	1388	9.911 9516	2515
0.230	9.970 9081	1387	9.912 2026	2510
— 0.229	9.971 0467	1386	9.912 4532	2506
0.228	9.971 1852	1385	9.912 7034	2502
0.227	9.971 3236	1384	9.912 9531	2497
0.226	9.971 4619	1383	9.913 2023	2492
0.225	9.971 6000	1381	9.913 4511	2488
— 0.224	9.971 7380	1380	9.913 6995	2484
0.223	9.971 8759	1379	9.913 9474	2479
0.222	9.972 0137	1378	9.914 1948	2474
0.221	9.972 1513	1376	9.914 4418	2470
0.220	9.972 2888	1375	9.914 6883	2465
— 0.219	9.972 4262	1374	9.914 9345	2462
0.218	9.972 5635	1373	9.915 1802	2457
0.217	9.972 7007	1372	9.915 4255	2453
0.216	9.972 8377	1370	9.915 6703	2448
0.215	9.972 9747	1370	9.915 9147	2444
— 0.214	9.973 1115	1368	9.916 1587	2440
0.213	9.973 2481	1366	9.916 4022	2435
0.212	9.973 3847	1366	9.916 6453	2431
0.211	9.973 5211	1364	9.916 8880	2427
0.210	9.973 6575	1364	9.917 1302	2422
— 0.209	9.973 7938	1363	9.917 3720	2418
0.208	9.973 9299	1361	9.917 6134	2414
0.207	9.974 0659	1360	9.917 8544	2410
0.206	9.974 2018	1359	9.918 0949	2405
0.205	9.974 3376	1358	9.918 3350	2401
— 0.204	9.974 4733	1357	9.918 5747	2397
0.203	9.974 6088	1355	9.918 8140	2393
0.202	9.974 7442	1354	9.919 0528	2388
0.201	9.974 8795	1353	9.919 2912	2384
0.200	9.975 0147	1352	9.919 5291	2379
— 0.199	9.975 1498	1351	9.919 7667	2376
0.198	9.975 2848	1350	9.920 0039	2372
0.197	9.975 4196	1348	9.920 2407	2368
0.196	9.975 5543	1347	9.920 4771	2364
0.195	9.975 6890	1347	9.920 7131	2360
— 0.194	9.975 8235	1345	9.920 9486	2355
0.193	9.975 9578	1343	9.921 1838	2352
0.192	9.976 0921	1343	9.921 4185	2347
0.191	9.976 2263	1342	9.921 6528	2343
0.190	9.976 3603	1340	9.921 8867	2339
— 0.189	9.976 4942	1339	9.922 1202	2335
0.188	9.976 6281	1339	9.922 3534	2332
0.187	9.976 7618	1337	9.922 5861	2327
0.186	9.976 8954	1336	9.922 8185	2324
0.185	9.977 0289	1335	9.923 0504	2319
— 0.184	9.977 1623	1334	9.923 2820	2316
0.183	9.977 2955	1332	9.923 5131	2311
0.182	9.977 4287	1332	9.923 7438	2307
0.181	9.977 5617	1330	9.923 9742	2304
0.180	9.977 6946	1329	9.924 2041	2299

Tafel IX.

Für nahezu parabolische Bahnen.

$$\varepsilon = \frac{1-e}{1+e}; \tau = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v. \quad M = \frac{D t}{q^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+\varepsilon}}; \operatorname{tg} \frac{1}{2} v = C \operatorname{tg} \frac{1}{2} w.$$

Hyperbel $\varepsilon \tau^2$	$\log C$	Differenz	$\log D$	Differenz
— 0.180	9.977 6946		9.924 2041	
— 0.179	9.977 8274	1328	9.924 4337	2296
0.178	9.977 9602	1328	9.924 6629	2292
0.177	9.978 0928	1326	9.924 8916	2287
0.176	9.978 2253	1325	9.925 1200	2284
0.175	9.978 3577	1324	9.925 3480	2280
— 0.174	9.978 4900	1323	9.925 5756	2276
0.173	9.978 6222	1322	9.925 8028	2272
0.172	9.978 7542	1320	9.926 0297	2269
0.171	9.978 8862	1320	9.926 2561	2264
0.170	9.979 0180	1318	9.926 4821	2260
— 0.169	9.979 1498	1318	9.926 7078	2257
0.168	9.979 2814	1316	9.926 9332	2254
0.167	9.979 4129	1315	9.927 1581	2249
0.166	9.979 5443	1314	9.927 3827	2246
0.165	9.979 6756	1313	9.927 6069	2242
— 0.164	9.979 8068	1312	9.927 8307	2238
0.163	9.979 9379	1311	9.928 0542	2235
0.162	9.980 0689	1310	9.928 2772	2230
0.161	9.980 1998	1309	9.928 4999	2227
0.160	9.980 3305	1307	9.928 7222	2223
— 0.159	9.980 4612	1307	9.928 9442	2220
0.158	9.980 5918	1306	9.929 1658	2216
0.157	9.980 7222	1304	9.929 3870	2212
0.156	9.980 8526	1304	9.929 6078	2208
0.155	9.980 9828	1302	9.929 8283	2205
— 0.154	9.981 1129	1301	9.930 0484	2201
0.153	9.981 2430	1301	9.930 2681	2197
0.152	9.981 3729	1299	9.930 4875	2194
0.151	9.981 5027	1298	9.930 7065	2190
0.150	9.981 6324	1297	9.930 9251	2189
— 0.149	9.981 7620	1296	9.931 1434	2183
0.148	9.981 8915	1295	9.931 3614	2180
0.147	9.982 0209	1294	9.931 5789	2175
0.146	9.982 1502	1293	9.931 7962	2173
0.145	9.982 2794	1292	9.932 0131	2169
— 0.144	9.982 4085	1291	9.932 2296	2165
0.143	9.982 5375	1290	9.932 4457	2161
0.142	9.982 6664	1289	9.932 6615	2158
0.141	9.982 7951	1287	9.932 8769	2154
0.140	9.982 9238	1287	9.933 0920	2151
— 0.139	9.983 0524	1286	9.933 3068	2148
0.138	9.983 1809	1285	9.933 5212	2144
0.137	9.983 3092	1283	9.933 7353	2141
0.136	9.983 4375	1283	9.933 9490	2137
0.135	9.983 5656	1281	9.934 1624	2134
— 0.134	9.983 6937	1281	9.934 3754	2130
0.133	9.983 8217	1280	9.934 5881	2127
0.132	9.983 9495	1278	9.934 8004	2123
0.131	9.984 0773	1278	9.935 0124	2120
0.130	9.984 2049	1276	9.935 2240	2116
— 0.129	9.984 3325	1270	9.935 4353	2113
0.128	9.984 4599	1274	9.935 6463	2110
0.127	9.984 5873	1274	9.935 8569	2106
0.126	9.984 7146	1273	9.936 0672	2103
0.125	9.984 8417	1271	9.936 2771	2099
— 0.124	9.984 9688	1271	9.936 4867	2096
0.123	9.985 0957	1269	9.936 6959	2092
0.122	9.985 2226	1269	9.936 9048	2089
0.121	9.985 3493	1267	9.937 1134	2086
0.120	9.985 4760	1267	9.937 3216	2082

Tafel IX.

Für nahezu parabolische Bahnen.

$$\varepsilon = \frac{1-e}{1+e}; \tau = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v. \quad M = \frac{D t}{q^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+\varepsilon}}; \operatorname{tg} \frac{1}{2} v = C \operatorname{tg} \frac{1}{2} w.$$

Hyperbel $\varepsilon \tau^2$	$\log C$	Differenz	$\log D$	Differenz
— 0.120	9.985 4760		9.937 3216	
— 0.119	9.985 6026	1266		2079
0.118	9.985 7290	1264	9.937 5295	2076
0.117	9.985 8554	1264	9.937 7371	2073
0.116	9.985 9816	1262	9.937 9444	2070
0.115	9.986 1078	1262	9.938 1514	2066
		1261	9.938 3580	2063
— 0.114	9.986 2339	1259	9.938 5643	2059
0.113	9.986 3598	1259	9.938 7702	2056
0.112	9.986 4857	1257	9.938 9758	2053
0.111	9.986 6114	1257	9.939 1811	2050
0.110	9.986 7371		9.939 3861	
		1256		2047
— 0.109	9.986 8627	1255	9.939 5908	2043
0.108	9.986 9882	1254	9.939 7951	2040
0.107	9.987 1136	1252	9.939 9991	2037
0.106	9.987 2388	1252	9.940 2028	2034
0.105	9.987 3640		9.940 4062	
		1251		2031
— 0.104	9.987 4891	1250	9.940 6093	2027
0.103	9.987 6141	1249	9.940 8120	2024
0.102	9.987 7390	1248	9.941 0144	2021
0.101	9.987 8638	1247	9.941 2165	2017
0.100	9.987 9885		9.941 4182	
		1246		2015
— 0.099	9.988 1131	1245	9.941 6197	2012
0.098	9.988 2376	1245	9.941 8209	2008
0.097	9.988 3621	1243	9.942 0217	2005
0.096	9.988 4864	1242	9.942 2222	2002
0.095	9.988 6106		9.942 4224	
		1241		1999
— 0.094	9.988 7347	1241	9.942 6223	1996
0.093	9.988 8588	1239	9.942 8219	1992
0.092	9.988 9827	1239	9.943 0211	1990
0.091	9.989 1066	1237	9.943 2201	1986
0.090	9.989 2303		9.943 4187	
		1237		1984
— 0.089	9.989 3540	1235	9.943 6171	1980
0.088	9.989 4775	1235	9.943 8151	1978
0.087	9.989 6010	1234	9.944 0129	1974
0.086	9.989 7244	1233	9.944 2103	1971
0.085	9.989 8477		9.944 4074	
		1232		1968
— 0.084	9.989 9709	1231	9.944 6042	1965
0.083	9.990 0940	1230	9.944 8007	1962
0.082	9.990 2170	1229	9.944 9969	1959
0.081	9.990 3399	1228	9.945 1928	1956
0.080	9.990 4627		9.945 3884	
		1227		1953
— 0.079	9.990 5854	1227	9.945 5837	1951
0.078	9.990 7081	1225	9.945 7788	1947
0.077	9.990 8306	1225	9.945 9735	1944
0.076	9.990 9531	1223	9.946 1679	1942
0.075	9.991 0754		9.946 3621	
		1223		1938
— 0.074	9.991 1977	1222	9.946 5559	1936
0.073	9.991 3199	1220	9.946 7495	1932
0.072	9.991 4419	1220	9.946 9427	1930
0.071	9.991 5639	1219	9.947 1357	1926
0.070	9.991 6858		9.947 3283	
		1218		1924
— 0.069	9.991 8076	1217	9.947 5207	1921
0.068	9.991 9293	1216	9.947 7128	1918
0.067	9.992 0509	1216	9.947 9046	1915
0.066	9.992 1725	1214	9.948 0961	1912
0.065	9.992 2939		9.948 2873	
		1213		1909
— 0.064	9.992 4152	1213	9.948 4782	1907
0.063	9.992 5365	1212	9.948 6689	1903
0.062	9.992 6577	1210	9.948 8592	1901
0.061	9.992 7787	1210	9.949 0493	1897
0.060	9.992 8997		9.949 2390	

Tafel IX.

Für nahezu parabolische Bahnen.

$$\varepsilon = \frac{1-e}{1+e}; \tau = \operatorname{tg} \frac{v}{2}; M = \frac{Dt}{a^{3/2} \sqrt{1+e}}; \operatorname{tg} \frac{1}{2} v = C \operatorname{tg} \frac{1}{2} w.$$

Hyperbel $\varepsilon \tau^2$	$\log C$	Differenz	$\log D$	Differenz
— 0.060	9.992 8997	1209	9.949 2390	1895
— 0.059	9.993 0206	1208	9.949 4285	1892
0.058	9.993 1414	1207	9.949 6177	1889
0.057	9.993 2621	1207	9.949 8066	1887
0.056	9.993 3828	1205	9.949 9953	1883
0.055	9.993 5033	1205	9.950 1836	1881
— 0.054	9.993 6238	1204	9.950 3717	1878
0.053	9.993 7442	1202	9.950 5595	1875
0.052	9.993 8644	1202	9.950 7470	1872
0.051	9.993 9846	1201	9.950 9342	1869
0.050	9.994 1047	1200	9.951 1211	1867
— 0.049	9.994 2247	1200	9.951 3078	1864
0.048	9.994 3447	1198	9.951 4942	1861
0.047	9.994 4645	1197	9.951 6803	1858
0.046	9.994 5842	1197	9.951 8661	1856
0.045	9.994 7039	1196	9.952 0517	1853
— 0.044	9.994 8235	1195	9.952 2370	1850
0.043	9.994 9430	1194	9.952 4220	1847
0.042	9.995 0624	1193	9.952 6067	1844
0.041	9.995 1817	1192	9.952 7911	1842
0.040	9.995 3009	1192	9.952 9753	1839
— 0.039	9.995 4201	1190	9.953 1592	1837
0.038	9.995 5391	1190	9.953 3429	1834
0.037	9.995 6581	1188	9.953 5263	1831
0.036	9.995 7769	1188	9.953 7094	1829
0.035	9.995 8957	1187	9.953 8923	1826
— 0.034	9.996 0144	1187	9.954 0749	1823
0.033	9.996 1331	1185	9.954 2572	1820
0.032	9.996 2516	1185	9.954 4392	1818
0.031	9.996 3701	1183	9.954 6210	1815
0.030	9.996 4884	1183	9.954 8025	1813
— 0.029	9.996 6067	1182	9.954 9838	1810
0.028	9.996 7249	1181	9.955 1648	1807
0.027	9.996 8430	1180	9.955 3455	1805
0.026	9.996 9610	1179	9.955 5260	1802
0.025	9.997 0789	1179	9.955 7062	1799
— 0.024	9.997 1968	1177	9.955 8861	1797
0.023	9.997 3145	1177	9.956 0658	1794
0.022	9.997 4322	1176	9.956 2452	1791
0.021	9.997 5498	1175	9.956 4243	1789
0.020	9.997 6673	1174	9.956 6032	1787
— 0.019	9.997 7847	1174	9.956 7819	1784
0.018	9.997 9021	1172	9.956 9603	1781
0.017	9.998 0193	1172	9.957 1384	1779
0.016	9.998 1365	1171	9.957 3163	1776
0.015	9.998 2536	1170	9.957 4939	1773
— 0.014	9.998 3706	1169	9.957 6712	1771
0.013	9.998 4875	1169	9.957 8483	1769
0.012	9.998 6044	1167	9.958 0252	1766
0.011	9.998 7211	1167	9.958 2018	1763
0.010	9.998 8378	1166	9.958 3781	1761
— 0.009	9.998 9544	1165	9.958 5542	1758
0.008	9.999 0709	1164	9.958 7300	1756
0.007	9.999 1873	1164	9.958 9056	1754
0.006	9.999 3037	1162	9.959 0810	1751
0.005	9.999 4199	1162	9.959 2561	1748
— 0.004	9.999 5361	1161	9.959 4309	1746
0.003	9.999 6522	1160	9.959 6055	1743
0.002	9.999 7682	1160	9.959 7798	1741
0.001	9.999 8842	1158	9.959 9539	1738
0.000	0.000 0000		9.960 1277	

Tafel IX.
Für nahezu parabolische Bahnen.

$$\varepsilon = \frac{1-e}{1+e}; \quad v = \operatorname{tg} \frac{v}{2}; \quad M = \frac{D}{\sqrt{1+\varepsilon}}; \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} v = C \operatorname{tg} \frac{1}{2} w.$$

Ellipse εv	$\log C$	Differenz	$\log D$	Differenz
0.000	0.000 0000		9.960 1277	
+ 0.001	0.000 1158	1158	9.960 3013	1736
0.002	0.000 2315	1157	9.960 4747	1734
0.003	0.000 3471	1156	9.960 6478	1731
0.004	0.000 4626	1155	9.960 8206	1728
0.005	0.000 5781	1155	9.960 9932	1726
+ 0.006	0.000 6934	1153	9.961 1656	1724
0.007	0.000 8087	1153	9.961 3377	1721
0.008	0.000 9239	1152	9.961 5096	1719
0.009	0.001 0391	1152	9.961 6812	1716
0.010	0.001 1541	1150	9.961 8526	1714
+ 0.011	0.001 2691	1150	9.962 0238	1712
0.012	0.001 3839	1148	9.962 1947	1709
0.013	0.001 4987	1148	9.962 3654	1707
0.014	0.001 6135	1148	9.962 5358	1704
0.015	0.001 7281	1146	9.962 7060	1702
+ 0.016	0.001 8427	1146	9.962 8760	1700
0.017	0.001 9571	1144	9.963 0458	1698
0.018	0.002 0715	1144	9.963 2153	1695
0.019	0.002 1859	1144	9.963 3845	1692
0.020	0.002 3001	1142	9.963 5535	1690
+ 0.021	0.002 4143	1142	9.963 7223	1688
0.022	0.002 5284	1141	9.963 8909	1686
0.023	0.002 6424	1140	9.964 0592	1683
0.024	0.002 7563	1139	9.964 2273	1681
0.025	0.002 8701	1138	9.964 3951	1678
+ 0.026	0.002 9839	1138	9.964 5627	1676
0.027	0.003 0976	1137	9.964 7301	1674
0.028	0.003 2112	1136	9.964 8972	1671
0.029	0.003 3248	1136	9.965 0641	1669
0.030	0.003 4382	1134	9.965 2308	1667
+ 0.031	0.003 5516	1134	9.965 3973	1665
0.032	0.003 6649	1133	9.965 5635	1662
0.033	0.003 7781	1132	9.965 7295	1660
0.034	0.003 8913	1132	9.965 8953	1658
0.035	0.004 0043	1130	9.966 0609	1656
+ 0.036	0.004 1173	1130	9.966 2262	1653
0.037	0.004 2302	1129	9.966 3913	1651
0.038	0.004 3431	1129	9.966 5562	1651
0.039	0.004 4558	1127	9.966 7208	1649
0.040	0.004 5685	1127	9.966 8852	1646
+ 0.041	0.004 6811	1126	9.967 0494	1644
0.042	0.004 7936	1125	9.967 2134	1642
0.043	0.004 9061	1125	9.967 3771	1640
0.044	0.005 0185	1124	9.967 5407	1637
0.045	0.005 1308	1123	9.967 7040	1636
+ 0.046	0.005 2430	1122	9.967 8670	1633
0.047	0.005 3551	1121	9.968 0299	1630
0.048	0.005 4672	1121	9.968 1925	1629
0.049	0.005 5792	1120	9.968 3549	1626
0.050	0.005 6911	1119	9.968 5171	1624
+ 0.051	0.005 8029	1118	9.968 6791	1622
0.052	0.005 9147	1118	9.968 8408	1617
0.053	0.006 0264	1117	9.969 0024	1616
0.054	0.006 1380	1116	9.969 1637	1613
0.055	0.006 2496	1116	9.969 3248	1611
+ 0.056	0.006 3610	1114	9.969 4857	1609
0.057	0.006 4724	1114	9.969 6463	1606
0.058	0.006 5837	1113	9.969 8068	1605
0.059	0.006 6949	1112	9.969 9670	1602
0.060	0.006 8061	1112	9.970 1270	1600

Tafel IX.

Für nahezu parabolische Bahnen.

$$\varepsilon = \frac{1-e}{1+e}; \tau = \operatorname{tg} \frac{v}{2}. \quad M = \frac{D t}{q^{3/2} \sqrt{1+\varepsilon}}; \operatorname{tg} \frac{1}{2} v = C \operatorname{tg} \frac{1}{2} w.$$

Ellipse $\varepsilon \tau^2$	$\log C$	Differenz	$\log D$	Differenz
+ 0.060	0.006 8061	1111	9.970 1270	1598
+ 0.061	0.006 9172	1110	9.970 2868	1596
0.062	0.007 0282	1110	9.970 4464	1593
0.063	0.007 1392	1109	9.970 6057	1592
0.064	0.007 2501	1108	9.970 7649	1590
0.065	0.007 3609	1107	9.970 9239	1587
+ 0.066	0.007 4716	1107	9.971 0826	1584
0.067	0.007 5823	1106	9.971 2410	1583
0.068	0.007 6929	1105	9.971 3993	1581
0.069	0.007 8034	1104	9.971 5574	1578
0.070	0.007 9138	1104	9.971 7152	1577
+ 0.071	0.008 0242	1102	9.971 8729	1574
0.072	0.008 1344	1102	9.972 0303	1573
0.073	0.008 2446	1102	9.972 1876	1571
0.074	0.008 3548	1100	9.972 3447	1568
0.075	0.008 4648	1100	9.972 5015	1566
+ 0.076	0.008 5748	1099	9.972 6581	1565
0.077	0.008 6847	1099	9.972 8146	1562
0.078	0.008 7946	1097	9.972 9708	1560
0.079	0.008 9043	1097	9.973 1268	1558
0.080	0.009 0140	1096	9.973 2826	1556
+ 0.081	0.009 1236	1096	9.973 4382	1554
0.082	0.009 2332	1095	9.973 5936	1552
0.083	0.009 3427	1094	9.973 7488	1550
0.084	0.009 4521	1093	9.973 9038	1547
0.085	0.009 5614	1093	9.974 0585	1546
+ 0.086	0.009 6707	1092	9.974 2131	1544
0.087	0.009 7799	1091	9.974 3675	1541
0.088	0.009 8890	1090	9.974 5216	1540
0.089	0.009 9980	1090	9.974 6756	1537
0.090	0.010 1070	1089	9.974 8293	1536
+ 0.091	0.010 2159	1088	9.974 9829	1534
0.092	0.010 3247	1088	9.975 1363	1531
0.093	0.010 4335	1087	9.975 2894	1530
0.094	0.010 5422	1086	9.975 4424	1528
0.095	0.010 6508	1085	9.975 5952	1526
+ 0.096	0.010 7593	1085	9.975 7478	1524
0.097	0.010 8678	1084	9.975 9002	1521
0.098	0.010 9762	1084	9.976 0523	1520
0.099	0.011 0846	1082	9.976 2043	1518
0.100	0.011 1928	1082	9.976 3561	1516
+ 0.101	0.011 3010	1081	9.976 5077	1514
0.102	0.011 4091	1081	9.976 6591	1512
0.103	0.011 5172	1080	9.976 8103	1510
0.104	0.011 6252	1079	9.976 9613	1507
0.105	0.011 7331	1078	9.977 1120	1506
+ 0.106	0.011 8409	1078	9.977 2626	1504
0.107	0.011 9487	1077	9.977 4130	1502
0.108	0.012 0564	1076	9.977 5632	1500
0.109	0.012 1640	1076	9.977 7132	1498
0.110	0.012 2716	1075	9.977 8630	1496
+ 0.111	0.012 3791	1074	9.978 0126	1495
0.112	0.012 4865	1074	9.978 1621	1492
0.113	0.012 5939	1073	9.978 3113	1491
0.114	0.012 7012	1072	9.978 4604	1488
0.115	0.012 8084	1072	9.978 6092	1487
+ 0.116	0.012 9156	1071	9.978 7579	1485
0.117	0.013 0227	1070	9.978 9064	1482
0.118	0.013 1297	1069	9.979 0546	1481
0.119	0.013 2366	1069	9.979 2027	1479
0.120	0.013 3435		9.979 3506	

Tafel IX.

Für nahezu parabolische Bahnen.

$$\varepsilon = \frac{1}{1+e}; \tau = \operatorname{tg} \frac{v}{2}; M = \frac{Dt}{q^{3/2} \sqrt{1+\varepsilon}}; \operatorname{tg} \frac{1}{2} v = C \operatorname{tg} \frac{1}{2} w.$$

Ellipse $\varepsilon \tau^2$	$\log C$	Differenz	$\log D$	Differenz
+ 0.120	0.013 3435	1068	9.979 3506	1477
+ 0.121	0.013 4503	1068	9.979 4983	1476
0.122	0.013 5571	1066	9.979 6459	1473
0.123	0.013 6637	1066	9.979 7932	1472
0.124	0.013 7703	1065	9.979 9404	1470
0.125	0.013 8768	1065	9.980 0874	1467
+ 0.126	0.013 9833	1064	9.980 2341	1466
0.127	0.014 0897	1064	9.980 3807	1464
0.128	0.014 1961	1062	9.980 5271	1463
0.129	0.014 3023	1062	9.980 6734	1460
0.130	0.014 4085	1061	9.980 8194	1459
+ 0.131	0.014 5146	1061	9.980 9653	1457
0.132	0.014 6207	1060	9.981 1110	1455
0.133	0.014 7267	1059	9.981 2565	1453
0.134	0.014 8326	1058	9.981 4018	1451
0.135	0.014 9384	1058	9.981 5469	1450
+ 0.136	0.015 0442	1058	9.981 6919	1447
0.137	0.015 1500	1056	9.981 8366	1446
0.138	0.015 2556	1056	9.981 9812	1444
0.139	0.015 3612	1055	9.982 1256	1442
0.140	0.015 4667	1055	9.982 2698	1440
+ 0.141	0.015 5722	1054	9.982 4138	1439
0.142	0.015 6776	1053	9.982 5577	1437
0.143	0.015 7829	1053	9.982 7014	1434
0.144	0.015 8882	1052	9.982 8448	1433
0.145	0.015 9934	1051	9.982 9881	1432
+ 0.146	0.016 0985	1050	9.983 1313	1429
0.147	0.016 2035	1050	9.983 2742	1428
0.148	0.016 3085	1050	9.983 4170	1425
0.149	0.016 4135	1048	9.983 5595	1424
0.150	0.016 5183	1048	9.983 7019	1422
+ 0.151	0.016 6231	1047	9.983 8441	1421
0.152	0.016 7278	1047	9.983 9862	1419
0.153	0.016 8325	1046	9.984 1281	1417
0.154	0.016 9371	1045	9.984 2698	1416
0.155	0.017 0416	1045	9.984 4114	1413
+ 0.156	0.017 1461	1044	9.984 5527	1412
0.157	0.017 2505	1043	9.984 6939	1410
0.158	0.017 3548	1043	9.984 8349	1408
0.159	0.017 4591	1042	9.984 9757	1407
0.160	0.017 5633	1042	9.985 1164	1405
+ 0.161	0.017 6675	1041	9.985 2569	1403
0.162	0.017 7716	1040	9.985 3972	1401
0.163	0.017 8756	1039	9.985 5373	1400
0.164	0.017 9795	1039	9.985 6773	1398
0.165	0.018 0834	1039	9.985 8171	1396
+ 0.166	0.018 1873	1037	9.985 9567	1394
0.167	0.018 2910	1037	9.986 0961	1393
0.168	0.018 3947	1036	9.986 2354	1391
0.169	0.018 4983	1036	9.986 3745	1389
0.170	0.018 6019	1035	9.986 5134	1388
+ 0.171	0.018 7054	1034	9.986 6522	1386
0.172	0.018 8088	1034	9.986 7908	1384
0.173	0.018 9122	1033	9.986 9292	1383
0.174	0.019 0155	1033	9.987 0675	1381
0.175	0.019 1188	1031	9.987 2056	1379
+ 0.176	0.019 2219	1031	9.987 3435	1377
0.177	0.019 3250	1031	9.987 4812	1376
0.178	0.019 4281	1030	9.987 6188	1375
0.179	0.019 5311	1029	9.987 7563	1372
0.180	0.019 6340		9.987 8935	

Tafel IX.

Für nahezu parabolische Bahnen.

$$\varepsilon = \frac{1-e}{1+e}; \tau = \operatorname{tg} \frac{v}{2}; M = \frac{Dt}{q^{3/2} \sqrt{1+\varepsilon}}; \operatorname{tg} \frac{1}{2} v = C \operatorname{tg} \frac{1}{2} w.$$

Ellipse $\varepsilon \tau^2$	$\log C$	Differenz	$\log D$	Differenz
+ 0.180	0.019 6340	1029	9.987 8935	1371
+ 0.181	0.019 7369	1028	9.988 0306	1369
0.182	0.019 8397	1027	9.988 1675	1368
0.183	0.019 9424	1027	9.988 3043	1366
0.184	0.020 0451	1026	9.988 4409	1364
0.185	0.020 1477	1026	9.988 5773	1362
+ 0.186	0.020 2503	1025	9.988 7135	1361
0.187	0.020 3528	1024	9.988 8496	1360
0.188	0.020 4552	1023	9.988 9856	1357
0.189	0.020 5575	1023	9.989 1213	1356
0.190	0.020 6598	1022	9.989 2569	1354
+ 0.191	0.020 7620	1022	9.989 3923	1353
0.192	0.020 8642	1021	9.989 5276	1351
0.193	0.020 9663	1021	9.989 6627	1349
0.194	0.021 0684	1020	9.989 7976	1348
0.195	0.021 1704	1019	9.989 9324	1346
+ 0.196	0.021 2723	1019	9.990 0670	1345
0.197	0.021 3742	1018	9.990 2015	1342
0.198	0.021 4760	1017	9.990 3357	1342
0.199	0.021 5777	1017	9.990 4699	1339
0.200	0.021 6794	1016	9.990 6038	1338
+ 0.201	0.021 7810	1016	9.990 7376	1337
0.202	0.021 8826	1015	9.990 8713	1335
0.203	0.021 9841	1014	9.991 0048	1333
0.204	0.022 0855	1014	9.991 1381	1332
0.205	0.022 1869	1013	9.991 2713	1330
+ 0.206	0.022 2882	1012	9.991 4043	1329
0.207	0.022 3894	1012	9.991 5372	1327
0.208	0.022 4906	1011	9.991 6699	1325
0.209	0.022 5917	1011	9.991 8024	1324
0.210	0.022 6928	1010	9.991 9348	1322
+ 0.211	0.022 7938	1010	9.992 0670	1321
0.212	0.022 8948	1009	9.992 1991	1319
0.213	0.022 9957	1008	9.992 3310	1318
0.214	0.023 0965	1008	9.992 4628	1316
0.215	0.023 1973	1007	9.992 5944	1315
+ 0.216	0.023 2980	1006	9.992 7259	1313
0.217	0.023 3986	1006	9.992 8572	1311
0.218	0.023 4992	1005	9.992 9883	1310
0.219	0.023 5997	1005	9.993 1193	1308
0.220	0.023 7002	1004	9.993 2501	1307
+ 0.221	0.023 8006	1004	9.993 3808	1305
0.222	0.023 9010	1003	9.993 5113	1304
0.223	0.024 0013	1002	9.993 6417	1302
0.224	0.024 1015	1001	9.993 7719	1301
0.225	0.024 2016	1001	9.993 9020	1299
+ 0.226	0.024 3017	1000	9.994 0319	1298
0.227	0.024 4017	1000	9.994 1617	1296
0.228	0.024 5017	1000	9.994 2913	1294
0.229	0.024 6017	998	9.994 4207	1293
0.230	0.024 7015	998	9.994 5500	1292
+ 0.231	0.024 8013	998	9.994 6792	1289
0.232	0.024 9011	997	9.994 8081	1289
0.233	0.025 0008	996	9.994 9370	1287
0.234	0.025 1004	996	9.995 0657	1285
0.235	0.025 2000	995	9.995 1942	1284
+ 0.236	0.025 2995	995	9.995 3226	1282
0.237	0.025 3990	994	9.995 4508	1281
0.238	0.025 4984	993	9.995 5789	1279
0.239	0.025 5977	993	9.995 7068	1278
0.240	0.025 6970		9.995 8346	

Tafel IX.

Für nahezu parabolische Bahnen.

$$e = \frac{1-\tau}{1+e}; \tau = \operatorname{tg} \frac{v}{2}; M = \frac{Dt}{q^2 \sqrt{1+e}}; \operatorname{tg} \frac{1}{2} v = C \operatorname{tg} \frac{1}{2} u.$$

Ellipse $e \tau^2$	$\log C$	Differenz	$\log D$	Differenz
+ 0.240	0.025 6970	992	9.995 8346	1277
+ 0.241	0.025 7062	992	9.995 9623	1275
0.242	0.025 8054	991	9.996 0898	1273
0.243	0.025 9045	990	9.996 2171	1272
0.244	0.026 0035	990	9.996 3444	1271
0.245	0.026 1025	990	9.996 4714	1269
+ 0.246	0.026 2015	989	9.996 5983	1268
0.247	0.026 3004	988	9.996 7251	1266
0.248	0.026 4002	987	9.996 8517	1265
0.249	0.026 5870	987	9.996 9782	1263
0.25	0.026 6866	987	9.997 1045	1262
+ 0.251	0.026 7853	986	9.997 2307	1260
0.252	0.026 8839	985	9.997 3567	1259
0.253	0.026 9824	985	9.997 4826	1258
0.254	0.027 0800	984	9.997 6084	1256
0.255	0.027 1793	983	9.997 7340	1254
+ 0.256	0.027 2776	983	9.997 8594	1253
0.257	0.027 3750	983	9.997 9847	1252
0.258	0.027 4742	982	9.998 1099	1250
0.259	0.027 5724	981	9.998 2349	1249
0.26	0.027 6705	981	9.998 3598	1248
+ 0.261	0.027 7686	980	9.998 4846	1246
0.262	0.027 8666	979	9.998 6092	1244
0.263	0.027 9645	979	9.998 7336	1243
0.264	0.028 0624	979	9.998 8579	1242
0.265	0.028 1602	978	9.998 9821	1241
+ 0.266	0.028 2581	977	9.999 1062	1239
0.267	0.028 3558	977	9.999 2301	1237
0.268	0.028 4535	976	9.999 3538	1236
0.269	0.028 5511	975	9.999 4774	1235
0.27	0.028 6486	975	9.999 6009	1233
+ 0.271	0.028 7461	975	9.999 7242	1232
0.272	0.028 8436	974	9.999 8474	1231
0.273	0.028 9410	973	9.999 9705	1229
0.274	0.029 0385	973	9.999 0934	1228
0.275	0.029 1359	972	9.999 2162	1226
+ 0.276	0.029 2328	972	9.999 3388	1225
0.277	0.029 3300	971	9.999 4613	1224
0.278	0.029 4271	970	9.999 5837	1222
0.279	0.029 5241	970	9.999 7059	1221
0.28	0.029 6211	970	9.999 8280	1219
+ 0.281	0.029 7181	969	9.999 9499	1218
0.282	0.029 8150	968	9.999 0717	1217
0.283	0.029 9118	968	9.999 1934	1215
0.284	0.030 0086	967	9.999 3149	1214
0.285	0.030 1053	967	9.999 4363	1212
+ 0.286	0.030 2020	967	9.999 5575	1211
0.287	0.030 2987	966	9.999 6786	1210
0.288	0.030 3952	966	9.999 7996	1208
0.289	0.030 4917	966	9.999 9204	1207
0.290	0.030 5882	964	9.999 0411	1206
+ 0.291	0.030 6846	964	9.999 1617	1204
0.292	0.030 7810	963	9.999 2821	1203
0.293	0.030 8773	963	9.999 4024	1202
0.294	0.030 9735	962	9.999 5226	1200
0.295	0.031 0697	961	9.999 6426	1199
+ 0.296	0.031 1658	960	9.999 7625	1198
0.297	0.031 2618	960	9.999 8823	1196
0.298	0.031 3578	960	9.999 9999	1195
0.299	0.031 4538	959	9.999 1214	1194
0.300	0.031 5497		9.999 2408	

IXa.

Erläuterungen zu Tafel IX.

Die in Tafel IX gegebenen Grössen $\log C$ und $\log D$ wurden zunächst siebenstellig mit dem Argumente $x = \varepsilon \tau^2$ für die Werthe:

$$- 0,300 \quad - 0,290 \quad - 0,280 \dots \quad + 0,290 \quad + 0,300$$

berechnet. Hieraus wurden die Werthe von Tausendstel zu Tausendstel des Argumentes durch Interpolation gewonnen. Man kann in Folge dessen annehmen, dass die in der Tafel IX enthaltenen Grössen auf eine Einheit der siebenten Decimale genau sind. Im Folgenden wollen wir die Tafel an einigen Stellen durch Beispiele prüfen, wodurch gleichzeitig ihr Gebrauch klarer wird.

Wir betrachten zunächst zwei hyperbolische Bahnen, für welche $v = 90^\circ$ ist. Dann wird $\tau = tg \frac{1}{2} v = 1$. Nun setzen wir für diese beiden Bahnen:

$$\varepsilon = - 0,30 \quad \text{und} \quad \varepsilon = - 0,29.$$

Dann ist:

$$x = \varepsilon \tau^2 \quad \text{oder} \quad x = - 0,30 \quad \text{und} \quad x = - 0,29.$$

Wir setzen nun:

$$\eta = - \varepsilon = \frac{e - 1}{e + 1}$$

und erhalten:

$$tg \frac{1}{2} F = \sqrt{\eta} \, tg \frac{1}{2} v,$$

$$(e \text{ Mod.}) \, tg F - \log tg (45^\circ + \frac{1}{2} F) = \frac{\text{Mod. } k \sqrt{1 + m(t - T)}}{(-a)^{1/2}},$$

wo $\text{Mod} = [9,6377843]$ ist.

Weiter setzen wir jetzt $m = 0$, d. h. wir betrachten zwei masselose Kometen und setzen schliesslich für beide Bahnen:

$$(-a) = + 1.$$

(Da nämlich die Bahnen hyperbolisch sind, so ist a selbst negativ und $-a$ also positiv.) So erhalten wir:

$$tg \frac{1}{2} F = \sqrt{\eta}$$

und bestimmen hieraus F . Es ist:

$$e = \frac{1 + \eta}{1 - \eta}; \quad (-a) = + 1.$$

Hieraus berechnen wir $(t - T)$ mittelst:

$$\text{Mod. } k (t - T) = (e \text{ Mod.}) \, tg F - \log tg \left(45 + \frac{F}{2} \right).$$

Ferner ist:

$$q = (-a) (e - 1) = \frac{2 \eta}{1 - \eta}.$$

Die Grössen $\log D$ und $\log C$ entnehmen wir nun Tafel IX mit dem Argumente $\varepsilon \tau^2$, welches in diesem Falle gleich ε ist. So können wir M finden:

$$M = \frac{D(t - T)(1 - \eta)}{(2 \eta)^{1/2}}$$

und hieraus mit der Barker'schen Tafel w bestimmen.

Aber andererseits ist:

$$tg \frac{1}{2} v = C \, tg \frac{1}{2} w,$$

also im vorliegenden Falle:

$$tg \frac{1}{2} w = \frac{1}{C}.$$

Hieraus ergibt sich ein anderer Werth von w , welcher mit dem oben gefundenen nahezu übereinstimmen muss, was eine directe Controle für $\log C$ und $\log D$ bildet. Die Rechnung gestaltet sich wie folgt:

IXa.
Erläuterungen zu Tafel IX.

$x = \varepsilon$	0,30	— 0,29
$- \varepsilon = \eta$	+ 0,30	+ 0,29
$1 - \eta$	+ 0,700 000 0	+ 0,710 000 0
$1 + \eta$	+ 1,300 000 0	+ 1,290 000 0
$\log (1 - \eta)$	9,845 098 0	9,851 258 3
$\log (1 + \eta)$	0,113 943 4	0,110 589 7
$\log \eta$	9,477 121 3	9,462 398 0
$\log \sqrt{\eta}$	9,738 560 7	9,731 199 0
$\frac{1}{2} E$	28° 42' 37'',86	28° 18' 11'',51
F	57° 25' 15'',72	56° 36' 23'',02
$45^\circ + \frac{F}{2}$	73° 42' 37'',86	73° 18' 11'',51
$\log e$	0,268 845 4	0,259 331 4
$\log \text{Mod.}$	9,637 784 3	9,637 784 3
$\lg F$	0,194 492 6	0,180 970 7
$e \text{ Mod. } \lg F$	0,101 122 3	0,078 086 4
numerus	1,262 182 9	1,196 978 5
$\log \lg \left(45^\circ + \frac{F}{2}\right)$	0,534 288 3	0,522 946 0
Differenz	0,727 894 6	0,674 032 5
\log	9,862 068 5	9,828 680 8
$\log \text{Mod. } k$	7,873 365 7	7,873 365 7
$\log (t - T)$	1,988 702 8	1,955 315 1
$\log D$	9,893 450 3	9,896 284 9
$\log (1 - \eta)$	9,845 098 0	9,851 258 3
$\log D (t - T) (1 - \eta)$	1,727 251 1	1,702 858 3
$(2 \eta)^{\frac{1}{2}}$	9,667 227 0	9,645 142 0
$\log M$	2,060 024 1	2,057 716 3
w	95° 9' 9'',70	94° 57' 33'',90
$\frac{1}{e} = \lg \frac{1}{w}$	0,039 109 5	0,037 638 8
$\frac{1}{2} w$	47° 34' 34'',85	47° 28' 46'',97
w	95° 9' 9'',70	94° 57' 33'',94

Die Uebereinstimmung der beiden Werthe von w ist so gut, als man dies nur erwarten konnte. In ähnlicher Weise prüfen wir die beiden äussersten Grundintervalle für die Ellipse. Wir setzen wiederum:

$$v = 90^\circ \quad t = \lg \frac{e}{2} = 1$$

$$\varepsilon = x \quad \lg \frac{1}{2} E = - \frac{1}{2} \varepsilon$$

und erhalten so E . Es ist ferner:

$$e = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

Wir setzen wiederum $a = + 1$. Dann ist:

$$t - T = \frac{E - e \sin E}{k} \quad q = a(1 - e) = \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

IXa.

Erläuterungen zu Tafel IX.

Nun entnehmen wir $\log D$ und $\log C$ mit dem Argumente ε aus Tafel IX und berechnen dann:

$$M = \frac{Dt}{q^{3/2} \sqrt{1 + \varepsilon}} = \frac{Dt(1 + \varepsilon)}{(2\varepsilon)^{3/2}}.$$

Hieraus finden wir w mittelst der Barker'schen Tafel. Andererseits ist aber:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} w = \frac{1}{C},$$

woraus sich ein anderer Werth von w ergibt, der mit dem vorhergehenden übereinstimmen muss. Die Rechnung gestaltet sich wie folgt:

$\varepsilon = .x$	+ 0,30	+ 0,29
$1 - \varepsilon$	+ 0,700 000 0	+ 0,710 000 0
$1 + \varepsilon$	+ 1,300 000 0	+ 1,290 000 0
$\log (1 - \varepsilon)$	9,845 098 0	9,851 258 3
$\log (1 + \varepsilon)$	0,113 943 4	0,110 589 7
$\log \varepsilon$	9,477 121 3	9,462 398 0
$\log \sqrt{\varepsilon}$	9,738 560 7	9,731 199 0
$\frac{1}{2} E$	28° 42' 37'',86	28° 18' 11'',51
E	57° 25' 15'',72	56° 36' 23'',02
$e'' \sin E$	25° 59' 49'',48	26° 19' 43'',56
Mittlere Anomalie	31° 25' 26'',24	30° 16' 39'',46
$\log e$	9,731 154 6	9,740 668 6
$\log e''$	5,045 579 7	5,055 093 7
$\sin E$	9,925 647 3	9,921 639 3
$\log e'' \sin E$	4,971 227 0	4,976 733 0
$e'' \sin E$	93 589'',40	94 783'',56
$(E - e \sin E)'$	113 126'',24	108 999'',46
$\log (E - e \sin E)''$	5,053 563 4	5,037 424 4
k''	3,550 006 6	3,550 006 6
$\log (t - T)$	1,503 556 8	1,487 417 8
$\log D$	0,003 240,8	0,002 041 1
$\log (1 + \varepsilon)$	0,113 943 4	0,110 589 7
$\log D (t - T) (1 + \varepsilon)$	1,620 741 0	1,600 048 6
$(2\varepsilon)^{3/2}$	9,667 227 0	9,645 142 0
$\log M$	1,953 514 0	1,954 906 6
w	85° 50' 28'',89	85° 58' 4'',41
$\frac{1}{C} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} w$	9,968 450 3	9,969 411 8
$\frac{1}{2} w$	42° 55' 14'',43	42° 59' 2'',18
w	85° 50' 28'',86	85° 58' 4'',36

Auch hier stimmen die beiden Werthe von w in genügender Weise überein.

Wir behandeln schliesslich noch die beiden von Gauss in der Theoria motus gegebenen Beispiele. Für den Halley'schen Kometen war:

$$\begin{aligned} e &= 0,967\,645\,67 \\ \log q &= 9,765\,650\,0 \\ (t - T) &= 63^{\text{d}} 544\,00 \end{aligned}$$

IXa.

Erläuterungen zu Tafel IX.

Hieraus folgt:

$$\begin{array}{r} \log (1 - e) \quad 8,509\,932\,4 \\ \log (1 + e) \quad 0,293\,946\,9 \\ \hline \log \varepsilon \quad 8,215\,985\,5 \end{array}$$

Wir betrachten nun den von Gauss und Oppolzer gefundenen Werth $v = 100^\circ\,0'\,0'',00$, als erste Näherung, aus welcher wir einen anderen Werth von v mittelst der in Vorlesung (7) gegebenen Rechnungsvorschriften ableiten wollen. Es wird:

v	100° 0' 0'',00	$D(t - T)$	1,767 193 2
$\frac{1}{2}v$	50° 0' 0'',00	$q^{\frac{3}{2}}\sqrt{1 + \varepsilon}$	9,652 016 6
$\tau = tg \frac{1}{2}v$	0,076 186 5	$\log M$	2,115 176 6
τ^2	0,152 373 0	w	99° 39' 4'',60
ε	8,215 985 5	$\frac{1}{2}w$	49° 49' 32'',30
$\log \varepsilon \tau^2$	8,368 358 5	$tg \frac{1}{2}w$	0,073 503 8
$\varepsilon \tau^2 = x$	+ 0,023 353 85	$\log C$	0,002 682 7
$\log D$	9,964 118 7	$tg \frac{1}{2}v$	0,076 186 5
$\log t$	1,803 074 5	$\frac{1}{2}v$	50° 0' 0'',00
$\log q^{\frac{3}{2}}$	9,648 475 0	v	100° 0' 0'',00
$\log \sqrt{1 + \varepsilon}$	0,003 541 6		

in völliger Uebereinstimmung mit obigem Ausgangswerthe.

Für das zweite der Gauss'schen Beispiele ist:

$$\begin{array}{l} e = 1,261\,882\,0 \\ \log q = 0,020\,165\,7 \\ (t - T) = 65^d,41\,236. \end{array}$$

Wir nehmen als Näherungswerth an:

v	67° 2' 59'',96	$D(t - T)$	1,766 627 9
$\frac{1}{2}v$	33° 31' 29'',98	$q^{\frac{3}{2}}\sqrt{1 + \varepsilon}$	0,003 528 5
$\tau = tg \frac{v}{2}$	9,821 194 5	M	1,763 099 4
τ^2	9,642 389 0	w	67° 46' 48'',35
ε	9,063 635 7 _n	$\frac{w}{2}$	33° 53' 24'',18
$\log \varepsilon \tau^2$	8,706 024 7 _n	$tg \frac{w}{2}$	9,827 188 3
$\varepsilon \tau^2$	— 0,050 818 84	$\log C$	9,994 006 4
$\log C$	9,994 006 4	$tg \frac{v}{2}$	9,821 194 7
$\log D$	9,950 968 1	$\frac{1}{2}v$	33° 31' 30'',02
$\log (t - T)$	1,815 659 8	v	67° 3' 0'',04
$q^{\frac{3}{2}}$	0,030 248 5		
$\sqrt{1 + \varepsilon}$	9,973 280 0		

Dieser letztere Werth weicht etwas mehr von dem oben gegebenen ab, doch ist die Uebereinstimmung für siebenstellige Rechnung noch immer eine genügende. Die Rechner können sich also ohne Bedenken zur Berechnung der wahren Anomalie v in nahezu parabolischen Bahnen der Tafel IX in Verbindung mit der Barker'schen bedienen.

Tafel X.
Enckes μ -Tafel.

ν	$\log \mu$	Diff.	ν	$\log \mu$	Diff.	ν	$\log \mu$	Diff.
0.000	0.000 0000	0	0.060	0.000 0652	22	0.120	0.000 2617	44
.001	.000 0000	1	.061	.000 0674	23	.121	.000 2661	44
.002	.000 0001	1	.062	.000 0697	22	.122	.000 2705	44
.003	.000 0002	1	.063	.000 0719	22	.123	.000 2750	45
.004	.000 0003	1	.064	.000 0742	23	.124	.000 2795	45
					24			46
0.005	0.000 0004	2	0.065	0.000 0766	24	0.125	0.000 2841	45
.006	.000 0006	3	.066	.000 0790	24	.126	.000 2886	47
.007	.000 0009	3	.067	.000 0814	24	.127	.000 2933	46
.008	.000 0012	3	.068	.000 0838	25	.128	.000 2979	47
.009	.000 0015	3	.069	.000 0863	25	.129	.000 3026	48
					26			
0.010	0.000 0018	4	0.070	0.000 0888	26	0.130	0.000 3074	47
.011	.000 0022	4	.071	.000 0914	26	.131	.000 3121	48
.012	.000 0026	5	.072	.000 0940	26	.132	.000 3169	49
.013	.000 0031	4	.073	.000 0966	27	.133	.000 3218	49
.014	.000 0035	6	.074	.000 0993	27	.134	.000 3267	49
0.015	0.000 0041	5	0.075	0.000 1020	27	0.135	0.000 3316	49
.016	.000 0046	6	.076	.000 1047	28	.136	.000 3365	50
.017	.000 0052	7	.077	.000 1075	28	.137	.000 3415	51
.018	.000 0059	6	.078	.000 1103	29	.138	.000 3466	51
.019	.000 0065	7	.079	.000 1132	29	.139	.000 3516	51
0.020	0.000 0072	8	0.080	0.000 1161	29	0.140	0.000 3567	52
.021	.000 0080	8	.081	.000 1190	29	.141	.000 3619	52
.022	.000 0088	8	.082	.000 1219	30	.142	.000 3671	52
.023	.000 0096	8	.083	.000 1249	31	.143	.000 3723	52
.024	.000 0104	9	.084	.000 1280	31	.144	.000 3775	53
0.025	0.000 0113	9	0.085	0.000 1311	31	0.145	0.000 3828	54
.026	.000 0122	10	.086	.000 1342	31	.146	.000 3882	54
.027	.000 0132	10	.087	.000 1373	32	.147	.000 3935	54
.028	.000 0142	10	.088	.000 1405	32	.148	.000 3989	55
.029	.000 0152	11	.089	.000 1437	33	.149	.000 4044	55
0.030	0.000 0163	11	0.090	0.000 1470	32	0.150	0.000 4099	55
.031	.000 0174	11	.091	.000 1502	34	.151	.000 4154	55
.032	.000 0185	12	.092	.000 1536	33	.152	.000 4209	56
.033	.000 0197	12	.093	.000 1569	34	.153	.000 4265	56
.034	.000 0209	13	.094	.000 1603	35	.154	.000 4322	56
0.035	0.000 0222	13	0.095	0.000 1638	35	0.155	0.000 4378	57
.036	.000 0235	13	.096	.000 1673	35	.156	.000 4435	57
.037	.000 0248	14	.097	.000 1708	35	.157	.000 4493	58
.038	.000 0262	13	.098	.000 1743	36	.158	.000 4551	58
.039	.000 0275	15	.099	.000 1779	36	.159	.000 4609	59
0.040	0.000 0290	14	0.100	0.000 1815	37	0.160	0.000 4668	58
.041	.000 0304	16	.101	.000 1852	37	.161	.000 4726	60
.042	.000 0320	15	.102	.000 1889	37	.162	.000 4786	60
.043	.000 0335	16	.103	.000 1926	38	.163	.000 4846	60
.044	.000 0351	16	.104	.000 1964	38	.164	.000 4906	60
0.045	0.000 0367	16	0.105	0.000 2002	38	0.165	0.000 4966	61
.046	.000 0383	17	.106	.000 2040	39	.166	.000 5027	61
.047	.000 0400	17	.107	.000 2079	39	.167	.000 5088	62
.048	.000 0417	18	.108	.000 2118	40	.168	.000 5150	62
.049	.000 0435	18	.109	.000 2158	40	.169	.000 5212	62
0.050	0.000 0453	18	0.110	0.000 2198	40	0.170	0.000 5274	63
.051	.000 0471	19	.111	.000 2238	41	.171	.000 5337	63
.052	.000 0490	19	.112	.000 2279	41	.172	.000 5400	64
.053	.000 0509	19	.113	.000 2320	41	.173	.000 5464	64
.054	.000 0528	20	.114	.000 2361	42	.174	.000 5528	64
0.055	0.000 0548	20	0.115	0.000 2403	42	0.175	0.000 5592	65
.056	.000 0568	21	.116	.000 2445	42	.176	.000 5657	65
.057	.000 0589	21	.117	.000 2487	43	.177	.000 5722	65
.058	.000 0610	21	.118	.000 2530	43	.178	.000 5787	66
.059	.000 0631	21	.119	.000 2573	44	.179	.000 5853	66
0.060	0.000 0652		0.120	0.000 2617		0.180	0.000 5919	

Tafel X.
Enckes μ -Tafel.

ν	$\log \mu$	Diff.	ν	$\log \mu$	Diff.	ν	$\log \mu$	Diff.
0.180	0.000 5919	67	0.240	0.001 0603		0.300	0.001 6733	115
.181	.000 5986	67	.241	.001 0693	90	.301	.001 6848	115
.182	.000 6053	67	.242	.001 0784	91	.302	.001 6963	116
.183	.000 6120	67	.243	.001 0875	91	.303	.001 7079	116
.184	.000 6188	68	.244	.001 0966	91	.304	.001 7195	116
		68			92			117
0.185	0.000 6256	69	0.245	0.001 1058		0.305	0.001 7312	117
.186	.000 6325	68	.246	.001 1150	92	.306	.001 7429	117
.187	.000 6393	70	.247	.001 1242	92	.307	.001 7546	118
.188	.000 6461	69	.248	.001 1335	93	.308	.001 7664	119
.189	.000 6532	70	.249	.001 1429	93	.309	.001 7783	118
		71	0.250	0.001 1522		0.310	0.001 7901	119
0.190	0.000 6602	71	.251	.001 1617	95	.311	.001 8020	120
.191	.000 6673	71	.252	.001 1711	94	.312	.001 8140	120
.192	.000 6744	71	.253	.001 1806	95	.313	.001 8260	121
.193	.000 6815	72	.254	.001 1901	95	.314	.001 8381	121
.194	.000 6887	72			96			121
		72	0.255	0.001 1997		0.315	0.001 8502	121
0.195	0.000 6959	72	.256	.001 2093	96	.316	.001 8623	122
.196	.000 7031	73	.257	.001 2190	97	.317	.001 8745	122
.197	.000 7104	73	.258	.001 2287	97	.318	.001 8867	122
.198	.000 7177	73	.259	.001 2384	97	.319	.001 8989	122
.199	.000 7250	74			98			124
		75	0.260	0.001 2482		0.320	0.001 9113	123
0.200	0.000 7324	75	.261	.001 2580	98	.321	.001 9236	123
.201	.000 7399	74	.262	.001 2679	99	.322	.001 9360	124
.202	.000 7473	75	.263	.001 2778	99	.323	.001 9484	124
.203	.000 7548	76	.264	.001 2877	99	.324	.001 9609	125
.204	.000 7624	76			100			125
		76	0.265	0.001 2977		0.325	0.001 9734	126
0.205	0.000 7700	76	.266	.001 3077	100	.326	.001 9860	126
.206	.000 7776	77	.267	.001 3178	101	.327	.001 9986	126
.207	.000 7853	77	.268	.001 3279	101	.328	.002 0113	127
.208	.000 7930	77	.269	.001 3381	102	.329	.002 0240	127
.209	.000 8007	78			101			127
		78	0.270	0.001 3482		0.330	0.002 0367	128
0.210	0.000 8085	78	.271	.001 3585	103	.331	.002 0495	129
.211	.000 8163	79	.272	.001 3688	103	.332	.002 0624	128
.212	.000 8242	79	.273	.001 3791	103	.333	.002 0752	130
.213	.000 8321	79	.274	.001 3894	103	.334	.002 0882	129
.214	.000 8400	80			104			130
		80	0.275	0.001 3998		0.335	0.002 1011	130
0.215	0.000 8480	81	.276	.001 4103	105	.336	.002 1141	131
.216	.000 8560	81	.277	.001 4207	104	.337	.002 1272	131
.217	.000 8641	81	.278	.001 4313	106	.338	.002 1403	131
.218	.000 8722	81	.279	.001 4418	105	.339	.002 1534	132
.219	.000 8803	82			106			132
		82	0.280	0.001 4524		0.340	0.002 1666	133
0.220	0.000 8885	82	.281	.001 4631	107	.341	.002 1799	132
.221	.000 8967	83	.282	.001 4738	107	.342	.002 1931	134
.222	.000 9050	82	.283	.001 4845	107	.343	.002 2065	133
.223	.000 9132	84	.284	.001 4953	108	.344	.002 2198	135
.224	.000 9216	84			108			134
		84	0.285	0.001 5061		0.345	0.002 2333	135
0.225	0.000 9300	84	.286	.001 5169	108	.346	.002 2467	135
.226	.000 9384	84	.287	.001 5278	109	.347	.002 2602	136
.227	.000 9468	85	.288	.001 5388	110	.348	.002 2738	136
.228	.000 9553	85	.289	.001 5497	109	.349	.002 2874	136
.229	.000 9638	86			111			136
		86	0.290	0.001 5608		0.350	0.002 3010	137
0.230	0.000 9724	86	.291	.001 5718	110	.351	.002 3147	137
.231	.000 9810	87	.292	.001 5829	111	.352	.002 3284	137
.232	.000 9897	87	.293	.001 5941	112	.353	.002 3422	138
.233	.000 9984	87	.294	.001 6053	112	.354	.002 3560	138
.234	.001 0071	88			112			139
		88	0.295	0.001 6165		0.355	0.002 3699	139
0.235	0.001 0159	88	.296	.001 6278	113	.356	.002 3838	139
.236	.001 0247	88	.297	.001 6391	113	.357	.002 3977	140
.237	.001 0335	89	.298	.001 6505	114	.358	.002 4117	141
.238	.001 0424	89	.299	.001 6619	114	.359	.002 4258	141
.239	.001 0513	90			114			141
		90	0.300	0.001 6733		0.360	0.002 4399	
0.240	0.001 0603							

Tafel X.

Enckes μ -Tafel.

ν	$\log \mu$	Diff.	ν	$\log \mu$	Diff.	ν	$\log \mu$	Diff.
0.360	0.002 4399		0.420	0.003 3720		0.480	0.004 4858	
.361	.002 4540	141	.421	.003 3890	170	.481	.004 5061	203
.362	.002 4682	142	.422	.003 4061	171	.482	.004 5263	202
.363	.002 4824	142	.423	.003 4232	171	.483	.004 5467	204
.364	.002 4967	143	.424	.003 4404	172	.484	.004 5670	203
		143			172			205
0.365	0.002 5110		0.425	0.003 4576		0.485	0.004 5875	
.366	.002 5254	144	.426	.003 4749	173	.486	.004 6080	205
.367	.002 5398	144	.427	.003 4923	174	.487	.004 6285	205
.368	.002 5543	145	.428	.003 5096	173	.488	.004 6492	207
.369	.002 5688	145	.429	.003 5271	175	.489	.004 6698	206
		146			174			208
0.370	0.002 5834		0.430	0.003 5445		0.490	0.004 6906	
.371	.002 5980	146	.431	.003 5621	176	.491	.004 7113	207
.372	.002 6126	146	.432	.003 5797	176	.492	.004 7322	209
.373	.002 6273	147	.433	.003 5973	176	.493	.004 7531	209
.374	.002 6421	148	.434	.003 6150	177	.494	.004 7740	209
		147			177			211
0.375	0.002 6568		0.435	0.003 6327		0.495	0.004 7951	
.376	.002 6717	149	.436	.003 6505	178	.496	.004 8161	210
.377	.002 6866	149	.437	.003 6683	178	.497	.004 8373	212
.378	.002 7015	149	.438	.003 6862	179	.498	.004 8585	212
.379	.002 7165	150	.439	.003 7042	180	.499	.004 8797	212
		150			180			213
0.380	0.002 7315		0.440	0.003 7222		0.500	0.004 9010	
.381	.002 7466	151	.441	.003 7402	180	.51	.005 1173	2163
.382	.002 7617	151	.442	.003 7583	181	.52	.005 3397	2224
.383	.002 7769	152	.443	.003 7765	182	.53	.005 5681	2284
.384	.002 7921	152	.444	.003 7947	182	.54	.005 8029	2348
		152			183			2412
0.385	0.002 8073		0.445	0.003 8130		0.55	0.006 0441	
.386	.002 8226	153	.446	.003 8313	183	.56	.006 2919	2478
.387	.002 8380	154	.447	.003 8496	183	.57	.006 5464	2545
.388	.002 8534	154	.448	.003 8680	184	.58	.006 8079	2615
.389	.002 8689	155	.449	.003 8865	185	.59	.007 0765	2686
		155			185			2760
0.390	0.002 8844		0.450	0.003 9050		0.60	0.007 3525	
.391	.002 8999	155	.451	.003 9236	186	.61	.007 6361	2836
.392	.002 9155	156	.452	.003 9422	186	.62	.007 9274	2913
.393	.002 9311	156	.453	.003 9609	187	.63	.008 2268	2994
.394	.002 9468	157	.454	.003 9797	188	.64	.008 5345	3077
		158			187			3163
0.395	0.002 9626		0.455	0.003 9984		0.65	0.008 8508	
.396	.002 9784	158	.456	.004 0173	189	.66	.009 1759	3251
.397	.002 9942	158	.457	.004 0362	189	.67	.009 5103	3344
.398	.003 0101	159	.458	.004 0551	189	.68	.009 8542	3439
.399	.003 0260	159	.459	.004 0741	190	.69	.010 2081	3539
		160			191			3642
0.400	0.003 0420		0.460	0.004 0932		0.70	0.010 5723	
.401	.003 0580	160	.461	.004 1123	191	.71	.010 9473	3750
.402	.003 0741	161	.462	.004 1315	192	.72	.011 3336	3863
.403	.003 0903	162	.463	.004 1507	192	.73	.011 7316	3980
.404	.003 1064	161	.464	.004 1700	193	.74	.012 1419	4103
		163			193			4233
0.405	0.003 1227		0.465	0.004 1893		0.75	0.012 5652	
.406	.003 1389	162	.466	.004 2087	194	.76	.013 0022	4370
.407	.003 1553	164	.467	.004 2281	194	.77	.013 4536	4514
.408	.003 1716	163	.468	.004 2476	195	.78	.013 9202	4666
.409	.003 1881	165	.469	.004 2672	196	.79	.014 4031	4829
		164			196			5002
0.410	0.003 2045		0.470	0.004 2868		0.80	0.014 9033	
.411	.003 2211	166	.471	.004 3064	196	.81	.015 4219	5186
.412	.003 2376	165	.472	.004 3261	197	.82	.015 9603	5384
.413	.003 2543	167	.473	.004 3459	198	.83	.016 5202	5599
.414	.003 2709	166	.474	.004 3657	198	.84	.017 1033	5831
		168			199			6087
0.415	0.003 2877		0.475	0.004 3856		0.85	0.017 7120	
.416	.003 3044	167	.476	.004 4055	199	.86	.018 3486	6366
.417	.003 3213	169	.477	.004 4255	200	.87	.019 0165	6679
.418	.003 3381	168	.478	.004 4456	201	.88	.019 7195	7030
.419	.003 3550	169	.479	.004 4657	201	.89	.020 4629	7434
		170			201			7900
0.420	0.003 3720		0.480	0.004 4858		0.90	0.021 2529	

Tafel XI.

Zur Berechnung des Verhältnisses ^(Dreieck)_(Sector) in parabolischen Bahnen.

$$\nu = \frac{2k(t'-t)}{(r'+r)^{3/2}} = 2 \sin \frac{1}{2} \varphi - \frac{4}{3} \sin^3 \frac{1}{2} \varphi; \quad \eta = 3 - 4 \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi}{\nu} = \frac{3 + \cos \varphi}{2 + \cos \varphi}.$$

ν	$\log \eta$	Diff.	ν	$\log \eta$	Diff.	ν	$\log \eta$	Diff.
0.000	0.0000000		0.060	9.9994776		0.120	9.9978951	
1	9.9999999	1	1	4600	176	1	8595	356
2	9904	5	2	4421	179	2	8236	359
3	9987	7	3	4239	182	3	7875	361
4	9977	10	4	4054	185	4	7510	365
5	9964	13	5	3866	188	5	7142	368
6	9948	16	6	3676	190	6	6771	371
7	9929	19	7	3482	194	7	6396	375
8	9907	22	8	3286	196	8	6019	377
9	9883	24	9	3086	200	9	5639	380
		28			203			384
0.010	9855		0.070	2883		0.130	5255	
1	9825	30	1	2678	205	1	4869	386
2	9792	33	2	2469	209	2	4479	390
3	9755	37	3	2258	211	3	4086	393
4	9716	39	4	2043	215	4	3690	396
5	9674	42	5	1826	217	5	3291	399
6	9629	45	6	1605	221	6	2889	402
7	9582	47	7	1382	223	7	2484	405
8	9531	51	8	1156	226	8	2076	408
9	9477	54	9	927	229	9	1664	412
		56			232			415
0.020	9421		0.080	6695		0.140	1249	
1	9361	60	1	6460	235	1	1032	417
2	9299	62	2	6222	238	2	1011	421
3	9234	65	3	9.9989981	241	3	9.9969987	424
4	9166	68	4	9737	244	4	9560	427
5	9095	71	5	9490	247	5	9129	431
6	9021	74	6	9240	250	6	8696	433
7	8944	77	7	8987	253	7	8259	437
8	8864	80	8	8731	256	8	7819	440
9	8782	82	9	8472	259	9	7376	443
		86			262			446
0.030	8696		0.090	8210		0.150	6930	
1	8608	88	1	7945	265	1	6481	449
2	8517	91	2	7678	267	2	6029	452
3	8422	95	3	7407	271	3	5573	456
4	8325	97	4	7133	274	4	5114	459
5	8225	100	5	6856	277	5	4652	462
6	8122	103	6	6576	280	6	4187	465
7	8016	106	7	6293	283	7	3719	468
8	7908	108	8	6007	286	8	3247	472
9	7797	111	9	5718	289	9	2772	475
		115			292			478
0.040	7682		0.100	5426		0.160	2294	
1	7564	118	1	5131	295	1	1813	481
2	7443	121	2	4833	298	2	1329	484
3	7320	123	3	4532	301	3	1081	488
4	7194	126	4	4228	304	4	9350	491
5	7064	130	5	3921	307	5	9.9959856	494
6	6932	132	6	3611	310	6	9359	497
7	6797	135	7	3298	313	7	8859	500
8	6660	137	8	2982	316	8	8355	504
9	6519	141	9	2663	319	9	7848	507
		144			322			510
0.050	6375		0.110	2341		0.170	7338	
1	6228	147	1	2015	326	1	6824	514
2	6078	150	2	1687	328	2	6308	516
3	5926	152	3	1356	331	3	5788	520
4	5770	156	4	1021	335	4	5264	524
5	5612	158	5	684	337	5	4738	526
6	5451	161	6	343	341	6	4208	530
7	5286	165	7	0000	343	7	3675	533
8	5119	167	8	9.9979654	346	8	3138	537
9	4949	170	9	9304	350	9	2599	539
		173			353			543
0.060	4776		0.120	8951		0.180	2056	

Tafel XI.

Zur Berechnung des Verhältnisses $\left(\begin{smallmatrix} \text{Dreieck} \\ \text{(Sector)} \end{smallmatrix} \right)$ in parabolischen Bahnen.

$$\nu = \frac{2k(t'-t)}{(r'+r)^{3/2}} = 2 \sin \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \frac{1}{2} \varphi; \quad \eta = 3 - 4 \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi}{\nu} = \frac{3 \cos \varphi}{2 + \cos \varphi}.$$

ν	$\log \eta$	Diff.	ν	$\log \eta$	Diff.	ν	$\log \eta$	Diff.
0.180	9.9952056		0.240	9.9913257		0.300	9.9861279	
1	1510	546	1	2503	754	1	0291	988
2	0960	550	2	1745	758	2	9.9859299	992
3	0407	553	3	0984	761	3	8303	996
4	9.9949851	556	4	0219	765	4	7303	1000
5	9292	559	5	9.9909450	769	5	6299	1004
6	8729	563	6	8678	772	6	5290	1009
7	8163	566	7	7902	776	7	4278	1012
8	7593	570	8	7122	780	8	3261	1017
9	7020	573	9	6338	784	9	2240	1021
		576			787			1026
0.190	6444		0.250	5551		0.310	1214	
1	5865	579	1	4760	791	1	0184	1030
2	5282	583	2	3966	794	2	9.9849150	1034
3	4696	586	3	3167	799	3	8112	1038
4	4106	590	4	2365	802	4	7070	1042
5	3514	592	5	1559	806	5	6023	1047
6	2917	597	6	0750	809	6	4972	1051
7	2317	600	7	9.9899936	814	7	3916	1056
8	1714	603	8	9119	817	8	2856	1060
9	1108	606	9	8298	821	9	1792	1064
		610			825			1069
0.200	0498		0.260	7473		0.320	0723	
1	9.9939885	613	1	6645	828	1	9.9839650	1073
2	9268	617	2	5812	833	2	8573	1077
3	8648	620	3	4976	836	3	7491	1082
4	8025	623	4	4136	840	4	6405	1086
5	7398	627	5	3292	844	5	5314	1091
6	6768	630	6	2445	847	6	4219	1095
7	6134	634	7	1593	852	7	3120	1099
8	5497	637	8	0738	855	8	2016	1104
9	4856	641	9	9.9889879	859	9	0908	1108
		644			863			1113
0.210	4212		0.270	9016		0.330	9.9829795	
1	3565	647	1	8149	867	1	8678	1117
2	2914	651	2	7278	871	2	7556	1122
3	2259	655	3	6903	875	3	6429	1127
4	1602	657	4	5524	879	4	5298	1131
5	0940	662	5	4642	882	5	4163	1135
6	0275	665	6	3755	887	6	3023	1140
7	9.9929607	668	7	2865	890	7	1878	1145
8	8935	672	8	1970	895	8	0729	1149
9	8260	675	9	1072	898	9	9.9819575	1154
		679			902			1158
0.220	7581		0.280	0170		0.340	8417	
1	6899	682	1	9.9879264	906	1	7254	1163
2	6213	686	2	8353	911	2	6087	1167
3	5523	690	3	7439	914	3	4914	1173
4	4830	693	4	6521	918	4	3738	1176
5	4134	696	5	5599	922	5	2556	1182
6	3434	700	6	4673	926	6	1370	1186
7	2730	704	7	3742	931	7	0179	1191
8	2023	707	8	2808	934	8	9.9808083	1196
9	1312	711	9	1870	938	9	7783	1200
		714			943			1206
0.230	0598		0.290	0927		0.350	6577	
1	9.9919880	718	1	9.9869981	946	1	5368	1209
2	9159	721	2	9030	951	2	4153	1215
3	8434	725	3	8076	954	3	2934	1219
4	7705	729	4	7117	959	4	1710	1224
5	6973	732	5	6154	963	5	0481	1229
6	6237	736	6	5188	966	6	9.9799247	1234
7	5497	740	7	4216	972	7	8008	1239
8	4754	743	8	3241	975	8	6765	1243
9	4007	747	9	2262	979	9	5516	1249
		750			983			1253
0.240	3257		0.300	1279		0.360	4263	

Tafel XI.

Zur Berechnung des Verhältnisses $\frac{(\text{Dreieck})}{(\text{Sector})}$ in parabolischen Bahnen.

$$\nu = \frac{2k(v-t)}{(v'+v)^{3/2}} = 2 \sin \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{8} \sin^3 \frac{1}{2} \varphi; \eta = 3 - 4 \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi}{\nu} = \frac{3 \cos \varphi}{2 + \cos \varphi}.$$

ν	$\log \eta$	Diff.	ν	$\log \eta$	Diff.	ν	$\log \eta$	Diff.
0.300	9.9794263	1258	0.420	9.9709544	1581	0.480	9.9693268	1983
1	3005	1263	1	7963	1588	1	1285	1991
2	1742	1268	2	6375	1594	2	0.9599204	1998
3	474	1273	3	4781	1600	3	7296	2006
4	0.0750201	1277	4	3181	1605	4	5290	2013
5	7924	1283	5	1576	1612	5	3277	2021
6	6641	1288	6	0.0609904	1618	6	1256	2029
7	5283	1293	7	8340	1624	7	9.9589227	2036
8	4760	1298	8	6732	1630	8	7191	2044
9	2762	1302	9	5092	1637	9	5147	2052
0.370	1460	1308	0.430	3455	1642	0.490	3095	2060
1	982	1313	1	1813	1649	1	1035	2068
2	0.0778840	1318	2	0164	1655	2	9.9578907	2076
3	7521	1323	3	9.9688500	1661	3	6891	2083
4	6198	1328	4	8848	1667	4	4808	2092
5	4870	1334	5	5181	1674	5	2716	2099
6	3536	1338	6	3507	1680	6	6617	2108
7	2198	1344	7	1827	1686	7	9.9568509	2115
8	8854	1348	8	0141	1693	8	6394	2124
9	0.0769506	1354	9	9.9678448	1699	9	4270	2132
0.381	8152	1359	0.440	6749	1705	0.500	2138	2140
1	6703	1365	1	5044	1712	1	9.9559098	2149
2	5428	1369	2	3332	1718	2	7849	2156
3	4059	1375	3	1614	1725	3	5693	2165
4	2684	1380	4	9.9669889	1731	4	3528	2173
5	1304	1386	5	8158	1738	5	1355	2182
6	0.0755218	1390	6	6420	1744	6	9.9549173	2190
7	8528	1396	7	4676	1751	7	6983	2198
8	7132	1401	8	2925	1757	8	4785	2207
9	5731	1407	9	1168	1764	9	2578	2216
0.400	4324	1412	0.450	9.9659404	1771	0.510	0362	2224
1	2912	1418	1	7633	1778	1	9.9538138	2232
2	1494	1422	2	5855	1784	2	5906	2242
3	0.072	1429	3	4071	1791	3	3664	2250
4	9.9748943	1433	4	2280	1797	4	1414	2258
5	7210	1439	5	0483	1805	5	9.9529156	2268
6	5771	1445	6	9.9648678	1811	6	6888	2276
7	4226	1450	7	6867	1818	7	4612	2285
8	2676	1456	8	5049	1825	8	2327	2294
9	1420	1461	9	3224	1831	9	0033	2303
0.400	9.9739959	1467	0.460	1393	1839	0.520	9.9517730	2312
1	8492	1472	1	9.9639554	1846	1	5418	2321
2	7020	1478	2	7708	1852	2	3097	2330
3	5542	1483	3	5856	1860	3	0767	2339
4	4059	1489	4	3996	1866	4	9.9508428	2348
5	2570	1495	5	2130	1874	5	6080	2358
6	1075	1501	6	0256	1881	6	3722	2366
7	9.9729574	1506	7	9.9628375	1887	7	1356	2376
8	8068	1512	8	6488	1896	8	9.9498080	2385
9	6536	1517	9	4592	1902	9	6595	2395
0.410	5039	1523	0.470	2690	1909	0.530	4200	2404
1	3516	1529	1	0781	1917	1	1700	2414
2	1987	1535	2	9.9618864	1924	2	9.9489382	2421
3	0.052	1541	3	6940	1931	3	0900	2433
4	9.9718911	1546	4	5009	1938	4	4527	2442
5	7365	1553	5	3071	1946	5	2085	2452
6	5812	1558	6	1125	1953	6	9.9479033	2461
7	4254	1564	7	9.9609172	1961	7	7172	2472
8	2690	1570	8	7211	1968	8	4700	2481
9	1120	1576	9	5243	1975	9	2219	2491
0.420	9.9709544		0.480	3268		0.540	9.9469728	

Tafel XI.

Zur Berechnung des Verhältnisses $\frac{(\text{Dreieck})}{(\text{Sector})}$ in parabolischen Bahnen.

$$\nu = \frac{2k(v-t)}{(r'+r)^{3/2}} = 2 \sin \frac{1}{2} \varphi - \frac{4}{3} \sin^3 \frac{1}{2} \varphi; \eta = 3 - 4 \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi}{\nu} = \frac{3 \cos \varphi}{2 + \cos \varphi}.$$

ν	$\log \eta$	Diff.	ν	$\log \eta$	Diff.	ν	$\log \eta$	Diff.
0.540	9.9469728	2500	0.600	9.9300148	3202	0.660	9.9080219	4213
1	7228	2511	1	9.9296946	3216	1	9.9076006	4234
2	4717	2521	2	3730	3230	2	1772	4254
3	2196	2531	3	0500	3244	3	9.9067518	4276
4	9.9450065	2541	4	9.9287256	3258	4	3242	4296
5	7124	2550	5	3998	3272	5	9.9058946	4318
6	4574	2562	6	0726	3287	6	4628	4340
7	2012	2572	7	9.9277439	3301	7	0288	4361
8	9.9449440	2581	8	4138	3315	8	9.9045927	4383
9	6859	2592	9	0823	3329	9	1544	4404
0.550	4267	2602	0.610	9.9267494	3345	0.670	9.9037140	4427
1	1665	2613	1	4149	3359	1	2713	4449
2	9.9439052	2624	2	0790	3374	2	9.9028264	4472
3	6428	2634	3	9.9257416	3389	3	3792	4494
4	3794	2644	4	4027	3403	4	9.9019298	4517
5	1150	2656	5	0624	3419	5	4781	4540
6	9.9428494	2666	6	9.9247205	3434	6	0241	4563
7	5828	2677	7	3771	3450	7	9.9005678	4586
8	3151	2688	8	0321	3464	8	1092	4610
9	0463	2698	9	9.9236857	3480	9	9.8997482	4634
0.560	9.9417765	2710	0.620	3377	3496	0.680	1848	4658
1	5055	2721	1	9.9229881	3511	1	9.8987190	4682
2	2334	2731	2	6370	3528	2	2508	4706
3	9.9409603	2743	3	2842	3543	3	9.8977802	4730
4	6860	2754	4	9.9219299	3559	4	3072	4756
5	4106	2765	5	5740	3575	5	9.8968316	4780
6	1341	2777	6	2165	3591	6	3530	4805
7	9.9398564	2788	7	9.9208574	3608	7	9.8958731	4831
8	5776	2800	8	4966	3624	8	3000	4856
9	2976	2811	9	1342	3640	9	9.8949044	4881
0.570	0165	2822	0.630	0.9197702	3657	0.690	4163	4908
1	9.9387343	2834	1	4045	3674	1	9.8939255	4934
2	4509	2846	2	0371	3691	2	4321	4960
3	1663	2858	3	0.9186980	3708	3	9.8929361	4987
4	9.9378805	2870	4	8072	3725	4	4374	5014
5	5935	2881	5	0.9179847	3742	5	9.8919500	5040
6	3054	2893	6	5505	3759	6	4320	5068
7	0161	2906	7	1746	3776	7	0.8909252	5096
8	9.9367255	2917	8	0.9167970	3795	8	4150	5123
9	4338	2930	9	4175	3812	9	0.8899033	5151
0.580	1408	2942	0.640	0303	3820	0.700	3882	5180
1	9.9358466	2954	1	9.9156534	3848	1	9.8888702	5208
2	5512	2967	2	2680	3866	2	3404	5237
3	2545	2979	3	9.9148820	3883	3	9.8878257	5265
4	9.9349566	2992	4	4037	3902	4	2002	5295
5	6574	3004	5	1035	3921	5	9.8867697	5324
6	3570	3017	6	0.9137114	3939	6	2373	5354
7	0553	3020	7	3175	3958	7	9.8857010	5384
8	9.9337524	3033	8	0.9120217	3976	8	1635	5414
9	4481	3055	9	5241	3995	9	9.8846221	5445
0.590	1426	3068	0.650	1246	4015	0.710	0776	5476
1	9.9328358	3081	1	0.9117231	4034	1	9.8835300	5507
2	5277	3095	2	3197	4053	2	9.8829793	5538
3	2182	3107	3	0.9109144	4072	3	4255	5569
4	9.9319075	3121	4	5072	4093	4	9.8818686	5603
5	5054	3134	5	0079	4112	5	3083	5635
6	2820	3148	6	0.9096867	4131	6	9.8807448	5666
7	9.9309672	3161	7	2736	4152	7	1782	5700
8	0511	3175	8	9.9088584	4173	8	9.8796082	5733
9	3336	3188	9	4411	4192	9	0349	5766
0.600	0148		0.660	0219		0.720	9.8784583	

Tafel XI.

Zur Berechnung des Verhältnisses ^(Dreieck)_(Sector) in parabolischen Bahnen.

$$v = \frac{2k(t-t_0)}{(r'+r)^{3/2}} = 2\sin^{1/2}\varphi - \frac{1}{3}\sin^{3/2}\varphi; \eta = 3 - 4\frac{\sin^{1/2}\varphi}{v} = \frac{3\cos\varphi}{2+\cos\varphi}.$$

v	$\log \eta$	Diff.	v	$\log \eta$	Diff.	v	$\log \eta$	Diff.
0.720	9.8784583	5801	0.780	9.8362172	8639	0.840	9.7685379	15052
1	78782	5834	1	53533	8705	1	70327	15226
2	72048	5808	2	44828	8772	2	55101	15405
3	67080	5903	3	36056	8840	3	39606	15588
4	61177	5939	4	27216	8910	4	24108	15773
5	55238	5974	5	9.8318306	8979	5	08335	15962
6	49264	6010	6	09327	9050	6	9.7592373	16058
7	43254	6046	7	00277	9121	7	76215	16355
8	37208	6082	8	9.8291150	9194	8	59860	16557
9	31126	6120	9	81962	9268	9	43303	16765
0.730	25006	6156	0.790	72604	9342	0.850	26538	16977
1	18850	6194	1	63352	9418	1	09561	17194
2	12056	6233	2	53934	9495	2	9.7492367	17415
3	06423	6271	3	44439	9572	3	74952	17642
4	00152	6309	4	34867	9652	4	57310	17874
5	9.8693843	6348	5	25215	9731	5	39436	18112
6	87495	6388	6	15484	9813	6	21324	18356
7	81107	6428	7	05671	9895	7	02968	18605
8	74679	6469	8	9.8195776	9979	8	9.7384363	18861
9	68210	6509	9	85797	10064	9	65502	19122
0.740	9.8661701	6550	0.800	75733	10150	0.860	46380	
1	55151	6592	1	65583	10237		η	
2	48559	6635	2	55346	10325	0.860	0.5427977	24181
3	41924	6676	3	45021	10416	1	5403796	24416
4	35248	6720	4	34605	10507	2	5379380	24653
5	28528	6763	5	24098	10599	3	5354727	24897
6	21765	6807	6	13499	10694	4	5329830	25144
7	14958	6851	7	02805	10790	5	5304686	25397
8	08107	6896	8	9.8092015	10886	6	5279289	25656
9	01211	6941	9	81129	10985	7	5253633	25919
0.750	9.8504270	6987	0.810	9.8070144	11086	8	5227714	26189
1	87283	7033	1	59058	11187	9	5201525	26465
2	80250	7080	2	47871	11290	0.870	0.5275060	26745
3	73170	7128	3	36581	11396	1	5148315	27033
4	66042	7175	4	25185	11502	2	5121282	27328
5	58867	7223	5	13683	11611	3	5093954	27628
6	51644	7273	6	02072	11722	4	5066326	27936
7	44371	7323	7	9.7990350	11833	5	5038390	28252
8	37048	7373	8	78517	11948	6	5010138	28575
9	29675	7423	9	66569	12064	7	4981563	28905
0.760	9.8522252	7474	0.820	54505	12182	8	4952658	29244
1	14778	7526	1	42323	12302	9	4923414	29591
2	07252	7579	2	30021	12424	0.880	0.4893823	29947
3	9.8499673	7632	3	17597	12548	1	4863876	30313
4	92041	7685	4	05049	12675	2	4833563	30687
5	84356	7739	5	9.7892374	12804	3	4802876	30972
6	76617	7795	6	79570	12935	4	4771804	31468
7	68822	7851	7	66635	13068	5	4740336	31874
8	60971	7906	8	53567	13201	6	4708462	32292
9	53045	7964	9	40303	13342	7	4676170	32720
0.770	45101	8023	0.830	27021	13484	8	4643150	33163
1	37078	8078	1	13537	13627	9	4610287	33619
2	29000	8138	2	9.7799910	13773	0.890	0.4576668	34086
3	20862	8199	3	86137	13923	1	4542582	34570
4	12663	8259	4	72214	14075	2	4508012	35068
5	04404	8320	5	58139	14229	3	4472944	35582
6	9.8396084	8383	6	43910	14388	4	4437362	36113
7	87701	8446	7	29522	14549	5	4401249	36661
8	79255	8509	8	14973	14713	6	4364588	37228
9	70746	8574	9	00260	14881	7	4327360	37815
0.780	9.8362172		0.840	9.7685379		8	4289545	38422
						9	4251123	39051
						0.900	0.4212072	

Tafel XI.

Zur Berechnung des Verhältnisses $\frac{(\text{Dreieck})}{(\text{Sector})}$ in parabolischen Bahnen.

$$\nu = \frac{2k(t'-t)}{(r'+r)^{3/2}} = 2 \sin \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \frac{1}{2} \varphi; \quad \eta = 3 - 4 \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi}{\nu} = \frac{3 \cos \varphi}{2 + \cos \varphi}.$$

ν	η	Diff.	ν	η	Diff.	ν	η	Diff.
0.900	0.4212072	39704	0.910	0.3781032	47892	0.920	0.3247952	61338
1	4172368	40380	1	3733140	48930	1	3186614	63202
2	4131988	41084	2	3684210	50020	2	3123412	65204
3	4090904	41815	3	3634190	51168	3	3058208	67365
4	4049089	42575	4	3583022	52379	4	2990843	69705
5	4006514	43368	5	3530643	53658	5	2921138	72251
6	3963146	44195	6	3476985	55012	6	2848887	75033
7	3918951	45057	7	3421973	56447	7	2773854	78090
8	3873894	45959	8	3365526	57974	8	2695764	81470
9	3827935	46903	9	3307552	59600	9	2614294	85231
0.910	0.3781032		0.920	0.3247952		0.930	0.2529063	

Tafel XII.

Zur Berechnung des Verhältnisses $\frac{(\text{Sector})}{\text{Dreieck}}$ in elliptischen Bahnen.

h	$\log \eta^2$	h	$\log \eta^2$	h	$\log \eta^2$
0.0000	0.0000000	0.0060	0.0057298	0.0120	0.0113417
01	0965	61	8243	21	4343
02	1930	62	0.0059187	22	5268
03	2894	63	0.0060131	23	6193
04	3858	64	1075	24	7118
05	4821	65	2019	25	8043
06	5784	66	2962	26	8967
07	6747	67	3905	27	0.0119890
08	7710	68	4847	28	0.0120814
09	8672	69	5790	29	1737
10	0.0009634	70	6732	30	2660
11	0.0010595	71	7673	31	3582
12	1556	72	8614	32	4505
13	2517	73	0.0069555	33	5427
14	3478	74	0.0070496	34	6348
15	4438	75	1436	35	7269
16	5398	76	2376	36	8190
17	6357	77	3316	37	0.0129111
18	7316	78	4255	38	0.0130032
19	8275	79	5194	39	0952
20	0.0019234	80	6133	40	1871
21	0.0020192	81	7071	41	2791
22	1150	82	8009	42	3710
23	2107	83	8947	43	4629
24	3064	84	0.0079884	44	5547
25	4021	85	0.0080821	45	6465
26	4977	86	1758	46	7383
27	5933	87	2694	47	8301
28	6889	88	3630	48	0.0139218
29	7845	89	4566	49	0.0140135
30	8800	90	5502	50	1052
31	0.0029755	91	6437	51	1968
32	0.0030709	92	7372	52	2884
33	1663	93	8306	53	3800
34	2617	94	0.0089240	54	4716
35	3570	95	0.0090174	55	5631
36	4523	96	1108	56	6546
37	5476	97	2041	57	7460
38	6428	98	2974	58	8374
39	7380	0.0099	3906	59	0.0149288
40	8332	0.0100	4838	60	0.0150202
41	0.0039284	01	5770	61	1115
42	0.0040235	02	6702	62	2028
43	1186	03	7633	63	2941
44	2136	04	8564	64	3854
45	3086	05	0.0099495	65	4766
46	4036	06	0.0100425	66	5678
47	4985	07	1356	67	6589
48	5934	08	2285	68	7500
49	6883	09	3215	69	8411
50	7832	10	4144	70	0.0159322
51	8780	11	5073	71	0.0160232
52	0.0049728	12	6001	72	1142
53	0.0050675	13	6929	73	2052
54	1622	14	7857	74	2961
55	2569	15	8785	75	3870
56	3515	16	0.0109712	76	4779
57	4462	17	0.0110639	77	5688
58	5407	18	1565	78	6596
59	6353	19	2491	79	7504
0.0060	0.0057298	0.0120	0.0113417	0.0180	0.0168412

Tafel XII.

Zur Berechnung des Verhältnisses $\frac{(\text{Sector})}{\text{Dreieck}}$ in elliptischen Bahnen.

h	$\log \eta^2$	h	$\log \eta^2$	h	$\log \eta^2$
0.0180	0.0168412	0.0240	0.0222330	0.0300	0.0275218
81	0.0169319	41	3220	01	6091
82	0.0170226	42	4109	02	6964
83	1133	43	4998	03	7836
84	2039	44	5887	04	8708
85	2945	45	6776	05	0.0279580
86	3851	46	7664	06	0.0280452
87	4757	47	8552	07	1323
88	5662	48	0.0229440	08	2194
89	6567	49	0.0230328	09	3065
90	7471	50	1215	10	3936
91	8376	51	2102	11	4806
92	0.0179280	52	2988	12	5676
93	0.0180183	53	3875	13	6546
94	1087	54	4761	14	7415
95	1990	55	5647	15	8284
96	2893	56	6532	16	0.0289153
97	3796	57	7417	17	0.0290022
98	4698	58	8302	18	0890
0.0190	5600	59	0.0239187	19	1758
0.0200	6501	60	0.0240071	20	2626
01	7403	61	0956	21	3494
02	8304	62	1839	22	4361
03	0.0189205	63	2723	23	5228
04	0.0190105	64	3606	24	6095
05	1005	65	4489	25	6961
06	1905	66	5372	26	7827
07	2805	67	6254	27	8693
08	3704	68	7136	28	0.0299559
09	4603	69	8018	29	0.0300424
10	5502	70	8900	30	1290
11	6401	71	0.0249781	31	2154
12	7299	72	0.0250662	32	3019
13	8197	73	1543	33	3883
14	9094	74	2423	34	4747
15	0.0199992	75	3303	35	5611
16	0.0200889	76	4183	36	6475
17	1785	77	5063	37	7338
18	2682	78	5942	38	8201
19	3578	79	6821	39	9064
20	4474	80	7700	40	0.0309926
21	5369	81	8579	41	0.0310788
22	6264	82	0.0259457	42	1650
23	7159	83	0.0260335	43	2512
24	8054	84	1213	44	3373
25	8948	85	2090	45	4234
26	0.0209842	86	2967	46	5095
27	0.0210736	87	3844	47	5956
28	1030	88	4721	48	6816
29	2523	89	5597	49	7676
30	3416	90	6473	50	8536
31	4309	91	7349	51	0.0319396
32	5201	92	8224	52	0.0320255
33	6093	93	9099	53	1114
34	6985	94	0.0269974	54	1973
35	7876	95	0.0270849	55	2831
36	8768	96	1723	56	3689
37	0.0219659	97	2597	57	4547
38	0.0220549	98	3471	58	5405
39	1440	0.0299	4345	59	6262
0.0240	0.0222330	0.0300	0.0275218	0.0360	0.0327120

Tafel XII.

Zur Berechnung des Verhältnisses $\frac{(\text{Sector})}{(\text{Dreieck})}$ in elliptischen Bahnen.

h	$\log \eta^2$	h	$\log \eta^2$	h	$\log \eta^2$
0.0360	0.0327120	0.060	0.0525626	0.120	0.0968849
61	7070	0.061	33602	0.121	75692
62	8833	0.062	41556	0.122	82520
63	0.0329680	0.063	49488	0.123	89331
64	0.0330540	0.064	57397	0.124	0.0996127
65	141	0.065	65285	0.125	0.1002907
66	2237	0.066	73150	0.126	09672
67	3112	0.067	80994	0.127	16421
68	407	0.068	88817	0.128	23154
69	4821	0.069	0.0596618	0.129	29873
70	5777	0.070	0.0604398	0.130	36576
71	681	0.071	12157	0.131	43264
72	7785	0.072	19895	0.132	49936
73	8798	0.073	27612	0.133	56594
74	9842	0.074	35308	0.134	63237
75	0.0339940	0.075	42984	0.135	69865
76	0.0340790	0.076	50630	0.136	76478
77	1051	0.077	58274	0.137	83076
78	2504	0.078	65888	0.138	89660
79	3350	0.079	73487	0.139	0.1096229
80	4208	0.080	81057	0.140	0.1102783
81	5059	0.081	88612	0.141	09323
82	5911	0.082	0.0696146	0.142	15849
83	6762	0.083	0.0703661	0.143	22360
84	7613	0.084	11157	0.144	28857
85	8464	0.085	18633	0.145	35340
86	0.0349314	0.086	26090	0.146	41809
87	0.0350164	0.087	33527	0.147	48264
88	1114	0.088	40945	0.148	54704
89	1864	0.089	48345	0.149	61131
90	2711	0.090	55725	0.150	67544
91	356	0.091	63087	0.151	73943
92	4411	0.092	70430	0.152	80329
93	5257	0.093	77754	0.153	86701
94	6108	0.094	85060	0.154	93059
95	6956	0.095	92348	0.155	0.1199404
96	7804	0.096	0.0799617	0.156	0.1205735
97	8651	0.097	0.0806868	0.157	12053
98	0.0359499	0.098	14101	0.158	18357
0.0399	0.0360346	0.099	21310	0.159	24649
0.0400	0.0361192	0.100	28513	0.160	30927
0.041	0.0369646	0.101	35693	0.161	37192
0.042	78075	0.102	42854	0.162	43444
0.043	86478	0.103	49999	0.163	49682
0.044	0.0394856	0.104	57125	0.164	55908
0.045	0.0403209	0.105	64235	0.165	62121
0.046	11717	0.106	71327	0.166	68321
0.047	19841	0.107	78401	0.167	74508
0.048	28121	0.108	85459	0.168	80683
0.049	36376	0.109	92500	0.169	86845
0.050	44607	0.110	0.0899523	0.170	92994
0.051	52814	0.111	0.0906530	0.171	0.1299131
0.052	60997	0.112	13520	0.172	0.1305255
0.053	69157	0.113	20494	0.173	11367
0.054	77294	0.114	27451	0.174	17406
0.055	85407	0.115	34391	0.175	23553
0.056	0.0493496	0.116	41315	0.176	29628
0.057	0.0501563	0.117	48223	0.177	35690
0.058	99607	0.118	55114	0.178	41740
0.059	17628	0.119	61990	0.179	47778
0.060	25626	0.120	0.0968849	0.180	0.1353804

Tafel XII.

Zur Berechnung des Verhältnisses $\frac{(\text{Sector})}{\text{Dreieck}}$ in elliptischen Bahnen.

h	$\log \eta^2$	h	$\log \eta^2$	h	$\log \eta^2$
0.180	0.1353804	0.240	0.1695092	0.300	0.2002285
0.181	59818	0.241	0.1700470	0.301	07157
0.182	65821	0.242	05838	0.302	12021
0.183	71811	0.243	11197	0.303	16878
0.184	77789	0.244	16547	0.304	21727
0.185	83755	0.245	21887	0.305	26569
0.186	89710	0.246	27218	0.306	31403
0.187	0.1395653	0.247	32540	0.307	36230
0.188	0.1401585	0.248	37853	0.308	41050
0.189	07504	0.249	43156	0.309	45862
0.190	13412	0.250	48451	0.310	50667
0.191	19309	0.251	53736	0.311	55464
0.192	25194	0.252	59013	0.312	60254
0.193	31068	0.253	64280	0.313	65037
0.194	36931	0.254	69538	0.314	69813
0.195	42782	0.255	74788	0.315	74581
0.196	48622	0.256	80029	0.316	79342
0.197	54450	0.257	85261	0.317	84096
0.198	60268	0.258	90484	0.318	88843
0.199	66074	0.259	0.1795698	0.319	93582
0.200	71869	0.260	0.1800903	0.320	0.2098315
0.201	77653	0.261	06100	0.321	0.2103040
0.202	83427	0.262	11288	0.322	07759
0.203	89189	0.263	16467	0.323	12470
0.204	0.1494940	0.264	21638	0.324	17174
0.205	0.1500681	0.265	26800	0.325	21871
0.206	06411	0.266	31953	0.326	26562
0.207	12130	0.267	37098	0.327	31245
0.208	17838	0.268	42235	0.328	35921
0.209	23535	0.269	47363	0.329	40591
0.210	29222	0.270	52483	0.330	45253
0.211	34899	0.271	57594	0.331	49909
0.212	40565	0.272	62696	0.332	54558
0.213	46220	0.273	67791	0.333	59200
0.214	51865	0.274	72877	0.334	63835
0.215	57499	0.275	77955	0.335	68464
0.216	63123	0.276	83024	0.336	73085
0.217	68737	0.277	88085	0.337	77700
0.218	74340	0.278	93138	0.338	82308
0.219	79933	0.279	0.1898183	0.339	86910
0.220	85516	0.280	0.1903220	0.340	91505
0.221	91089	0.281	08240	0.341	0.2190003
0.222	0.1506652	0.282	13200	0.342	0.2200005
0.223	0.1602204	0.283	18281	0.343	05250
0.224	07747	0.284	23286	0.344	09818
0.225	13279	0.285	28282	0.345	14380
0.226	18802	0.286	33271	0.346	18935
0.227	24315	0.287	38251	0.347	23483
0.228	29817	0.288	43224	0.348	28025
0.229	35310	0.289	48188	0.349	32561
0.230	40793	0.290	53145	0.350	37090
0.231	46267	0.291	58094	0.351	41613
0.232	51730	0.292	63035	0.352	46130
0.233	57184	0.293	67968	0.353	50640
0.234	62628	0.294	72894	0.354	55143
0.235	68063	0.295	77811	0.355	59640
0.236	73488	0.296	82721	0.356	64131
0.237	78903	0.297	87624	0.357	68615
0.238	84309	0.298	92518	0.358	73093
0.239	89705	0.299	0.1997406	0.359	77565
0.240	0.1695092	0.300	0.2002285	0.360	0.2282031

Tafel XII.

Zur Berechnung des Verhältnisses $\frac{(\text{Sector})}{\text{Dreieck}}$ in elliptischen Bahnen.

h	$\log \eta^2$	h	$\log \eta^2$	h	$\log \eta^2$
0.360	0.2282031	0.420	0.2539153	0.480	0.2777272
0.361	86490	0.421	43269	0.481	81096
0.362	90943	0.422	47379	0.482	84916
0.363	95396	0.423	51488	0.483	88732
0.364	0.2299811	0.424	55584	0.484	92843
0.365	0.2314208	0.425	59679	0.485	0.2796349
0.366	0.86004	0.426	63760	0.486	0.2800151
0.367	1.7116	0.427	67853	0.487	0.9049
0.368	178342	0.428	71932	0.488	0.7743
0.369	21942	0.429	76006	0.489	11532
0.370	26340	0.430	80075	0.490	15316
0.371	30743	0.431	84139	0.491	19096
0.372	35135	0.432	88198	0.492	22872
0.373	39521	0.433	92252	0.493	26644
0.374	43900	0.434	0.2596300	0.494	30411
0.375	48274	0.435	0.2600344	0.495	34173
0.376	52642	0.436	0.4382	0.496	37932
0.377	57008	0.437	0.8415	0.497	41686
0.378	61359	0.438	12444	0.498	45436
0.379	65700	0.439	16467	0.499	49181
0.380	70053	0.440	20486	0.500	52923
0.381	74391	0.441	24499	0.501	56660
0.382	78723	0.442	28507	0.502	60392
0.383	83050	0.443	32511	0.503	64121
0.384	87370	0.444	36509	0.504	67845
0.385	91685	0.445	40503	0.505	71565
0.386	0.2395993	0.446	44492	0.506	75281
0.387	0.2410296	0.447	48475	0.507	78992
0.388	0.4594	0.448	52454	0.508	82700
0.389	0.8885	0.449	56428	0.509	86403
0.390	13171	0.450	60397	0.510	90102
0.391	17451	0.451	64362	0.511	93797
0.392	21725	0.452	68321	0.512	0.2897487
0.393	25994	0.453	72276	0.513	0.2901174
0.394	30257	0.454	76220	0.514	0.4856
0.395	34514	0.455	80171	0.515	0.8535
0.396	38766	0.456	84111	0.516	12209
0.397	43012	0.457	88046	0.517	15879
0.398	47252	0.458	91977	0.518	19545
0.399	51487	0.459	95903	0.519	23207
0.400	55716	0.460	0.2699824	0.520	26864
0.401	59940	0.461	0.2703741	0.521	30518
0.402	64158	0.462	0.7652	0.522	34168
0.403	68371	0.463	11559	0.523	37813
0.404	72578	0.464	15462	0.524	41455
0.405	76779	0.465	19360	0.525	45092
0.406	80975	0.466	23253	0.526	48726
0.407	85160	0.467	27141	0.527	52355
0.408	89351	0.468	31025	0.528	55981
0.409	93531	0.469	34904	0.529	59602
0.410	0.2497705	0.470	38778	0.530	63220
0.411	0.2501874	0.471	42648	0.531	66833
0.412	0.6638	0.472	46513	0.532	70443
0.413	10190	0.473	50374	0.533	74049
0.414	14349	0.474	54230	0.534	77650
0.415	18496	0.475	58082	0.535	81248
0.416	22638	0.476	61929	0.536	84842
0.417	26775	0.477	65771	0.537	88432
0.418	30906	0.478	69609	0.538	92018
0.419	35032	0.479	73443	0.539	95600
0.420	0.2539153	0.480	0.2777272	0.540	0.2999178

Tafel XII.

Zur Berechnung des Verhältnisses $\frac{(\text{Sector})}{\text{Dreieck}}$ in elliptischen Bahnen.

h	$\log \eta^2$	h	$\log \eta^2$	h	$\log \eta^2$
0.540	0.2999178	0.560	0.3069938	0.580	0.3139215
0.541	0.3002752	0.561	73437	0.581	42641
0.542	06323	0.562	76931	0.582	46064
0.543	09889	0.563	80422	0.583	49483
0.544	13453	0.564	83910	0.584	52898
0.545	17011	0.565	87394	0.585	56310
0.546	20566	0.566	90874	0.586	59719
0.547	24117	0.567	94350	0.587	63124
0.548	27664	0.568	0.3097823	0.588	66525
0.549	31208	0.569	0.3101292	0.589	69923
0.550	34748	0.570	04758	0.590	73318
0.551	38284	0.571	08220	0.591	76709
0.552	41816	0.572	11678	0.592	80096
0.553	45344	0.573	15133	0.593	83481
0.554	48869	0.574	18584	0.594	86861
0.555	52390	0.575	22031	0.595	90239
0.556	55907	0.576	25475	0.596	93612
0.557	59420	0.577	28915	0.597	0.3196983
0.558	62930	0.578	32352	0.598	0.3200350
0.559	66436	0.579	35785	0.599	03714
0.560	0.3069938	0.580	0.3139215	0.600	0.3207074

Tafel XIII.
Ergänzungstafel zu Tafel XII.

w ¹⁾	Ellipse	Hyperbel	w	Ellipse	Hyperbel
0.000	0.0000000	0.0000000	0.060	0.0002131	0.0001988
0.001	0001	0001	0.061	2204	2054
0.002	0002	0002	0.062	2278	2121
0.003	0005	0005	0.063	2354	2189
0.004	0009	0009	0.064	2431	2257
0.005	0014	0014	0.065	2509	2327
0.006	0021	0020	0.066	2588	2398
0.007	0028	0028	0.067	2669	2470
0.008	0037	0036	0.068	2751	2543
0.009	0047	0046	0.069	2834	2617
0.010	0057	0057	0.070	2918	2691
0.011	0070	0069	0.071	3004	2767
0.012	0083	0082	0.072	3091	2844
0.013	0097	0096	0.073	3180	2922
0.014	0113	0111	0.074	3269	3001
0.015	0130	0127	0.075	3360	3081
0.016	0148	0145	0.076	3453	3162
0.017	0167	0164	0.077	3546	3244
0.018	0187	0183	0.078	3641	3327
0.019	0209	0204	0.079	3738	3411
0.020	0231	0226	0.080	3835	3496
0.021	0255	0249	0.081	3934	3582
0.022	0280	0273	0.082	4034	3669
0.023	0306	0298	0.083	4136	3757
0.024	0334	0325	0.084	4239	3846
0.025	0362	0352	0.085	4343	3936
0.026	0392	0381	0.086	4448	4027
0.027	0423	0410	0.087	4555	4119
0.028	0455	0441	0.088	4663	4212
0.029	0489	0473	0.089	4773	4306
0.030	0523	0506	0.090	4884	4401
0.031	0559	0539	0.091	4996	4496
0.032	0596	0575	0.092	5109	4593
0.033	0634	0611	0.093	5224	4691
0.034	0674	0648	0.094	5341	4790
0.035	0714	0686	0.095	5458	4890
0.036	0756	0726	0.096	5577	4991
0.037	0799	0766	0.097	5697	5092
0.038	0844	0807	0.098	5819	5195
0.039	0889	0850	0.099	5942	5299
0.040	0936	0894	0.100	6066	5403
0.041	0984	0938	0.101	6192	5506
0.042	1033	0984	0.102	6319	5610
0.043	1084	1031	0.103	6448	5723
0.044	1135	1079	0.104	6578	5832
0.045	1188	1128	0.105	6709	5941
0.046	1242	1178	0.106	6842	6052
0.047	1298	1229	0.107	6976	6163
0.048	1354	1281	0.108	7111	6275
0.049	1412	1334	0.109	7248	6389
0.050	1471	1389	0.110	7386	6503
0.051	1532	1444	0.111	7526	6618
0.052	1593	1500	0.112	7667	6734
0.053	1656	1558	0.113	7809	6851
0.054	1720	1616	0.114	7953	6969
0.055	1785	1675	0.115	8098	7088
0.056	1852	1736	0.116	8245	7208
0.057	1920	1798	0.117	8393	7329
0.058	1989	1860	0.118	8542	7451
0.059	2060	1924	0.119	8693	7574
0.060	0.0002131	0.0001988	0.120	0.0008845	0.0007095

¹⁾ w ist für die Ellipse positiv, für die Hyperbel negativ.

Tafel XIII.

Ergänzungstafel zu Tafel XII.

w	ξ		w	ξ	
	Ellipse	Hyperbel		Ellipse	Hyperbel
0.120	0.0008845	0.0007698	0.180	0.0020685	0.0016782
0.121	8999	7822	0.181	0929	6960
0.122	9154	7948	0.182	1175	7139
0.123	9311	8074	0.183	1422	7319
0.124	9469	8202	0.184	1671	7500
0.125	9628	8330	0.185	1922	7681
0.126	9789	8459	0.186	2174	7864
0.127	0.0009951	8590	0.187	2428	8047
0.128	0.0010115	8721	0.188	2683	8231
0.129	0280	8853	0.189	2941	8416
0.130	0447	8986	0.190	3199	8602
0.131	0615	9120	0.191	3460	8789
0.132	0784	9255	0.192	3722	8976
0.133	0955	9390	0.193	3985	9165
0.134	1128	9527	0.194	4251	9354
0.135	1301	9665	0.195	4518	9544
0.136	1477	9803	0.196	4786	9735
0.137	1654	0.0009943	0.197	5056	0.0019926
0.138	1832	0.0010083	0.198	5328	0.0020119
0.139	2012	0224	0.199	5602	0312
0.140	2193	0366	0.200	5877	0507
0.141	2376	0509	0.201	6154	0702
0.142	2560	0653	0.202	6433	0897
0.143	2745	0798	0.203	6713	1094
0.144	2933	0944	0.204	6995	1292
0.145	3121	1091	0.205	7278	1490
0.146	3311	1238	0.206	7564	1689
0.147	3503	1387	0.207	7851	1889
0.148	3696	1536	0.208	8139	2090
0.149	3891	1686	0.209	8429	2291
0.150	4087	1838	0.210	8722	2494
0.151	4285	1990	0.211	9015	2697
0.152	4484	2143	0.212	9311	2901
0.153	4684	2296	0.213	9608	3106
0.154	4886	2451	0.214	0.0029907	3311
0.155	5090	2607	0.215	0.0030207	3518
0.156	5295	2763	0.216	0509	3725
0.157	5502	2921	0.217	0814	3932
0.158	5710	3079	0.218	1119	4142
0.159	5920	3238	0.219	1427	4352
0.160	6131	3398	0.220	1736	4562
0.161	6344	3559	0.221	2047	4774
0.162	6559	3721	0.222	2359	4986
0.163	6775	3883	0.223	2674	5199
0.164	6992	4047	0.224	2990	5412
0.165	7211	4211	0.225	3308	5627
0.166	7432	4377	0.226	3627	5842
0.167	7654	4543	0.227	3949	6058
0.168	7878	4710	0.228	4272	6275
0.169	8103	4878	0.229	4597	6493
0.170	8330	5047	0.230	4924	6711
0.171	8558	5216	0.231	5252	6931
0.172	8788	5387	0.232	5582	7151
0.173	9020	5558	0.233	5914	7371
0.174	9253	5730	0.234	6248	7593
0.175	9487	5903	0.235	6584	7816
0.176	9724	6077	0.236	6921	8039
0.177	0.0019961	6252	0.237	7260	8263
0.178	0.0020201	6428	0.238	7601	8487
0.179	0442	6604	0.239	7944	8713
0.180	0.0020685	0.0016782	0.240	0.0038289	0.0028939

Tafel XIII.

Ergänzungstafel zu Tafel XII.

w	Ellipse	Hyperbel	w	Ellipse	Hyperbel
	ξ			ξ	
0.240	0.0038289	0.0028939	0.270	0.0049485	0.0036087
0.241	8635	9166	0.271	0.0049888	6337
0.242	8983	9394	0.272	0.0050292	6587
0.243	9333	9623	0.273	0699	6839
0.244	0.0039685	0.0029852	0.274	1107	7091
0.245	0.0040039	0.0030083	0.275	1517	7344
0.246	0394	0314	0.276	1930	7598
0.247	0752	0545	0.277	2344	7852
0.248	1111	0778	0.278	2760	8107
0.249	1472	1001	0.279	3178	8363
0.250	1835	1245	0.280	3598	8620
0.251	2199	1480	0.281	4020	8877
0.252	2560	1716	0.282	4444	9135
0.253	2934	1952	0.283	4870	9394
0.254	3305	2189	0.284	5298	9654
0.255	3677	2427	0.285	5728	0.0039914
0.256	4051	2666	0.286	6160	0.0040175
0.257	4427	2905	0.287	6594	0437
0.258	4804	3146	0.288	7030	0700
0.259	5184	3387	0.289	7468	0963
0.260	5560	3628	0.290	7908	1227
0.261	5949	3871	0.291	8350	1491
0.262	6334	4114	0.292	8795	1757
0.263	6721	4358	0.293	9241	2023
0.264	7111	4603	0.294	0.0059689	2290
0.265	7502	4848	0.295	0.0060139	2557
0.266	7894	5094	0.296	0591	2826
0.267	8289	5341	0.297	1045	3095
0.268	8686	5589	0.298	1502	3364
0.269	9085	5838	0.299	1960	3635
0.270	0.0049485	0.0036087	0.300	0.0062420	0.0043906

Tafel XIV.
Oppolzer's *N*-Tafel.

$\log \{N_1^3(n)\}.$

$\pm n$	<i>N</i>	— <i>d</i>	$\pm n$	<i>N</i>	— <i>d</i>	$\pm n$	<i>N</i>	— <i>d</i>	$\pm n$	<i>N</i>	— <i>d</i>	$\pm n$	<i>N</i>	— <i>d</i>
0.000	9 _n 221 849	2	0.050	9 _n 218 579	132	0.100	9 _n 208 620	270	0.150	9 _n 191 497	420	0.200	9 _n 166 331	594
0.001	9 _n 221 847	4	0.051	9 _n 218 447	130	0.101	9 _n 208 350	273	0.151	9 _n 191 077	424	0.201	9 _n 165 737	598
0.002	9 _n 221 843	6	0.052	9 _n 218 311	138	0.102	9 _n 208 077	275	0.152	9 _n 190 653	427	0.202	9 _n 165 139	601
0.003	9 _n 221 837	9	0.053	9 _n 218 173	140	0.103	9 _n 207 802	270	0.153	9 _n 190 226	431	0.203	9 _n 164 538	606
0.004	9 _n 221 828	12	0.054	9 _n 218 033	144	0.104	9 _n 207 523	282	0.154	9 _n 189 795	433	0.204	9 _n 163 932	609
0.005	9 _n 221 816	14	0.055	9 _n 217 889	146	0.105	9 _n 207 241	284	0.155	9 _n 189 362	437	0.205	9 _n 163 323	613
0.006	9 _n 221 802	17	0.056	9 _n 217 743	148	0.106	9 _n 206 957	287	0.156	9 _n 188 925	441	0.206	9 _n 162 710	617
0.007	9 _n 221 785	20	0.057	9 _n 217 595	151	0.107	9 _n 206 670	290	0.157	9 _n 188 484	443	0.207	9 _n 162 093	621
0.008	9 _n 221 765	22	0.058	9 _n 217 444	154	0.108	9 _n 206 380	293	0.158	9 _n 188 041	447	0.208	9 _n 161 472	625
0.009	9 _n 221 743	25	0.059	9 _n 217 290	157	0.109	9 _n 206 087	296	0.159	9 _n 187 594	450	0.209	9 _n 160 847	629
0.010	9 _n 221 718	27	0.060	9 _n 217 133	160	0.110	9 _n 205 791	290	0.160	9 _n 187 144	453	0.210	9 _n 160 218	632
0.011	9 _n 221 691	30	0.061	9 _n 216 973	162	0.111	9 _n 205 492	302	0.161	9 _n 186 691	456	0.211	9 _n 159 586	637
0.012	9 _n 221 661	33	0.062	9 _n 216 811	164	0.112	9 _n 205 190	305	0.162	9 _n 186 235	460	0.212	9 _n 158 940	640
0.013	9 _n 221 628	35	0.063	9 _n 216 647	168	0.113	9 _n 204 885	307	0.163	9 _n 185 775	463	0.213	9 _n 158 300	645
0.014	9 _n 221 593	38	0.064	9 _n 216 479	170	0.114	9 _n 204 578	311	0.164	9 _n 185 312	467	0.214	9 _n 157 664	648
0.015	9 _n 221 555	40	0.065	9 _n 216 309	173	0.115	9 _n 204 267	314	0.165	9 _n 184 847	470	0.215	9 _n 157 016	653
0.016	9 _n 221 515	43	0.066	9 _n 216 136	176	0.116	9 _n 203 953	316	0.166	9 _n 184 375	473	0.216	9 _n 156 363	656
0.017	9 _n 221 472	46	0.067	9 _n 215 960	178	0.117	9 _n 203 637	319	0.167	9 _n 183 902	477	0.217	9 _n 155 707	661
0.018	9 _n 221 426	48	0.068	9 _n 215 782	181	0.118	9 _n 203 318	323	0.168	9 _n 183 425	480	0.218	9 _n 155 046	664
0.019	9 _n 221 378	51	0.069	9 _n 215 601	184	0.119	9 _n 202 995	325	0.169	9 _n 182 945	483	0.219	9 _n 154 382	669
0.020	9 _n 221 327	53	0.070	9 _n 215 417	186	0.120	9 _n 202 670	328	0.170	9 _n 182 462	487	0.220	9 _n 153 713	673
0.021	9 _n 221 274	56	0.071	9 _n 215 231	180	0.121	9 _n 202 342	332	0.171	9 _n 181 975	490	0.221	9 _n 153 040	676
0.022	9 _n 221 218	59	0.072	9 _n 215 042	192	0.122	9 _n 202 010	334	0.172	9 _n 181 485	493	0.222	9 _n 152 364	681
0.023	9 _n 221 159	61	0.073	9 _n 214 850	195	0.123	9 _n 201 670	337	0.173	9 _n 180 992	497	0.223	9 _n 151 683	685
0.024	9 _n 221 098	64	0.074	9 _n 214 655	198	0.124	9 _n 201 330	340	0.174	9 _n 180 495	501	0.224	9 _n 150 998	689
0.025	9 _n 221 034	67	0.075	9 _n 214 457	200	0.125	9 _n 200 990	344	0.175	9 _n 179 994	504	0.225	9 _n 150 300	694
0.026	9 _n 220 967	69	0.076	9 _n 214 257	203	0.126	9 _n 200 655	346	0.176	9 _n 179 490	507	0.226	9 _n 149 615	697
0.027	9 _n 220 898	72	0.077	9 _n 214 054	205	0.127	9 _n 200 309	349	0.177	9 _n 178 983	511	0.227	9 _n 148 918	702
0.028	9 _n 220 826	74	0.078	9 _n 213 849	209	0.128	9 _n 199 960	353	0.178	9 _n 178 472	514	0.228	9 _n 148 216	706
0.029	9 _n 220 752	77	0.079	9 _n 213 640	211	0.129	9 _n 199 607	355	0.179	9 _n 177 958	518	0.229	9 _n 147 510	710
0.030	9 _n 220 675	80	0.080	9 _n 213 429	214	0.130	9 _n 199 252	358	0.180	9 _n 177 440	521	0.230	9 _n 146 800	715
0.031	9 _n 220 595	82	0.081	9 _n 213 215	216	0.131	9 _n 198 891	362	0.181	9 _n 176 910	525	0.231	9 _n 146 085	719
0.032	9 _n 220 513	85	0.082	9 _n 212 999	220	0.132	9 _n 198 532	364	0.182	9 _n 176 394	528	0.232	9 _n 145 360	723
0.033	9 _n 220 428	88	0.083	9 _n 212 779	222	0.133	9 _n 198 168	368	0.183	9 _n 175 866	532	0.233	9 _n 144 643	727
0.034	9 _n 220 340	90	0.084	9 _n 212 557	225	0.134	9 _n 197 800	370	0.184	9 _n 175 334	536	0.234	9 _n 143 916	731
0.035	9 _n 220 250	93	0.085	9 _n 212 332	228	0.135	9 _n 197 430	374	0.185	9 _n 174 798	539	0.235	9 _n 143 184	736
0.036	9 _n 220 157	96	0.086	9 _n 212 104	231	0.136	9 _n 197 056	377	0.186	9 _n 174 250	542	0.236	9 _n 142 448	741
0.037	9 _n 220 061	98	0.087	9 _n 211 873	233	0.137	9 _n 196 670	379	0.187	9 _n 173 717	546	0.237	9 _n 141 707	745
0.038	9 _n 219 963	101	0.088	9 _n 211 640	230	0.138	9 _n 196 300	383	0.188	9 _n 173 171	550	0.238	9 _n 140 962	749
0.039	9 _n 219 862	103	0.089	9 _n 211 404	239	0.139	9 _n 195 917	386	0.189	9 _n 172 621	554	0.239	9 _n 140 213	754
0.040	9 _n 219 759	106	0.090	9 _n 211 165	242	0.140	9 _n 195 531	390	0.190	9 _n 172 067	557	0.240	9 _n 139 459	758
0.041	9 _n 219 653	109	0.091	9 _n 210 923	244	0.141	9 _n 195 141	392	0.191	9 _n 171 510	560	0.241	9 _n 138 701	763
0.042	9 _n 219 544	111	0.092	9 _n 210 679	248	0.142	9 _n 194 740	395	0.192	9 _n 170 950	565	0.242	9 _n 137 938	767
0.043	9 _n 219 433	114	0.093	9 _n 210 431	250	0.143	9 _n 194 354	399	0.193	9 _n 170 385	568	0.243	9 _n 137 171	772
0.044	9 _n 219 319	117	0.094	9 _n 210 181	253	0.144	9 _n 193 955	402	0.194	9 _n 169 817	571	0.244	9 _n 136 399	776
0.045	9 _n 219 202	119	0.095	9 _n 209 928	256	0.145	9 _n 193 553	405	0.195	9 _n 169 246	576	0.245	9 _n 135 623	781
0.046	9 _n 219 083	122	0.096	9 _n 209 672	259	0.146	9 _n 193 148	408	0.196	9 _n 168 670	579	0.246	9 _n 134 842	786
0.047	9 _n 218 961	125	0.097	9 _n 209 413	261	0.147	9 _n 192 740	411	0.197	9 _n 168 091	583	0.247	9 _n 134 056	790
0.048	9 _n 218 836	127	0.098	9 _n 209 152	264	0.148	9 _n 192 329	414	0.198	9 _n 167 508	586	0.248	9 _n 133 266	795
0.049	9 _n 218 709	130	0.099	9 _n 208 888	268	0.149	9 _n 191 915	418	0.199	9 _n 166 922	591	0.249	9 _n 132 471	799
0.050	9 _n 218 579		0.100	9 _n 208 620		0.150	9 _n 191 497		0.200	9 _n 166 331		0.250	9 _n 131 672	

Tafel XIV.

Oppolzer's *N*-Tafel.

$\log \{N_1^+(n)\}.$

$\pm n$	<i>N</i>	— <i>J</i>	$\pm n$	<i>N</i>	— <i>J</i>	$\pm n$	<i>N</i>	— <i>J</i>	$\pm n$	<i>N</i>	— <i>J</i>	$\pm n$	<i>N</i>	— <i>J</i>
0.000	8 _n 920 819	1	0.050	8 _n 918 642	88	0.100	8 _n 912 045	178	0.150	8 _n 900 822	274	0.200	8 _n 884 607	370
0.001	8 _n 920 818	2	0.051	8 _n 918 554	90	0.101	8 _n 911 867	180	0.151	8 _n 900 548	276	0.201	8 _n 884 228	371
0.002	8 _n 920 815	3	0.052	8 _n 918 464	92	0.102	8 _n 911 687	182	0.152	8 _n 900 272	277	0.202	8 _n 883 847	373
0.003	8 _n 920 811	4	0.053	8 _n 918 372	93	0.103	8 _n 911 505	184	0.153	8 _n 899 995	280	0.203	8 _n 883 464	376
0.004	8 _n 920 808	5	0.054	8 _n 918 279	96	0.104	8 _n 911 321	186	0.154	8 _n 899 715	282	0.204	8 _n 883 078	380
0.005	8 _n 920 797	6	0.055	8 _n 918 183	97	0.105	8 _n 911 135	187	0.155	8 _n 899 433	284	0.205	8 _n 882 691	383
0.006	8 _n 920 788	7	0.056	8 _n 918 086	98	0.106	8 _n 910 948	189	0.156	8 _n 899 149	286	0.206	8 _n 882 301	386
0.007	8 _n 920 779	8	0.057	8 _n 917 988	101	0.107	8 _n 910 759	191	0.157	8 _n 898 863	288	0.207	8 _n 881 909	390
0.008	8 _n 920 770	9	0.058	8 _n 917 888	102	0.108	8 _n 910 568	193	0.158	8 _n 898 575	290	0.208	8 _n 881 514	393
0.009	8 _n 920 748	10	0.059	8 _n 917 785	104	0.109	8 _n 910 375	195	0.159	8 _n 898 285	292	0.209	8 _n 881 117	397
0.010	8 _n 920 722	11	0.060	8 _n 917 681	106	0.110	8 _n 910 180	197	0.160	8 _n 897 993	294	0.210	8 _n 880 718	401
0.011	8 _n 920 714	12	0.061	8 _n 917 575	108	0.111	8 _n 909 983	199	0.161	8 _n 897 699	296	0.211	8 _n 880 317	403
0.012	8 _n 920 694	13	0.062	8 _n 917 467	109	0.112	8 _n 909 784	200	0.162	8 _n 897 403	298	0.212	8 _n 879 914	406
0.013	8 _n 920 672	14	0.063	8 _n 917 358	110	0.113	8 _n 909 584	202	0.163	8 _n 897 105	300	0.213	8 _n 879 508	408
0.014	8 _n 920 648	15	0.064	8 _n 917 246	112	0.114	8 _n 909 381	203	0.164	8 _n 896 805	302	0.214	8 _n 879 100	411
0.015	8 _n 920 624	16	0.065	8 _n 917 133	114	0.115	8 _n 909 177	206	0.165	8 _n 896 503	304	0.215	8 _n 878 680	412
0.016	8 _n 920 598	17	0.066	8 _n 917 019	117	0.116	8 _n 908 971	208	0.166	8 _n 896 199	306	0.216	8 _n 878 277	415
0.017	8 _n 920 568	18	0.067	8 _n 916 902	118	0.117	8 _n 908 763	210	0.167	8 _n 895 893	308	0.217	8 _n 877 862	418
0.018	8 _n 920 537	19	0.068	8 _n 916 784	120	0.118	8 _n 908 553	212	0.168	8 _n 895 585	311	0.218	8 _n 877 444	419
0.019	8 _n 920 505	20	0.069	8 _n 916 664	122	0.119	8 _n 908 341	214	0.169	8 _n 895 274	312	0.219	8 _n 877 025	422
0.020	8 _n 920 471	21	0.070	8 _n 916 542	124	0.120	8 _n 908 127	215	0.170	8 _n 894 962	315	0.220	8 _n 876 603	425
0.021	8 _n 920 436	22	0.071	8 _n 916 418	126	0.121	8 _n 907 912	218	0.171	8 _n 894 647	316	0.221	8 _n 876 178	426
0.022	8 _n 920 398	23	0.072	8 _n 916 292	127	0.122	8 _n 907 694	219	0.172	8 _n 894 331	319	0.222	8 _n 875 752	429
0.023	8 _n 920 359	24	0.073	8 _n 916 165	129	0.123	8 _n 907 473	221	0.173	8 _n 894 012	320	0.223	8 _n 875 323	432
0.024	8 _n 920 318	25	0.074	8 _n 916 036	131	0.124	8 _n 907 254	224	0.174	8 _n 893 692	323	0.224	8 _n 874 891	433
0.025	8 _n 920 276	26	0.075	8 _n 915 905	132	0.125	8 _n 907 030	225	0.175	8 _n 893 369	325	0.225	8 _n 874 458	436
0.026	8 _n 920 234	27	0.076	8 _n 915 773	135	0.126	8 _n 906 805	227	0.176	8 _n 893 044	327	0.226	8 _n 874 022	439
0.027	8 _n 920 188	28	0.077	8 _n 915 638	136	0.127	8 _n 906 578	229	0.177	8 _n 892 717	329	0.227	8 _n 873 583	441
0.028	8 _n 920 137	29	0.078	8 _n 915 502	138	0.128	8 _n 906 349	230	0.178	8 _n 892 388	331	0.228	8 _n 873 142	443
0.029	8 _n 920 088	30	0.079	8 _n 915 364	140	0.129	8 _n 906 119	233	0.179	8 _n 892 057	334	0.229	8 _n 872 699	446
0.030	8 _n 920 046	31	0.080	8 _n 915 224	142	0.130	8 _n 905 889	235	0.180	8 _n 891 723	335	0.230	8 _n 872 253	448
0.031	8 _n 919 988	32	0.081	8 _n 915 082	144	0.131	8 _n 905 651	237	0.181	8 _n 891 388	338	0.231	8 _n 871 805	450
0.032	8 _n 919 928	33	0.082	8 _n 914 939	146	0.132	8 _n 905 414	238	0.182	8 _n 891 050	339	0.232	8 _n 871 355	453
0.033	8 _n 919 872	34	0.083	8 _n 914 795	147	0.133	8 _n 905 176	241	0.183	8 _n 890 711	342	0.233	8 _n 870 902	455
0.034	8 _n 919 814	35	0.084	8 _n 914 646	149	0.134	8 _n 904 938	244	0.184	8 _n 890 369	344	0.234	8 _n 870 447	458
0.035	8 _n 919 754	36	0.085	8 _n 914 497	150	0.135	8 _n 904 693	246	0.185	8 _n 890 025	346	0.235	8 _n 869 980	460
0.036	8 _n 919 692	37	0.086	8 _n 914 347	153	0.136	8 _n 904 449	247	0.186	8 _n 889 679	348	0.236	8 _n 869 520	463
0.037	8 _n 919 628	38	0.087	8 _n 914 194	154	0.137	8 _n 904 202	248	0.187	8 _n 889 331	351	0.237	8 _n 869 060	465
0.038	8 _n 919 563	39	0.088	8 _n 914 040	156	0.138	8 _n 903 954	250	0.188	8 _n 888 980	352	0.238	8 _n 868 601	467
0.039	8 _n 919 496	40	0.089	8 _n 913 884	158	0.139	8 _n 903 704	252	0.189	8 _n 888 628	355	0.239	8 _n 868 134	470
0.040	8 _n 919 427	41	0.090	8 _n 913 726	160	0.140	8 _n 903 442	254	0.190	8 _n 888 273	357	0.240	8 _n 867 664	473
0.041	8 _n 919 356	42	0.091	8 _n 913 566	162	0.141	8 _n 903 198	256	0.191	8 _n 887 916	359	0.241	8 _n 867 191	475
0.042	8 _n 919 284	43	0.092	8 _n 913 404	163	0.142	8 _n 902 942	258	0.192	8 _n 887 557	361	0.242	8 _n 866 710	477
0.043	8 _n 919 210	44	0.093	8 _n 913 241	166	0.143	8 _n 902 684	260	0.193	8 _n 887 190	363	0.243	8 _n 866 230	480
0.044	8 _n 919 134	45	0.094	8 _n 913 075	167	0.144	8 _n 902 424	262	0.194	8 _n 886 833	366	0.244	8 _n 865 759	482
0.045	8 _n 919 056	46	0.095	8 _n 912 908	169	0.145	8 _n 902 162	264	0.195	8 _n 886 467	367	0.245	8 _n 865 277	485
0.046	8 _n 918 977	47	0.096	8 _n 912 739	171	0.146	8 _n 901 898	266	0.196	8 _n 886 100	370	0.246	8 _n 864 792	488
0.047	8 _n 918 896	48	0.097	8 _n 912 568	172	0.147	8 _n 901 632	268	0.197	8 _n 885 730	371	0.247	8 _n 864 304	490
0.048	8 _n 918 813	49	0.098	8 _n 912 396	175	0.148	8 _n 901 364	270	0.198	8 _n 885 357	374	0.248	8 _n 863 814	492
0.049	8 _n 918 728	50	0.099	8 _n 912 221	176	0.149	8 _n 901 094	272	0.199	8 _n 884 983	376	0.249	8 _n 863 322	495
0.050	8 _n 918 642	51	0.100	8 _n 912 045	178	0.150	8 _n 900 822	274	0.200	8 _n 884 607	379	0.250	8 _n 862 827	497

Tafel XIV.
Oppolzer's *N*-Tafel.

$\log \{N_1^5(n)\}.$

$\pm n$	<i>N</i>	$-A$	$\pm n$	<i>N</i>	$-A$	$\pm n$	<i>N</i>	$-A$	$\pm n$	<i>N</i>	$-A$	$\pm n$	<i>N</i>	$-A$
0.000	8.522 870	2	0.050	8.518 791	165	0.100	8.506 336	338	0.150	8.484 896	527	0.200	8.453 318	746
0.001	8.522 877	5	0.051	8.518 626	160	0.101	8.505 998	342	0.151	8.484 360	531	0.201	8.452 572	752
0.002	8.522 872	8	0.052	8.518 457	173	0.102	8.505 656	345	0.152	8.483 838	535	0.202	8.451 820	756
0.003	8.522 864	11	0.053	8.518 284	176	0.103	8.505 311	348	0.153	8.483 303	540	0.203	8.451 064	761
0.004	8.522 853	15	0.054	8.518 108	179	0.104	8.504 963	352	0.154	8.482 763	543	0.204	8.450 303	766
0.005	8.522 838	18	0.055	8.517 929	182	0.105	8.504 611	356	0.155	8.482 220	548	0.205	8.449 537	771
0.006	8.522 820	21	0.056	8.517 747	186	0.106	8.504 255	360	0.156	8.481 672	552	0.206	8.448 766	776
0.007	8.522 799	24	0.057	8.517 561	190	0.107	8.503 895	363	0.157	8.481 120	555	0.207	8.447 990	780
0.008	8.522 775	28	0.058	8.517 371	192	0.108	8.503 532	367	0.158	8.480 565	560	0.208	8.447 210	786
0.009	8.522 747	31	0.059	8.517 179	196	0.109	8.503 165	370	0.159	8.480 005	564	0.209	8.446 424	791
0.010	8.522 716	34	0.060	8.516 983	199	0.110	8.502 795	374	0.160	8.479 441	569	0.210	8.445 633	795
0.011	8.522 682	38	0.061	8.516 784	203	0.111	8.502 421	378	0.161	8.478 872	572	0.211	8.444 838	801
0.012	8.522 644	41	0.062	8.516 581	206	0.112	8.502 043	381	0.162	8.478 300	577	0.212	8.444 037	806
0.013	8.522 603	44	0.063	8.516 375	209	0.113	8.501 662	385	0.163	8.477 723	580	0.213	8.443 231	811
0.014	8.522 559	47	0.064	8.516 166	213	0.114	8.501 277	389	0.164	8.477 141	585	0.214	8.442 420	815
0.015	8.522 512	50	0.065	8.515 953	217	0.115	8.500 888	392	0.165	8.476 558	590	0.215	8.441 605	821
0.016	8.522 462	54	0.066	8.515 736	219	0.116	8.500 499	396	0.166	8.475 968	593	0.216	8.440 784	826
0.017	8.522 408	57	0.067	8.515 517	223	0.117	8.500 100	400	0.167	8.475 373	598	0.217	8.439 958	832
0.018	8.522 351	60	0.068	8.515 294	227	0.118	8.499 700	404	0.168	8.474 777	602	0.218	8.439 126	839
0.019	8.522 291	64	0.069	8.515 067	229	0.119	8.499 296	407	0.169	8.474 175	606	0.219	8.438 290	842
0.020	8.522 227	67	0.070	8.514 838	234	0.120	8.498 889	411	0.170	8.473 569	610	0.220	8.437 448	846
0.021	8.522 160	70	0.071	8.514 604	236	0.121	8.498 478	415	0.171	8.472 959	615	0.221	8.436 602	852
0.022	8.522 090	73	0.072	8.514 368	240	0.122	8.498 063	418	0.172	8.472 344	619	0.222	8.435 750	858
0.023	8.522 017	77	0.073	8.514 128	244	0.123	8.497 645	422	0.173	8.471 725	624	0.223	8.434 892	868
0.024	8.521 940	80	0.074	8.513 884	247	0.124	8.497 223	426	0.174	8.471 101	627	0.224	8.434 030	868
0.025	8.521 860	83	0.075	8.513 637	250	0.125	8.496 797	430	0.175	8.470 474	633	0.225	8.433 162	874
0.026	8.521 777	87	0.076	8.513 387	254	0.126	8.496 367	434	0.176	8.469 841	637	0.226	8.432 288	878
0.027	8.521 690	90	0.077	8.513 133	257	0.127	8.495 933	437	0.177	8.469 205	641	0.227	8.431 410	884
0.028	8.521 600	93	0.078	8.512 876	261	0.128	8.495 496	441	0.178	8.468 564	645	0.228	8.430 526	890
0.029	8.521 507	99	0.079	8.512 615	264	0.129	8.495 055	445	0.179	8.467 919	650	0.229	8.429 636	895
0.030	8.521 411	99	0.080	8.512 351	267	0.130	8.494 610	449	0.180	8.467 269	654	0.230	8.428 741	900
0.031	8.521 312	103	0.081	8.512 084	271	0.131	8.494 161	452	0.181	8.466 615	659	0.231	8.427 841	906
0.032	8.521 209	107	0.082	8.511 813	275	0.132	8.493 700	457	0.182	8.465 956	663	0.232	8.426 935	912
0.033	8.521 102	109	0.083	8.511 538	278	0.133	8.493 252	460	0.183	8.465 293	668	0.233	8.426 023	917
0.034	8.520 993	113	0.084	8.511 260	281	0.134	8.492 792	464	0.184	8.464 625	672	0.234	8.425 106	922
0.035	8.520 880	116	0.085	8.510 979	285	0.135	8.492 328	468	0.185	8.463 953	677	0.235	8.424 184	928
0.036	8.520 764	119	0.086	8.510 694	288	0.136	8.491 860	472	0.186	8.463 276	681	0.236	8.423 259	934
0.037	8.520 643	123	0.087	8.510 406	292	0.137	8.491 388	476	0.187	8.462 595	686	0.237	8.422 322	940
0.038	8.520 517	126	0.088	8.510 114	296	0.138	8.490 912	479	0.188	8.461 900	690	0.238	8.421 382	945
0.039	8.520 390	129	0.089	8.509 818	299	0.139	8.490 433	484	0.189	8.461 210	695	0.239	8.420 437	951
0.040	8.520 267	133	0.090	8.509 519	302	0.140	8.489 949	487	0.190	8.460 524	700	0.240	8.419 486	956
0.041	8.520 134	136	0.091	8.509 217	306	0.141	8.489 462	492	0.191	8.459 824	704	0.241	8.418 530	963
0.042	8.519 998	139	0.092	8.508 911	310	0.142	8.488 970	495	0.192	8.459 120	708	0.242	8.417 567	968
0.043	8.519 859	143	0.093	8.508 601	313	0.143	8.488 475	499	0.193	8.458 412	714	0.243	8.416 599	974
0.044	8.519 716	145	0.094	8.508 288	316	0.144	8.487 976	504	0.194	8.457 698	718	0.244	8.415 625	980
0.045	8.519 571	150	0.095	8.507 972	320	0.145	8.487 472	507	0.195	8.456 980	723	0.245	8.414 645	986
0.046	8.519 421	152	0.096	8.507 652	324	0.146	8.486 965	511	0.196	8.456 257	727	0.246	8.413 659	992
0.047	8.519 269	156	0.097	8.507 328	327	0.147	8.486 454	515	0.197	8.455 530	733	0.247	8.412 667	998
0.048	8.519 113	159	0.098	8.507 001	331	0.148	8.485 939	519	0.198	8.454 797	737	0.248	8.411 669	1003
0.049	8.518 954	163	0.099	8.506 670	334	0.149	8.485 420	524	0.199	8.454 060	742	0.249	8.410 666	1010
0.050	8.518 791	163	0.100	8.506 336	334	0.150	8.484 896	524	0.200	8.453 318	742	0.250	8.409 656	1010

Tafel XIV.

Oppolzer's *N*-Tafel.

$\log \{N_1^6(n)\}.$

$\pm n$	<i>N</i>	— <i>d</i>	$\pm n$	<i>N</i>	— <i>d</i>	$\pm n$	<i>N</i>	— <i>d</i>	$\pm n$	<i>N</i>	— <i>d</i>	$\pm n$	<i>N</i>	— <i>d</i>
0.000	8.045 757	1	0.050	8.043 037	111	0.100	8.034 795	222	0.150	8.020 789	342	0.200	8.006 579	472
0.001	8.045 756	2	0.051	8.043 026	112	0.101	8.034 573	225	0.151	8.020 147	344	0.201	8.006 197	475
0.002	8.045 751	3	0.052	8.042 814	115	0.102	8.034 348	227	0.152	8.020 103	346	0.202	7.999 632	477
0.003	8.045 748	4	0.053	8.042 699	116	0.103	8.034 121	229	0.153	8.019 757	349	0.203	7.999 155	480
0.004	8.045 740	5	0.054	8.042 581	119	0.104	8.033 892	232	0.154	8.019 408	352	0.204	7.998 675	482
0.005	8.045 733	6	0.055	8.042 464	122	0.105	8.033 660	234	0.155	8.019 056	355	0.205	7.998 193	485
0.006	8.045 718	7	0.056	8.042 342	123	0.106	8.033 426	236	0.156	8.018 702	358	0.206	7.997 707	488
0.007	8.045 704	8	0.057	8.042 219	126	0.107	8.033 190	239	0.157	8.018 346	361	0.207	7.997 219	491
0.008	8.045 688	9	0.058	8.042 093	128	0.108	8.032 951	241	0.158	8.017 987	362	0.208	7.996 728	494
0.009	8.045 669	10	0.059	8.041 965	130	0.109	8.032 710	243	0.159	8.017 625	364	0.209	7.996 234	497
0.010	8.045 649	23	0.060	8.041 835	132	0.110	8.032 467	246	0.160	8.017 261	366	0.210	7.995 737	500
0.011	8.045 626	25	0.061	8.041 700	134	0.111	8.032 221	248	0.161	8.016 895	369	0.211	7.995 237	502
0.012	8.045 601	27	0.062	8.041 569	137	0.112	8.031 973	250	0.162	8.016 526	372	0.212	7.994 735	505
0.013	8.045 574	29	0.063	8.041 432	139	0.113	8.031 723	253	0.163	8.016 154	374	0.213	7.994 230	508
0.014	8.045 545	32	0.064	8.041 293	141	0.114	8.031 470	255	0.164	8.015 780	377	0.214	7.993 722	511
0.015	8.045 513	34	0.065	8.041 153	144	0.115	8.031 215	257	0.165	8.015 403	379	0.215	7.993 211	514
0.016	8.045 479	35	0.066	8.041 008	145	0.116	8.030 958	260	0.166	8.015 024	382	0.216	7.992 697	517
0.017	8.045 444	38	0.067	8.040 863	148	0.117	8.030 698	262	0.167	8.014 642	384	0.217	7.992 180	519
0.018	8.045 409	40	0.068	8.040 715	150	0.118	8.030 436	265	0.168	8.014 258	387	0.218	7.991 661	522
0.019	8.045 376	43	0.069	8.040 565	153	0.119	8.030 171	266	0.169	8.013 871	389	0.219	7.991 139	526
0.020	8.045 323	45	0.070	8.040 412	154	0.120	8.029 905	269	0.170	8.013 482	392	0.220	7.990 613	528
0.021	8.045 278	46	0.071	8.040 258	157	0.121	8.029 636	272	0.171	8.013 090	395	0.221	7.990 085	531
0.022	8.045 232	47	0.072	8.040 101	159	0.122	8.029 364	274	0.172	8.012 695	397	0.222	7.989 554	534
0.023	8.045 185	51	0.073	8.039 942	161	0.123	8.029 090	276	0.173	8.012 298	400	0.223	7.989 020	536
0.024	8.045 132	53	0.074	8.039 781	164	0.124	8.028 814	279	0.174	8.011 898	402	0.224	7.988 484	540
0.025	8.045 070	55	0.075	8.039 617	166	0.125	8.028 535	281	0.175	8.011 496	405	0.225	7.987 944	543
0.026	8.045 003	58	0.076	8.039 451	168	0.126	8.028 254	283	0.176	8.011 091	408	0.226	7.987 401	545
0.027	8.044 935	59	0.077	8.039 283	170	0.127	8.027 971	286	0.177	8.010 683	410	0.227	7.986 856	549
0.028	8.044 906	62	0.078	8.039 113	172	0.128	8.027 685	288	0.178	8.010 273	413	0.228	7.986 307	551
0.029	8.044 844	65	0.079	8.038 941	175	0.129	8.027 397	290	0.179	8.009 860	415	0.229	7.985 750	555
0.030	8.044 779	66	0.080	8.038 766	177	0.130	8.027 107	293	0.180	8.009 445	418	0.230	7.985 201	557
0.031	8.044 713	68	0.081	8.038 589	179	0.131	8.026 814	295	0.181	8.009 027	421	0.231	7.984 644	561
0.032	8.044 645	71	0.082	8.038 410	182	0.132	8.026 519	298	0.182	8.008 606	423	0.232	7.984 083	563
0.033	8.044 574	73	0.083	8.038 228	183	0.133	8.026 221	300	0.183	8.008 183	426	0.233	7.983 520	566
0.034	8.044 501	75	0.084	8.038 045	186	0.134	8.025 921	303	0.184	8.007 757	428	0.234	7.982 954	570
0.035	8.044 426	77	0.085	8.037 859	189	0.135	8.025 618	305	0.185	8.007 329	432	0.235	7.982 384	572
0.036	8.044 349	80	0.086	8.037 670	190	0.136	8.025 313	307	0.186	8.006 897	434	0.236	7.981 812	576
0.037	8.044 269	82	0.087	8.037 489	193	0.137	8.025 000	310	0.187	8.006 463	437	0.237	7.981 239	578
0.038	8.044 187	83	0.088	8.037 287	195	0.138	8.024 696	312	0.188	8.006 027	439	0.238	7.980 665	582
0.039	8.044 104	86	0.089	8.037 092	197	0.139	8.024 384	314	0.189	8.005 588	442	0.239	7.980 076	584
0.040	8.044 018	89	0.090	8.036 895	200	0.140	8.024 070	317	0.190	8.005 149	445	0.240	7.979 492	588
0.041	8.043 929	90	0.091	8.036 695	202	0.141	8.023 753	320	0.191	8.004 701	447	0.241	7.978 904	590
0.042	8.043 839	93	0.092	8.036 493	204	0.142	8.023 433	322	0.192	8.004 254	450	0.242	7.978 314	594
0.043	8.043 746	94	0.093	8.036 289	207	0.143	8.023 111	324	0.193	8.003 804	452	0.243	7.977 720	597
0.044	8.043 652	97	0.094	8.036 082	208	0.144	8.022 787	327	0.194	8.003 352	455	0.244	7.977 123	600
0.045	8.043 555	100	0.095	8.035 874	211	0.145	8.022 460	329	0.195	8.002 896	458	0.245	7.976 523	603
0.046	8.043 455	101	0.096	8.035 663	214	0.146	8.022 131	332	0.196	8.002 438	461	0.246	7.975 920	606
0.047	8.043 354	104	0.097	8.035 449	215	0.147	8.021 799	334	0.197	8.001 977	463	0.247	7.975 314	609
0.048	8.043 250	105	0.098	8.035 234	218	0.148	8.021 465	337	0.198	8.001 514	466	0.248	7.974 705	613
0.049	8.043 145	108	0.099	8.035 016	221	0.149	8.021 128	339	0.199	8.001 048	469	0.249	7.974 092	615
0.050	8.043 037		0.100	8.034 795		0.150	8.020 789		0.200	8.000 579		0.250	7.973 477	

Tafel XIV.

Oppolzer's *N*-Tafel.

$\log \{N_1^7(n)\}.$

$\pm n$	<i>N</i>	— <i>A</i>	$\pm n$	<i>N</i>	— <i>A</i>	$\pm n$	<i>N</i>	— <i>A</i>	$\pm n$	<i>N</i>	— <i>A</i>	$\pm n$	<i>N</i>	— <i>A</i>
0.000	7n853 872		0.050	7n849 421	180	0.100	7n835 854	368	0.150	7n812 487	575	0.200	7n778 030	815
0.001	7n853 870	2	0.051	7n849 241	185	0.101	7n835 486	372	0.151	7n811 912	579	0.201	7n777 215	821
0.002	7n853 865	5	0.052	7n849 056	187	0.102	7n835 114	376	0.152	7n811 333	584	0.202	7n776 394	826
0.003	7n853 856	9	0.053	7n848 869	192	0.103	7n834 738	380	0.153	7n810 749	588	0.203	7n775 568	831
0.004	7n853 844	12	0.054	7n848 677	195	0.104	7n834 358	384	0.154	7n810 161	593	0.204	7n774 737	837
0.005	7n853 828	16	0.055	7n848 482	199	0.105	7n833 974	388	0.155	7n809 568	597	0.205	7n773 900	842
0.006	7n853 808	20	0.056	7n848 283	202	0.106	7n833 586	391	0.156	7n808 971	602	0.206	7n773 058	847
0.007	7n853 785	23	0.057	7n848 081	206	0.107	7n833 195	396	0.157	7n808 369	606	0.207	7n772 211	853
0.008	7n853 758	27	0.058	7n847 875	210	0.108	7n832 799	400	0.158	7n807 763	610	0.208	7n771 358	858
0.009	7n853 728	30	0.059	7n847 665		0.109	7n832 399		0.159	7n807 153		0.209	7n770 500	
		33			213			403			616			864
0.010	7n853 695	38	0.060	7n847 452	218	0.110	7n831 990	408	0.160	7n806 537	619	0.210	7n769 636	870
0.011	7n853 657	41	0.061	7n847 234	220	0.111	7n831 588	411	0.161	7n805 918	625	0.211	7n768 766	874
0.012	7n853 616	44	0.062	7n847 014	225	0.112	7n831 177	416	0.162	7n805 293	628	0.212	7n767 892	881
0.013	7n853 572	47	0.063	7n846 789	228	0.113	7n830 761	419	0.163	7n804 665	634	0.213	7n767 011	886
0.014	7n853 524	51	0.064	7n846 561	232	0.114	7n830 342	424	0.164	7n804 031	638	0.214	7n766 125	891
0.015	7n853 473	55	0.065	7n846 329	235	0.115	7n829 918	428	0.165	7n803 393	643	0.215	7n765 234	897
0.016	7n853 418	59	0.066	7n846 094	239	0.116	7n829 490	431	0.166	7n802 750	647	0.216	7n764 337	903
0.017	7n853 359	62	0.067	7n845 855	243	0.117	7n829 059	436	0.167	7n802 103	652	0.217	7n763 434	908
0.018	7n853 297	66	0.068	7n845 612	247	0.118	7n828 623	440	0.168	7n801 451	657	0.218	7n762 526	915
0.019	7n853 231	69	0.069	7n845 365		0.119	7n828 183		0.169	7n800 704		0.219	7n761 611	
		99			250			443			661			920
0.020	7n853 162	73	0.070	7n845 115	254	0.120	7n827 740	448	0.170	7n800 133	666	0.220	7n760 691	925
0.021	7n853 089	76	0.071	7n844 861	258	0.121	7n827 292	452	0.171	7n799 467	671	0.221	7n759 766	932
0.022	7n853 013	80	0.072	7n844 603	261	0.122	7n826 840	456	0.172	7n798 706	675	0.222	7n758 834	937
0.023	7n852 933	83	0.073	7n844 342	265	0.123	7n826 384	460	0.173	7n798 121	680	0.223	7n757 897	943
0.024	7n852 850	87	0.074	7n844 077	269	0.124	7n825 924	464	0.174	7n797 441	685	0.224	7n756 954	949
0.025	7n852 763	91	0.075	7n843 808	273	0.125	7n825 460	469	0.175	7n796 756	690	0.225	7n756 005	955
0.026	7n852 672	94	0.076	7n843 535	276	0.126	7n824 991	472	0.176	7n796 066	695	0.226	7n755 050	960
0.027	7n852 578	98	0.077	7n843 259	280	0.127	7n824 510	477	0.177	7n795 371	699	0.227	7n754 090	967
0.028	7n852 480	101	0.078	7n842 979	284	0.128	7n824 042	481	0.178	7n794 672	704	0.228	7n753 123	973
0.029	7n852 379	105	0.079	7n842 695		0.129	7n823 501		0.179	7n793 908		0.229	7n752 156	
		109			288			485			700			979
0.030	7n852 274	112	0.080	7n842 407	291	0.130	7n823 076	489	0.180	7n793 259	714	0.230	7n751 171	984
0.031	7n852 165	116	0.081	7n842 116	296	0.131	7n822 587	493	0.181	7n792 545	719	0.231	7n750 187	991
0.032	7n852 053	119	0.082	7n841 820	300	0.132	7n822 094	497	0.182	7n791 826	724	0.232	7n749 196	997
0.033	7n851 937	123	0.083	7n841 521	302	0.133	7n821 595	502	0.183	7n791 102	728	0.233	7n748 199	1003
0.034	7n851 818	126	0.084	7n841 210	307	0.134	7n821 097	506	0.184	7n790 374	734	0.234	7n747 196	1009
0.035	7n851 695	130	0.085	7n840 912	310	0.135	7n820 589	510	0.185	7n789 640	738	0.235	7n746 187	1016
0.036	7n851 569	134	0.086	7n840 602	315	0.136	7n820 070	515	0.186	7n788 902	744	0.236	7n745 171	1022
0.037	7n851 439	137	0.087	7n840 287	318	0.137	7n819 504	518	0.187	7n788 158	748	0.237	7n744 150	1028
0.038	7n851 305	141	0.088	7n839 909	321	0.138	7n819 040	523	0.188	7n787 410	754	0.238	7n743 122	1033
0.039	7n851 168		0.089	7n839 648		0.139	7n818 523		0.189	7n786 656		0.239	7n742 087	
		144			326			527			759			1040
0.040	7n851 027	148	0.090	7n839 322	330	0.140	7n817 996	532	0.190	7n785 897	763	0.240	7n741 047	1046
0.041	7n850 883	152	0.091	7n838 992	333	0.141	7n817 404	535	0.191	7n785 134	769	0.241	7n740 000	1052
0.042	7n850 735	155	0.092	7n838 659	337	0.142	7n816 929	540	0.192	7n784 365	774	0.242	7n738 947	1058
0.043	7n850 583	159	0.093	7n838 322	341	0.143	7n816 380	544	0.193	7n783 591	779	0.243	7n737 887	1064
0.044	7n850 428	162	0.094	7n837 987	345	0.144	7n815 845	549	0.194	7n782 812	784	0.244	7n736 821	1070
0.045	7n850 269	166	0.095	7n837 636	348	0.145	7n815 290	553	0.195	7n782 028	789	0.245	7n735 748	1076
0.046	7n850 107	170	0.096	7n837 288	353	0.146	7n814 743	558	0.196	7n781 239	794	0.246	7n734 669	1082
0.047	7n849 941	173	0.097	7n836 935	356	0.147	7n814 185	561	0.197	7n780 445	800	0.247	7n733 583	1089
0.048	7n849 771	177	0.098	7n836 570	361	0.148	7n813 624	566	0.198	7n779 645	805	0.248	7n732 491	1095
0.049	7n849 598		0.099	7n836 218		0.149	7n813 058		0.199	7n778 840		0.249	7n731 392	
0.050	7n849 421		0.100	7n835 854	364	0.150	7n812 487	571	0.200	7n778 030	810	0.250	7n730 286	1101

Tafel XIV.
Oppolzer's *N*-Tafel.
 $\log \{N_1^8(n)\}.$

$\pm n$	<i>N</i>	— <i>A</i>	$\pm n$	<i>N</i>	— <i>A</i>	$\pm n$	<i>N</i>	— <i>A</i>	$\pm n$	<i>N</i>	— <i>A</i>	$\pm n$	<i>N</i>	— <i>A</i>
0.000	7n251 812	1	0.050	7n248 840	120	0.100	7n239 878	243	0.150	7n224 934	371	0.200	7n202 969	513
0.001	7n251 811	2	0.051	7n248 839	121	0.101	7n239 877	244	0.151	7n224 933	372	0.201	7n202 968	514
0.002	7n251 810	3	0.052	7n248 838	122	0.102	7n239 876	245	0.152	7n223 932	373	0.202	7n201 967	515
0.003	7n251 809	4	0.053	7n248 837	123	0.103	7n239 875	246	0.153	7n223 931	374	0.203	7n201 966	516
0.004	7n251 808	5	0.054	7n248 836	124	0.104	7n238 874	247	0.154	7n223 930	375	0.204	7n200 965	517
0.005	7n251 807	6	0.055	7n248 835	125	0.105	7n238 873	248	0.155	7n222 929	376	0.205	7n200 964	518
0.006	7n251 806	7	0.056	7n248 834	126	0.106	7n238 872	249	0.156	7n222 928	377	0.206	7n199 963	519
0.007	7n251 805	8	0.057	7n248 833	127	0.107	7n238 871	250	0.157	7n221 927	378	0.207	7n198 962	520
0.008	7n251 804	9	0.058	7n248 832	128	0.108	7n237 870	251	0.158	7n221 926	379	0.208	7n197 961	521
0.009	7n251 803	10	0.059	7n247 831	129	0.109	7n237 869	252	0.159	7n221 925	380	0.209	7n197 960	522
0.010	7n251 802	11	0.060	7n247 830	130	0.110	7n237 868	253	0.160	7n220 924	381	0.210	7n197 959	523
0.011	7n251 801	12	0.061	7n247 829	131	0.111	7n237 867	254	0.161	7n220 923	382	0.211	7n196 958	524
0.012	7n251 800	13	0.062	7n247 828	132	0.112	7n237 866	255	0.162	7n220 922	383	0.212	7n196 957	525
0.013	7n251 799	14	0.063	7n247 827	133	0.113	7n237 865	256	0.163	7n219 921	384	0.213	7n195 956	526
0.014	7n251 798	15	0.064	7n247 826	134	0.114	7n237 864	257	0.164	7n219 920	385	0.214	7n195 955	527
0.015	7n251 797	16	0.065	7n247 825	135	0.115	7n236 863	258	0.165	7n219 919	386	0.215	7n194 954	528
0.016	7n251 796	17	0.066	7n247 824	136	0.116	7n236 862	259	0.166	7n218 918	387	0.216	7n194 953	529
0.017	7n251 795	18	0.067	7n247 823	137	0.117	7n236 861	260	0.167	7n217 917	388	0.217	7n193 952	530
0.018	7n251 794	19	0.068	7n246 822	138	0.118	7n235 860	261	0.168	7n217 916	389	0.218	7n192 951	531
0.019	7n251 793	20	0.069	7n246 821	139	0.119	7n234 859	262	0.169	7n217 915	390	0.219	7n192 950	532
0.020	7n251 792	21	0.070	7n245 820	140	0.120	7n234 858	263	0.170	7n216 914	391	0.220	7n191 949	533
0.021	7n251 791	22	0.071	7n245 819	141	0.121	7n234 857	264	0.171	7n216 913	392	0.221	7n191 948	534
0.022	7n251 790	23	0.072	7n245 818	142	0.122	7n234 856	265	0.172	7n215 912	393	0.222	7n190 947	535
0.023	7n251 789	24	0.073	7n245 817	143	0.123	7n233 855	266	0.173	7n215 911	394	0.223	7n190 946	536
0.024	7n251 788	25	0.074	7n245 816	144	0.124	7n233 854	267	0.174	7n214 910	395	0.224	7n189 945	537
0.025	7n251 787	26	0.075	7n245 815	145	0.125	7n233 853	268	0.175	7n214 909	396	0.225	7n188 944	538
0.026	7n251 786	27	0.076	7n244 814	146	0.126	7n232 852	269	0.176	7n214 908	397	0.226	7n188 943	539
0.027	7n251 785	28	0.077	7n244 813	147	0.127	7n232 851	270	0.177	7n213 907	398	0.227	7n187 942	540
0.028	7n251 784	29	0.078	7n244 812	148	0.128	7n232 850	271	0.178	7n213 906	399	0.228	7n187 941	541
0.029	7n250 817	30	0.079	7n244 811	149	0.129	7n231 849	272	0.179	7n212 905	400	0.229	7n186 940	542
0.030	7n250 816	31	0.080	7n244 810	150	0.130	7n231 848	273	0.180	7n212 904	401	0.230	7n185 939	543
0.031	7n250 815	32	0.081	7n244 809	151	0.131	7n231 847	274	0.181	7n211 903	402	0.231	7n185 938	544
0.032	7n250 814	33	0.082	7n244 808	152	0.132	7n230 846	275	0.182	7n211 902	403	0.232	7n184 937	545
0.033	7n250 813	34	0.083	7n243 807	153	0.133	7n230 845	276	0.183	7n210 901	404	0.233	7n184 936	546
0.034	7n250 812	35	0.084	7n243 806	154	0.134	7n230 844	277	0.184	7n210 900	405	0.234	7n183 935	547
0.035	7n250 811	36	0.085	7n243 805	155	0.135	7n229 843	278	0.185	7n209 899	406	0.235	7n182 934	548
0.036	7n250 810	37	0.086	7n243 804	156	0.136	7n229 842	279	0.186	7n209 898	407	0.236	7n182 933	549
0.037	7n250 809	38	0.087	7n242 803	157	0.137	7n229 841	280	0.187	7n209 897	408	0.237	7n181 932	550
0.038	7n250 808	39	0.088	7n242 802	158	0.138	7n228 840	281	0.188	7n208 896	409	0.238	7n180 931	551
0.039	7n250 807	40	0.089	7n242 801	159	0.139	7n228 839	282	0.189	7n208 895	410	0.239	7n180 930	552
0.040	7n249 918	41	0.090	7n242 800	160	0.140	7n228 838	283	0.190	7n207 894	411	0.240	7n179 929	553
0.041	7n249 917	42	0.091	7n241 799	161	0.141	7n227 837	284	0.191	7n207 893	412	0.241	7n179 928	554
0.042	7n249 916	43	0.092	7n241 798	162	0.142	7n227 836	285	0.192	7n206 892	413	0.242	7n178 927	555
0.043	7n249 915	44	0.093	7n241 797	163	0.143	7n227 835	286	0.193	7n206 891	414	0.243	7n177 926	556
0.044	7n249 914	45	0.094	7n241 796	164	0.144	7n226 834	287	0.194	7n205 890	415	0.244	7n177 925	557
0.045	7n249 913	46	0.095	7n241 795	165	0.145	7n226 833	288	0.195	7n205 889	416	0.245	7n176 924	558
0.046	7n249 912	47	0.096	7n240 794	166	0.146	7n226 832	289	0.196	7n204 888	417	0.246	7n176 923	559
0.047	7n249 911	48	0.097	7n240 793	167	0.147	7n225 831	290	0.197	7n204 887	418	0.247	7n175 922	560
0.048	7n249 910	49	0.098	7n240 792	168	0.148	7n225 830	291	0.198	7n203 886	419	0.248	7n174 921	561
0.049	7n248 907	50	0.099	7n240 791	169	0.149	7n225 829	292	0.199	7n203 885	420	0.249	7n173 920	562
0.050	7n248 849	51	0.100	7n239 890	170	0.150	7n224 828	293	0.200	7n202 884	421	0.250	7n173 919	563

Tafel XIV.
Oppolzer's *N*-Tafel.

$\log \{N_1^2(n)\}.$

$\pm n$	<i>N</i>	$-d$	$\pm n$	<i>N</i>	$-d$	$\pm n$	<i>N</i>	$-d$	$\pm n$	<i>N</i>	$-d$	$\pm n$	<i>N</i>	$-d$
0.000	7.200 659	1	0.050	7.196 004	189	0.100	7.181 811	385	0.150	7.157 357	602	0.200	7.121 271	855
0.001	7.200 658	6	0.051	7.195 815	192	0.101	7.181 426	389	0.151	7.156 755	606	0.201	7.120 416	860
0.002	7.200 652	9	0.052	7.195 623	197	0.102	7.181 037	394	0.152	7.156 149	611	0.202	7.119 556	865
0.003	7.200 643	13	0.053	7.195 426	200	0.103	7.180 643	397	0.153	7.155 538	616	0.203	7.118 691	871
0.004	7.200 630	17	0.054	7.195 226	204	0.104	7.180 246	402	0.154	7.154 922	621	0.204	7.117 820	877
0.005	7.200 613	20	0.055	7.195 022	208	0.105	7.179 844	405	0.155	7.154 301	625	0.205	7.116 943	882
0.006	7.200 593	24	0.056	7.194 814	212	0.106	7.179 439	410	0.156	7.153 676	630	0.206	7.116 061	888
0.007	7.200 569	28	0.057	7.194 602	216	0.107	7.179 029	414	0.157	7.153 046	634	0.207	7.115 173	894
0.008	7.200 541	32	0.058	7.194 386	219	0.108	7.178 615	418	0.158	7.152 412	640	0.208	7.114 279	900
0.009	7.200 509	35	0.059	7.194 167	223	0.109	7.178 197	423	0.159	7.151 772	644	0.209	7.113 379	905
0.010	7.200 474	39	0.060	7.193 944	227	0.110	7.177 774	426	0.160	7.151 128	649	0.210	7.112 474	911
0.011	7.200 435	43	0.061	7.193 717	231	0.111	7.177 348	431	0.161	7.150 479	653	0.211	7.111 563	917
0.012	7.200 392	46	0.062	7.193 486	235	0.112	7.176 917	435	0.162	7.149 826	659	0.212	7.110 646	923
0.013	7.200 346	50	0.063	7.193 251	238	0.113	7.176 482	439	0.163	7.149 167	663	0.213	7.109 723	928
0.014	7.200 296	54	0.064	7.193 013	243	0.114	7.176 043	443	0.164	7.148 504	668	0.214	7.108 795	935
0.015	7.200 242	57	0.065	7.192 770	246	0.115	7.175 600	447	0.165	7.147 839	673	0.215	7.107 860	940
0.016	7.200 185	62	0.066	7.192 524	250	0.116	7.175 153	452	0.166	7.147 163	678	0.216	7.106 920	946
0.017	7.200 123	65	0.067	7.192 274	254	0.117	7.174 701	456	0.167	7.146 485	682	0.217	7.105 974	953
0.018	7.200 058	68	0.068	7.192 020	258	0.118	7.174 245	460	0.168	7.145 803	688	0.218	7.105 021	958
0.019	7.199 990	73	0.069	7.191 762	262	0.119	7.173 785	464	0.169	7.145 115	692	0.219	7.104 063	965
0.020	7.199 917	76	0.070	7.191 500	266	0.120	7.173 321	469	0.170	7.144 423	698	0.220	7.103 098	970
0.021	7.199 841	80	0.071	7.191 234	270	0.121	7.172 852	473	0.171	7.143 725	702	0.221	7.102 128	977
0.022	7.199 761	83	0.072	7.190 964	273	0.122	7.172 379	477	0.172	7.143 023	707	0.222	7.101 151	982
0.023	7.199 678	88	0.073	7.190 691	277	0.123	7.171 902	482	0.173	7.142 316	713	0.223	7.100 169	989
0.024	7.199 590	91	0.074	7.190 414	282	0.124	7.171 420	486	0.174	7.141 603	717	0.224	7.099 180	995
0.025	7.199 499	95	0.075	7.190 132	285	0.125	7.170 934	490	0.175	7.140 880	722	0.225	7.098 185	1001
0.026	7.199 404	98	0.076	7.189 847	289	0.126	7.170 444	494	0.176	7.140 164	728	0.226	7.097 184	1008
0.027	7.199 306	102	0.077	7.189 558	293	0.127	7.169 950	499	0.177	7.139 436	732	0.227	7.096 170	1013
0.028	7.199 204	106	0.078	7.189 265	297	0.128	7.169 451	503	0.178	7.138 704	738	0.228	7.095 163	1020
0.029	7.199 098	110	0.079	7.188 968	301	0.129	7.168 948	508	0.179	7.137 966	742	0.229	7.094 143	1027
0.030	7.198 988	114	0.080	7.188 667	305	0.130	7.168 440	512	0.180	7.137 224	748	0.230	7.093 116	1033
0.031	7.198 874	117	0.081	7.188 362	309	0.131	7.167 928	516	0.181	7.136 476	753	0.231	7.092 083	1039
0.032	7.198 757	121	0.082	7.188 053	313	0.132	7.167 412	520	0.182	7.135 723	758	0.232	7.091 044	1045
0.033	7.198 636	125	0.083	7.187 740	317	0.133	7.166 892	525	0.183	7.134 965	763	0.233	7.089 999	1052
0.034	7.198 511	128	0.084	7.187 423	320	0.134	7.166 367	530	0.184	7.134 202	768	0.234	7.088 947	1058
0.035	7.198 383	132	0.085	7.187 103	325	0.135	7.165 837	534	0.185	7.133 434	774	0.235	7.087 888	1065
0.036	7.198 251	136	0.086	7.186 778	329	0.136	7.165 303	538	0.186	7.132 660	779	0.236	7.086 823	1072
0.037	7.198 115	140	0.087	7.186 449	332	0.137	7.164 765	543	0.187	7.131 881	784	0.237	7.085 751	1078
0.038	7.197 975	143	0.088	7.186 117	337	0.138	7.164 222	547	0.188	7.131 097	789	0.238	7.084 673	1085
0.039	7.197 832	148	0.089	7.185 780	341	0.139	7.163 675	552	0.189	7.130 308	795	0.239	7.083 588	1092
0.040	7.197 684	151	0.090	7.185 439	344	0.140	7.163 123	556	0.190	7.129 513	800	0.240	7.082 496	1098
0.041	7.197 533	155	0.091	7.185 095	349	0.141	7.162 567	561	0.191	7.128 713	805	0.241	7.081 398	1105
0.042	7.197 378	158	0.092	7.184 746	353	0.142	7.162 000	565	0.192	7.127 908	811	0.242	7.080 293	1112
0.043	7.197 220	162	0.093	7.184 393	356	0.143	7.161 441	570	0.193	7.127 097	816	0.243	7.079 181	1119
0.044	7.197 058	166	0.094	7.184 037	361	0.144	7.160 871	574	0.194	7.126 281	821	0.244	7.078 062	1125
0.045	7.196 892	170	0.095	7.183 676	365	0.145	7.160 297	579	0.195	7.125 460	827	0.245	7.076 937	1133
0.046	7.196 722	174	0.096	7.183 311	369	0.146	7.159 718	583	0.196	7.124 633	832	0.246	7.075 804	1139
0.047	7.196 548	178	0.097	7.182 942	373	0.147	7.159 135	588	0.197	7.123 801	838	0.247	7.074 665	1147
0.048	7.196 370	181	0.098	7.182 569	377	0.148	7.158 547	593	0.198	7.122 963	844	0.248	7.073 518	1153
0.049	7.196 189	185	0.099	7.182 192	381	0.149	7.157 954	597	0.199	7.122 119	848	0.249	7.072 365	1160
0.050	7.196 004		0.100	7.181 811		0.150	7.157 357		0.200	7.121 271		0.250	7.071 205	

Tafel XIV.
Oppolzer's *N*-Tafel.

$\log \{N_1^{10}(n)\}$.

$+n$	N	$-I$	$+n$	N	$-I$	$+n$	N	$-I$	$+n$	N	$-I$	$+n$	N	$-I$
0.000	6.501 689		0.050	6.498 591		0.100	6.489 208		0.150	6.473 269		0.200	6.450 285	
0.001	6.501 688	1	0.051	6.498 466	125	0.101	6.488 955	253	0.151	6.472 880	380	0.201	6.449 748	537
0.002	6.501 684	4	0.052	6.498 338	128	0.102	6.488 699	256	0.152	6.472 480	391	0.202	6.449 209	539
0.003	6.501 678	9	0.053	6.498 207	131	0.103	6.488 440	259	0.153	6.472 095	394	0.203	6.448 666	543
0.004	6.501 670	8	0.054	6.498 074	133	0.104	6.488 179	261	0.154	6.471 698	397	0.204	6.448 121	545
0.005	6.501 659	11	0.055	6.497 939	138	0.105	6.487 915	264	0.155	6.471 298	400	0.205	6.447 572	549
0.006	6.501 645	14	0.056	6.497 801	138	0.106	6.487 649	266	0.156	6.470 895	403	0.206	6.447 020	552
0.007	6.501 629	16	0.057	6.497 660	141	0.107	6.487 380	269	0.157	6.470 490	405	0.207	6.446 465	555
0.008	6.501 610	19	0.058	6.497 517	143	0.108	6.487 108	272	0.158	6.470 081	409	0.208	6.445 907	558
0.009	6.501 589	21	0.059	6.497 371	146	0.109	6.486 834	274	0.159	6.469 670	411	0.209	6.445 345	562
		23			148			277			414			564
0.010	6.501 560		0.060	6.497 223		0.110	6.486 557		0.160	6.469 256		0.210	6.444 781	
0.011	6.501 540	26	0.061	6.497 072	151	0.111	6.486 277	280	0.161	6.468 839	417	0.211	6.444 213	568
0.012	6.501 511	29	0.062	6.496 919	153	0.112	6.485 995	282	0.162	6.468 419	420	0.212	6.443 642	571
0.013	6.501 480	31	0.063	6.496 763	156	0.113	6.485 710	285	0.163	6.467 996	423	0.213	6.443 068	574
0.014	6.501 447	33	0.064	6.496 605	158	0.114	6.485 423	287	0.164	6.467 571	425	0.214	6.442 490	578
0.015	6.501 411	36	0.065	6.496 445	160	0.115	6.485 133	290	0.165	6.467 142	429	0.215	6.441 909	581
0.016	6.501 373	38	0.066	6.496 281	164	0.116	6.484 840	293	0.166	6.466 711	431	0.216	6.441 325	584
0.017	6.501 332	41	0.067	6.496 115	166	0.117	6.484 544	296	0.167	6.466 277	434	0.217	6.440 738	587
0.018	6.501 289	43	0.068	6.495 947	168	0.118	6.484 246	298	0.168	6.465 840	437	0.218	6.440 148	590
0.019	6.501 243	46	0.069	6.495 776	171	0.119	6.483 945	301	0.169	6.465 400	440	0.219	6.439 554	594
		48			173			304			443			597
0.020	6.501 195		0.070	6.495 603		0.120	6.483 641		0.170	6.464 957		0.220	6.438 957	
0.021	6.501 144	51	0.071	6.495 427	176	0.121	6.483 335	306	0.171	6.464 511	446	0.221	6.438 357	600
0.022	6.501 091	53	0.072	6.495 248	179	0.122	6.483 026	309	0.172	6.464 062	449	0.222	6.437 754	603
0.023	6.501 035	56	0.073	6.494 067	181	0.123	6.482 714	312	0.173	6.463 610	452	0.223	6.437 147	607
0.024	6.500 977	58	0.074	6.494 884	183	0.124	6.482 400	314	0.174	6.463 156	454	0.224	6.436 537	610
0.025	6.500 916	61	0.075	6.494 698	186	0.125	6.482 083	317	0.175	6.462 698	458	0.225	6.435 924	613
0.026	6.500 853	63	0.076	6.494 509	189	0.126	6.481 763	320	0.176	6.462 238	460	0.226	6.435 307	617
0.027	6.500 787	66	0.077	6.494 318	191	0.127	6.481 441	322	0.177	6.461 774	464	0.227	6.434 687	620
0.028	6.500 719	68	0.078	6.494 124	194	0.128	6.481 116	325	0.178	6.461 308	466	0.228	6.434 063	624
0.029	6.500 649	70	0.079	6.493 927	197	0.129	6.480 788	328	0.179	6.460 838	470	0.229	6.433 437	626
		72			199			331			472			630
0.030	6.500 576		0.080	6.493 728		0.130	6.480 457		0.180	6.460 366		0.230	6.432 807	
0.031	6.500 500	76	0.081	6.493 527	201	0.131	6.480 124	333	0.181	6.459 891	475	0.231	6.432 173	634
0.032	6.500 422	78	0.082	6.493 323	204	0.132	6.479 788	336	0.182	6.459 412	479	0.232	6.431 536	637
0.033	6.500 341	81	0.083	6.493 116	207	0.133	6.479 449	339	0.183	6.458 931	481	0.233	6.430 896	640
0.034	6.500 258	83	0.084	6.492 907	209	0.134	6.479 108	341	0.184	6.458 447	484	0.234	6.430 252	644
0.035	6.500 173	85	0.085	6.492 695	212	0.135	6.478 764	344	0.185	6.457 959	488	0.235	6.429 605	647
0.036	6.500 085	88	0.086	6.492 481	214	0.136	6.478 417	347	0.186	6.457 469	490	0.236	6.428 955	650
0.037	6.499 994	91	0.087	6.492 264	217	0.137	6.478 067	350	0.187	6.456 976	493	0.237	6.428 301	654
0.038	6.499 901	93	0.088	6.492 044	220	0.138	6.477 715	352	0.188	6.456 479	497	0.238	6.427 644	657
0.039	6.499 806	95	0.089	6.491 822	222	0.139	6.477 359	356	0.189	6.455 980	499	0.239	6.426 983	661
		98			224			358			503			664
0.040	6.499 708		0.090	6.491 598		0.140	6.477 001		0.190	6.455 477		0.240	6.426 319	
0.041	6.499 608	100	0.091	6.491 370	228	0.141	6.476 641	360	0.191	6.454 972	505	0.241	6.425 651	668
0.042	6.499 505	103	0.092	6.491 141	230	0.142	6.476 277	364	0.192	6.454 463	509	0.242	6.424 980	671
0.043	6.499 399	106	0.093	6.490 908	233	0.143	6.475 911	366	0.193	6.453 952	511	0.243	6.424 306	674
0.044	6.499 291	108	0.094	6.490 673	237	0.144	6.475 542	369	0.194	6.453 437	515	0.244	6.423 628	678
0.045	6.499 181	110	0.095	6.490 435	238	0.145	6.475 170	372	0.195	6.452 919	518	0.245	6.422 948	682
0.046	6.499 068	113	0.096	6.490 195	240	0.146	6.474 795	375	0.196	6.452 399	520	0.246	6.422 261	685
0.047	6.498 952	116	0.097	6.489 952	243	0.147	6.474 418	377	0.197	6.451 875	524	0.247	6.421 572	689
0.048	6.498 834	118	0.098	6.489 707	245	0.148	6.474 038	380	0.198	6.451 348	527	0.248	6.420 880	692
0.049	6.498 714	120	0.099	6.489 459	248	0.149	6.473 655	383	0.199	6.450 818	530	0.249	6.420 184	696
0.050	6.498 591	123	0.100	6.489 208	251	0.150	6.473 269	386	0.200	6.450 285	533	0.250	6.419 485	699

Tafel XV.

Oppolzer's *M*-Tafel.log. $\{M_1^3(m)\}$.

$\pm m$	<i>M</i>	$-A$	$\pm m$	<i>M</i>	$-A$	$\pm m$	<i>M</i>	$-A$	$\pm m$	<i>M</i>	$-A$	$\pm m$	<i>M</i>	$-A$
0.000	8 _n 619 789	6	0.050	8 _n 606 560	543	0.100	8 _n 564 271	1102	0.150	8 _n 483 112	2155	0.200	8 _n 335 792	4037
0.001	8 _n 619 783	15	0.051	8 _n 606 017	554	0.101	8 _n 563 079	1207	0.151	8 _n 480 957	2179	0.201	8 _n 331 755	4096
0.002	8 _n 619 768	26	0.052	8 _n 605 463	566	0.102	8 _n 561 872	1222	0.152	8 _n 478 778	2205	0.202	8 _n 327 659	4155
0.003	8 _n 619 742	37	0.053	8 _n 604 897	577	0.103	8 _n 560 650	1238	0.153	8 _n 476 573	2231	0.203	8 _n 323 504	4217
0.004	8 _n 619 705	47	0.054	8 _n 604 320	589	0.104	8 _n 559 412	1254	0.154	8 _n 474 342	2256	0.204	8 _n 319 287	4278
0.005	8 _n 619 658	57	0.055	8 _n 603 731	601	0.105	8 _n 558 158	1269	0.155	8 _n 472 086	2284	0.205	8 _n 315 000	4343
0.006	8 _n 619 601	68	0.056	8 _n 603 130	612	0.106	8 _n 556 880	1285	0.156	8 _n 469 802	2310	0.206	8 _n 310 666	4408
0.007	8 _n 619 533	78	0.057	8 _n 602 518	625	0.107	8 _n 555 604	1301	0.157	8 _n 467 492	2337	0.207	8 _n 306 258	4476
0.008	8 _n 619 455	89	0.058	8 _n 601 893	635	0.108	8 _n 554 303	1317	0.158	8 _n 465 155	2365	0.208	8 _n 301 782	4543
0.009	8 _n 619 366	99	0.059	8 _n 601 258	648	0.109	8 _n 552 986	1333	0.159	8 _n 462 790	2393	0.209	8 _n 297 239	4614
0.010	8 _n 619 267	100	0.060	8 _n 600 610	660	0.110	8 _n 551 653	1349	0.160	8 _n 460 397	2422	0.210	8 _n 292 625	4685
0.011	8 _n 619 158	120	0.061	8 _n 599 950	671	0.111	8 _n 550 304	1366	0.161	8 _n 457 975	2450	0.211	8 _n 287 040	4759
0.012	8 _n 619 038	131	0.062	8 _n 599 279	684	0.112	8 _n 548 938	1383	0.162	8 _n 455 525	2480	0.212	8 _n 283 181	4835
0.013	8 _n 618 907	141	0.063	8 _n 598 595	695	0.113	8 _n 547 555	1399	0.163	8 _n 453 045	2500	0.213	8 _n 278 349	4913
0.014	8 _n 618 766	152	0.064	8 _n 597 900	708	0.114	8 _n 546 156	1410	0.164	8 _n 450 536	2520	0.214	8 _n 273 433	4992
0.015	8 _n 618 614	162	0.065	8 _n 597 192	720	0.115	8 _n 544 740	1431	0.165	8 _n 447 997	2540	0.215	8 _n 268 441	5073
0.016	8 _n 618 452	172	0.066	8 _n 596 472	732	0.116	8 _n 543 309	1450	0.166	8 _n 445 428	2561	0.216	8 _n 263 368	5158
0.017	8 _n 618 280	183	0.067	8 _n 595 740	744	0.117	8 _n 541 856	1468	0.167	8 _n 442 827	2582	0.217	8 _n 258 210	5244
0.018	8 _n 618 097	194	0.068	8 _n 594 996	756	0.118	8 _n 540 388	1486	0.168	8 _n 440 193	2604	0.218	8 _n 252 066	5332
0.019	8 _n 617 903	204	0.069	8 _n 594 240	769	0.119	8 _n 538 902	1503	0.169	8 _n 437 531	2606	0.219	8 _n 247 634	5424
0.020	8 _n 617 699	215	0.070	8 _n 593 471	782	0.120	8 _n 537 399	1521	0.170	8 _n 434 835	2720	0.220	8 _n 242 210	5518
0.021	8 _n 617 484	225	0.071	8 _n 592 689	794	0.121	8 _n 535 878	1539	0.171	8 _n 432 106	2763	0.221	8 _n 236 602	5613
0.022	8 _n 617 259	236	0.072	8 _n 591 895	806	0.122	8 _n 534 339	1557	0.172	8 _n 429 343	2797	0.222	8 _n 231 070	5714
0.023	8 _n 617 023	247	0.073	8 _n 591 089	820	0.123	8 _n 532 782	1576	0.173	8 _n 426 546	2831	0.223	8 _n 225 365	5815
0.024	8 _n 616 776	257	0.074	8 _n 590 269	832	0.124	8 _n 531 206	1594	0.174	8 _n 423 715	2860	0.224	8 _n 219 550	5922
0.025	8 _n 616 519	268	0.075	8 _n 589 437	844	0.125	8 _n 529 612	1613	0.175	8 _n 420 849	2902	0.225	8 _n 213 628	6030
0.026	8 _n 616 251	278	0.076	8 _n 588 593	858	0.126	8 _n 527 999	1632	0.176	8 _n 417 947	2938	0.226	8 _n 207 508	6142
0.027	8 _n 615 973	290	0.077	8 _n 587 735	870	0.127	8 _n 526 367	1651	0.177	8 _n 415 000	2974	0.227	8 _n 201 456	6258
0.028	8 _n 615 683	300	0.078	8 _n 586 865	884	0.128	8 _n 524 716	1670	0.178	8 _n 412 035	3013	0.228	8 _n 195 198	6377
0.029	8 _n 615 383	310	0.079	8 _n 585 981	897	0.129	8 _n 523 046	1690	0.179	8 _n 409 022	3050	0.229	8 _n 188 821	6502
0.030	8 _n 615 073	322	0.080	8 _n 585 084	909	0.130	8 _n 521 356	1710	0.180	8 _n 405 972	3080	0.230	8 _n 182 319	6620
0.031	8 _n 614 751	332	0.081	8 _n 584 175	923	0.131	8 _n 519 640	1729	0.181	8 _n 402 883	3120	0.231	8 _n 175 600	6761
0.032	8 _n 614 419	343	0.082	8 _n 583 252	937	0.132	8 _n 517 917	1750	0.182	8 _n 399 754	3168	0.232	8 _n 168 920	6898
0.033	8 _n 614 076	354	0.083	8 _n 582 315	950	0.133	8 _n 516 167	1770	0.183	8 _n 396 580	3210	0.233	8 _n 162 031	7039
0.034	8 _n 613 722	365	0.084	8 _n 581 365	963	0.134	8 _n 514 397	1791	0.184	8 _n 393 376	3251	0.234	8 _n 154 992	7189
0.035	8 _n 613 357	376	0.085	8 _n 580 402	977	0.135	8 _n 512 606	1811	0.185	8 _n 390 125	3293	0.235	8 _n 147 805	7339
0.036	8 _n 612 981	386	0.086	8 _n 579 425	990	0.136	8 _n 510 795	1832	0.186	8 _n 386 832	3337	0.236	8 _n 140 400	7497
0.037	8 _n 612 595	398	0.087	8 _n 578 435	1005	0.137	8 _n 508 963	1854	0.187	8 _n 383 495	3380	0.237	8 _n 132 900	7661
0.038	8 _n 612 197	408	0.088	8 _n 577 430	1018	0.138	8 _n 507 109	1875	0.188	8 _n 380 115	3420	0.238	8 _n 125 308	7832
0.039	8 _n 611 789	420	0.089	8 _n 576 412	1032	0.139	8 _n 505 234	1897	0.189	8 _n 376 689	3470	0.239	8 _n 117 476	8010
0.040	8 _n 611 369	430	0.090	8 _n 575 380	1046	0.140	8 _n 503 337	1910	0.190	8 _n 373 219	3518	0.240	8 _n 109 466	8195
0.041	8 _n 610 939	442	0.091	8 _n 574 334	1060	0.141	8 _n 501 418	1942	0.191	8 _n 369 701	3564	0.241	8 _n 101 271	8387
0.042	8 _n 610 497	453	0.092	8 _n 573 274	1075	0.142	8 _n 499 470	1964	0.192	8 _n 366 137	3613	0.242	8 _n 92 884	8588
0.043	8 _n 610 044	464	0.093	8 _n 572 199	1088	0.143	8 _n 497 512	1986	0.193	8 _n 362 524	3663	0.243	8 _n 84 296	8798
0.044	8 _n 609 580	475	0.094	8 _n 571 111	1104	0.144	8 _n 495 526	2010	0.194	8 _n 358 861	3713	0.244	8 _n 75 498	9017
0.045	8 _n 609 105	486	0.095	8 _n 570 007	1117	0.145	8 _n 493 516	2033	0.195	8 _n 355 148	3764	0.245	8 _n 66 081	9246
0.046	8 _n 608 619	498	0.096	8 _n 568 890	1133	0.146	8 _n 491 483	2057	0.196	8 _n 351 384	3817	0.246	8 _n 55 235	9487
0.047	8 _n 608 121	509	0.097	8 _n 567 757	1147	0.147	8 _n 489 420	2080	0.197	8 _n 347 507	3870	0.247	8 _n 44 748	9738
0.048	8 _n 607 612	520	0.098	8 _n 566 610	1162	0.148	8 _n 487 340	2105	0.198	8 _n 343 607	3924	0.248	8 _n 33 010	10002
0.049	8 _n 607 092	532	0.099	8 _n 565 448	1177	0.149	8 _n 485 241	2129	0.199	8 _n 339 773	3981	0.249	8 _n 22 008	10279
0.050	8 _n 606 560		0.100	8 _n 564 271		0.150	8 _n 483 112		0.200	8 _n 335 792		0.250	8 _n 10 729	

Tafel XV.
Oppolzer's *M*-Tafel.

log. $\{M_1^4(m)\}$.

$\pm m$	<i>M</i>	— <i>A</i>	$\pm m$	<i>M</i>	— <i>A</i>	$\pm m$	<i>M</i>	— <i>A</i>	$\pm m$	<i>M</i>	— <i>A</i>	$\pm m$	<i>M</i>	— <i>A</i>
0.000	9n318 750	1	0.050	9n317 880	35	0.100	9n315 270	70	0.150	9n310 870	106	0.200	9n304 634	144
0.001	9n318 758	1	0.051	9n317 884	36	0.101	9n315 200	71	0.151	9n310 764	107	0.201	9n304 490	145
0.002	9n318 757	1	0.052	9n317 818	36	0.102	9n315 129	72	0.152	9n310 657	108	0.202	9n304 345	145
0.003	9n318 750	3	0.053	9n317 782	36	0.103	9n315 057	72	0.153	9n310 549	109	0.203	9n304 200	146
0.004	9n318 753	3	0.054	9n317 744	38	0.104	9n314 985	74	0.154	9n310 440	110	0.204	9n304 054	147
0.005	9n318 750	3	0.055	9n317 706	38	0.105	9n314 911	74	0.155	9n310 330	110	0.205	9n303 907	148
0.006	9n318 740	4	0.056	9n317 668	40	0.106	9n314 837	74	0.156	9n310 220	111	0.206	9n303 759	149
0.007	9n318 742	5	0.057	9n317 628	40	0.107	9n314 763	76	0.157	9n310 109	111	0.207	9n303 610	149
0.008	9n318 737	6	0.058	9n317 588	40	0.108	9n314 687	76	0.158	9n309 998	113	0.208	9n303 461	150
0.009	9n318 731	7	0.059	9n317 548	42	0.109	9n314 611	77	0.159	9n309 885	113	0.209	9n303 311	151
0.010	9n318 724	7	0.060	9n317 506	42	0.110	9n314 534	77	0.160	9n309 772	114	0.210	9n303 160	152
0.011	9n318 717	8	0.061	9n317 464	43	0.111	9n314 457	78	0.161	9n309 658	114	0.211	9n303 008	152
0.012	9n318 709	9	0.062	9n317 421	43	0.112	9n314 379	79	0.162	9n309 544	116	0.212	9n302 856	153
0.013	9n318 701	9	0.063	9n317 378	43	0.113	9n314 300	80	0.163	9n309 428	116	0.213	9n302 703	154
0.014	9n318 691	10	0.064	9n317 334	45	0.114	9n314 220	81	0.164	9n309 312	117	0.214	9n302 549	155
0.015	9n318 681	11	0.065	9n317 288	45	0.115	9n314 139	81	0.165	9n309 195	117	0.215	9n302 394	155
0.016	9n318 670	12	0.066	9n317 243	47	0.116	9n314 058	82	0.166	9n309 078	119	0.216	9n302 239	157
0.017	9n318 658	12	0.067	9n317 196	47	0.117	9n313 976	82	0.167	9n308 959	119	0.217	9n302 082	157
0.018	9n318 646	13	0.068	9n317 149	48	0.118	9n313 894	83	0.168	9n308 840	120	0.218	9n301 925	158
0.019	9n318 633	14	0.069	9n317 101	48	0.119	9n313 811	84	0.169	9n308 720	120	0.219	9n301 767	158
0.020	9n318 620	14	0.070	9n317 053	49	0.120	9n313 727	85	0.170	9n308 600	121	0.220	9n301 609	160
0.021	9n318 606	15	0.071	9n317 004	50	0.121	9n313 642	86	0.171	9n308 479	122	0.221	9n301 449	160
0.022	9n318 591	16	0.072	9n316 954	51	0.122	9n313 556	86	0.172	9n308 357	123	0.222	9n301 289	161
0.023	9n318 575	16	0.073	9n316 904	51	0.123	9n313 470	87	0.173	9n308 234	124	0.223	9n301 128	162
0.024	9n318 559	17	0.074	9n316 852	52	0.124	9n313 383	87	0.174	9n308 110	124	0.224	9n300 966	162
0.025	9n318 542	18	0.075	9n316 800	53	0.125	9n313 296	88	0.175	9n307 986	125	0.225	9n300 804	164
0.026	9n318 524	19	0.076	9n316 747	53	0.126	9n313 208	89	0.176	9n307 861	126	0.226	9n300 640	164
0.027	9n318 505	19	0.077	9n316 694	54	0.127	9n313 119	90	0.177	9n307 735	126	0.227	9n300 476	165
0.028	9n318 486	20	0.078	9n316 640	55	0.128	9n313 029	91	0.178	9n307 609	128	0.228	9n300 311	165
0.029	9n318 466	20	0.079	9n316 585	56	0.129	9n312 938	91	0.179	9n307 481	128	0.229	9n300 146	167
0.030	9n318 446	21	0.080	9n316 529	56	0.130	9n312 847	92	0.180	9n307 353	128	0.230	9n299 979	167
0.031	9n318 425	22	0.081	9n316 473	57	0.131	9n312 755	93	0.181	9n307 225	130	0.231	9n299 812	168
0.032	9n318 403	23	0.082	9n316 416	57	0.132	9n312 662	93	0.182	9n307 095	130	0.232	9n299 644	169
0.033	9n318 380	23	0.083	9n316 359	59	0.133	9n312 569	94	0.183	9n306 965	131	0.233	9n299 475	170
0.034	9n318 357	24	0.084	9n316 300	59	0.134	9n312 475	95	0.184	9n306 834	132	0.234	9n299 305	170
0.035	9n318 333	25	0.085	9n316 241	60	0.135	9n312 380	95	0.185	9n306 702	133	0.235	9n299 135	171
0.036	9n318 308	25	0.086	9n316 181	60	0.136	9n312 285	97	0.186	9n306 569	133	0.236	9n298 964	172
0.037	9n318 283	26	0.087	9n316 121	61	0.137	9n312 188	97	0.187	9n306 436	134	0.237	9n298 792	173
0.038	9n318 257	27	0.088	9n316 060	62	0.138	9n312 091	97	0.188	9n306 302	135	0.238	9n298 619	174
0.039	9n318 230	27	0.089	9n315 998	63	0.139	9n311 994	99	0.189	9n306 167	135	0.239	9n298 445	174
0.040	9n318 203	29	0.090	9n315 935	63	0.140	9n311 895	99	0.190	9n306 032	137	0.240	9n298 271	175
0.041	9n318 174	29	0.091	9n315 872	64	0.141	9n311 796	100	0.191	9n305 895	137	0.241	9n298 096	176
0.042	9n318 145	29	0.092	9n315 808	65	0.142	9n311 696	101	0.192	9n305 758	138	0.242	9n297 920	177
0.043	9n318 116	30	0.093	9n315 744	65	0.143	9n311 595	101	0.193	9n305 620	138	0.243	9n297 743	178
0.044	9n318 080	31	0.094	9n315 678	66	0.144	9n311 494	102	0.194	9n305 482	140	0.244	9n297 565	178
0.045	9n318 055	32	0.095	9n315 612	67	0.145	9n311 392	103	0.195	9n305 342	140	0.245	9n297 387	180
0.046	9n318 023	32	0.096	9n315 545	68	0.146	9n311 289	104	0.196	9n305 202	141	0.246	9n297 207	180
0.047	9n317 991	33	0.097	9n315 477	68	0.147	9n311 185	104	0.197	9n305 061	141	0.247	9n297 027	180
0.048	9n317 958	34	0.098	9n315 409	69	0.148	9n311 081	105	0.198	9n304 920	143	0.248	9n296 847	182
0.049	9n317 924	35	0.099	9n315 340	70	0.149	9n310 976	106	0.199	9n304 777	143	0.249	9n296 665	183
0.050	9n317 880		0.100	9n315 270		0.150	9n310 870		0.200	9n304 634		0.250	9n296 482	

Tafel XV.
Oppolzer's *M*-Tafel.

$\log \{M_1^5(m)\}.$

$\pm m$	<i>M</i>	— <i>A</i>	$\pm m$	<i>M</i>	— <i>A</i>	$\pm m$	<i>M</i>	— <i>A</i>	$\pm m$	<i>M</i>	— <i>A</i>	$\pm m$	<i>M</i>	— <i>A</i>
0.000	7.670 941	6	0.050	7.656 243	603	0.100	7.609 239	1326	0.150	7.518 822	2406	0.200	7.352 986	4594
0.001	7.670 935	17	0.051	7.655 640	616	0.101	7.607 913	1342	0.151	7.516 416	2434	0.201	7.348 392	4664
0.002	7.670 918	29	0.052	7.655 024	629	0.102	7.606 571	1360	0.152	7.513 982	2464	0.202	7.343 728	4735
0.003	7.670 889	40	0.053	7.654 395	642	0.103	7.605 211	1377	0.153	7.511 518	2492	0.203	7.338 993	4808
0.004	7.670 849	52	0.054	7.653 753	655	0.104	7.603 834	1394	0.154	7.509 026	2523	0.204	7.334 185	4883
0.005	7.670 797	64	0.055	7.653 098	667	0.105	7.602 440	1412	0.155	7.506 503	2552	0.205	7.329 302	4961
0.006	7.670 733	75	0.056	7.652 431	680	0.106	7.601 028	1429	0.156	7.503 951	2583	0.206	7.324 341	5039
0.007	7.670 658	87	0.057	7.651 751	694	0.107	7.599 599	1447	0.157	7.501 368	2614	0.207	7.319 302	5121
0.008	7.670 571	99	0.058	7.651 057	707	0.108	7.598 152	1465	0.158	7.498 754	2646	0.208	7.314 181	5203
0.009	7.670 472	110	0.059	7.650 350	719	0.109	7.596 687	1483	0.159	7.496 108	2677	0.209	7.308 978	5289
0.010	7.670 362	122	0.060	7.649 631	733	0.110	7.595 204	1501	0.160	7.493 431	2709	0.210	7.303 689	5376
0.011	7.670 240	133	0.061	7.648 898	746	0.111	7.593 703	1520	0.161	7.490 722	2743	0.211	7.298 313	5467
0.012	7.670 107	145	0.062	7.648 152	760	0.112	7.592 183	1538	0.162	7.487 979	2776	0.212	7.292 846	5559
0.013	7.669 962	157	0.063	7.647 392	773	0.113	7.590 645	1557	0.163	7.485 203	2809	0.213	7.287 287	5655
0.014	7.669 805	168	0.064	7.646 619	786	0.114	7.589 088	1576	0.164	7.482 394	2844	0.214	7.281 632	5753
0.015	7.669 637	180	0.065	7.645 833	800	0.115	7.587 512	1595	0.165	7.479 550	2879	0.215	7.275 879	5853
0.016	7.669 457	192	0.066	7.645 033	813	0.116	7.585 917	1615	0.166	7.476 671	2915	0.216	7.270 026	5957
0.017	7.669 265	204	0.067	7.644 220	827	0.117	7.584 302	1633	0.167	7.473 756	2950	0.217	7.264 069	6065
0.018	7.669 061	215	0.068	7.643 393	841	0.118	7.582 669	1654	0.168	7.470 806	2987	0.218	7.258 004	6176
0.019	7.668 846	227	0.069	7.642 552	855	0.119	7.581 015	1673	0.169	7.467 819	3024	0.219	7.251 828	6289
0.020	7.668 619	238	0.070	7.641 697	868	0.120	7.579 342	1693	0.170	7.464 795	3062	0.220	7.245 539	6407
0.021	7.668 381	251	0.071	7.640 829	883	0.121	7.577 649	1713	0.171	7.461 733	3100	0.221	7.239 132	6529
0.022	7.668 130	262	0.072	7.639 946	896	0.122	7.575 936	1734	0.172	7.458 633	3139	0.222	7.232 603	6654
0.023	7.667 868	274	0.073	7.639 050	910	0.123	7.574 202	1754	0.173	7.455 494	3180	0.223	7.225 949	6784
0.024	7.667 594	285	0.074	7.638 140	925	0.124	7.572 448	1775	0.174	7.452 314	3220	0.224	7.219 165	6917
0.025	7.667 309	298	0.075	7.637 215	939	0.125	7.570 673	1797	0.175	7.449 095	3260	0.225	7.212 248	7058
0.026	7.667 011	310	0.076	7.636 276	953	0.126	7.568 876	1817	0.176	7.445 835	3303	0.226	7.205 190	7201
0.027	7.666 701	321	0.077	7.635 323	967	0.127	7.567 059	1839	0.177	7.442 532	3345	0.227	7.197 989	7350
0.028	7.666 380	333	0.078	7.634 356	982	0.128	7.565 220	1860	0.178	7.439 187	3388	0.228	7.190 639	7505
0.029	7.666 047	346	0.079	7.633 374	997	0.129	7.563 360	1883	0.179	7.435 799	3433	0.229	7.183 134	7666
0.030	7.665 701	357	0.080	7.632 377	1011	0.130	7.561 477	1904	0.180	7.432 366	3477	0.230	7.175 468	7832
0.031	7.665 344	369	0.081	7.631 366	1026	0.131	7.559 573	1927	0.181	7.428 880	3523	0.231	7.167 636	8006
0.032	7.664 975	382	0.082	7.630 340	1041	0.132	7.557 640	1950	0.182	7.425 306	3570	0.232	7.159 630	8186
0.033	7.664 593	393	0.083	7.629 299	1056	0.133	7.555 690	1973	0.183	7.421 706	3617	0.233	7.151 444	8374
0.034	7.664 200	405	0.084	7.628 243	1071	0.134	7.553 723	1995	0.184	7.418 179	3666	0.234	7.143 070	8570
0.035	7.663 795	418	0.085	7.627 172	1085	0.135	7.551 728	2019	0.185	7.414 513	3715	0.235	7.134 500	8774
0.036	7.663 377	429	0.086	7.626 087	1101	0.136	7.549 700	2043	0.186	7.410 708	3766	0.236	7.125 726	8987
0.037	7.662 948	442	0.087	7.624 986	1117	0.137	7.547 600	2067	0.187	7.407 032	3817	0.237	7.116 739	9211
0.038	7.662 506	454	0.088	7.623 869	1132	0.138	7.545 500	2091	0.188	7.403 215	3870	0.238	7.107 528	9443
0.039	7.662 052	466	0.089	7.622 737	1147	0.139	7.543 508	2115	0.189	7.399 345	3922	0.239	7.098 085	9687
0.040	7.661 586	478	0.090	7.621 590	1163	0.140	7.541 393	2140	0.190	7.395 423	3978	0.240	7.088 398	9943
0.041	7.661 108	491	0.091	7.620 427	1179	0.141	7.539 253	2166	0.191	7.391 445	4033	0.241	7.078 455	10211
0.042	7.660 617	503	0.092	7.619 248	1194	0.142	7.537 087	2190	0.192	7.387 412	4090	0.242	7.068 244	10494
0.043	7.660 114	516	0.093	7.618 053	1211	0.143	7.534 897	2217	0.193	7.383 322	4149	0.243	7.057 750	10791
0.044	7.659 598	528	0.094	7.616 843	1226	0.144	7.532 680	2243	0.194	7.379 173	4208	0.244	7.046 959	11105
0.045	7.659 070	540	0.095	7.615 617	1243	0.145	7.530 437	2268	0.195	7.374 965	4268	0.245	7.035 854	11433
0.046	7.658 530	553	0.096	7.614 374	1259	0.146	7.528 169	2290	0.196	7.370 697	4331	0.246	7.024 421	11786
0.047	7.657 977	565	0.097	7.613 115	1276	0.147	7.525 873	2323	0.197	7.366 366	4395	0.247	7.012 635	12151
0.048	7.657 412	578	0.098	7.611 839	1292	0.148	7.523 550	2350	0.198	7.361 971	4459	0.248	7.000 484	12545
0.049	7.656 834	591	0.099	7.610 547	1308	0.149	7.521 200	2378	0.199	7.357 512	4526	0.249	6.987 939	12962
0.050	7.656 243		0.100	7.609 239		0.150	7.518 822		0.200	7.352 986		0.250	6.974 977	

Tafel XV.
Oppolzer's *M*-Tafel.

$\log \{M_1^s(m)\}.$

$\pm m$	<i>M</i>	— <i>J</i>	$\pm m$	<i>M</i>	— <i>J</i>	$\pm m$	<i>M</i>	— <i>J</i>	$\pm m$	<i>M</i>	— <i>J</i>	$\pm m$	<i>M</i>	— <i>J</i>
0.000	8.652 877	0	0.050	8.651 702	47	0.100	8.648 165	95	0.150	8.642 224	143	0.200	8.633 813	194
0.001	8.652 877	1	0.051	8.651 655	48	0.101	8.648 070	96	0.151	8.642 081	145	0.201	8.633 619	195
0.002	8.652 875	2	0.052	8.651 606	49	0.102	8.647 974	97	0.152	8.641 936	146	0.202	8.633 424	196
0.003	8.652 873	3	0.053	8.651 557	50	0.103	8.647 877	98	0.153	8.641 790	146	0.203	8.633 228	197
0.004	8.652 870	4	0.054	8.651 507	51	0.104	8.647 779	99	0.154	8.641 644	148	0.204	8.633 031	198
0.005	8.652 869	5	0.055	8.651 455	52	0.105	8.647 680	100	0.155	8.641 496	149	0.205	8.632 833	199
0.006	8.652 867	6	0.056	8.651 403	53	0.106	8.647 580	101	0.156	8.641 347	149	0.206	8.632 634	201
0.007	8.652 864	7	0.057	8.651 350	54	0.107	8.647 479	102	0.157	8.641 198	151	0.207	8.632 433	201
0.008	8.652 847	8	0.058	8.651 296	55	0.108	8.647 377	103	0.158	8.641 047	152	0.208	8.632 232	202
0.009	8.652 839	9	0.059	8.651 241	56	0.109	8.647 274	103	0.159	8.640 895	152	0.209	8.632 030	202
														204
0.010	8.652 830	10	0.060	8.651 185	57	0.110	8.647 171	105	0.160	8.640 743	154	0.210	8.631 826	204
0.011	8.652 820	10	0.061	8.651 128	57	0.111	8.647 066	105	0.161	8.640 589	154	0.211	8.631 622	204
0.012	8.652 810	11	0.062	8.651 070	58	0.112	8.646 960	106	0.162	8.640 434	155	0.212	8.631 417	205
0.013	8.652 798	11	0.063	8.651 011	59	0.113	8.646 854	106	0.163	8.640 279	155	0.213	8.631 210	207
0.014	8.652 785	12	0.064	8.650 951	60	0.114	8.646 746	108	0.164	8.640 122	157	0.214	8.631 003	207
0.015	8.652 772	12	0.065	8.650 890	61	0.115	8.646 637	109	0.165	8.639 964	158	0.215	8.630 794	209
0.016	8.652 757	13	0.066	8.650 829	61	0.116	8.646 528	109	0.166	8.639 806	158	0.216	8.630 585	209
0.017	8.652 741	13	0.067	8.650 766	62	0.117	8.646 417	111	0.167	8.639 646	160	0.217	8.630 372	211
0.018	8.652 725	14	0.068	8.650 702	64	0.118	8.646 306	111	0.168	8.639 486	160	0.218	8.630 164	212
0.019	8.652 708	14	0.069	8.650 638	64	0.119	8.646 193	113	0.169	8.639 324	162	0.219	8.629 950	212
														214
0.020	8.652 689	15	0.070	8.650 572	66	0.120	8.646 080	114	0.170	8.639 161	163	0.220	8.629 736	215
0.021	8.652 670	15	0.071	8.650 506	66	0.121	8.645 966	114	0.171	8.638 998	163	0.221	8.629 521	215
0.022	8.652 650	16	0.072	8.650 439	67	0.122	8.645 850	116	0.172	8.638 833	165	0.222	8.629 305	216
0.023	8.652 629	16	0.073	8.650 370	69	0.123	8.645 734	116	0.173	8.638 668	165	0.223	8.629 088	217
0.024	8.652 607	17	0.074	8.650 301	69	0.124	8.645 617	117	0.174	8.638 501	167	0.224	8.628 870	218
0.025	8.652 584	17	0.075	8.650 231	70	0.125	8.645 498	119	0.175	8.638 333	168	0.225	8.628 651	219
0.026	8.652 560	18	0.076	8.650 160	71	0.126	8.645 379	119	0.176	8.638 165	168	0.226	8.628 431	220
0.027	8.652 535	18	0.077	8.650 087	73	0.127	8.645 259	120	0.177	8.637 995	170	0.227	8.628 210	221
0.028	8.652 509	19	0.078	8.650 014	73	0.128	8.645 138	121	0.178	8.637 824	171	0.228	8.627 988	222
0.029	8.652 482	19	0.079	8.649 940	74	0.129	8.645 016	122	0.179	8.637 653	171	0.229	8.627 765	223
														224
0.030	8.652 455	20	0.080	8.649 865	76	0.130	8.644 893	123	0.180	8.637 480	173	0.230	8.627 541	226
0.031	8.652 426	20	0.081	8.649 789	76	0.131	8.644 768	125	0.181	8.637 306	174	0.231	8.627 315	226
0.032	8.652 396	21	0.082	8.649 712	77	0.132	8.644 643	125	0.182	8.637 132	174	0.232	8.627 089	228
0.033	8.652 366	21	0.083	8.649 635	77	0.133	8.644 517	126	0.183	8.636 956	176	0.233	8.626 861	228
0.034	8.652 334	22	0.084	8.649 556	79	0.134	8.644 390	127	0.184	8.636 779	177	0.234	8.626 633	230
0.035	8.652 302	22	0.085	8.649 476	80	0.135	8.644 262	128	0.185	8.636 601	178	0.235	8.626 403	230
0.036	8.652 268	23	0.086	8.649 395	81	0.136	8.644 133	129	0.186	8.636 423	180	0.236	8.626 173	232
0.037	8.652 234	23	0.087	8.649 314	83	0.137	8.644 003	130	0.187	8.636 243	180	0.237	8.625 941	232
0.038	8.652 199	24	0.088	8.649 231	83	0.138	8.643 872	131	0.188	8.636 062	181	0.238	8.625 708	233
0.039	8.652 163	24	0.089	8.649 147	84	0.139	8.643 740	132	0.189	8.635 880	182	0.239	8.625 474	234
														235
0.040	8.652 126	25	0.090	8.649 063	86	0.140	8.643 608	132	0.190	8.635 698	182	0.240	8.625 239	236
0.041	8.652 088	25	0.091	8.648 977	86	0.141	8.643 474	134	0.191	8.635 514	184	0.241	8.625 003	237
0.042	8.652 049	26	0.092	8.648 891	87	0.142	8.643 339	135	0.192	8.635 329	185	0.242	8.624 766	238
0.043	8.652 009	26	0.093	8.648 804	87	0.143	8.643 203	136	0.193	8.635 143	186	0.243	8.624 528	239
0.044	8.651 968	27	0.094	8.648 715	89	0.144	8.643 066	137	0.194	8.634 956	187	0.244	8.624 289	240
0.045	8.651 926	27	0.095	8.648 626	89	0.145	8.642 928	138	0.195	8.634 768	188	0.245	8.624 049	241
0.046	8.651 883	28	0.096	8.648 535	91	0.146	8.642 790	138	0.196	8.634 579	190	0.246	8.623 808	243
0.047	8.651 839	28	0.097	8.648 444	91	0.147	8.642 650	140	0.197	8.634 389	190	0.247	8.623 565	243
0.048	8.651 795	29	0.098	8.648 352	92	0.148	8.642 509	141	0.198	8.634 198	191	0.248	8.623 322	245
0.049	8.651 749	29	0.099	8.648 259	93	0.149	8.642 367	142	0.199	8.634 006	192	0.249	8.623 077	245
0.050	8.651 702	30	0.100	8.648 165	94	0.150	8.642 224	143	0.200	8.633 813	193	0.250	8.622 832	245

Tafel XV.
Oppolzer's *M*-Tafel.

$\log \{M_1^2(m)\}.$

$\pm m$	M	$-A$	$\pm m$	M	$-A$	$\pm m$	M	$-A$	$\pm m$	M	$-A$	$\pm m$	M	$-A$
0.000	6 _n 843 572	6	0.050	6 _n 828 344	625	0.100	6 _n 779 038	1374	0.150	6 _n 685 855	2498	0.200	6 _n 513 122	4806
0.001	6 _n 843 566	18	0.051	6 _n 827 719	638	0.101	6 _n 778 264	1392	0.151	6 _n 683 357	2528	0.201	6 _n 508 316	4880
0.002	6 _n 843 548	30	0.052	6 _n 827 081	652	0.102	6 _n 776 872	1409	0.152	6 _n 680 829	2558	0.202	6 _n 504 436	4956
0.003	6 _n 843 518	42	0.053	6 _n 826 429	666	0.103	6 _n 775 463	1427	0.153	6 _n 678 271	2589	0.203	6 _n 498 480	5034
0.004	6 _n 843 476	54	0.054	6 _n 825 765	679	0.104	6 _n 774 036	1445	0.154	6 _n 675 682	2620	0.204	6 _n 493 446	5115
0.005	6 _n 843 422	66	0.055	6 _n 825 080	691	0.105	6 _n 772 591	1463	0.155	6 _n 673 062	2651	0.205	6 _n 488 331	5197
0.006	6 _n 843 356	78	0.056	6 _n 824 395	705	0.106	6 _n 771 128	1482	0.156	6 _n 670 411	2683	0.206	6 _n 483 134	5282
0.007	6 _n 843 278	90	0.057	6 _n 823 690	719	0.107	6 _n 769 646	1499	0.157	6 _n 667 728	2716	0.207	6 _n 477 852	5368
0.008	6 _n 843 188	102	0.058	6 _n 822 971	732	0.108	6 _n 768 147	1519	0.158	6 _n 665 012	2748	0.208	6 _n 472 481	5455
0.009	6 _n 843 086	114	0.059	6 _n 822 239	745	0.109	6 _n 766 628	1537	0.159	6 _n 662 264	2782	0.209	6 _n 467 026	5540
0.010	6 _n 842 972	126	0.060	6 _n 821 494	760	0.110	6 _n 765 091	1557	0.160	6 _n 659 482	2815	0.210	6 _n 461 477	5644
0.011	6 _n 842 846	139	0.061	6 _n 820 734	773	0.111	6 _n 763 534	1575	0.161	6 _n 656 667	2850	0.211	6 _n 455 833	5740
0.012	6 _n 842 707	150	0.062	6 _n 819 961	787	0.112	6 _n 761 959	1595	0.162	6 _n 653 817	2885	0.212	6 _n 450 093	5840
0.013	6 _n 842 557	162	0.063	6 _n 819 174	801	0.113	6 _n 760 364	1614	0.163	6 _n 650 932	2921	0.213	6 _n 444 253	5943
0.014	6 _n 842 395	175	0.064	6 _n 818 373	814	0.114	6 _n 758 750	1634	0.164	6 _n 648 011	2956	0.214	6 _n 438 310	6040
0.015	6 _n 842 220	186	0.065	6 _n 817 559	829	0.115	6 _n 757 116	1654	0.165	6 _n 645 055	2993	0.215	6 _n 432 261	6158
0.016	6 _n 842 034	199	0.066	6 _n 816 730	843	0.116	6 _n 755 462	1673	0.166	6 _n 642 062	3030	0.216	6 _n 426 103	6270
0.017	6 _n 841 835	210	0.067	6 _n 815 887	857	0.117	6 _n 753 780	1694	0.167	6 _n 639 032	3068	0.217	6 _n 419 833	6387
0.018	6 _n 841 625	223	0.068	6 _n 815 030	871	0.118	6 _n 752 095	1715	0.168	6 _n 635 904	3106	0.218	6 _n 413 449	6500
0.019	6 _n 841 402	235	0.069	6 _n 814 159	885	0.119	6 _n 750 380	1734	0.169	6 _n 632 853	3145	0.219	6 _n 406 040	6631
0.020	6 _n 841 167	248	0.070	6 _n 813 274	900	0.120	6 _n 748 640	1756	0.170	6 _n 629 713	3185	0.220	6 _n 400 300	6758
0.021	6 _n 840 919	259	0.071	6 _n 812 374	914	0.121	6 _n 746 800	1777	0.171	6 _n 626 528	3225	0.221	6 _n 393 551	6890
0.022	6 _n 840 660	272	0.072	6 _n 811 460	929	0.122	6 _n 745 113	1797	0.172	6 _n 623 303	3266	0.222	6 _n 386 661	7028
0.023	6 _n 840 388	283	0.073	6 _n 810 531	943	0.123	6 _n 743 316	1820	0.173	6 _n 620 037	3308	0.223	6 _n 379 633	7160
0.024	6 _n 840 105	297	0.074	6 _n 809 588	958	0.124	6 _n 741 499	1841	0.174	6 _n 616 720	3351	0.224	6 _n 372 464	7316
0.025	6 _n 839 808	308	0.075	6 _n 808 630	973	0.125	6 _n 739 055	1862	0.175	6 _n 613 378	3395	0.225	6 _n 365 148	7498
0.026	6 _n 839 500	321	0.076	6 _n 807 657	988	0.126	6 _n 737 793	1885	0.176	6 _n 609 985	3438	0.226	6 _n 357 680	7620
0.027	6 _n 839 179	333	0.077	6 _n 806 669	1002	0.127	6 _n 735 908	1907	0.177	6 _n 606 547	3482	0.227	6 _n 350 054	7700
0.028	6 _n 838 846	345	0.078	6 _n 805 667	1018	0.128	6 _n 734 001	1930	0.178	6 _n 603 064	3528	0.228	6 _n 342 264	7900
0.029	6 _n 838 501	358	0.079	6 _n 804 640	1033	0.129	6 _n 732 071	1952	0.179	6 _n 599 536	3575	0.229	6 _n 334 304	8138
0.030	6 _n 838 143	370	0.080	6 _n 803 616	1048	0.130	6 _n 730 119	1976	0.180	6 _n 595 901	3622	0.230	6 _n 326 160	8322
0.031	6 _n 837 773	382	0.081	6 _n 802 568	1063	0.131	6 _n 728 143	1999	0.181	6 _n 592 330	3670	0.231	6 _n 317 844	8514
0.032	6 _n 837 391	395	0.082	6 _n 801 505	1078	0.132	6 _n 726 144	2022	0.182	6 _n 588 660	3719	0.232	6 _n 309 331	8714
0.033	6 _n 836 996	408	0.083	6 _n 800 427	1094	0.133	6 _n 724 122	2046	0.183	6 _n 584 950	3770	0.233	6 _n 300 616	8923
0.034	6 _n 836 588	419	0.084	6 _n 799 333	1110	0.134	6 _n 722 070	2071	0.184	6 _n 581 180	3821	0.234	6 _n 291 693	9144
0.035	6 _n 836 169	433	0.085	6 _n 798 223	1125	0.135	6 _n 720 005	2094	0.185	6 _n 577 350	3873	0.235	6 _n 282 551	9369
0.036	6 _n 835 736	445	0.086	6 _n 797 098	1141	0.136	6 _n 717 911	2120	0.186	6 _n 573 486	3926	0.236	6 _n 273 182	9608
0.037	6 _n 835 291	458	0.087	6 _n 795 957	1157	0.137	6 _n 715 791	2144	0.187	6 _n 569 566	3980	0.237	6 _n 263 574	9860
0.038	6 _n 834 833	470	0.088	6 _n 794 800	1173	0.138	6 _n 713 047	2169	0.188	6 _n 565 580	4037	0.238	6 _n 253 714	10120
0.039	6 _n 834 363	483	0.089	6 _n 793 627	1189	0.139	6 _n 711 478	2196	0.189	6 _n 561 543	4092	0.239	6 _n 243 504	10397
0.040	6 _n 833 880	496	0.090	6 _n 792 438	1205	0.140	6 _n 709 282	2220	0.190	6 _n 557 451	4151	0.240	6 _n 233 197	10686
0.041	6 _n 833 384	508	0.091	6 _n 791 233	1221	0.141	6 _n 707 062	2248	0.191	6 _n 553 300	4209	0.241	6 _n 222 511	10993
0.042	6 _n 832 876	521	0.092	6 _n 790 012	1238	0.142	6 _n 704 814	2273	0.192	6 _n 549 091	4270	0.242	6 _n 211 518	11313
0.043	6 _n 832 355	534	0.093	6 _n 788 774	1255	0.143	6 _n 702 541	2301	0.193	6 _n 544 821	4332	0.243	6 _n 200 205	11654
0.044	6 _n 831 821	547	0.094	6 _n 787 519	1271	0.144	6 _n 700 240	2327	0.194	6 _n 540 480	4394	0.244	6 _n 188 551	12013
0.045	6 _n 831 274	560	0.095	6 _n 786 248	1288	0.145	6 _n 697 913	2355	0.195	6 _n 536 095	4460	0.245	6 _n 176 538	12394
0.046	6 _n 830 714	573	0.096	6 _n 784 960	1305	0.146	6 _n 695 558	2383	0.196	6 _n 531 635	4528	0.246	6 _n 164 144	12799
0.047	6 _n 830 141	586	0.097	6 _n 783 655	1322	0.147	6 _n 693 175	2411	0.197	6 _n 527 110	4593	0.247	6 _n 151 345	13229
0.048	6 _n 829 555	599	0.098	6 _n 782 333	1339	0.148	6 _n 690 764	2440	0.198	6 _n 522 517	4662	0.248	6 _n 138 116	13686
0.049	6 _n 828 956	612	0.099	6 _n 780 994	1356	0.149	6 _n 688 324	2460	0.199	6 _n 517 855	4733	0.249	6 _n 124 436	14176
0.050	6 _n 828 344		0.100	6 _n 779 638		0.150	6 _n 685 855		0.200	6 _n 513 122		0.250	6 _n 110 254	

Tafel XV.
Oppolzer's *M*-Tafel.

$\log \{M_1^8(m)\}.$

$\pm m$	<i>M</i>	$-J$	$\pm m$	<i>M</i>	$-J$	$\pm m$	<i>M</i>	$-J$	$\pm m$	<i>M</i>	$-J$	$\pm m$	<i>M</i>	$-J$
0.000	8 _n 000 457	0	0.000	7 _n 999 120	54	0.100	7 _n 995 120	108	0.170	7 _n 988 411	162	0.200	7 _n 978 908	210
0.001	8 _n 000 457	1	0.001	7 _n 999 075	55	0.101	7 _n 994 071	109	0.151	7 _n 988 251	164	0.201	7 _n 978 659	221
0.002	8 _n 000 455	2	0.002	7 _n 999 029	56	0.102	7 _n 994 017	110	0.152	7 _n 988 187	165	0.202	7 _n 978 468	221
0.003	8 _n 000 453	3	0.003	7 _n 998 984	57	0.103	7 _n 994 803	111	0.153	7 _n 987 922	165	0.203	7 _n 978 247	223
0.004	8 _n 000 449	4	0.004	7 _n 998 907	58	0.104	7 _n 994 692	112	0.154	7 _n 987 757	167	0.204	7 _n 978 924	224
0.005	8 _n 000 444	5	0.005	7 _n 998 840	59	0.105	7 _n 994 581	113	0.155	7 _n 987 590	168	0.205	7 _n 977 806	225
0.006	8 _n 000 438	6	0.006	7 _n 998 770	60	0.106	7 _n 994 467	114	0.156	7 _n 987 422	169	0.206	7 _n 977 575	226
0.007	8 _n 000 431	7	0.007	7 _n 998 700	61	0.107	7 _n 994 354	115	0.157	7 _n 987 253	171	0.207	7 _n 977 345	227
0.008	8 _n 000 423	8	0.008	7 _n 998 630	62	0.108	7 _n 994 242	116	0.158	7 _n 987 082	171	0.208	7 _n 977 122	229
0.009	8 _n 000 414	9	0.009	7 _n 998 607	63	0.109	7 _n 994 122	117	0.159	7 _n 986 911	173	0.209	7 _n 976 893	230
		10			64			117			173			230
0.010	8 _n 000 402	10	0.000	7 _n 998 543	64	0.110	7 _n 994 005	119	0.160	7 _n 986 738	173	0.210	7 _n 976 663	231
0.011	8 _n 000 391	11	0.001	7 _n 998 479	65	0.111	7 _n 993 886	119	0.161	7 _n 986 565	175	0.211	7 _n 976 472	232
0.012	8 _n 000 381	12	0.002	7 _n 998 414	67	0.112	7 _n 993 767	121	0.162	7 _n 986 390	175	0.212	7 _n 976 266	233
0.013	8 _n 000 368	13	0.003	7 _n 998 347	68	0.113	7 _n 993 649	122	0.163	7 _n 986 214	177	0.213	7 _n 975 967	234
0.014	8 _n 000 354	13	0.004	7 _n 998 279	68	0.114	7 _n 993 524	122	0.164	7 _n 986 037	178	0.214	7 _n 975 733	236
0.015	8 _n 000 338	14	0.005	7 _n 998 211	70	0.115	7 _n 993 402	124	0.165	7 _n 985 859	179	0.215	7 _n 975 497	236
0.016	8 _n 000 321	15	0.006	7 _n 998 141	71	0.116	7 _n 993 278	125	0.166	7 _n 985 680	181	0.216	7 _n 975 261	238
0.017	8 _n 000 302	16	0.007	7 _n 998 070	72	0.117	7 _n 993 153	126	0.167	7 _n 985 498	181	0.217	7 _n 975 023	239
0.018	8 _n 000 285	16	0.008	7 _n 997 998	73	0.118	7 _n 993 027	127	0.168	7 _n 985 318	183	0.218	7 _n 974 784	241
0.019	8 _n 000 267	17	0.009	7 _n 997 925	75	0.119	7 _n 992 900	127	0.169	7 _n 985 135	183	0.219	7 _n 974 543	241
		21			74			128			184			241
0.020	8 _n 000 248	21	0.070	7 _n 997 851	75	0.120	7 _n 992 772	130	0.170	7 _n 984 951	185	0.220	7 _n 974 302	243
0.021	8 _n 000 229	22	0.071	7 _n 997 779	76	0.121	7 _n 992 642	130	0.171	7 _n 984 766	186	0.221	7 _n 974 059	244
0.022	8 _n 000 209	23	0.072	7 _n 997 700	78	0.122	7 _n 992 512	131	0.172	7 _n 984 580	187	0.222	7 _n 973 815	245
0.023	8 _n 000 187	23	0.073	7 _n 997 622	78	0.123	7 _n 992 381	133	0.173	7 _n 984 393	188	0.223	7 _n 973 579	246
0.024	8 _n 000 152	24	0.074	7 _n 997 544	79	0.124	7 _n 992 248	134	0.174	7 _n 984 205	190	0.224	7 _n 973 324	247
0.025	8 _n 000 126	25	0.075	7 _n 997 465	81	0.125	7 _n 992 114	135	0.175	7 _n 984 015	190	0.225	7 _n 973 077	249
0.026	8 _n 000 098	25	0.076	7 _n 997 384	81	0.126	7 _n 991 979	136	0.176	7 _n 983 825	192	0.226	7 _n 972 828	250
0.027	8 _n 000 069	26	0.077	7 _n 997 302	83	0.127	7 _n 991 843	137	0.177	7 _n 983 633	193	0.227	7 _n 972 578	250
0.028	8 _n 000 041	27	0.078	7 _n 997 220	84	0.128	7 _n 991 700	138	0.178	7 _n 983 440	194	0.228	7 _n 972 328	252
0.029	8 _n 000 011	30	0.079	7 _n 997 136	85	0.129	7 _n 991 568	139	0.179	7 _n 983 246	195	0.229	7 _n 972 076	254
		32			85			139			195			254
0.030	7 _n 999 979	32	0.080	7 _n 997 051	86	0.130	7 _n 991 429	140	0.180	7 _n 983 051	196	0.230	7 _n 971 822	254
0.031	7 _n 999 947	33	0.081	7 _n 996 965	86	0.131	7 _n 991 280	142	0.181	7 _n 982 855	198	0.231	7 _n 971 568	256
0.032	7 _n 999 914	35	0.082	7 _n 996 879	89	0.132	7 _n 991 147	142	0.182	7 _n 982 657	198	0.232	7 _n 971 312	257
0.033	7 _n 999 879	36	0.083	7 _n 996 790	89	0.133	7 _n 991 003	144	0.183	7 _n 982 459	200	0.233	7 _n 971 055	258
0.034	7 _n 999 841	36	0.084	7 _n 996 701	90	0.134	7 _n 990 861	144	0.184	7 _n 982 259	201	0.234	7 _n 970 797	259
0.035	7 _n 999 807	38	0.085	7 _n 996 611	91	0.135	7 _n 990 717	146	0.185	7 _n 982 058	202	0.235	7 _n 970 538	261
0.036	7 _n 999 769	39	0.086	7 _n 996 520	92	0.136	7 _n 990 571	147	0.186	7 _n 981 856	203	0.236	7 _n 970 277	261
0.037	7 _n 999 731	40	0.087	7 _n 996 428	94	0.137	7 _n 990 424	148	0.187	7 _n 981 653	204	0.237	7 _n 970 016	263
0.038	7 _n 999 693	41	0.088	7 _n 996 334	94	0.138	7 _n 990 276	149	0.188	7 _n 981 449	205	0.238	7 _n 969 753	264
0.039	7 _n 999 655	41	0.089	7 _n 996 240	96	0.139	7 _n 990 127	151	0.189	7 _n 981 244	207	0.239	7 _n 969 489	265
		42			96			151			207			265
0.040	7 _n 999 607	43	0.090	7 _n 996 144	97	0.140	7 _n 989 976	151	0.190	7 _n 981 037	208	0.240	7 _n 969 224	267
0.041	7 _n 999 564	44	0.091	7 _n 996 047	97	0.141	7 _n 989 825	152	0.191	7 _n 980 829	209	0.241	7 _n 968 957	268
0.042	7 _n 999 520	45	0.092	7 _n 995 950	99	0.142	7 _n 989 671	154	0.192	7 _n 980 620	210	0.242	7 _n 968 680	269
0.043	7 _n 999 475	46	0.093	7 _n 995 851	100	0.143	7 _n 989 519	155	0.193	7 _n 980 410	211	0.243	7 _n 968 420	270
0.044	7 _n 999 420	48	0.094	7 _n 995 751	101	0.144	7 _n 989 364	155	0.194	7 _n 980 199	212	0.244	7 _n 968 150	271
0.045	7 _n 999 381	48	0.095	7 _n 995 650	102	0.145	7 _n 989 209	157	0.195	7 _n 979 987	214	0.245	7 _n 967 879	272
0.046	7 _n 999 333	49	0.096	7 _n 995 548	104	0.146	7 _n 989 052	158	0.196	7 _n 979 773	214	0.246	7 _n 967 607	274
0.047	7 _n 999 284	51	0.097	7 _n 995 441	104	0.147	7 _n 988 894	159	0.197	7 _n 979 559	216	0.247	7 _n 967 333	275
0.048	7 _n 999 233	51	0.098	7 _n 995 340	105	0.148	7 _n 988 735	161	0.198	7 _n 979 343	217	0.248	7 _n 967 058	276
0.049	7 _n 999 182	53	0.099	7 _n 995 235	106	0.149	7 _n 988 574	161	0.199	7 _n 979 126	218	0.249	7 _n 966 782	278
0.050	7 _n 999 129		0.100	7 _n 995 129		0.150	7 _n 988 413		0.200	7 _n 978 908		0.250	7 _n 966 504	

Tafel XV.
Oppolzer's *M*-Tafel.

$\log \{M_1^9(m)\}.$

$\pm m$	<i>M</i>	$-d$	$\pm m$	<i>M</i>	$-d$	$\pm m$	<i>M</i>	$-d$	$\pm m$	<i>M</i>	$-d$	$\pm m$	<i>M</i>	$-d$
0.000	6.074 376		0.050	6.058 878	636	0.100	6.009 301	1398	0.150	5.913 792	2545	0.200	5.737 483	4916
0.001	6.074 369	7	0.051	6.058 242	650	0.101	6.007 903	1417	0.151	5.911 247	2576	0.201	5.732 567	4993
0.002	6.074 351	18	0.052	6.057 592	663	0.102	6.006 486	1434	0.152	5.908 671	2607	0.202	5.727 574	5072
0.003	6.074 321	30	0.053	6.056 929	677	0.103	6.005 052	1453	0.153	5.906 064	2638	0.203	5.722 502	5153
0.004	6.074 278	43	0.054	6.056 252	690	0.104	6.003 599	1471	0.154	5.903 426	2670	0.204	5.717 349	5236
0.005	6.074 223	55	0.055	6.055 562	704	0.105	6.002 128	1490	0.155	5.900 756	2702	0.205	5.712 113	5321
0.006	6.074 156	67	0.056	6.054 858	717	0.106	6.000 638	1508	0.156	5.898 054	2735	0.206	5.706 792	5409
0.007	6.074 076	80	0.057	6.054 141	732	0.107	5.999 130	1527	0.157	5.895 319	2768	0.207	5.701 383	5499
0.008	6.073 985	91	0.058	6.053 409	745	0.108	5.997 603	1546	0.158	5.892 551	2801	0.208	5.695 884	5591
0.009	6.073 881	104	0.059	6.052 664		0.109	5.996 057		0.159	5.889 750		0.209	5.690 293	
		116			759			1565			2836			5686
0.010	6.073 765		0.060	6.051 905	773	0.110	5.994 492	1585	0.160	5.886 914	2870	0.210	5.684 607	5785
0.011	6.073 636	129	0.061	6.051 132	786	0.111	5.992 907	1604	0.161	5.884 044	2906	0.211	5.678 822	5884
0.012	6.073 496	140	0.062	6.050 346	801	0.112	5.991 303	1623	0.162	5.881 138	2941	0.212	5.672 938	5989
0.013	6.073 343	153	0.063	6.049 545	815	0.113	5.989 680	1644	0.163	5.878 197	2977	0.213	5.666 949	6095
0.014	6.073 178	165	0.064	6.048 730	830	0.114	5.988 036	1663	0.164	5.875 220	3014	0.214	5.660 854	6206
0.015	6.073 000	178	0.065	6.047 900	843	0.115	5.986 373	1684	0.165	5.872 206	3052	0.215	5.654 648	6319
0.016	6.072 810	190	0.066	6.047 057	858	0.116	5.984 689	1704	0.166	5.869 154	3090	0.216	5.648 329	6436
0.017	6.072 608	202	0.067	6.046 199	872	0.117	5.982 985	1725	0.167	5.866 064	3128	0.217	5.641 893	6557
0.018	6.072 394	214	0.068	6.045 327	887	0.118	5.981 260	1745	0.168	5.862 936	3168	0.218	5.635 336	6682
0.019	6.072 167	227	0.069	6.044 440		0.119	5.979 515		0.169	5.859 768		0.219	5.628 654	
		239			901			1766			3208			6811
0.020	6.071 928		0.070	6.043 539	916	0.120	5.977 749	1788	0.170	5.856 560	3248	0.220	5.621 843	6946
0.021	6.071 676	252	0.071	6.042 623	930	0.121	5.975 961	1809	0.171	5.853 312	3290	0.221	5.614 897	7085
0.022	6.071 412	264	0.072	6.041 693	946	0.122	5.974 152	1831	0.172	5.850 022	3332	0.222	5.607 814	7226
0.023	6.071 136	276	0.073	6.040 747	960	0.123	5.972 321	1852	0.173	5.846 690	3374	0.223	5.600 588	7374
0.024	6.070 847	289	0.074	6.039 787	975	0.124	5.970 469	1875	0.174	5.843 316	3419	0.224	5.593 214	7529
0.025	6.070 545	302	0.075	6.038 812	990	0.125	5.968 594	1897	0.175	5.839 897	3462	0.225	5.585 685	7688
0.026	6.070 232	313	0.076	6.037 822	1005	0.126	5.966 697	1919	0.176	5.836 435	3508	0.226	5.577 997	7854
0.027	6.069 905	327	0.077	6.036 817	1021	0.127	5.964 778	1942	0.177	5.832 927	3554	0.227	5.570 143	8026
0.028	6.069 566	339	0.078	6.035 796	1036	0.128	5.962 836	1965	0.178	5.829 373	3600	0.228	5.562 117	8205
0.029	6.069 215	351	0.079	6.034 760		0.129	5.960 871		0.179	5.825 773		0.229	5.553 912	
		364			1050			1989			3649			8392
0.030	6.068 851		0.080	6.033 710	1067	0.130	5.958 882	2012	0.180	5.822 124	3696	0.230	5.545 520	8586
0.031	6.068 474	377	0.081	6.032 643	1082	0.131	5.956 870	2035	0.181	5.818 428	3747	0.231	5.536 934	8788
0.032	6.068 085	389	0.082	6.031 561	1098	0.132	5.954 835	2060	0.182	5.814 681	3797	0.232	5.528 146	9000
0.033	6.067 683	402	0.083	6.030 463	1113	0.133	5.952 775	2084	0.183	5.810 884	3849	0.233	5.519 146	9222
0.034	6.067 268	415	0.084	6.029 350	1130	0.134	5.950 691	2109	0.184	5.807 035	3901	0.234	5.509 924	9455
0.035	6.066 841	427	0.085	6.028 220	1145	0.135	5.948 582	2133	0.185	5.803 134	3955	0.235	5.500 473	9693
0.036	6.066 401	440	0.086	6.027 075	1162	0.136	5.946 449	2159	0.186	5.799 179	4010	0.236	5.490 780	9947
0.037	6.065 948	453	0.087	6.025 913	1177	0.137	5.944 290	2184	0.187	5.795 169	4065	0.237	5.480 833	10213
0.038	6.065 482	466	0.088	6.024 730	1191	0.138	5.942 106	2210	0.188	5.791 104	4123	0.238	5.470 620	10492
0.039	6.065 003	479	0.089	6.023 542		0.139	5.939 896		0.189	5.786 981		0.239	5.460 128	
		491			1210			2236			4181			10786
0.040	6.064 512		0.090	6.022 332	1227	0.140	5.937 660	2262	0.190	5.782 800	4240	0.240	5.449 342	11096
0.041	6.064 007	505	0.091	6.021 105	1244	0.141	5.935 398	2289	0.191	5.778 560	4302	0.241	5.438 246	11423
0.042	6.063 490	517	0.092	6.019 801	1260	0.142	5.933 109	2316	0.192	5.774 258	4363	0.242	5.426 823	11767
0.043	6.062 959	531	0.093	6.018 604	1277	0.143	5.930 793	2344	0.193	5.769 895	4427	0.243	5.415 056	12133
0.044	6.062 416	543	0.094	6.017 324	1294	0.144	5.928 449	2371	0.194	5.765 468	4492	0.244	5.402 923	12519
0.045	6.061 859	557	0.095	6.016 030	1311	0.145	5.926 078	2400	0.195	5.760 976	4559	0.245	5.390 404	12931
0.046	6.061 289	570	0.096	6.014 719	1328	0.146	5.923 678	2428	0.196	5.756 417	4627	0.246	5.377 473	13367
0.047	6.060 706	583	0.097	6.013 391	1346	0.147	5.921 250	2456	0.197	5.751 790	4697	0.247	5.364 106	13833
0.048	6.060 110	596	0.098	6.012 045	1363	0.148	5.918 794	2486	0.198	5.747 093	4768	0.248	5.350 273	14330
0.049	6.059 501	609	0.099	6.010 682	1381	0.149	5.916 308	2516	0.199	5.742 325	4842	0.249	5.335 943	14866
0.050	6.058 878	623	0.100	6.009 301		0.150	5.913 792		0.200	5.737 483		0.250	5.321 077	

Tafel XV.
Oppolzer's *M*-Tafel.

$\log \{M_1^{10}(m)\}.$

$\pm m$	<i>M</i>	$-A$	$\pm m$	<i>M</i>	$-A$	$\pm m$	<i>M</i>	$-A$	$\pm m$	<i>M</i>	$-A$	$\pm m$	<i>M</i>	$-A$
0.000	7.357 193		0.050	7.355 772	58	0.100	7.351 494	115	0.150	7.344 313	174	0.200	7.334 152	235
0.001	7.357 192	1	0.051	7.355 771	58	0.101	7.351 479	115	0.151	7.344 139	174	0.201	7.333 917	235
0.002	7.357 190	2	0.052	7.355 769	60	0.102	7.351 463	116	0.152	7.343 965	176	0.202	7.333 682	237
0.003	7.357 188	3	0.053	7.355 767	61	0.103	7.351 445	118	0.153	7.343 789	178	0.203	7.333 445	238
0.004	7.357 184	4	0.054	7.355 765	62	0.104	7.351 427	120	0.154	7.343 611	178	0.204	7.333 207	239
0.005	7.357 179	5	0.055	7.355 763	63	0.105	7.350 997	120	0.155	7.343 433	180	0.205	7.332 968	241
0.006	7.357 172	6	0.056	7.355 761	64	0.106	7.350 787	122	0.156	7.343 253	181	0.206	7.332 727	242
0.007	7.357 165	7	0.057	7.355 759	66	0.107	7.350 665	123	0.157	7.343 072	182	0.207	7.332 485	243
0.008	7.357 159	8	0.058	7.355 757	67	0.108	7.350 542	125	0.158	7.342 890	183	0.208	7.332 242	244
0.009	7.357 147	9	0.059	7.355 755	67	0.109	7.350 417	125	0.159	7.342 707	185	0.209	7.331 998	246
		11			67			125			185			246
0.010	7.357 136	12	0.060	7.355 754	69	0.110	7.350 292	127	0.160	7.342 522	185	0.210	7.331 752	246
0.011	7.357 124	13	0.061	7.355 752	70	0.111	7.350 165	127	0.161	7.342 337	187	0.211	7.331 506	248
0.012	7.357 111	14	0.062	7.355 750	71	0.112	7.350 037	128	0.162	7.342 150	188	0.212	7.331 258	250
0.013	7.357 097	15	0.063	7.355 748	73	0.113	7.349 909	130	0.163	7.341 962	189	0.213	7.331 008	250
0.014	7.357 082	16	0.064	7.355 746	73	0.114	7.349 779	132	0.164	7.341 773	191	0.214	7.330 758	252
0.015	7.357 065	17	0.065	7.355 744	75	0.115	7.349 647	132	0.165	7.341 582	192	0.215	7.330 506	253
0.016	7.357 047	18	0.066	7.355 742	75	0.116	7.349 515	134	0.166	7.341 390	192	0.216	7.330 253	254
0.017	7.357 029	19	0.067	7.355 740	77	0.117	7.349 381	135	0.167	7.341 198	194	0.217	7.329 999	256
0.018	7.357 009	20	0.068	7.355 738	78	0.118	7.349 246	136	0.168	7.341 004	196	0.218	7.329 743	257
0.019	7.356 988	21	0.069	7.355 736	78	0.119	7.349 110	137	0.169	7.340 808	196	0.219	7.329 486	258
		22			80			137			196			258
0.020	7.356 966	22	0.070	7.355 734	80	0.120	7.348 973	138	0.170	7.340 612	198	0.220	7.329 228	259
0.021	7.356 942	24	0.071	7.355 732	82	0.121	7.348 835	139	0.171	7.340 414	199	0.221	7.328 969	261
0.022	7.356 918	24	0.072	7.355 730	82	0.122	7.348 696	141	0.172	7.340 215	200	0.222	7.328 708	262
0.023	7.356 892	26	0.073	7.355 728	84	0.123	7.348 555	142	0.173	7.340 015	201	0.223	7.328 446	263
0.024	7.356 866	28	0.074	7.355 726	85	0.124	7.348 413	143	0.174	7.339 814	203	0.224	7.328 183	264
0.025	7.356 838	28	0.075	7.355 724	86	0.125	7.348 270	144	0.175	7.339 611	203	0.225	7.327 919	266
0.026	7.356 809	29	0.076	7.355 722	87	0.126	7.348 126	145	0.176	7.339 408	205	0.226	7.327 653	267
0.027	7.356 779	30	0.077	7.355 720	87	0.127	7.347 981	147	0.177	7.339 203	206	0.227	7.327 386	268
0.028	7.356 747	32	0.078	7.355 718	89	0.128	7.347 834	147	0.178	7.338 997	208	0.228	7.327 118	269
0.029	7.356 715	32	0.079	7.355 716	89	0.129	7.347 687	147	0.179	7.338 789	208	0.229	7.326 849	271
		34			91			149			208			271
0.030	7.356 681	34	0.080	7.355 714	92	0.130	7.347 538	150	0.180	7.338 581	210	0.230	7.326 578	272
0.031	7.356 647	36	0.081	7.355 712	93	0.131	7.347 388	151	0.181	7.338 371	211	0.231	7.326 306	273
0.032	7.356 611	36	0.082	7.355 710	95	0.132	7.347 237	153	0.182	7.338 160	213	0.232	7.326 033	275
0.033	7.356 574	37	0.083	7.355 708	95	0.133	7.347 084	153	0.183	7.337 947	213	0.233	7.325 758	275
0.034	7.356 536	38	0.084	7.355 706	97	0.134	7.346 931	155	0.184	7.337 734	215	0.234	7.325 483	278
0.035	7.356 497	39	0.085	7.355 704	97	0.135	7.346 776	155	0.185	7.337 519	216	0.235	7.325 205	278
0.036	7.356 456	41	0.086	7.355 702	99	0.136	7.346 620	157	0.186	7.337 303	217	0.236	7.324 927	279
0.037	7.356 415	41	0.087	7.355 700	100	0.137	7.346 463	158	0.187	7.337 086	218	0.237	7.324 648	281
0.038	7.356 372	43	0.088	7.355 698	101	0.138	7.346 305	160	0.188	7.336 868	220	0.238	7.324 367	283
0.039	7.356 328	44	0.089	7.355 696	101	0.139	7.346 145	160	0.189	7.336 648	220	0.239	7.324 084	283
		44			102			160			221			283
0.040	7.356 284	46	0.090	7.355 694	104	0.140	7.345 985	162	0.190	7.336 427	222	0.240	7.323 801	285
0.041	7.356 238	48	0.091	7.355 692	104	0.141	7.345 823	163	0.191	7.336 205	223	0.241	7.323 516	286
0.042	7.356 190	48	0.092	7.355 690	106	0.142	7.345 660	164	0.192	7.335 982	224	0.242	7.323 230	287
0.043	7.356 142	49	0.093	7.355 688	107	0.143	7.345 496	166	0.193	7.335 758	226	0.243	7.322 943	289
0.044	7.356 093	51	0.094	7.355 686	108	0.144	7.345 330	166	0.194	7.335 532	227	0.244	7.322 654	290
0.045	7.356 042	51	0.095	7.355 684	109	0.145	7.345 164	168	0.195	7.335 305	228	0.245	7.322 364	291
0.046	7.355 990	52	0.096	7.355 682	110	0.146	7.344 996	169	0.196	7.335 077	230	0.246	7.322 073	293
0.047	7.355 937	53	0.097	7.355 680	112	0.147	7.344 827	170	0.197	7.334 847	230	0.247	7.321 780	294
0.048	7.355 883	54	0.098	7.355 678	112	0.148	7.344 657	171	0.198	7.334 617	232	0.248	7.321 486	295
0.049	7.355 828	55	0.099	7.355 676	114	0.149	7.344 486	173	0.199	7.334 385	233	0.249	7.321 191	296
0.050	7.355 772	56	0.100	7.355 674	114	0.150	7.344 313	173	0.200	7.334 152	233	0.250	7.320 895	296

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

$\frac{\psi}{z}$	10°	$\frac{\psi}{z}$	10°	$\frac{\psi}{z}$	10°	$\frac{\psi}{z}$	10°
0.01	— 3.013 11	0.51	— 13.213 2	1.01	— 182.288	1.51	— 3.250 53
0.02	— 3.073 73	0.52	— 13.819 1	1.02	— 175.289	1.52	— 3.035 48
0.03	— 3.136 41	0.53	— 14.466 0	1.03	— 167.091	1.53	— 2.835 52
0.04	— 3.201 22	0.54	— 15.157 3	1.04	— 157.993	1.54	— 2.649 41
0.05	— 3.268 24	0.55	— 15.896 9	1.05	— 148.297	1.55	— 2.476 03
0.06	— 3.337 60	0.56	— 16.689 0	1.06	— 138.289	1.56	— 2.314 38
0.07	— 3.409 39	0.57	— 17.538 3	1.07	— 128.223	1.57	— 2.163 53
0.08	— 3.483 74	0.58	— 18.449 9	1.08	— 118.309	1.58	— 2.022 65
0.09	— 3.560 76	0.59	— 19.429 5	1.09	— 108.714	1.59	— 1.890 98
0.10	— 3.640 59	0.60	— 20.483 4	1.10	— 99.561 0	1.60	— 1.767 82
0.11	— 3.723 38	0.61	— 21.618 6	1.11	— 90.933 5	1.61	— 1.652 53
0.12	— 3.809 24	0.62	— 22.842 6	1.12	— 82.881 1	1.62	— 1.544 53
0.13	— 3.898 35	0.63	— 24.163 9	1.13	— 75.425 7	1.63	— 1.443 29
0.14	— 3.990 87	0.64	— 25.591 9	1.14	— 68.568 0	1.64	— 1.348 31
0.15	— 4.086 97	0.65	— 27.137 0	1.15	— 62.293 4	1.65	— 1.259 16
0.16	— 4.186 84	0.66	— 28.810 5	1.16	— 56.576 0	1.66	— 1.175 41
0.17	— 4.290 68	0.67	— 30.625 0	1.17	— 51.383 4	1.67	— 1.096 69
0.18	— 4.398 70	0.68	— 32.594 5	1.18	— 46.678 9	1.68	— 1.022 65
0.19	— 4.511 11	0.69	— 34.734 2	1.19	— 42.424 3	1.69	— 0.952 978
0.20	— 4.628 17	0.70	— 37.060 9	1.20	— 38.581 6	1.70	— 0.887 368
0.21	— 4.750 12	0.71	— 39.592 9	1.21	— 35.113 5	1.71	— 0.825 550
0.22	— 4.877 24	0.72	— 42.350 1	1.22	— 31.984 6	1.72	— 0.767 272
0.23	— 5.009 82	0.73	— 45.354 2	1.23	— 29.162 3	1.73	— 0.712 303
0.24	— 5.148 17	0.74	— 48.628 6	1.24	— 26.615 7	1.74	— 0.660 426
0.25	— 5.292 62	0.75	— 52.198 0	1.25	— 24.317 2	1.75	— 0.611 444
0.26	— 5.443 53	0.76	— 56.088 2	1.26	— 22.241 2	1.76	— 0.565 171
0.27	— 5.601 28	0.77	— 60.326 6	1.27	— 20.364 8	1.77	— 0.521 436
0.28	— 5.766 28	0.78	— 64.940 6	1.28	— 18.667 4	1.78	— 0.480 081
0.29	— 5.938 98	0.79	— 69.957 2	1.29	— 17.130 4	1.79	— 0.440 959
0.30	— 6.119 84	0.80	— 75.401 4	1.30	— 15.737 3	1.80	— 0.403 933
0.31	— 6.309 38	0.81	— 81.295 7	1.31	— 14.473 1	1.81	— 0.368 875
0.32	— 6.508 13	0.82	— 87.656 6	1.32	— 13.324 7	1.82	— 0.335 667
0.33	— 6.716 69	0.83	— 94.492 7	1.33	— 12.280 1	1.83	— 0.304 190
0.34	— 6.935 71	0.84	— 101.801	1.34	— 11.329 0	1.84	— 0.274 368
0.35	— 7.165 86	0.85	— 109.564	1.35	— 10.461 8	1.85	— 0.246 078
0.36	— 7.407 88	0.86	— 117.741	1.36	— 9.670 21	1.86	— 0.219 240
0.37	— 7.662 58	0.87	— 126.271	1.37	— 8.946 76	1.87	— 0.193 770
0.38	— 7.930 82	0.88	— 135.056	1.38	— 8.284 79	1.88	— 0.169 591
0.39	— 8.213 54	0.89	— 143.970	1.39	— 7.678 32	1.89	— 0.146 630
0.40	— 8.511 76	0.90	— 152.845	1.40	— 7.122 05	1.90	— 0.124 817
0.41	— 8.826 58	0.91	— 161.470	1.41	— 6.611 23	1.91	— 0.104 001
0.42	— 9.159 20	0.92	— 169.623	1.42	— 6.141 50	1.92	— 0.084 350
0.43	— 9.510 67	0.93	— 177.020	1.43	— 5.709 33	1.93	— 0.065 658
0.44	— 9.882 18	0.94	— 183.780	1.44	— 5.311 61	1.94	— 0.047 843
0.45	— 10.275 5	0.95	— 188.440	1.45	— 4.943 50	1.95	— 0.030 890
0.46	— 10.691 6	0.96	— 191.662	1.46	— 4.604 21	1.96	— 0.014 771
0.47	— 11.130 5	0.97	— 194.733	1.47	— 4.290 51	1.97	+ 0.000 575
0.48	— 11.591 6	0.98	— 197.630	1.48	— 4.000 25	1.98	+ 0.015 185
0.49	— 12.074 7	0.99	— 200.640	1.49	— 3.731 23	1.99	+ 0.020 096
0.50	— 12.579 5	1.00	— 203.813	1.50	— 3.481 97	2.00	+ 0.042 344
0.51	— 13.104 2	1.01	— 207.288	1.51	— 3.250 53	2.01	+ 0.054 963

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	10°	ψ z	10°	ψ z	10°	ψ z	10°
2.01	+0.054 963	2.51	+0.288 262	3.01	+0.292 665	3.51	+0.267 332
2.02	+0.066 985	2.52	+0.289 281	3.02	+0.292 270	3.52	+0.266 778
2.03	+0.078 441	2.53	+0.290 130	3.03	+0.291 867	3.53	+0.266 224
2.04	+0.089 350	2.54	+0.290 660	3.04	+0.291 456	3.54	+0.265 670
2.05	+0.100 705	2.55	+0.291 744	3.05	+0.291 037	3.55	+0.265 116
2.06	+0.110 685	2.56	+0.292 475	3.06	+0.290 610	3.56	+0.264 562
2.07	+0.119 147	2.57	+0.293 154	3.07	+0.290 176	3.57	+0.264 009
2.08	+0.127 162	2.58	+0.293 781	3.08	+0.289 736	3.58	+0.263 455
2.09	+0.134 742	2.59	+0.294 354	3.09	+0.289 289	3.59	+0.262 902
2.10	+0.141 994	2.60	+0.294 960	3.10	+0.288 835	3.60	+0.262 349
2.11	+0.148 789	2.61	+0.295 591	3.11	+0.288 376	3.61	+0.261 797
2.12	+0.155 168	2.62	+0.296 244	3.12	+0.287 911	3.62	+0.261 245
2.13	+0.161 167	2.63	+0.296 848	3.13	+0.287 441	3.63	+0.260 694
2.14	+0.166 843	2.64	+0.297 617	3.14	+0.286 965	3.64	+0.260 143
2.15	+0.172 001	2.65	+0.298 048	3.15	+0.286 481	3.65	+0.259 592
2.16	+0.177 589	2.66	+0.297 242	3.16	+0.285 990	3.66	+0.259 043
2.17	+0.182 743	2.67	+0.297 562	3.17	+0.285 509	3.67	+0.258 494
2.18	+0.187 527	2.68	+0.297 748	3.18	+0.285 015	3.68	+0.257 945
2.19	+0.191 960	2.69	+0.297 922	3.19	+0.284 517	3.69	+0.257 398
2.20	+0.196 086	2.70	+0.298 084	3.20	+0.284 014	3.70	+0.256 851
2.21	+0.201 686	2.71	+0.298 217	3.21	+0.283 508	3.71	+0.256 305
2.22	+0.206 346	2.72	+0.298 321	3.22	+0.283 099	3.72	+0.255 759
2.23	+0.210 776	2.73	+0.298 397	3.23	+0.282 486	3.73	+0.255 215
2.24	+0.214 991	2.74	+0.298 447	3.24	+0.281 970	3.74	+0.254 671
2.25	+0.218 946	2.75	+0.298 471	3.25	+0.281 451	3.75	+0.254 129
2.26	+0.222 801	2.76	+0.298 470	3.26	+0.280 929	3.76	+0.253 587
2.27	+0.226 366	2.77	+0.298 446	3.27	+0.280 405	3.77	+0.253 046
2.28	+0.229 654	2.78	+0.298 399	3.28	+0.279 877	3.78	+0.252 506
2.29	+0.232 587	2.79	+0.298 330	3.29	+0.279 348	3.79	+0.251 968
2.30	+0.235 254	2.80	+0.298 240	3.30	+0.278 816	3.80	+0.251 430
2.31	+0.237 574	2.81	+0.298 129	3.31	+0.278 282	3.81	+0.250 893
2.32	+0.239 440	2.82	+0.297 999	3.32	+0.277 746	3.82	+0.250 358
2.33	+0.240 986	2.83	+0.297 850	3.33	+0.277 208	3.83	+0.249 823
2.34	+0.242 239	2.84	+0.297 681	3.34	+0.276 669	3.84	+0.249 290
2.35	+0.243 206	2.85	+0.297 499	3.35	+0.276 128	3.85	+0.248 758
2.36	+0.244 626	2.86	+0.297 298	3.36	+0.275 585	3.86	+0.248 227
2.37	+0.245 848	2.87	+0.297 081	3.37	+0.275 041	3.87	+0.247 697
2.38	+0.246 984	2.88	+0.296 849	3.38	+0.274 496	3.88	+0.247 160
2.39	+0.247 960	2.89	+0.296 603	3.39	+0.273 949	3.89	+0.246 641
2.40	+0.248 617	2.90	+0.296 349	3.40	+0.273 402	3.90	+0.246 115
2.41	+0.249 733	2.91	+0.296 086	3.41	+0.272 853	3.91	+0.245 590
2.42	+0.250 454	2.92	+0.295 776	3.42	+0.272 303	3.92	+0.245 067
2.43	+0.250 781	2.93	+0.295 471	3.43	+0.271 753	3.93	+0.244 544
2.44	+0.250 628	2.94	+0.295 162	3.44	+0.271 202	3.94	+0.244 023
2.45	+0.250 087	2.95	+0.294 837	3.45	+0.270 651	3.95	+0.243 501
2.46	+0.249 466	2.96	+0.294 506	3.46	+0.270 098	3.96	+0.242 985
2.47	+0.248 765	2.97	+0.294 153	3.47	+0.269 546	3.97	+0.242 468
2.48	+0.247 995	2.98	+0.293 796	3.48	+0.268 993	3.98	+0.241 953
2.49	+0.247 152	2.99	+0.293 428	3.49	+0.268 439	3.99	+0.241 438
2.50	+0.246 240	3.00	+0.293 051	3.50	+0.267 886	4.00	+0.240 925
2.51	+0.245 262	3.01	+0.292 665	3.51	+0.267 332		

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	15°	20°	25°	30°	35°
0.01	— 2.953 59	— 2.871 06	— 2.766 15	— 2.639 81	— 2.493 11
0.02	— 3.011 24	— 2.924 60	— 2.814 67	— 2.682 56	— 2.529 52
0.03	— 3.070 70	— 2.979 73	— 2.864 53	— 2.726 32	— 2.566 62
0.04	— 3.132 11	— 3.036 58	— 2.915 76	— 2.771 14	— 2.604 45
0.05	— 3.195 52	— 3.095 14	— 2.968 42	— 2.817 06	— 2.643 00
0.06	— 3.261 05	— 3.155 52	— 3.022 54	— 2.864 08	— 2.682 34
0.07	— 3.328 76	— 3.217 77	— 3.078 20	— 2.912 24	— 2.722 43
0.08	— 3.398 78	— 3.282 00	— 3.135 42	— 2.961 57	— 2.763 29
0.09	— 3.471 19	— 3.348 25	— 3.194 28	— 3.012 10	— 2.804 93
0.10	— 3.546 11	— 3.416 63	— 3.254 82	— 3.063 86	— 2.847 36
0.11	— 3.623 64	— 3.487 22	— 3.317 10	— 3.116 88	— 2.890 59
0.12	— 3.703 92	— 3.560 11	— 3.381 18	— 3.171 19	— 2.934 63
0.13	— 3.787 06	— 3.635 38	— 3.447 13	— 3.226 83	— 2.979 48
0.14	— 3.873 21	— 3.713 16	— 3.515 01	— 3.283 82	— 3.025 15
0.15	— 3.962 51	— 3.793 54	— 3.584 88	— 3.342 19	— 3.071 63
0.16	— 4.055 10	— 3.876 62	— 3.656 81	— 3.401 99	— 3.118 95
0.17	— 4.151 15	— 3.962 52	— 3.730 87	— 3.463 23	— 3.167 09
0.18	— 4.250 82	— 4.051 37	— 3.807 15	— 3.525 95	— 3.216 07
0.19	— 4.354 30	— 4.143 29	— 3.885 70	— 3.590 19	— 3.265 86
0.20	— 4.461 77	— 4.238 41	— 3.966 61	— 3.655 97	— 3.316 48
0.21	— 4.573 43	— 4.336 87	— 4.049 96	— 3.723 32	— 3.367 92
0.22	— 4.689 50	— 4.438 82	— 4.135 82	— 3.792 28	— 3.420 18
0.23	— 4.810 20	— 4.544 41	— 4.224 29	— 3.862 86	— 3.473 23
0.24	— 4.935 78	— 4.653 80	— 4.315 44	— 3.935 10	— 3.527 07
0.25	— 5.066 47	— 4.767 15	— 4.409 38	— 4.009 02	— 3.581 69
0.26	— 5.202 56	— 4.884 65	— 4.506 18	— 4.084 65	— 3.637 07
0.27	— 5.344 33	— 5.006 46	— 4.605 93	— 4.162 01	— 3.693 18
0.28	— 5.492 08	— 5.132 80	— 4.708 73	— 4.241 11	— 3.750 00
0.29	— 5.646 16	— 5.263 85	— 4.814 68	— 4.321 98	— 3.807 52
0.30	— 5.806 87	— 5.399 84	— 4.923 87	— 4.404 63	— 3.865 68
0.31	— 5.974 61	— 5.540 96	— 5.036 39	— 4.489 07	— 3.924 46
0.32	— 6.149 76	— 5.687 47	— 5.152 35	— 4.575 31	— 3.983 82
0.33	— 6.332 74	— 5.839 60	— 5.271 84	— 4.663 35	— 4.043 71
0.34	— 6.523 98	— 5.997 59	— 5.394 96	— 4.753 19	— 4.104 09
0.35	— 6.723 97	— 6.161 72	— 5.521 80	— 4.844 82	— 4.164 88
0.36	— 6.933 19	— 6.332 25	— 5.652 46	— 4.938 22	— 4.226 05
0.37	— 7.152 20	— 6.509 46	— 5.787 04	— 5.033 39	— 4.287 52
0.38	— 7.381 55	— 6.693 66	— 5.925 63	— 5.130 29	— 4.349 22
0.39	— 7.621 86	— 6.885 14	— 6.068 31	— 5.228 88	— 4.411 06
0.40	— 7.873 78	— 7.084 23	— 6.215 16	— 5.329 14	— 4.472 97
0.41	— 8.138 00	— 7.291 25	— 6.366 26	— 5.431 00	— 4.534 86
0.42	— 8.415 26	— 7.506 54	— 6.521 70	— 5.534 40	— 4.596 62
0.43	— 8.706 35	— 7.730 45	— 6.681 52	— 5.639 27	— 4.658 15
0.44	— 9.012 11	— 7.963 35	— 6.845 77	— 5.745 52	— 4.719 33
0.45	— 9.333 44	— 8.205 58	— 7.014 52	— 5.853 07	— 4.780 06
0.46	— 9.671 29	— 8.457 54	— 7.187 78	— 5.961 79	— 4.840 19
0.47	— 10.026 7	— 8.719 59	— 7.365 58	— 6.071 57	— 4.899 60
0.48	— 10.400 7	— 8.992 14	— 7.547 90	— 6.182 26	— 4.958 14
0.49	— 10.794 5	— 9.275 54	— 7.734 73	— 6.293 71	— 5.015 67
0.50	— 11.209 4	— 9.570 22	— 7.926 02	— 6.405 74	— 5.072 03
0.51	— 11.646 5	— 9.876 54	— 8.121 73	— 6.518 18	— 5.127 05
0.52	— 12.107 4	— 10.194 9	— 8.321 73	— 6.630 80	— 5.180 58
0.53	— 12.593 5	— 10.525 6	— 8.525 92	— 6.743 39	— 5.232 43
0.54	— 13.106 3	— 10.869 0	— 8.734 15	— 6.855 70	— 5.282 42
0.55	— 13.647 5	— 11.225 5	— 8.946 21	— 6.967 46	— 5.330 37
0.56	— 14.218 9	— 11.595 4	— 9.161 87	— 7.078 38	— 5.376 10

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	15°	20°	25°	30°	35°
0.56	— 14.218 9	— 11.505 4	— 9.161 87	— 7.078 38	— 5.376 10
0.57	— 14.822 2	— 11.978 8	— 9.380 86	— 7.188 17	— 5.419 41
0.58	— 15.459 5	— 12.476 1	— 9.602 86	— 7.296 49	— 5.460 11
0.59	— 16.122 0	— 12.987 3	— 9.827 49	— 7.403 00	— 5.498 01
0.60	— 16.843 7	— 13.512 6	— 10.054 3	— 7.507 34	— 5.532 90
0.61	— 17.594 9	— 14.052 0	— 10.282 9	— 7.609 13	— 5.564 61
0.62	— 18.388 4	— 14.605 3	— 10.512 6	— 7.707 96	— 5.592 94
0.63	— 19.226 6	— 15.172 4	— 10.742 9	— 7.803 43	— 5.617 69
0.64	— 20.111 6	— 15.753 1	— 10.973 1	— 7.895 10	— 5.638 71
0.65	— 21.043 8	— 16.349 7	— 11.202 5	— 7.982 54	— 5.655 80
0.66	— 22.014 4	— 16.952 6	— 11.430 2	— 8.065 31	— 5.668 81
0.67	— 23.020 5	— 17.570 2	— 11.655 4	— 8.142 95	— 5.677 58
0.68	— 24.065 1	— 18.208 3	— 11.877 1	— 8.215 01	— 5.681 97
0.69	— 25.137 1	— 18.865 7	— 12.094 3	— 8.281 03	— 5.681 85
0.70	— 26.227 9	— 19.541 0	— 12.306 0	— 8.340 57	— 5.677 11
0.71	— 27.328 7	— 20.232 4	— 12.511 0	— 8.393 19	— 5.667 64
0.72	— 28.430 2	— 20.937 9	— 12.708 2	— 8.438 47	— 5.653 37
0.73	— 29.532 4	— 21.645 3	— 12.896 3	— 8.476 00	— 5.634 24
0.74	— 30.634 5	— 22.364 1	— 13.074 2	— 8.505 40	— 5.610 20
0.75	— 31.734 9	— 23.094 5	— 13.240 4	— 8.526 33	— 5.581 22
0.76	— 32.832 9	— 23.836 2	— 13.393 8	— 8.538 46	— 5.547 32
0.77	— 33.928 4	— 24.588 4	— 13.533 1	— 8.541 51	— 5.508 51
0.78	— 35.021 9	— 25.350 3	— 13.657 1	— 8.535 24	— 5.464 84
0.79	— 36.112 3	— 26.122 8	— 13.764 5	— 8.519 40	— 5.416 36
0.80	— 37.200 3	— 26.905 5	— 13.854 2	— 8.494 02	— 5.363 18
0.81	— 38.285 9	— 27.699 0	— 13.925 1	— 8.458 84	— 5.305 40
0.82	— 39.368 7	— 28.503 7	— 13.976 3	— 8.413 89	— 5.243 14
0.83	— 40.448 1	— 29.319 8	— 14.006 9	— 8.359 17	— 5.176 57
0.84	— 41.524 2	— 30.147 1	— 14.016 1	— 8.294 75	— 5.105 84
0.85	— 42.596 0	— 30.984 6	— 14.003 6	— 8.220 81	— 5.031 16
0.86	— 43.664 5	— 31.832 8	— 13.968 7	— 8.137 51	— 4.952 72
0.87	— 44.729 0	— 32.691 1	— 13.911 3	— 8.045 10	— 4.870 73
0.88	— 45.789 0	— 33.560 5	— 13.831 3	— 7.943 91	— 4.785 43
0.89	— 46.845 1	— 34.440 8	— 13.728 8	— 7.834 26	— 4.697 06
0.90	— 47.897 7	— 35.332 8	— 13.604 1	— 7.716 57	— 4.605 88
0.91	— 48.946 1	— 36.236 0	— 13.457 8	— 7.591 28	— 4.512 14
0.92	— 49.990 8	— 37.150 5	— 13.290 6	— 7.458 88	— 4.416 11
0.93	— 51.031 0	— 38.076 2	— 13.103 2	— 7.319 88	— 4.318 06
0.94	— 52.068 7	— 39.013 1	— 12.896 6	— 7.174 83	— 4.218 24
0.95	— 53.103 9	— 39.961 6	— 12.672 0	— 7.024 28	— 4.116 92
0.96	— 54.136 2	— 40.921 2	— 12.430 9	— 6.868 83	— 4.014 39
0.97	— 55.165 9	— 41.892 0	— 12.174 5	— 6.709 06	— 3.910 89
0.98	— 56.192 7	— 42.873 9	— 11.904 2	— 6.545 50	— 3.806 68
0.99	— 57.216 6	— 43.866 1	— 11.621 6	— 6.378 93	— 3.702 01
1.00	— 58.237 0	— 44.869 6	— 11.328 2	— 6.209 77	— 3.597 11
1.01	— 59.254 9	— 45.884 1	— 11.025 7	— 6.038 64	— 3.492 22
1.02	— 60.269 5	— 46.909 7	— 10.715 6	— 5.866 10	— 3.387 56
1.03	— 61.281 2	— 47.946 4	— 10.399 5	— 5.692 70	— 3.283 34
1.04	— 62.289 7	— 49.004 8	— 10.079 0	— 5.518 90	— 3.179 70
1.05	— 63.294 3	— 50.084 3	— 9.755 44	— 5.345 30	— 3.076 99
1.06	— 64.295 7	— 51.185 1	— 9.430 30	— 5.172 38	— 2.975 21
1.07	— 65.293 0	— 52.306 7	— 9.104 90	— 5.000 44	— 2.874 58
1.08	— 66.286 4	— 53.449 2	— 8.780 46	— 4.829 98	— 2.775 24
1.09	— 67.275 1	— 54.612 4	— 8.458 14	— 4.661 29	— 2.677 33
1.10	— 68.259 9	— 55.795 5	— 8.138 98	— 4.494 78	— 2.580 99
1.11	— 69.240 5	— 56.998 1	— 7.823 92	— 4.330 72	— 2.486 25

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	15°	20°	25°	30°	35°
1.11	— 33.760 5	— 15.251 1	— 7.823 92	— 4.330 72	— 2.486 25
1.12	— 31.779 7	— 14.555 1	— 7.513 80	— 4.169 40	— 2.393 28
1.13	— 29.866 8	— 13.874 0	— 7.209 36	— 4.011 06	— 2.302 13
1.14	— 28.029 5	— 13.210 1	— 6.911 26	— 3.855 91	— 2.212 89
1.15	— 26.273 2	— 12.565 1	— 6.620 02	— 3.704 12	— 2.125 61
1.16	— 24.601 5	— 11.940 4	— 6.336 13	— 3.555 84	— 2.040 33
1.17	— 23.016 1	— 11.337 1	— 6.059 93	— 3.411 21	— 1.957 10
1.18	— 21.517 5	— 10.755 9	— 5.791 75	— 3.270 33	— 1.875 96
1.19	— 20.104 7	— 10.197 4	— 5.531 77	— 3.133 27	— 1.796 91
1.20	— 18.776 0	— 9.661 73	— 5.280 18	— 3.000 08	— 1.719 97
1.21	— 17.529 3	— 9.149 03	— 5.037 05	— 2.870 81	— 1.645 16
1.22	— 16.361 3	— 8.659 12	— 4.802 44	— 2.745 46	— 1.572 47
1.23	— 15.268 8	— 8.191 72	— 4.576 31	— 2.624 04	— 1.501 88
1.24	— 14.248 1	— 7.746 42	— 4.358 64	— 2.506 54	— 1.433 41
1.25	— 13.295 6	— 7.322 69	— 4.149 33	— 2.392 92	— 1.367 01
1.26	— 12.407 4	— 6.919 93	— 3.948 25	— 2.283 15	— 1.302 67
1.27	— 11.579 6	— 6.537 49	— 3.755 26	— 2.177 18	— 1.240 37
1.28	— 10.808 6	— 6.174 63	— 3.570 19	— 2.074 94	— 1.180 07
1.29	— 10.090 9	— 5.830 63	— 3.392 84	— 1.976 37	— 1.121 74
1.30	— 9.422 79	— 5.504 72	— 3.223 02	— 1.881 40	— 1.065 35
1.31	— 8.800 96	— 5.196 12	— 3.060 50	— 1.789 94	— 1.010 86
1.32	— 8.222 25	— 4.904 05	— 2.905 06	— 1.701 92	— 0.958 220
1.33	— 7.683 64	— 4.627 73	— 2.756 47	— 1.617 24	— 0.907 400
1.34	— 7.182 30	— 4.366 42	— 2.614 49	— 1.535 82	— 0.858 352
1.35	— 6.715 58	— 4.119 36	— 2.478 88	— 1.457 56	— 0.811 036
1.36	— 6.280 96	— 3.885 82	— 2.349 41	— 1.382 37	— 0.765 402
1.37	— 5.876 13	— 3.665 11	— 2.225 83	— 1.310 15	— 0.721 408
1.38	— 5.498 93	— 3.456 53	— 2.107 92	— 1.240 81	— 0.679 005
1.39	— 5.147 33	— 3.259 45	— 1.995 44	— 1.174 25	— 0.638 155
1.40	— 4.819 48	— 3.073 23	— 1.888 16	— 1.110 38	— 0.598 805
1.41	— 4.513 64	— 2.897 27	— 1.785 86	— 1.049 11	— 0.560 912
1.42	— 4.228 20	— 2.731 00	— 1.688 33	— 0.990 346	— 0.524 431
1.43	— 3.961 68	— 2.573 88	— 1.595 36	— 0.933 992	— 0.489 317
1.44	— 3.712 70	— 2.425 39	— 1.506 74	— 0.879 963	— 0.455 525
1.45	— 3.480 00	— 2.285 05	— 1.422 28	— 0.828 170	— 0.423 017
1.46	— 3.262 40	— 2.152 38	— 1.341 78	— 0.778 529	— 0.391 744
1.47	— 3.058 82	— 2.026 95	— 1.265 06	— 0.730 957	— 0.361 608
1.48	— 2.868 26	— 1.908 35	— 1.191 95	— 0.685 372	— 0.332 746
1.49	— 2.689 78	— 1.796 18	— 1.122 28	— 0.641 698	— 0.304 937
1.50	— 2.522 54	— 1.690 07	— 1.055 88	— 0.599 858	— 0.278 207
1.51	— 2.365 75	— 1.589 67	— 0.992 612	— 0.559 777	— 0.252 507
1.52	— 2.218 67	— 1.494 66	— 0.932 312	— 0.521 384	— 0.227 820
1.53	— 2.080 61	— 1.414 72	— 0.874 810	— 0.484 013	— 0.204 094
1.54	— 1.951 02	— 1.319 57	— 0.820 062	— 0.449 394	— 0.181 295
1.55	— 1.829 24	— 1.238 93	— 0.767 851	— 0.415 664	— 0.159 393
1.56	— 1.714 78	— 1.162 54	— 0.718 078	— 0.383 361	— 0.138 353
1.57	— 1.607 13	— 1.090 17	— 0.670 629	— 0.352 428	— 0.118 144
1.58	— 1.505 84	— 1.021 57	— 0.625 391	— 0.322 804	— 0.098 734
1.59	— 1.410 48	— 0.956 547	— 0.582 261	— 0.294 436	— 0.080 094
1.60	— 1.320 67	— 0.894 888	— 0.541 129	— 0.267 271	— 0.062 196
1.61	— 1.236 04	— 0.836 407	— 0.501 904	— 0.241 256	— 0.045 010
1.62	— 1.156 25	— 0.780 925	— 0.464 492	— 0.216 348	— 0.028 511
1.63	— 1.081 00	— 0.728 276	— 0.428 807	— 0.192 496	— 0.012 670
1.64	— 1.009 98	— 0.678 301	— 0.394 764	— 0.169 655	+ 0.002 535
1.65	— 0.942 943	— 0.630 853	— 0.362 286	— 0.147 783	+ 0.017 130
1.66	— 0.879 624	— 0.585 792	— 0.331 204	— 0.126 838	+ 0.031 138

Tafel XVI.

Leusehner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	15°	20°	25°	30°	35°
1.66	—0.879 624	—0.585 792	—0.331 294	—0.126 838	+0.031 138
1.67	—0.810 505	—0.542 987	—0.301 719	—0.106 782	+0.044 581
1.68	—0.763 238	—0.502 316	—0.273 495	—0.087 576	+0.057 482
1.69	—0.709 752	—0.463 663	—0.246 555	—0.069 185	+0.069 861
1.70	—0.659 151	—0.426 918	—0.220 838	—0.051 572	+0.081 738
1.71	—0.611 258	—0.391 979	—0.196 285	—0.034 707	+0.093 133
1.72	—0.565 912	—0.358 749	—0.172 842	—0.018 556	+0.104 065
1.73	—0.522 962	—0.327 138	—0.150 458	—0.003 090	+0.114 551
1.74	—0.482 263	—0.297 059	—0.129 080	+0.011 721	+0.124 608
1.75	—0.443 686	—0.268 433	—0.108 663	+0.025 904	+0.134 254
1.76	—0.407 106	—0.241 182	—0.089 161	+0.039 486	+0.143 503
1.77	—0.372 407	—0.215 236	—0.070 531	+0.052 492	+0.152 373
1.78	—0.339 481	—0.190 527	—0.052 732	+0.064 947	+0.160 876
1.79	—0.308 232	—0.166 991	—0.035 725	+0.076 874	+0.169 028
1.80	—0.278 558	—0.144 569	—0.019 475	+0.088 295	+0.176 841
1.81	—0.250 374	—0.123 202	—0.003 947	+0.099 231	+0.184 330
1.82	—0.223 599	—0.102 839	+0.010 893	+0.109 703	+0.191 507
1.83	—0.198 152	—0.083 428	+0.025 076	+0.119 729	+0.198 382
1.84	—0.173 963	—0.064 922	+0.038 633	+0.129 330	+0.204 970
1.85	—0.150 961	—0.047 275	+0.051 592	+0.138 521	+0.211 280
1.86	—0.129 084	—0.030 446	+0.063 979	+0.147 321	+0.217 324
1.87	—0.108 270	—0.014 393	+0.075 820	+0.155 745	+0.223 110
1.88	—0.088 465	+0.000 921	+0.087 140	+0.163 809	+0.228 650
1.89	—0.069 613	+0.015 532	+0.097 963	+0.171 529	+0.233 953
1.90	—0.051 665	+0.029 474	+0.108 310	+0.178 917	+0.239 029
1.91	—0.034 575	+0.042 781	+0.118 203	+0.185 988	+0.243 884
1.92	—0.018 296	+0.055 480	+0.127 661	+0.192 755	+0.248 528
1.93	—0.002 790	+0.067 603	+0.136 705	+0.199 230	+0.252 970
1.94	+0.011 955	+0.079 176	+0.145 351	+0.205 425	+0.257 217
1.95	+0.026 066	+0.090 226	+0.153 619	+0.211 352	+0.261 276
1.96	+0.039 487	+0.100 776	+0.161 523	+0.217 020	+0.265 155
1.97	+0.052 282	+0.110 849	+0.169 080	+0.222 442	+0.268 860
1.98	+0.064 480	+0.120 469	+0.176 304	+0.227 626	+0.272 398
1.99	+0.076 113	+0.129 657	+0.183 210	+0.232 582	+0.275 776
2.00	+0.087 207	+0.138 431	+0.189 812	+0.237 320	+0.278 991
2.01	+0.097 789	+0.146 810	+0.196 122	+0.241 849	+0.282 073
2.02	+0.107 883	+0.154 814	+0.202 154	+0.246 175	+0.285 005
2.03	+0.117 513	+0.162 458	+0.207 918	+0.250 309	+0.287 799
2.04	+0.126 701	+0.169 759	+0.213 426	+0.254 256	+0.290 460
2.05	+0.135 469	+0.176 733	+0.218 690	+0.258 025	+0.292 987
2.06	+0.143 836	+0.183 393	+0.223 718	+0.261 623	+0.295 405
2.07	+0.151 824	+0.189 754	+0.228 522	+0.265 050	+0.297 600
2.08	+0.159 443	+0.195 829	+0.233 110	+0.268 332	+0.299 878
2.09	+0.166 712	+0.201 631	+0.237 491	+0.271 455	+0.301 949
2.10	+0.173 652	+0.207 170	+0.241 674	+0.274 433	+0.303 914
2.11	+0.180 276	+0.212 460	+0.245 667	+0.277 270	+0.305 778
2.12	+0.186 590	+0.217 511	+0.249 478	+0.279 973	+0.307 540
2.13	+0.192 633	+0.222 332	+0.253 114	+0.282 546	+0.309 216
2.14	+0.198 392	+0.226 934	+0.256 582	+0.284 994	+0.310 798
2.15	+0.203 887	+0.231 327	+0.259 889	+0.287 323	+0.312 294
2.16	+0.209 132	+0.235 518	+0.263 041	+0.289 537	+0.313 705
2.17	+0.214 137	+0.239 517	+0.266 046	+0.291 641	+0.315 036
2.18	+0.218 912	+0.243 332	+0.268 909	+0.293 638	+0.316 289
2.19	+0.223 468	+0.246 970	+0.271 635	+0.295 533	+0.317 468
2.20	+0.227 814	+0.250 439	+0.274 231	+0.297 329	+0.318 574
2.21	+0.231 959	+0.253 746	+0.276 701	+0.299 031	+0.319 611

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z.	15°	20°	25°	30°	35°
2.21	+0.231 959	+0.253 746.	+0.276 701	+0.299 031	+0.319 611
2.22	+0.235 912	+0.256 898	+0.279 050	+0.300 642	+0.320 581
2.23	+0.239 681	+0.259 900	+0.281 283	+0.302 166	+0.321 487
2.24	+0.243 275	+0.262 760	+0.283 405	+0.303 605	+0.322 332
2.25	+0.246 700	+0.265 483	+0.285 419	+0.304 964	+0.323 116
2.26	+0.249 963	+0.268 074	+0.287 331	+0.306 244	+0.323 844
2.27	+0.253 073	+0.270 539	+0.289 144	+0.307 450	+0.324 516
2.28	+0.256 034	+0.272 884	+0.290 862	+0.308 583	+0.325 134
2.29	+0.258 853	+0.275 112	+0.292 488	+0.309 648	+0.325 702
2.30	+0.261 537	+0.277 229	+0.294 027	+0.310 645	+0.326 220
2.31	+0.264 091	+0.279 239	+0.295 482	+0.311 578	+0.326 691
2.32	+0.266 518	+0.281 146	+0.296 855	+0.312 450	+0.327 115
2.33	+0.268 827	+0.282 955	+0.298 151	+0.313 262	+0.327 496
2.34	+0.271 021	+0.284 669	+0.299 372	+0.314 016	+0.327 834
2.35	+0.273 104	+0.286 293	+0.300 521	+0.314 716	+0.328 132
2.36	+0.275 082	+0.287 829	+0.301 601	+0.315 362	+0.328 390
2.37	+0.276 959	+0.289 281	+0.302 614	+0.315 957	+0.328 610
2.38	+0.278 738	+0.290 653	+0.303 563	+0.316 504	+0.328 794
2.39	+0.280 424	+0.291 947	+0.304 451	+0.317 003	+0.328 942
2.40	+0.282 021	+0.293 167	+0.305 279	+0.317 456	+0.329 057
2.41	+0.283 531	+0.294 315	+0.306 050	+0.317 866	+0.329 135
2.42	+0.284 959	+0.295 395	+0.306 766	+0.318 233	+0.329 189
2.43	+0.286 307	+0.296 408	+0.307 430	+0.318 560	+0.329 210
2.44	+0.287 579	+0.297 359	+0.308 043	+0.318 847	+0.329 201
2.45	+0.288 778	+0.298 248	+0.308 607	+0.319 097	+0.329 164
2.46	+0.289 907	+0.299 078	+0.309 124	+0.319 311	+0.329 101
2.47	+0.290 965	+0.299 853	+0.309 596	+0.319 490	+0.329 011
2.48	+0.291 965	+0.300 572	+0.310 024	+0.319 635	+0.328 897
3.49	+0.292 898	+0.301 240	+0.310 411	+0.319 748	+0.328 758
2.50	+0.293 772	+0.301 858	+0.310 757	+0.319 830	+0.328 597
2.51	+0.294 589	+0.302 427	+0.311 064	+0.319 881	+0.328 413
2.52	+0.295 351	+0.302 950	+0.311 334	+0.319 904	+0.328 208
2.53	+0.296 058	+0.303 428	+0.311 568	+0.319 900	+0.327 982
2.54	+0.296 713	+0.303 863	+0.311 768	+0.319 868	+0.327 736
2.55	+0.297 321	+0.304 257	+0.311 934	+0.319 811	+0.327 471
2.56	+0.297 881	+0.304 611	+0.312 068	+0.319 729	+0.327 188
2.57	+0.298 396	+0.304 927	+0.312 172	+0.319 623	+0.326 888
2.58	+0.298 867	+0.305 206	+0.312 246	+0.319 495	+0.326 570
2.59	+0.299 295	+0.305 449	+0.312 291	+0.319 344	+0.326 236
2.60	+0.299 681	+0.305 659	+0.312 309	+0.319 172	+0.325 887
2.61	+0.300 033	+0.305 836	+0.312 301	+0.318 980	+0.325 522
2.62	+0.300 345	+0.305 981	+0.312 267	+0.318 768	+0.325 144
2.63	+0.300 620	+0.306 096	+0.312 209	+0.318 537	+0.324 752
2.64	+0.300 862	+0.306 182	+0.312 127	+0.318 288	+0.324 345
2.65	+0.301 069	+0.306 239	+0.312 022	+0.318 021	+0.323 926
2.66	+0.301 245	+0.306 270	+0.311 896	+0.317 738	+0.323 495
2.67	+0.301 390	+0.306 274	+0.311 748	+0.317 439	+0.323 052
2.68	+0.301 505	+0.306 254	+0.311 580	+0.317 124	+0.322 590
2.69	+0.301 591	+0.306 209	+0.311 393	+0.316 794	+0.322 133
2.70	+0.301 651	+0.306 141	+0.311 187	+0.316 450	+0.321 657
2.71	+0.301 683	+0.306 051	+0.310 953	+0.316 092	+0.321 172
2.72	+0.301 691	+0.305 940	+0.310 722	+0.315 721	+0.320 677
2.73	+0.301 674	+0.305 808	+0.310 465	+0.315 338	+0.320 173
2.74	+0.301 633	+0.305 656	+0.310 192	+0.314 942	+0.319 660
2.75	+0.301 569	+0.305 485	+0.309 903	+0.314 534	+0.319 139
2.76	+0.301 484	+0.305 295	+0.309 599	+0.314 115	+0.318 610

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	15°	20°	25°	30°	35°
2.76	+ 0.301 484	+ 0.305 295	+ 0.309 599	+ 0.314 115	+ 0.318 610
2.77	+ 0.301 378	+ 0.305 088	+ 0.309 281	+ 0.313 686	+ 0.318 073
2.78	+ 0.301 252	+ 0.304 864	+ 0.308 950	+ 0.313 246	+ 0.317 528
2.79	+ 0.301 106	+ 0.304 623	+ 0.308 606	+ 0.312 796	+ 0.316 976
2.80	+ 0.300 939	+ 0.304 367	+ 0.308 249	+ 0.312 336	+ 0.316 418
2.81	+ 0.300 759	+ 0.304 096	+ 0.307 880	+ 0.311 868	+ 0.315 854
2.82	+ 0.300 560	+ 0.303 810	+ 0.307 499	+ 0.311 391	+ 0.315 286
2.83	+ 0.300 344	+ 0.303 511	+ 0.307 107	+ 0.310 905	+ 0.314 710
2.84	+ 0.300 111	+ 0.303 198	+ 0.306 705	+ 0.310 412	+ 0.314 128
2.85	+ 0.299 864	+ 0.302 872	+ 0.306 293	+ 0.309 910	+ 0.313 541
2.86	+ 0.299 602	+ 0.302 533	+ 0.305 871	+ 0.309 402	+ 0.312 950
2.87	+ 0.299 325	+ 0.302 183	+ 0.305 439	+ 0.308 886	+ 0.312 353
2.88	+ 0.299 035	+ 0.301 822	+ 0.304 998	+ 0.308 364	+ 0.311 752
2.89	+ 0.298 732	+ 0.301 449	+ 0.304 548	+ 0.307 833	+ 0.311 146
2.90	+ 0.298 417	+ 0.301 066	+ 0.304 090	+ 0.307 301	+ 0.310 537
2.91	+ 0.298 089	+ 0.300 673	+ 0.303 624	+ 0.306 760	+ 0.309 924
2.92	+ 0.297 740	+ 0.300 270	+ 0.303 151	+ 0.306 214	+ 0.309 307
2.93	+ 0.297 399	+ 0.299 858	+ 0.302 670	+ 0.305 663	+ 0.308 687
2.94	+ 0.297 038	+ 0.299 436	+ 0.302 183	+ 0.305 106	+ 0.308 063
2.95	+ 0.296 666	+ 0.299 007	+ 0.301 688	+ 0.304 545	+ 0.307 437
2.96	+ 0.296 285	+ 0.298 569	+ 0.301 187	+ 0.303 979	+ 0.306 807
2.97	+ 0.295 894	+ 0.298 123	+ 0.300 680	+ 0.303 409	+ 0.306 175
2.98	+ 0.295 494	+ 0.297 670	+ 0.300 168	+ 0.302 835	+ 0.305 540
2.99	+ 0.295 085	+ 0.297 210	+ 0.299 650	+ 0.302 256	+ 0.304 902
3.00	+ 0.294 668	+ 0.296 742	+ 0.299 126	+ 0.301 674	+ 0.304 264
3.01	+ 0.294 243	+ 0.296 269	+ 0.298 597	+ 0.301 089	+ 0.303 622
3.02	+ 0.293 811	+ 0.295 788	+ 0.298 064	+ 0.300 500	+ 0.302 980
3.03	+ 0.293 371	+ 0.295 302	+ 0.297 526	+ 0.299 909	+ 0.302 336
3.04	+ 0.292 924	+ 0.294 810	+ 0.296 984	+ 0.299 314	+ 0.301 688
3.05	+ 0.292 470	+ 0.294 313	+ 0.296 437	+ 0.298 716	+ 0.301 041
3.06	+ 0.292 010	+ 0.293 810	+ 0.295 886	+ 0.298 116	+ 0.300 392
3.07	+ 0.291 543	+ 0.293 302	+ 0.295 332	+ 0.297 513	+ 0.299 740
3.08	+ 0.291 071	+ 0.292 790	+ 0.294 774	+ 0.296 909	+ 0.299 090
3.09	+ 0.290 592	+ 0.292 273	+ 0.294 213	+ 0.296 302	+ 0.298 436
3.10	+ 0.290 109	+ 0.291 751	+ 0.293 649	+ 0.295 692	+ 0.297 785
3.11	+ 0.289 621	+ 0.291 226	+ 0.293 082	+ 0.295 082	+ 0.297 129
3.12	+ 0.289 127	+ 0.290 696	+ 0.292 512	+ 0.294 469	+ 0.296 473
3.13	+ 0.288 629	+ 0.290 163	+ 0.291 939	+ 0.293 855	+ 0.295 817
3.14	+ 0.288 127	+ 0.289 627	+ 0.291 364	+ 0.293 239	+ 0.295 162
3.15	+ 0.287 620	+ 0.289 087	+ 0.290 786	+ 0.292 622	+ 0.294 507
3.16	+ 0.287 109	+ 0.288 543	+ 0.290 206	+ 0.292 004	+ 0.293 850
3.17	+ 0.286 594	+ 0.287 997	+ 0.289 624	+ 0.291 385	+ 0.293 194
3.18	+ 0.286 076	+ 0.287 448	+ 0.289 040	+ 0.290 764	+ 0.292 536
3.19	+ 0.285 554	+ 0.286 890	+ 0.288 455	+ 0.290 143	+ 0.291 879
3.20	+ 0.285 029	+ 0.286 342	+ 0.287 868	+ 0.289 521	+ 0.291 223
3.21	+ 0.284 501	+ 0.285 786	+ 0.287 279	+ 0.288 898	+ 0.290 567
3.22	+ 0.283 970	+ 0.285 227	+ 0.286 689	+ 0.288 275	+ 0.289 910
3.23	+ 0.283 436	+ 0.284 666	+ 0.286 097	+ 0.287 651	+ 0.289 254
3.24	+ 0.282 899	+ 0.284 103	+ 0.285 505	+ 0.287 027	+ 0.288 599
3.25	+ 0.282 360	+ 0.283 539	+ 0.284 911	+ 0.286 403	+ 0.287 943
3.26	+ 0.281 819	+ 0.282 972	+ 0.284 316	+ 0.285 778	+ 0.287 287
3.27	+ 0.281 275	+ 0.282 404	+ 0.283 720	+ 0.285 153	+ 0.286 633
3.28	+ 0.280 729	+ 0.281 835	+ 0.283 124	+ 0.284 528	+ 0.285 980
3.29	+ 0.280 182	+ 0.281 264	+ 0.282 527	+ 0.283 903	+ 0.285 328
3.30	+ 0.279 632	+ 0.280 692	+ 0.281 930	+ 0.283 278	+ 0.284 674
3.31	+ 0.279 081	+ 0.280 119	+ 0.281 332	+ 0.282 654	+ 0.284 023

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	15°	20°	25°	30°	35°
3.31	+ 0.279 081	+ 0.280 119	+ 0.281 332	+ 0.282 654	+ 0.284 023
3.32	+ 0.278 528	+ 0.279 545	+ 0.280 733	+ 0.282 029	+ 0.283 372
3.33	+ 0.277 974	+ 0.278 970	+ 0.280 134	+ 0.281 405	+ 0.282 722
3.34	+ 0.277 419	+ 0.278 394	+ 0.279 535	+ 0.280 781	+ 0.282 072
3.35	+ 0.276 862	+ 0.277 818	+ 0.278 936	+ 0.280 157	+ 0.281 425
3.36	+ 0.276 304	+ 0.277 241	+ 0.278 337	+ 0.279 534	+ 0.280 779
3.37	+ 0.275 746	+ 0.276 663	+ 0.277 737	+ 0.278 912	+ 0.280 133
3.38	+ 0.275 186	+ 0.276 085	+ 0.277 138	+ 0.278 290	+ 0.279 480
3.39	+ 0.274 625	+ 0.275 500	+ 0.276 539	+ 0.277 668	+ 0.278 845
3.40	+ 0.274 062	+ 0.274 927	+ 0.275 940	+ 0.277 048	+ 0.278 200
3.41	+ 0.273 502	+ 0.274 348	+ 0.275 341	+ 0.276 428	+ 0.277 560
3.42	+ 0.272 939	+ 0.273 769	+ 0.274 742	+ 0.275 809	+ 0.276 919
3.43	+ 0.272 376	+ 0.273 189	+ 0.274 144	+ 0.275 190	+ 0.276 282
3.44	+ 0.271 813	+ 0.272 610	+ 0.273 546	+ 0.274 573	+ 0.275 644
3.45	+ 0.271 249	+ 0.272 031	+ 0.272 949	+ 0.273 956	+ 0.275 007
3.46	+ 0.270 685	+ 0.271 451	+ 0.272 352	+ 0.273 340	+ 0.274 374
3.47	+ 0.270 121	+ 0.270 872	+ 0.271 756	+ 0.272 726	+ 0.273 738
3.48	+ 0.269 556	+ 0.270 293	+ 0.271 160	+ 0.272 112	+ 0.273 107
3.49	+ 0.268 992	+ 0.269 715	+ 0.270 565	+ 0.271 499	+ 0.272 478
3.50	+ 0.268 427	+ 0.269 136	+ 0.269 971	+ 0.270 888	+ 0.271 848
3.51	+ 0.267 863	+ 0.268 558	+ 0.269 378	+ 0.270 277	+ 0.271 220
3.52	+ 0.267 299	+ 0.267 981	+ 0.268 785	+ 0.269 668	+ 0.270 595
3.53	+ 0.266 733	+ 0.267 404	+ 0.268 193	+ 0.269 060	+ 0.269 969
3.54	+ 0.266 171	+ 0.266 827	+ 0.267 602	+ 0.268 453	+ 0.269 340
3.55	+ 0.265 608	+ 0.266 252	+ 0.267 011	+ 0.267 848	+ 0.268 724
3.56	+ 0.265 045	+ 0.265 676	+ 0.266 422	+ 0.267 243	+ 0.268 105
3.57	+ 0.264 478	+ 0.265 102	+ 0.265 834	+ 0.266 640	+ 0.267 487
3.58	+ 0.263 919	+ 0.264 528	+ 0.265 247	+ 0.266 039	+ 0.266 871
3.59	+ 0.263 358	+ 0.263 955	+ 0.264 660	+ 0.265 438	+ 0.266 256
3.60	+ 0.262 796	+ 0.263 382	+ 0.264 075	+ 0.264 839	+ 0.265 644
3.61	+ 0.262 236	+ 0.262 811	+ 0.263 491	+ 0.264 242	+ 0.265 031
3.62	+ 0.261 676	+ 0.262 240	+ 0.262 908	+ 0.263 646	+ 0.264 421
3.63	+ 0.261 110	+ 0.261 671	+ 0.262 326	+ 0.263 051	+ 0.263 813
3.64	+ 0.260 560	+ 0.261 102	+ 0.261 746	+ 0.262 458	+ 0.263 208
3.65	+ 0.259 990	+ 0.260 534	+ 0.261 166	+ 0.261 866	+ 0.262 602
3.66	+ 0.259 442	+ 0.259 967	+ 0.260 588	+ 0.261 275	+ 0.262 000
3.67	+ 0.258 886	+ 0.259 401	+ 0.260 011	+ 0.260 687	+ 0.261 397
3.68	+ 0.258 330	+ 0.258 836	+ 0.259 436	+ 0.260 099	+ 0.260 799
3.69	+ 0.257 776	+ 0.258 273	+ 0.258 861	+ 0.259 514	+ 0.260 202
3.70	+ 0.257 222	+ 0.257 710	+ 0.258 288	+ 0.258 930	+ 0.259 606
3.71	+ 0.256 669	+ 0.257 148	+ 0.257 716	+ 0.258 347	+ 0.259 010
3.72	+ 0.256 117	+ 0.256 588	+ 0.257 140	+ 0.257 766	+ 0.258 420
3.73	+ 0.255 566	+ 0.256 029	+ 0.256 577	+ 0.257 187	+ 0.257 830
3.74	+ 0.255 017	+ 0.255 471	+ 0.256 010	+ 0.256 609	+ 0.257 241
3.75	+ 0.254 468	+ 0.254 914	+ 0.255 444	+ 0.256 033	+ 0.256 655
3.76	+ 0.253 920	+ 0.254 359	+ 0.254 880	+ 0.255 458	+ 0.256 070
3.77	+ 0.253 373	+ 0.253 804	+ 0.254 310	+ 0.254 885	+ 0.255 480
3.78	+ 0.252 828	+ 0.253 251	+ 0.253 755	+ 0.254 314	+ 0.254 900
3.79	+ 0.252 284	+ 0.252 700	+ 0.253 195	+ 0.253 744	+ 0.254 327
3.80	+ 0.251 740	+ 0.252 149	+ 0.252 636	+ 0.253 176	+ 0.253 749
3.81	+ 0.251 198	+ 0.251 600	+ 0.252 079	+ 0.252 610	+ 0.253 174
3.82	+ 0.250 659	+ 0.251 053	+ 0.251 523	+ 0.252 046	+ 0.252 600
3.83	+ 0.250 118	+ 0.250 506	+ 0.250 968	+ 0.251 483	+ 0.252 028
3.84	+ 0.249 580	+ 0.249 961	+ 0.250 415	+ 0.250 922	+ 0.251 458
3.85	+ 0.249 043	+ 0.249 418	+ 0.249 864	+ 0.250 362	+ 0.250 890
3.86	+ 0.248 507	+ 0.248 876	+ 0.249 315	+ 0.249 804	+ 0.250 324

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's ¹/_m Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	15°	20°	25°	30°	35°
3.86	+ 0.248 867	+ 0.248 876	+ 0.249 315	+ 0.249 804	+ 0.250 324
3.87	+ 0.247 972	+ 0.248 335	+ 0.248 767	+ 0.249 248	+ 0.249 761
3.88	+ 0.247 439	+ 0.247 795	+ 0.248 220	+ 0.248 694	+ 0.249 198
3.89	+ 0.246 907	+ 0.247 258	+ 0.247 675	+ 0.248 142	+ 0.248 638
3.90	+ 0.246 376	+ 0.246 721	+ 0.247 132	+ 0.247 591	+ 0.248 078
3.91	+ 0.245 847	+ 0.246 186	+ 0.246 590	+ 0.247 042	+ 0.247 522
3.92	+ 0.245 319	+ 0.245 653	+ 0.246 050	+ 0.246 494	+ 0.246 966
3.93	+ 0.244 792	+ 0.245 121	+ 0.245 512	+ 0.245 949	+ 0.246 413
3.94	+ 0.244 267	+ 0.244 590	+ 0.244 975	+ 0.245 405	+ 0.245 864
3.95	+ 0.243 744	+ 0.244 061	+ 0.244 440	+ 0.244 863	+ 0.245 313
3.96	+ 0.243 220	+ 0.243 533	+ 0.243 906	+ 0.244 322	+ 0.244 767
3.97	+ 0.242 691	+ 0.243 007	+ 0.243 374	+ 0.243 784	+ 0.244 221
3.98	+ 0.242 170	+ 0.242 483	+ 0.242 844	+ 0.243 247	+ 0.243 676
3.99	+ 0.241 663	+ 0.241 960	+ 0.242 315	+ 0.242 712	+ 0.243 136
4.00	+ 0.241 148	+ 0.241 438	+ 0.241 788	+ 0.242 179	+ 0.242 596

ψ z	40°	45°	50°	55°	60°
0.01	— 2.327 36	— 2.143 92	— 1.944 34	— 1.730 29	— 1.503 57
0.02	— 2.357 00	— 2.166 66	— 1.960 26	— 1.739 66	— 1.506 86
0.03	— 2.387 07	— 2.189 57	— 1.976 11	— 1.748 78	— 1.509 78
0.04	— 2.417 58	— 2.212 63	— 1.991 88	— 1.757 65	— 1.512 35
0.05	— 2.448 48	— 2.235 84	— 2.007 56	— 1.766 27	— 1.514 56
0.06	— 2.479 81	— 2.259 15	— 2.023 14	— 1.774 61	— 1.516 39
0.07	— 2.511 56	— 2.282 60	— 2.038 59	— 1.782 65	— 1.517 82
0.08	— 2.543 70	— 2.306 12	— 2.053 88	— 1.790 37	— 1.518 84
0.09	— 2.576 25	— 2.329 72	— 2.069 01	— 1.797 76	— 1.519 44
0.10	— 2.609 20	— 2.353 39	— 2.083 95	— 1.804 78	— 1.519 61
0.11	— 2.642 54	— 2.377 12	— 2.098 68	— 1.811 45	— 1.519 33
0.12	— 2.676 24	— 2.400 86	— 2.113 19	— 1.817 73	— 1.518 59
0.13	— 2.710 32	— 2.424 62	— 2.127 44	— 1.823 59	— 1.517 37
0.14	— 2.744 75	— 2.448 36	— 2.141 42	— 1.829 03	— 1.515 67
0.15	— 2.779 52	— 2.472 07	— 2.155 10	— 1.834 00	— 1.513 47
0.16	— 2.814 61	— 2.495 70	— 2.168 45	— 1.838 52	— 1.510 76
0.17	— 2.850 01	— 2.519 25	— 2.181 46	— 1.842 54	— 1.507 52
0.18	— 2.885 70	— 2.542 70	— 2.194 09	— 1.846 05	— 1.503 76
0.19	— 2.921 66	— 2.565 99	— 2.206 31	— 1.849 05	— 1.499 44
0.20	— 2.957 87	— 2.589 11	— 2.218 10	— 1.851 48	— 1.494 58
0.21	— 2.994 30	— 2.612 03	— 2.229 44	— 1.853 35	— 1.489 15
0.22	— 3.030 92	— 2.634 72	— 2.240 28	— 1.854 63	— 1.483 15
0.23	— 3.067 70	— 2.657 13	— 2.250 61	— 1.855 31	— 1.476 58
0.24	— 3.104 62	— 2.679 24	— 2.260 39	— 1.855 36	— 1.469 42
0.25	— 3.141 63	— 2.701 01	— 2.269 59	— 1.854 76	— 1.461 66
0.26	— 3.178 70	— 2.722 38	— 2.278 19	— 1.853 50	— 1.453 31
0.27	— 3.215 80	— 2.743 34	— 2.286 14	— 1.851 56	— 1.444 36
0.28	— 3.252 88	— 2.763 83	— 2.293 42	— 1.848 94	— 1.434 81
0.29	— 3.289 89	— 2.783 81	— 2.300 01	— 1.845 59	— 1.424 64
0.30	— 3.326 79	— 2.803 24	— 2.305 86	— 1.841 52	— 1.413 87
0.31	— 3.363 52	— 2.822 07	— 2.310 94	— 1.836 71	— 1.402 49
0.32	— 3.400 03	— 2.840 25	— 2.315 24	— 1.831 14	— 1.390 51
0.33	— 3.436 28	— 2.857 74	— 2.318 71	— 1.824 80	— 1.377 92
0.34	— 3.472 18	— 2.874 48	— 2.321 32	— 1.817 69	— 1.364 73
0.35	— 3.507 68	— 2.890 44	— 2.323 05	— 1.809 80	— 1.350 94
0.36	— 3.542 72	— 2.905 55	— 2.323 88	— 1.801 10	— 1.336 56

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z.	40°	45°	50°	55°	60°
0.36	— 3.542 72	— 2.905 55	— 2.323 88	— 1.801 10	— 1.336 56
0.37	— 3.577 23	— 2.919 76	— 2.323 76	— 1.791 61	— 1.321 60
0.38	— 3.611 13	— 2.933 03	— 2.322 68	— 1.781 31	— 1.306 05
0.39	— 3.644 35	— 2.945 30	— 2.320 60	— 1.770 20	— 1.290 95
0.40	— 3.676 80	— 2.956 52	— 2.317 52	— 1.758 28	— 1.273 28
0.41	— 3.708 41	— 2.966 63	— 2.313 39	— 1.745 54	— 1.256 08
0.42	— 3.739 09	— 2.975 59	— 2.308 21	— 1.731 99	— 1.238 34
0.43	— 3.768 76	— 2.983 35	— 2.301 96	— 1.717 63	— 1.220 08
0.44	— 3.797 33	— 2.989 85	— 2.294 61	— 1.702 46	— 1.201 32
0.45	— 3.824 71	— 2.995 05	— 2.286 15	— 1.686 50	— 1.182 08
0.46	— 3.850 81	— 2.998 89	— 2.276 57	— 1.669 74	— 1.162 36
0.47	— 3.875 53	— 3.001 34	— 2.265 86	— 1.652 20	— 1.142 20
0.48	— 3.898 78	— 3.002 34	— 2.254 01	— 1.633 89	— 1.121 00
0.49	— 3.920 46	— 3.001 87	— 2.241 01	— 1.614 83	— 1.100 60
0.50	— 3.940 48	— 2.999 87	— 2.226 87	— 1.595 02	— 1.079 20
0.51	— 3.958 75	— 2.996 30	— 2.211 58	— 1.574 50	— 1.057 44
0.52	— 3.975 17	— 2.991 15	— 2.195 14	— 1.553 26	— 1.035 33
0.53	— 3.989 64	— 2.984 37	— 2.177 56	— 1.531 35	— 1.012 80
0.54	— 4.002 08	— 2.975 94	— 2.158 85	— 1.508 76	— 0.990 161
0.55	— 4.012 40	— 2.965 83	— 2.139 01	— 1.485 55	— 0.967 154
0.56	— 4.020 50	— 2.954 03	— 2.118 07	— 1.461 71	— 0.943 805
0.57	— 4.026 32	— 2.940 52	— 2.096 03	— 1.437 29	— 0.920 412
0.58	— 4.029 77	— 2.925 30	— 2.072 93	— 1.412 31	— 0.896 727
0.59	— 4.030 77	— 2.908 35	— 2.048 78	— 1.386 80	— 0.872 867
0.60	— 4.029 27	— 2.889 67	— 2.023 60	— 1.360 79	— 0.848 856
0.61	— 4.025 20	— 2.869 28	— 1.997 43	— 1.334 31	— 0.824 721
0.62	— 4.018 50	— 2.847 17	— 1.970 29	— 1.307 39	— 0.800 485
0.63	— 4.009 12	— 2.823 36	— 1.942 22	— 1.280 06	— 0.776 175
0.64	— 3.997 03	— 2.797 88	— 1.913 26	— 1.252 36	— 0.751 814
0.65	— 3.982 20	— 2.770 74	— 1.883 44	— 1.224 32	— 0.727 428
0.66	— 3.964 59	— 2.741 97	— 1.852 80	— 1.195 98	— 0.703 042
0.67	— 3.944 20	— 2.711 62	— 1.821 38	— 1.167 37	— 0.678 677
0.68	— 3.921 03	— 2.679 71	— 1.789 23	— 1.138 53	— 0.654 358
0.69	— 3.895 07	— 2.646 30	— 1.756 40	— 1.109 48	— 0.630 106
0.70	— 3.866 34	— 2.611 43	— 1.722 92	— 1.080 27	— 0.605 945
0.71	— 3.834 86	— 2.575 15	— 1.688 85	— 1.050 93	— 0.581 897
0.72	— 3.800 68	— 2.537 52	— 1.654 24	— 1.021 49	— 0.557 980
0.73	— 3.763 83	— 2.498 61	— 1.619 14	— 0.991 984	— 0.534 215
0.74	— 3.724 36	— 2.458 48	— 1.583 59	— 0.962 448	— 0.510 623
0.75	— 3.682 36	— 2.417 18	— 1.547 64	— 0.932 915	— 0.487 221
0.76	— 3.637 87	— 2.374 81	— 1.511 36	— 0.903 415	— 0.464 026
0.77	— 3.591 00	— 2.331 42	— 1.474 78	— 0.873 979	— 0.441 056
0.78	— 3.541 82	— 2.287 10	— 1.437 96	— 0.844 639	— 0.418 326
0.79	— 3.490 45	— 2.241 91	— 1.400 96	— 0.815 419	— 0.395 851
0.80	— 3.436 97	— 2.195 94	— 1.363 80	— 0.786 356	— 0.373 645
0.81	— 3.381 51	— 2.149 28	— 1.326 56	— 0.757 469	— 0.351 721
0.82	— 3.324 19	— 2.101 99	— 1.289 27	— 0.728 787	— 0.330 093
0.83	— 3.265 13	— 2.054 16	— 1.251 98	— 0.700 334	— 0.308 770
0.84	— 3.204 45	— 2.005 86	— 1.214 74	— 0.672 135	— 0.287 764
0.85	— 3.142 29	— 1.957 19	— 1.177 59	— 0.644 213	— 0.267 083
0.86	— 3.078 79	— 1.908 22	— 1.140 57	— 0.616 583	— 0.246 737
0.87	— 3.014 07	— 1.859 01	— 1.103 73	— 0.589 271	— 0.226 734
0.88	— 2.948 20	— 1.809 66	— 1.067 10	— 0.562 293	— 0.207 080
0.89	— 2.881 58	— 1.760 23	— 1.030 72	— 0.535 668	— 0.187 782
0.90	— 2.814 08	— 1.710 80	— 0.994 632	— 0.509 410	— 0.168 846
0.91	— 2.745 91	— 1.661 44	— 0.958 863	— 0.483 534	— 0.150 275

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	40°	45°	50°	55°	60°
0.01	— 2.748 94	— 1.661 44	— 0.958 863	— 0.483 534	— 0.150 275
0.02	— 2.677 23	— 1.612 22	— 0.923 440	— 0.458 054	— 0.132 073
0.03	— 2.608 17	— 1.563 19	— 0.888 413	— 0.432 982	— 0.114 244
0.04	— 2.540 88	— 1.514 43	— 0.853 791	— 0.408 329	— 0.096 761
0.05	— 2.475 39	— 1.465 98	— 0.819 606	— 0.384 105	— 0.079 714
0.06	— 2.411 80	— 1.417 92	— 0.785 883	— 0.360 318	— 0.063 014
0.07	— 2.350 20	— 1.370 28	— 0.752 643	— 0.336 976	— 0.046 694
0.08	— 2.290 46	— 1.323 13	— 0.719 908	— 0.314 085	— 0.030 752
0.09	— 2.143 67	— 1.276 50	— 0.687 693	— 0.291 651	— 0.015 188
0.10	— 1.144 00	— 1.230 44	— 0.656 015	— 0.269 676	± 0.000 000
1.11	— 1.076 49	— 1.184 99	— 0.624 897	— 0.248 168	+ 0.014 813
1.12	— 1.080 28	— 1.140 19	— 0.594 342	— 0.227 126	+ 0.029 253
1.13	— 1.042 78	— 1.096 06	— 0.564 365	— 0.206 551	+ 0.043 322
1.14	— 1.087 06	— 1.052 64	— 0.534 975	— 0.186 445	+ 0.057 025
1.15	— 1.102 20	— 1.009 96	— 0.506 180	— 0.166 809	+ 0.070 363
1.16	— 1.128 23	— 0.968 043	— 0.477 986	— 0.147 641	+ 0.083 340
1.17	— 1.093 29	— 0.926 902	— 0.450 400	— 0.128 939	+ 0.095 962
1.18	— 1.093 36	— 0.886 560	— 0.423 424	— 0.110 702	+ 0.108 231
1.19	— 1.042 51	— 0.847 032	— 0.397 060	— 0.092 927	+ 0.120 152
1.20	— 1.082 78	— 0.808 332	— 0.371 311	— 0.075 610	+ 0.131 730
1.21	— 1.042 22	— 0.770 468	— 0.346 175	— 0.058 747	+ 0.142 970
1.22	— 0.960 85	— 0.733 450	— 0.321 652	— 0.042 334	+ 0.153 877
1.23	— 0.931 60	— 0.697 282	— 0.297 739	— 0.026 367	+ 0.164 457
1.24	— 0.925 78	— 0.661 968	— 0.274 433	— 0.010 840	+ 0.174 715
1.25	— 1.022 13	— 0.627 510	— 0.251 731	+ 0.004 253	+ 0.184 656
1.26	— 1.149 74	— 0.593 909	— 0.229 626	+ 0.018 918	+ 0.194 287
1.27	— 1.098 64	— 0.561 158	— 0.208 115	+ 0.033 100	+ 0.203 613
1.28	— 1.048 82	— 0.529 260	— 0.187 190	+ 0.046 687	+ 0.212 640
1.29	— 1.048 24	— 0.498 206	— 0.166 844	+ 0.060 405	+ 0.221 373
1.30	— 0.953 04	— 0.467 989	— 0.147 071	+ 0.073 421	+ 0.229 820
1.31	— 0.907 07	— 0.438 602	— 0.127 862	+ 0.086 042	+ 0.237 987
1.32	— 0.872 08	— 0.410 037	— 0.109 208	+ 0.098 270	+ 0.245 878
1.33	— 0.848 35	— 0.382 284	— 0.091 101	+ 0.110 129	+ 0.253 501
1.34	— 0.870 77	— 0.355 331	— 0.073 532	+ 0.121 611	+ 0.260 861
1.35	— 0.748 827	— 0.329 170	— 0.056 491	+ 0.132 727	+ 0.267 964
1.36	— 0.696 105	— 0.303 779	— 0.039 968	+ 0.143 486	+ 0.274 817
1.37	— 0.637 589	— 0.279 155	— 0.023 953	+ 0.153 895	+ 0.281 425
1.38	— 0.626 251	— 0.255 280	— 0.008 438	+ 0.163 964	+ 0.287 794
1.39	— 0.584 679	— 0.232 141	+ 0.006 590	+ 0.173 698	+ 0.293 930
1.30	— 0.549 652	— 0.209 724	+ 0.021 141	+ 0.183 106	+ 0.299 840
1.31	— 0.513 142	— 0.188 004	+ 0.035 225	+ 0.192 195	+ 0.305 520
1.32	— 0.482 301	— 0.166 993	+ 0.048 852	+ 0.200 974	+ 0.311 002
1.33	— 0.446 562	— 0.146 649	+ 0.062 034	+ 0.209 449	+ 0.316 205
1.34	— 0.419 962	— 0.126 965	+ 0.074 780	+ 0.217 629	+ 0.321 324
1.35	— 0.390 276	— 0.107 927	+ 0.087 102	+ 0.225 521	+ 0.326 185
1.36	— 0.361 570	— 0.089 518	+ 0.099 010	+ 0.233 153	+ 0.330 852
1.37	— 0.333 878	— 0.071 723	+ 0.110 514	+ 0.240 471	+ 0.335 331
1.38	— 0.307 634	— 0.054 525	+ 0.121 625	+ 0.247 543	+ 0.339 627
1.39	— 0.281 714	— 0.037 911	+ 0.132 352	+ 0.254 356	+ 0.343 746
1.40	— 0.256 362	— 0.021 893	+ 0.142 708	+ 0.260 915	+ 0.347 692
1.41	— 0.232 341	— 0.006 368	+ 0.152 700	+ 0.267 234	+ 0.351 470
1.42	— 0.209 144	+ 0.008 591	+ 0.162 339	+ 0.273 313	+ 0.355 086
1.43	— 0.186 768	+ 0.023 629	+ 0.171 636	+ 0.279 160	+ 0.358 513
1.44	— 0.165 191	+ 0.039 050	+ 0.180 599	+ 0.284 782	+ 0.361 847
1.45	— 0.144 390	+ 0.050 397	+ 0.189 238	+ 0.290 180	+ 0.365 002
1.46	— 0.124 341	+ 0.063 357	+ 0.197 562	+ 0.295 378	+ 0.368 012

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	40°	45°	50°	55°	60°
1.46	— 0.124 341	+ 0.063 357	+ 0.197 562	+ 0.295 378	+ 0.368 012
1.47	— 0.105 019	+ 0.075 853	+ 0.205 581	+ 0.300 364	+ 0.370 882
1.48	— 0.086 404	+ 0.087 899	+ 0.213 304	+ 0.305 151	+ 0.373 617
1.49	— 0.068 472	+ 0.099 509	+ 0.220 738	+ 0.309 743	+ 0.376 219
1.50	— 0.051 202	+ 0.110 695	+ 0.227 893	+ 0.314 148	+ 0.378 694
1.51	— 0.034 571	+ 0.121 471	+ 0.234 777	+ 0.318 370	+ 0.381 044
1.52	— 0.018 559	+ 0.131 850	+ 0.241 399	+ 0.322 416	+ 0.383 275
1.53	— 0.003 146	+ 0.141 843	+ 0.247 765	+ 0.326 289	+ 0.385 390
1.54	+ 0.011 688	+ 0.151 464	+ 0.253 886	+ 0.329 996	+ 0.387 392
1.55	+ 0.025 963	+ 0.160 723	+ 0.259 767	+ 0.333 542	+ 0.389 284
1.56	+ 0.039 698	+ 0.169 634	+ 0.265 416	+ 0.336 933	+ 0.391 072
1.57	+ 0.052 911	+ 0.178 206	+ 0.270 841	+ 0.340 172	+ 0.392 757
1.58	+ 0.065 620	+ 0.186 450	+ 0.276 048	+ 0.343 264	+ 0.394 343
1.59	+ 0.077 841	+ 0.194 378	+ 0.281 045	+ 0.346 215	+ 0.395 833
1.60	+ 0.089 593	+ 0.202 000	+ 0.285 838	+ 0.349 028	+ 0.397 230
1.61	+ 0.100 892	+ 0.209 325	+ 0.290 434	+ 0.351 709	+ 0.398 538
1.62	+ 0.111 752	+ 0.216 365	+ 0.294 838	+ 0.354 260	+ 0.399 759
1.63	+ 0.122 190	+ 0.223 127	+ 0.299 058	+ 0.356 688	+ 0.400 897
1.64	+ 0.132 220	+ 0.229 621	+ 0.303 099	+ 0.358 994	+ 0.401 953
1.65	+ 0.141 858	+ 0.235 857	+ 0.306 967	+ 0.361 184	+ 0.402 931
1.66	+ 0.151 116	+ 0.241 843	+ 0.310 668	+ 0.363 261	+ 0.403 832
1.67	+ 0.160 008	+ 0.247 587	+ 0.314 207	+ 0.365 229	+ 0.404 661
1.68	+ 0.168 548	+ 0.253 098	+ 0.317 589	+ 0.367 091	+ 0.405 419
1.69	+ 0.176 747	+ 0.258 384	+ 0.320 820	+ 0.368 852	+ 0.406 108
1.70	+ 0.184 619	+ 0.263 451	+ 0.323 905	+ 0.370 513	+ 0.406 732
1.71	+ 0.192 174	+ 0.268 309	+ 0.326 848	+ 0.372 079	+ 0.407 291
1.72	+ 0.199 425	+ 0.272 963	+ 0.329 654	+ 0.373 553	+ 0.407 789
1.73	+ 0.206 382	+ 0.277 421	+ 0.332 329	+ 0.374 938	+ 0.408 228
1.74	+ 0.213 055	+ 0.281 689	+ 0.334 875	+ 0.376 237	+ 0.408 609
1.75	+ 0.219 456	+ 0.285 775	+ 0.337 298	+ 0.377 452	+ 0.408 934
1.76	+ 0.225 593	+ 0.289 684	+ 0.339 602	+ 0.378 586	+ 0.409 206
1.77	+ 0.231 477	+ 0.293 422	+ 0.341 791	+ 0.379 644	+ 0.409 426
1.78	+ 0.237 117	+ 0.296 996	+ 0.343 868	+ 0.380 625	+ 0.409 596
1.79	+ 0.242 521	+ 0.300 412	+ 0.345 838	+ 0.381 535	+ 0.409 718
1.80	+ 0.247 698	+ 0.303 673	+ 0.347 703	+ 0.382 374	+ 0.409 794
1.81	+ 0.252 656	+ 0.306 787	+ 0.349 469	+ 0.383 146	+ 0.409 825
1.82	+ 0.257 404	+ 0.309 758	+ 0.351 137	+ 0.383 852	+ 0.409 813
1.83	+ 0.261 949	+ 0.312 591	+ 0.352 712	+ 0.384 496	+ 0.409 759
1.84	+ 0.266 297	+ 0.315 291	+ 0.354 196	+ 0.385 078	+ 0.409 666
1.85	+ 0.270 458	+ 0.317 862	+ 0.355 593	+ 0.385 602	+ 0.409 533
1.86	+ 0.274 436	+ 0.320 310	+ 0.356 906	+ 0.386 068	+ 0.409 364
1.87	+ 0.278 240	+ 0.322 638	+ 0.358 138	+ 0.386 481	+ 0.409 158
1.88	+ 0.281 874	+ 0.324 851	+ 0.359 291	+ 0.386 840	+ 0.408 918
1.89	+ 0.285 347	+ 0.326 952	+ 0.360 368	+ 0.387 148	+ 0.408 645
1.90	+ 0.288 662	+ 0.328 945	+ 0.361 372	+ 0.387 408	+ 0.408 340
1.91	+ 0.291 827	+ 0.330 837	+ 0.362 306	+ 0.387 620	+ 0.408 004
1.92	+ 0.294 846	+ 0.332 628	+ 0.363 171	+ 0.387 786	+ 0.407 639
1.93	+ 0.297 725	+ 0.334 322	+ 0.363 970	+ 0.387 908	+ 0.407 245
1.94	+ 0.300 469	+ 0.335 923	+ 0.364 700	+ 0.387 988	+ 0.406 823
1.95	+ 0.303 083	+ 0.337 435	+ 0.365 381	+ 0.388 026	+ 0.406 375
1.96	+ 0.305 571	+ 0.338 860	+ 0.365 997	+ 0.388 026	+ 0.405 902
1.97	+ 0.307 939	+ 0.340 202	+ 0.366 556	+ 0.387 987	+ 0.405 404
1.98	+ 0.310 190	+ 0.341 463	+ 0.367 060	+ 0.387 911	+ 0.404 883
1.99	+ 0.312 329	+ 0.342 646	+ 0.367 511	+ 0.387 800	+ 0.404 340
2.00	+ 0.314 360	+ 0.343 754	+ 0.367 910	+ 0.387 655	+ 0.403 775
2.01	+ 0.316 287	+ 0.344 798	+ 0.368 261	+ 0.387 475	+ 0.403 189

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's ¹_m Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	40°	45°	50°	55°	60°
2.01	+0.316 287	+0.344 708	+0.368 261	+0.387 475	+0.403 189
2.02	+0.318 113	+0.345 705	+0.368 563	+0.387 266	+0.402 584
2.03	+0.319 843	+0.346 664	+0.368 821	+0.387 027	+0.401 959
2.04	+0.321 470	+0.347 498	+0.369 033	+0.386 758	+0.401 316
2.05	+0.323 026	+0.348 271	+0.369 204	+0.386 462	+0.400 656
2.06	+0.324 480	+0.348 983	+0.369 333	+0.386 138	+0.399 978
2.07	+0.325 802	+0.349 637	+0.369 422	+0.385 788	+0.399 285
2.08	+0.327 130	+0.350 234	+0.369 474	+0.385 413	+0.398 576
2.09	+0.328 378	+0.350 778	+0.369 489	+0.385 014	+0.397 853
2.10	+0.329 522	+0.351 270	+0.369 468	+0.384 591	+0.397 116
2.11	+0.330 594	+0.351 712	+0.369 413	+0.384 147	+0.396 365
2.12	+0.331 597	+0.352 105	+0.369 325	+0.383 681	+0.395 601
2.13	+0.332 533	+0.352 452	+0.369 206	+0.383 194	+0.394 825
2.14	+0.333 403	+0.352 754	+0.369 056	+0.382 688	+0.394 037
2.15	+0.334 215	+0.353 012	+0.368 877	+0.382 163	+0.393 238
2.16	+0.334 965	+0.353 229	+0.368 670	+0.381 620	+0.392 428
2.17	+0.335 657	+0.353 406	+0.368 435	+0.381 059	+0.391 608
2.18	+0.336 294	+0.353 544	+0.368 175	+0.380 481	+0.390 779
2.19	+0.336 878	+0.353 644	+0.367 889	+0.379 888	+0.389 940
2.20	+0.337 410	+0.353 709	+0.367 579	+0.379 278	+0.389 093
2.21	+0.337 892	+0.353 739	+0.367 246	+0.378 655	+0.388 237
2.22	+0.338 327	+0.353 736	+0.366 890	+0.378 017	+0.387 374
2.23	+0.338 715	+0.353 701	+0.366 513	+0.377 365	+0.386 503
2.24	+0.339 060	+0.353 635	+0.366 115	+0.376 701	+0.385 625
2.25	+0.339 361	+0.353 538	+0.365 697	+0.376 024	+0.384 741
2.26	+0.339 621	+0.353 414	+0.365 260	+0.375 335	+0.383 850
2.27	+0.339 841	+0.353 261	+0.364 805	+0.374 636	+0.382 953
2.28	+0.340 024	+0.353 082	+0.364 332	+0.373 925	+0.382 050
2.29	+0.340 169	+0.352 878	+0.363 842	+0.373 204	+0.381 143
2.30	+0.340 279	+0.352 649	+0.363 335	+0.372 473	+0.380 230
2.31	+0.340 355	+0.352 396	+0.362 814	+0.371 733	+0.379 313
2.32	+0.340 398	+0.352 120	+0.362 277	+0.370 984	+0.378 392
2.33	+0.340 409	+0.351 823	+0.361 726	+0.370 226	+0.377 466
2.34	+0.340 389	+0.351 504	+0.361 161	+0.369 460	+0.376 537
2.35	+0.340 331	+0.351 166	+0.360 583	+0.368 687	+0.375 605
2.36	+0.340 264	+0.350 807	+0.359 993	+0.367 906	+0.374 669
2.37	+0.340 169	+0.350 430	+0.359 390	+0.367 118	+0.373 730
2.38	+0.340 030	+0.350 035	+0.358 776	+0.366 324	+0.372 789
2.39	+0.339 875	+0.349 623	+0.358 150	+0.365 523	+0.371 845
2.40	+0.339 695	+0.349 194	+0.357 515	+0.364 717	+0.370 899
2.41	+0.339 492	+0.348 749	+0.356 869	+0.363 905	+0.369 951
2.42	+0.339 266	+0.348 289	+0.356 213	+0.363 088	+0.369 001
2.43	+0.339 019	+0.347 814	+0.355 548	+0.362 266	+0.368 050
2.44	+0.338 751	+0.347 326	+0.354 874	+0.361 439	+0.367 097
2.45	+0.338 463	+0.346 823	+0.354 192	+0.360 608	+0.366 143
2.46	+0.338 156	+0.346 308	+0.353 502	+0.359 772	+0.365 188
2.47	+0.337 830	+0.345 780	+0.352 804	+0.358 933	+0.364 232
2.48	+0.337 487	+0.345 240	+0.352 099	+0.358 091	+0.363 276
2.49	+0.337 127	+0.344 680	+0.351 387	+0.357 245	+0.362 319
2.50	+0.336 750	+0.344 126	+0.350 669	+0.356 396	+0.361 362
2.51	+0.336 357	+0.343 554	+0.349 944	+0.355 544	+0.360 404
2.52	+0.335 949	+0.342 971	+0.349 213	+0.354 689	+0.359 447
2.53	+0.335 527	+0.342 379	+0.348 477	+0.353 832	+0.358 489
2.54	+0.335 090	+0.341 778	+0.347 735	+0.352 973	+0.357 532
2.55	+0.334 641	+0.341 167	+0.346 989	+0.352 112	+0.356 575
2.56	+0.334 178	+0.340 549	+0.346 238	+0.351 249	+0.355 619

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	40°	45°	50°	55°	60°
2.56	+0.334 178	+0.340 549	+0.346 238	+0.351 249	+0.355 619
2.57	+0.333 703	+0.339 922	+0.345 482	+0.350 384	+0.354 664
2.58	+0.333 217	+0.339 288	+0.344 722	+0.349 518	+0.353 709
2.59	+0.332 718	+0.338 647	+0.343 958	+0.348 651	+0.352 755
2.60	+0.332 209	+0.337 998	+0.343 191	+0.347 782	+0.351 802
2.61	+0.331 690	+0.337 343	+0.342 419	+0.346 913	+0.350 850
2.62	+0.331 161	+0.336 682	+0.341 645	+0.346 043	+0.349 890
2.63	+0.330 622	+0.336 015	+0.340 868	+0.345 172	+0.348 950
2.64	+0.330 074	+0.335 343	+0.340 088	+0.344 301	+0.348 002
2.65	+0.329 517	+0.334 664	+0.339 305	+0.343 429	+0.347 055
2.66	+0.328 952	+0.333 981	+0.338 520	+0.342 559	+0.346 110
2.67	+0.328 378	+0.333 292	+0.337 733	+0.341 686	+0.345 167
2.68	+0.327 798	+0.332 600	+0.336 943	+0.340 813	+0.344 225
2.69	+0.327 210	+0.331 903	+0.336 152	+0.339 942	+0.343 285
2.70	+0.326 614	+0.331 202	+0.335 359	+0.339 070	+0.342 347
2.71	+0.326 013	+0.330 498	+0.334 565	+0.338 199	+0.341 411
2.72	+0.325 405	+0.329 788	+0.333 769	+0.337 329	+0.340 477
2.73	+0.324 791	+0.329 077	+0.332 972	+0.336 459	+0.339 545
2.74	+0.324 171	+0.328 362	+0.332 174	+0.335 589	+0.338 615
2.75	+0.323 546	+0.327 644	+0.331 375	+0.334 720	+0.337 687
2.76	+0.322 915	+0.326 923	+0.330 575	+0.333 853	+0.336 762
2.77	+0.322 280	+0.326 200	+0.329 775	+0.332 987	+0.335 839
2.78	+0.321 640	+0.325 474	+0.328 974	+0.332 121	+0.334 918
2.79	+0.320 995	+0.324 746	+0.328 173	+0.331 257	+0.333 990
2.80	+0.320 347	+0.324 015	+0.327 372	+0.330 394	+0.333 083
2.81	+0.319 694	+0.323 284	+0.326 570	+0.329 532	+0.332 170
2.82	+0.319 038	+0.322 550	+0.325 768	+0.328 671	+0.331 259
2.83	+0.318 378	+0.321 815	+0.324 967	+0.327 812	+0.330 351
2.84	+0.317 715	+0.321 078	+0.324 166	+0.326 955	+0.329 445
2.85	+0.317 048	+0.320 341	+0.323 365	+0.326 099	+0.328 542
2.86	+0.316 379	+0.319 601	+0.322 564	+0.325 245	+0.327 641
2.87	+0.315 707	+0.318 862	+0.321 764	+0.324 392	+0.326 744
2.88	+0.315 033	+0.318 121	+0.320 964	+0.323 541	+0.325 849
2.89	+0.314 356	+0.317 378	+0.320 165	+0.322 692	+0.324 957
2.90	+0.313 677	+0.316 637	+0.319 367	+0.321 845	+0.324 067
2.91	+0.312 996	+0.315 894	+0.318 570	+0.321 000	+0.323 181
2.92	+0.312 313	+0.315 151	+0.317 773	+0.320 157	+0.322 297
2.93	+0.311 628	+0.314 408	+0.316 978	+0.319 316	+0.321 417
2.94	+0.310 942	+0.313 664	+0.316 183	+0.318 477	+0.320 539
2.95	+0.310 254	+0.312 920	+0.315 390	+0.317 640	+0.319 664
2.96	+0.309 564	+0.312 177	+0.314 597	+0.316 805	+0.318 792
2.97	+0.308 874	+0.311 433	+0.313 806	+0.315 972	+0.317 924
2.98	+0.308 183	+0.310 690	+0.313 017	+0.315 142	+0.317 058
2.99	+0.307 490	+0.309 947	+0.312 220	+0.314 314	+0.316 195
3.00	+0.306 797	+0.309 204	+0.311 442	+0.313 488	+0.315 335
3.01	+0.306 103	+0.308 462	+0.310 650	+0.312 664	+0.314 478
3.02	+0.305 409	+0.307 721	+0.309 872	+0.311 843	+0.313 625
3.03	+0.304 714	+0.306 980	+0.309 090	+0.311 024	+0.312 774
3.04	+0.304 018	+0.306 239	+0.308 309	+0.310 208	+0.311 926
3.05	+0.303 323	+0.305 500	+0.307 530	+0.309 394	+0.311 082
3.06	+0.302 627	+0.304 761	+0.306 753	+0.308 583	+0.310 241
3.07	+0.301 931	+0.304 023	+0.305 978	+0.307 774	+0.309 403
3.08	+0.301 235	+0.303 286	+0.305 204	+0.306 967	+0.308 567
3.09	+0.300 539	+0.302 550	+0.304 432	+0.306 163	+0.307 736
3.10	+0.299 844	+0.301 815	+0.303 662	+0.305 362	+0.306 907
3.11	+0.299 148	+0.301 082	+0.302 894	+0.304 563	+0.306 081

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z.	40°	45°	50°	55°	60°
3.11	+ 0.290 148	+ 0.301 082	+ 0.302 894	+ 0.304 563	+ 0.306 081
3.12	+ 0.298 453	+ 0.300 350	+ 0.302 128	+ 0.303 767	+ 0.305 259
3.13	+ 0.297 758	+ 0.299 619	+ 0.301 364	+ 0.302 973	+ 0.304 439
3.14	+ 0.297 064	+ 0.298 889	+ 0.300 602	+ 0.302 183	+ 0.303 623
3.15	+ 0.296 370	+ 0.298 160	+ 0.299 842	+ 0.301 395	+ 0.302 810
3.16	+ 0.295 677	+ 0.297 433	+ 0.299 084	+ 0.300 609	+ 0.302 000
3.17	+ 0.294 985	+ 0.296 707	+ 0.298 328	+ 0.299 826	+ 0.301 193
3.18	+ 0.294 293	+ 0.295 983	+ 0.297 574	+ 0.299 046	+ 0.300 390
3.19	+ 0.293 602	+ 0.295 260	+ 0.296 822	+ 0.298 268	+ 0.299 589
3.20	+ 0.292 912	+ 0.294 539	+ 0.296 073	+ 0.297 494	+ 0.298 792
3.21	+ 0.292 223	+ 0.293 820	+ 0.295 325	+ 0.296 721	+ 0.297 998
3.22	+ 0.291 534	+ 0.293 102	+ 0.294 580	+ 0.295 952	+ 0.297 207
3.23	+ 0.290 847	+ 0.292 385	+ 0.293 838	+ 0.295 185	+ 0.296 420
3.24	+ 0.290 161	+ 0.291 671	+ 0.293 097	+ 0.294 422	+ 0.295 635
3.25	+ 0.289 476	+ 0.290 958	+ 0.292 359	+ 0.293 660	+ 0.294 854
3.26	+ 0.288 792	+ 0.290 247	+ 0.291 623	+ 0.292 902	+ 0.294 075
3.27	+ 0.288 109	+ 0.289 538	+ 0.290 889	+ 0.292 146	+ 0.293 300
3.28	+ 0.287 428	+ 0.288 830	+ 0.290 158	+ 0.291 394	+ 0.292 528
3.29	+ 0.286 748	+ 0.288 124	+ 0.289 429	+ 0.290 643	+ 0.291 760
3.30	+ 0.286 069	+ 0.287 420	+ 0.288 702	+ 0.289 896	+ 0.290 994
3.31	+ 0.285 391	+ 0.286 718	+ 0.287 978	+ 0.289 152	+ 0.290 231
3.32	+ 0.284 715	+ 0.286 018	+ 0.287 256	+ 0.288 410	+ 0.289 472
3.33	+ 0.284 040	+ 0.285 320	+ 0.286 536	+ 0.287 671	+ 0.288 716
3.34	+ 0.283 367	+ 0.284 624	+ 0.285 819	+ 0.286 935	+ 0.287 963
3.35	+ 0.282 696	+ 0.283 930	+ 0.285 104	+ 0.286 201	+ 0.287 212
3.36	+ 0.282 025	+ 0.283 238	+ 0.284 392	+ 0.285 471	+ 0.286 466
3.37	+ 0.281 357	+ 0.282 548	+ 0.283 682	+ 0.284 743	+ 0.285 722
3.38	+ 0.280 690	+ 0.281 860	+ 0.282 974	+ 0.284 018	+ 0.284 981
3.39	+ 0.280 024	+ 0.281 174	+ 0.282 269	+ 0.283 295	+ 0.284 243
3.40	+ 0.279 360	+ 0.280 490	+ 0.281 567	+ 0.282 576	+ 0.283 509
3.41	+ 0.278 698	+ 0.279 808	+ 0.280 867	+ 0.281 859	+ 0.282 777
3.42	+ 0.278 038	+ 0.279 128	+ 0.280 169	+ 0.281 145	+ 0.282 049
3.43	+ 0.277 379	+ 0.278 450	+ 0.279 474	+ 0.280 434	+ 0.281 323
3.44	+ 0.276 722	+ 0.277 775	+ 0.278 781	+ 0.279 726	+ 0.280 601
3.45	+ 0.276 066	+ 0.277 101	+ 0.278 091	+ 0.279 020	+ 0.279 881
3.46	+ 0.275 413	+ 0.276 430	+ 0.277 403	+ 0.278 317	+ 0.279 165
3.47	+ 0.274 761	+ 0.275 761	+ 0.276 718	+ 0.277 617	+ 0.278 452
3.48	+ 0.274 111	+ 0.275 094	+ 0.276 035	+ 0.276 920	+ 0.277 741
3.49	+ 0.273 463	+ 0.274 429	+ 0.275 354	+ 0.276 225	+ 0.277 034
3.50	+ 0.272 817	+ 0.273 766	+ 0.274 676	+ 0.275 534	+ 0.276 329
3.51	+ 0.272 172	+ 0.273 106	+ 0.274 001	+ 0.274 844	+ 0.275 628
3.52	+ 0.271 530	+ 0.272 447	+ 0.273 328	+ 0.274 158	+ 0.274 930
3.53	+ 0.270 889	+ 0.271 791	+ 0.272 658	+ 0.273 475	+ 0.274 234
3.54	+ 0.270 250	+ 0.271 137	+ 0.271 990	+ 0.272 794	+ 0.273 542
3.55	+ 0.269 613	+ 0.270 486	+ 0.271 324	+ 0.272 116	+ 0.272 852
3.56	+ 0.268 978	+ 0.269 836	+ 0.270 661	+ 0.271 440	+ 0.272 165
3.57	+ 0.268 345	+ 0.269 189	+ 0.270 001	+ 0.270 767	+ 0.271 482
3.58	+ 0.267 714	+ 0.268 545	+ 0.269 342	+ 0.270 097	+ 0.270 801
3.59	+ 0.267 085	+ 0.267 901	+ 0.268 687	+ 0.269 430	+ 0.270 123
3.60	+ 0.266 458	+ 0.267 260	+ 0.268 034	+ 0.268 765	+ 0.269 448
3.61	+ 0.265 833	+ 0.266 622	+ 0.267 383	+ 0.268 103	+ 0.268 775
3.62	+ 0.265 210	+ 0.265 986	+ 0.266 735	+ 0.267 444	+ 0.268 100
3.63	+ 0.264 588	+ 0.265 352	+ 0.266 080	+ 0.266 787	+ 0.267 439
3.64	+ 0.263 960	+ 0.264 720	+ 0.265 410	+ 0.266 133	+ 0.266 770
3.65	+ 0.263 352	+ 0.264 091	+ 0.264 805	+ 0.265 482	+ 0.266 115
3.66	+ 0.262 737	+ 0.263 464	+ 0.264 167	+ 0.264 833	+ 0.265 457

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	40°	45°	50°	55°	60°
3.66	+ 0.262 737	+ 0.263 464	+ 0.264 167	+ 0.264 833	+ 0.265 457
3.67	+ 0.262 123	+ 0.262 839	+ 0.263 531	+ 0.264 187	+ 0.264 801
3.68	+ 0.261 512	+ 0.262 216	+ 0.262 897	+ 0.263 543	+ 0.264 149
3.69	+ 0.260 903	+ 0.261 590	+ 0.262 266	+ 0.262 903	+ 0.263 499
3.70	+ 0.260 296	+ 0.260 977	+ 0.261 637	+ 0.262 264	+ 0.262 852
3.71	+ 0.259 690	+ 0.260 361	+ 0.261 011	+ 0.261 629	+ 0.262 208
3.72	+ 0.259 087	+ 0.259 748	+ 0.260 387	+ 0.260 996	+ 0.261 566
3.73	+ 0.258 480	+ 0.259 136	+ 0.259 766	+ 0.260 365	+ 0.260 928
3.74	+ 0.257 887	+ 0.258 527	+ 0.259 147	+ 0.259 738	+ 0.260 291
3.75	+ 0.257 290	+ 0.257 920	+ 0.258 531	+ 0.259 112	+ 0.259 658
3.76	+ 0.256 695	+ 0.257 315	+ 0.257 916	+ 0.258 489	+ 0.259 027
3.77	+ 0.256 102	+ 0.256 712	+ 0.257 305	+ 0.257 869	+ 0.258 399
3.78	+ 0.255 511	+ 0.256 112	+ 0.256 695	+ 0.257 251	+ 0.257 774
3.79	+ 0.254 922	+ 0.255 514	+ 0.256 088	+ 0.256 636	+ 0.257 151
3.80	+ 0.254 336	+ 0.254 918	+ 0.255 484	+ 0.256 023	+ 0.256 531
3.81	+ 0.253 751	+ 0.254 324	+ 0.254 881	+ 0.255 413	+ 0.255 914
3.82	+ 0.253 168	+ 0.253 732	+ 0.254 281	+ 0.254 806	+ 0.255 299
3.83	+ 0.252 587	+ 0.253 143	+ 0.253 684	+ 0.254 200	+ 0.254 687
3.84	+ 0.252 009	+ 0.252 556	+ 0.253 089	+ 0.253 598	+ 0.254 077
3.85	+ 0.251 432	+ 0.251 971	+ 0.252 496	+ 0.252 998	+ 0.253 470
3.86	+ 0.250 857	+ 0.251 388	+ 0.251 905	+ 0.252 400	+ 0.252 866
3.87	+ 0.250 285	+ 0.250 808	+ 0.251 317	+ 0.251 804	+ 0.252 264
3.88	+ 0.249 714	+ 0.250 229	+ 0.250 731	+ 0.251 212	+ 0.251 665
3.89	+ 0.249 146	+ 0.249 653	+ 0.250 147	+ 0.250 621	+ 0.251 068
3.90	+ 0.248 579	+ 0.249 079	+ 0.249 566	+ 0.250 033	+ 0.250 474
3.91	+ 0.248 015	+ 0.248 507	+ 0.248 987	+ 0.249 447	+ 0.249 882
3.92	+ 0.247 452	+ 0.247 937	+ 0.248 410	+ 0.248 864	+ 0.249 292
3.93	+ 0.246 892	+ 0.247 369	+ 0.247 836	+ 0.248 283	+ 0.248 706
3.94	+ 0.246 334	+ 0.246 804	+ 0.247 264	+ 0.247 704	+ 0.248 121
3.95	+ 0.245 777	+ 0.246 241	+ 0.246 694	+ 0.247 128	+ 0.247 539
3.96	+ 0.245 223	+ 0.245 680	+ 0.246 126	+ 0.246 554	+ 0.246 960
3.97	+ 0.244 671	+ 0.245 121	+ 0.245 560	+ 0.245 983	+ 0.246 383
3.98	+ 0.244 120	+ 0.244 564	+ 0.244 997	+ 0.245 414	+ 0.245 808
3.99	+ 0.243 572	+ 0.244 009	+ 0.244 436	+ 0.244 847	+ 0.245 236
4.00	+ 0.243 026	+ 0.243 456	+ 0.243 877	+ 0.244 282	+ 0.244 666

ψ z	65°	70°	75°	80°	85°
0.01	— 1.266 00	1.019 65	— 0.760 31	— 0.508 00	— 0.240 07
0.02	— 1.263 80	1.012 86	— 0.755 86	— 0.404 00	— 0.232 36
0.03	— 1.261 33	— 1.005 08	— 0.745 06	— 0.481 67	— 0.217 64
0.04	— 1.258 37	— 0.998 12	— 0.733 94	— 0.468 12	— 0.202 82
0.05	— 1.255 01	— 0.990 20	— 0.722 54	— 0.454 38	— 0.187 93
0.06	— 1.251 25	— 0.981 87	— 0.710 80	— 0.440 42	— 0.172 05
0.07	— 1.247 04	— 0.973 16	— 0.698 75	— 0.426 26	— 0.157 91
0.08	— 1.242 43	— 0.964 05	— 0.686 41	— 0.411 94	— 0.142 82
0.09	— 1.237 37	— 0.954 56	— 0.673 77	— 0.397 42	— 0.127 68
0.10	— 1.231 87	— 0.944 68	— 0.660 83	— 0.382 75	— 0.112 51
0.11	— 1.225 92	— 0.934 41	— 0.647 62	— 0.367 92	— 0.097 33
0.12	— 1.219 52	— 0.923 76	— 0.634 13	— 0.352 95	— 0.082 14
0.13	— 1.212 65	— 0.912 72	— 0.620 37	— 0.337 85	— 0.066 95
0.14	— 1.205 33	— 0.901 30	— 0.606 35	— 0.322 62	— 0.051 78
0.15	— 1.197 53	— 0.889 51	— 0.592 08	— 0.307 28	— 0.036 63
0.16	— 1.189 26	— 0.877 34	— 0.577 57	— 0.291 85	— 0.021 53

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	65°	70°	75°	80°	85°
0.16	— 1.189 26	— 0.877 34	— 0.577 57	— 0.291 85	— 0.021 53
0.17	— 1.180 52	— 0.864 81	— 0.562 85	— 0.276 33	— 0.006 48
0.18	— 1.171 31	— 0.851 91	— 0.547 87	— 0.260 73	+ 0.008 52
0.19	— 1.161 62	— 0.838 65	— 0.532 69	— 0.245 08	+ 0.023 44
0.20	— 1.151 46	— 0.825 05	— 0.517 31	— 0.229 37	+ 0.038 29
0.21	— 1.140 82	— 0.811 109	— 0.501 741	— 0.213 624	+ 0.053 037
0.22	— 1.129 70	— 0.796 834	— 0.486 014	— 0.197 853	+ 0.067 677
0.23	— 1.118 11	— 0.782 233	— 0.470 111	— 0.182 070	+ 0.082 216
0.24	— 1.106 06	— 0.767 316	— 0.454 059	— 0.166 285	+ 0.096 627
0.25	— 1.093 54	— 0.752 096	— 0.437 868	— 0.150 509	+ 0.110 907
0.26	— 1.080 56	— 0.736 583	— 0.421 551	— 0.134 761	+ 0.125 045
0.27	— 1.067 12	— 0.720 786	— 0.405 121	— 0.119 044	+ 0.139 030
0.28	— 1.053 23	— 0.704 720	— 0.388 593	— 0.103 375	+ 0.152 863
0.29	— 1.038 90	— 0.688 306	— 0.371 978	— 0.087 764	+ 0.166 530
0.30	— 1.024 14	— 0.671 827	— 0.355 291	— 0.072 224	+ 0.180 022
0.31	— 1.008 00	— 0.655 020	— 0.338 546	— 0.056 764	+ 0.193 332
0.32	— 0.993 358	— 0.638 005	— 0.321 755	— 0.041 395	+ 0.206 456
0.33	— 0.977 356	— 0.620 782	— 0.304 933	— 0.026 131	+ 0.219 385
0.34	— 0.960 963	— 0.603 369	— 0.288 095	— 0.010 978	+ 0.232 114
0.35	— 0.944 189	— 0.585 781	— 0.271 250	+ 0.004 051	+ 0.244 635
0.36	— 0.927 150	— 0.568 035	— 0.254 417	+ 0.018 947	+ 0.256 946
0.37	— 0.909 558	— 0.550 142	— 0.237 605	+ 0.033 701	+ 0.269 041
0.38	— 0.891 727	— 0.532 123	— 0.220 830	+ 0.048 303	+ 0.280 915
0.39	— 0.873 574	— 0.513 990	— 0.204 103	+ 0.062 747	+ 0.292 563
0.40	— 0.855 114	— 0.495 761	— 0.187 437	+ 0.077 022	+ 0.303 982
0.41	— 0.836 303	— 0.477 450	— 0.170 846	+ 0.091 121	+ 0.315 170
0.42	— 0.817 330	— 0.459 074	— 0.154 341	+ 0.105 036	+ 0.326 123
0.43	— 0.798 001	— 0.440 040	— 0.137 934	+ 0.118 761	+ 0.336 838
0.44	— 0.778 544	— 0.422 100	— 0.121 636	+ 0.132 289	+ 0.347 313
0.45	— 0.758 804	— 0.403 714	— 0.105 459	+ 0.145 611	+ 0.357 546
0.46	— 0.738 867	— 0.385 238	— 0.089 414	+ 0.158 726	+ 0.367 537
0.47	— 0.718 747	— 0.366 774	— 0.073 511	+ 0.171 626	+ 0.377 283
0.48	— 0.698 405	— 0.348 338	— 0.057 759	+ 0.184 306	+ 0.386 783
0.49	— 0.678 038	— 0.329 947	— 0.042 170	+ 0.196 761	+ 0.396 039
0.50	— 0.657 480	— 0.311 614	— 0.026 752	+ 0.208 987	+ 0.405 048
0.51	— 0.636 832	— 0.293 355	— 0.011 513	+ 0.220 982	+ 0.413 812
0.52	— 0.616 002	— 0.275 183	+ 0.003 537	+ 0.232 742	+ 0.422 331
0.53	— 0.595 286	— 0.257 112	+ 0.018 392	+ 0.244 262	+ 0.430 606
0.54	— 0.574 436	— 0.239 155	+ 0.033 043	+ 0.255 542	+ 0.438 637
0.55	— 0.553 557	— 0.221 325	+ 0.047 484	+ 0.266 579	+ 0.446 426
0.56	— 0.532 670	— 0.203 634	+ 0.061 707	+ 0.277 372	+ 0.453 974
0.57	— 0.511 796	— 0.186 090	+ 0.075 711	+ 0.287 915	+ 0.461 285
0.58	— 0.490 951	— 0.168 720	+ 0.089 485	+ 0.298 214	+ 0.468 357
0.59	— 0.470 153	— 0.151 519	+ 0.103 025	+ 0.308 264	+ 0.475 196
0.60	— 0.449 421	— 0.134 500	+ 0.116 328	+ 0.318 065	+ 0.481 802
0.61	— 0.428 771	— 0.117 678	+ 0.129 389	+ 0.327 618	+ 0.488 178
0.62	— 0.408 222	— 0.101 058	+ 0.142 204	+ 0.336 923	+ 0.494 327
0.63	— 0.387 787	— 0.084 652	+ 0.154 770	+ 0.345 080	+ 0.500 252
0.64	— 0.367 486	— 0.068 466	+ 0.167 084	+ 0.354 790	+ 0.505 956
0.65	— 0.347 330	— 0.052 509	+ 0.179 144	+ 0.363 354	+ 0.511 442
0.66	— 0.327 335	— 0.036 788	+ 0.190 948	+ 0.371 674	+ 0.516 713
0.67	— 0.307 517	— 0.021 310	+ 0.202 495	+ 0.379 752	+ 0.521 772
0.68	— 0.287 888	— 0.006 081	+ 0.213 782	+ 0.387 588	+ 0.526 623
0.69	— 0.268 460	+ 0.008 894	+ 0.224 809	+ 0.395 185	+ 0.531 209
0.70	— 0.249 246	+ 0.023 610	+ 0.235 577	+ 0.402 545	+ 0.535 710
0.71	— 0.230 259	+ 0.038 061	+ 0.246 084	+ 0.409 672	+ 0.539 965

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppölzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der
geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	65°	70°	75°	80°	85°
0.71	— 0.230 259	+ 0.038 061	+ 0.246 084	+ 0.409 672	+ 0.539 965
0.72	— 0.211 506	+ 0.052 248	+ 0.256 330	+ 0.416 566	+ 0.544 019
0.73	— 0.193 001	+ 0.066 158	+ 0.266 317	+ 0.423 231	+ 0.547 885
0.74	— 0.174 752	+ 0.079 795	+ 0.276 042	+ 0.429 671	+ 0.551 565
0.75	— 0.156 766	+ 0.093 154	+ 0.285 515	+ 0.435 887	+ 0.555 063
0.76	— 0.139 052	+ 0.106 239	+ 0.294 729	+ 0.441 884	+ 0.558 383
0.77	— 0.121 618	+ 0.119 038	+ 0.303 690	+ 0.447 664	+ 0.561 529
0.78	— 0.104 471	+ 0.131 558	+ 0.312 393	+ 0.453 231	+ 0.564 504
0.79	— 0.087 616	+ 0.143 793	+ 0.320 837	+ 0.458 588	+ 0.567 314
0.80	— 0.071 060	+ 0.155 746	+ 0.329 056	+ 0.463 740	+ 0.569 961
0.81	— 0.054 805	+ 0.167 416	+ 0.337 018	+ 0.468 688	+ 0.572 449
0.82	— 0.038 858	+ 0.178 803	+ 0.344 735	+ 0.473 439	+ 0.574 784
0.83	— 0.023 222	+ 0.189 907	+ 0.352 213	+ 0.477 994	+ 0.576 967
0.84	— 0.007 898	+ 0.200 731	+ 0.359 453	+ 0.482 358	+ 0.579 004
0.85	+ 0.007 109	+ 0.211 275	+ 0.366 459	+ 0.486 534	+ 0.580 898
0.86	+ 0.021 799	+ 0.221 542	+ 0.373 235	+ 0.490 527	+ 0.582 652
0.87	+ 0.036 169	+ 0.231 532	+ 0.379 783	+ 0.494 341	+ 0.584 271
0.88	+ 0.050 220	+ 0.241 249	+ 0.386 107	+ 0.497 979	+ 0.585 758
0.89	+ 0.063 950	+ 0.250 693	+ 0.392 211	+ 0.501 445	+ 0.587 118
0.90	+ 0.077 360	+ 0.259 870	+ 0.398 098	+ 0.504 743	+ 0.588 353
0.91	+ 0.090 450	+ 0.268 780	+ 0.403 772	+ 0.507 877	+ 0.589 467
0.92	+ 0.103 221	+ 0.277 428	+ 0.409 238	+ 0.510 852	+ 0.590 464
0.93	+ 0.115 675	+ 0.285 817	+ 0.414 500	+ 0.513 670	+ 0.591 347
0.94	+ 0.127 812	+ 0.293 949	+ 0.419 558	+ 0.516 335	+ 0.592 120
0.95	+ 0.139 636	+ 0.301 829	+ 0.424 423	+ 0.518 852	+ 0.592 785
0.96	+ 0.151 148	+ 0.309 460	+ 0.429 093	+ 0.521 224	+ 0.593 347
0.97	+ 0.162 352	+ 0.316 846	+ 0.433 574	+ 0.523 455	+ 0.593 800
0.98	+ 0.173 249	+ 0.323 902	+ 0.437 871	+ 0.525 549	+ 0.594 173
0.99	+ 0.183 843	+ 0.330 900	+ 0.441 988	+ 0.527 509	+ 0.594 443
1.00	+ 0.194 138	+ 0.337 576	+ 0.445 925	+ 0.529 340	+ 0.594 622
1.01	+ 0.204 138	+ 0.344 023	+ 0.449 691	+ 0.531 044	+ 0.594 713
1.02	+ 0.213 845	+ 0.350 245	+ 0.453 289	+ 0.532 625	+ 0.594 719
1.03	+ 0.223 204	+ 0.356 249	+ 0.456 723	+ 0.534 086	+ 0.594 642
1.04	+ 0.232 400	+ 0.362 035	+ 0.459 994	+ 0.535 432	+ 0.594 480
1.05	+ 0.241 256	+ 0.367 610	+ 0.463 111	+ 0.536 665	+ 0.594 253
1.06	+ 0.249 838	+ 0.372 979	+ 0.466 072	+ 0.537 789	+ 0.593 947
1.07	+ 0.258 150	+ 0.378 145	+ 0.468 886	+ 0.538 807	+ 0.593 568
1.08	+ 0.266 194	+ 0.383 113	+ 0.471 555	+ 0.539 722	+ 0.593 121
1.09	+ 0.273 980	+ 0.387 887	+ 0.474 083	+ 0.540 538	+ 0.592 608
1.10	+ 0.281 509	+ 0.392 473	+ 0.476 473	+ 0.541 256	+ 0.592 025
1.11	+ 0.288 788	+ 0.396 873	+ 0.478 730	+ 0.541 882	+ 0.591 391
1.12	+ 0.295 819	+ 0.401 092	+ 0.480 857	+ 0.542 417	+ 0.590 693
1.13	+ 0.302 609	+ 0.405 136	+ 0.482 857	+ 0.542 864	+ 0.589 937
1.14	+ 0.309 161	+ 0.409 007	+ 0.484 733	+ 0.543 226	+ 0.589 127
1.15	+ 0.315 487	+ 0.412 711	+ 0.486 492	+ 0.543 506	+ 0.588 264
1.16	+ 0.321 584	+ 0.416 252	+ 0.488 133	+ 0.543 707	+ 0.587 351
1.17	+ 0.327 491	+ 0.419 633	+ 0.489 663	+ 0.543 831	+ 0.586 389
1.18	+ 0.333 121	+ 0.422 850	+ 0.491 083	+ 0.543 881	+ 0.585 379
1.19	+ 0.338 571	+ 0.425 934	+ 0.492 398	+ 0.543 859	+ 0.584 326
1.20	+ 0.343 815	+ 0.428 802	+ 0.493 607	+ 0.543 768	+ 0.583 229
1.21	+ 0.348 857	+ 0.431 647	+ 0.494 718	+ 0.543 611	+ 0.582 092
1.22	+ 0.353 704	+ 0.434 293	+ 0.495 733	+ 0.543 388	+ 0.580 915
1.23	+ 0.358 350	+ 0.436 804	+ 0.496 653	+ 0.543 104	+ 0.579 700
1.24	+ 0.362 828	+ 0.439 183	+ 0.497 483	+ 0.542 760	+ 0.578 450
1.25	+ 0.367 115	+ 0.441 435	+ 0.498 225	+ 0.542 358	+ 0.577 165
1.26	+ 0.371 225	+ 0.443 501	+ 0.498 880	+ 0.541 901	+ 0.575 847

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	65°	70°	75°	80°	85°
1.20	+0.371 225	+0.443 561	+0.498 830	+0.541 901	+0.573 817
1.27	+0.375 163	+0.445 569	+0.499 456	+0.541 389	+0.574 498
1.28	+0.378 934	+0.447 459	+0.499 951	+0.540 827	+0.573 118
1.29	+0.382 541	+0.449 235	+0.500 369	+0.540 214	+0.571 710
1.30	+0.385 989	+0.450 901	+0.500 715	+0.539 554	+0.570 275
1.31	+0.389 283	+0.452 460	+0.500 983	+0.538 848	+0.568 815
1.32	+0.392 427	+0.453 915	+0.501 184	+0.538 098	+0.567 329
1.33	+0.395 426	+0.455 270	+0.501 318	+0.537 305	+0.565 821
1.34	+0.398 281	+0.456 527	+0.501 382	+0.536 472	+0.564 290
1.35	+0.401 000	+0.457 691	+0.501 393	+0.535 599	+0.562 742
1.36	+0.403 586	+0.458 762	+0.501 341	+0.534 689	+0.561 167
1.37	+0.406 040	+0.459 745	+0.501 227	+0.533 743	+0.559 576
1.38	+0.408 369	+0.460 642	+0.501 056	+0.532 763	+0.557 968
1.39	+0.410 576	+0.461 457	+0.500 832	+0.531 749	+0.556 343
1.40	+0.412 664	+0.462 190	+0.500 555	+0.530 704	+0.554 703
1.41	+0.414 638	+0.462 847	+0.500 228	+0.529 629	+0.553 048
1.42	+0.416 580	+0.463 428	+0.499 848	+0.528 524	+0.551 379
1.43	+0.418 253	+0.463 936	+0.499 430	+0.527 392	+0.549 696
1.44	+0.419 903	+0.464 374	+0.498 962	+0.526 234	+0.548 002
1.45	+0.421 449	+0.464 744	+0.498 451	+0.525 050	+0.546 297
1.46	+0.422 899	+0.465 049	+0.497 898	+0.523 843	+0.544 581
1.47	+0.424 253	+0.465 290	+0.497 305	+0.522 612	+0.542 855
1.48	+0.425 514	+0.465 470	+0.496 672	+0.521 359	+0.541 121
1.49	+0.426 686	+0.465 590	+0.496 004	+0.520 086	+0.539 378
1.50	+0.427 772	+0.465 653	+0.495 299	+0.518 793	+0.537 628
1.51	+0.428 775	+0.465 662	+0.494 560	+0.517 482	+0.535 870
1.52	+0.429 696	+0.465 617	+0.493 787	+0.516 152	+0.534 106
1.53	+0.430 539	+0.465 521	+0.492 984	+0.514 805	+0.532 337
1.54	+0.431 307	+0.465 376	+0.492 149	+0.513 443	+0.530 563
1.55	+0.432 001	+0.465 186	+0.491 286	+0.512 065	+0.528 784
1.56	+0.432 624	+0.464 943	+0.490 395	+0.510 673	+0.527 001
1.57	+0.433 179	+0.464 660	+0.489 478	+0.509 268	+0.525 214
1.58	+0.433 668	+0.464 333	+0.488 534	+0.507 850	+0.523 425
1.59	+0.434 093	+0.463 966	+0.487 567	+0.506 420	+0.521 634
1.60	+0.434 457	+0.463 559	+0.486 576	+0.504 978	+0.519 840
1.61	+0.434 761	+0.463 114	+0.485 563	+0.503 527	+0.518 045
1.62	+0.435 007	+0.462 633	+0.484 528	+0.502 065	+0.516 249
1.63	+0.435 198	+0.462 116	+0.483 473	+0.500 594	+0.514 452
1.64	+0.435 336	+0.461 565	+0.482 399	+0.499 115	+0.512 655
1.65	+0.435 420	+0.460 982	+0.481 306	+0.497 628	+0.510 858
1.66	+0.435 456	+0.460 368	+0.480 195	+0.496 133	+0.509 061
1.67	+0.435 444	+0.459 723	+0.479 068	+0.494 632	+0.507 267
1.68	+0.435 385	+0.459 050	+0.477 925	+0.493 124	+0.505 472
1.69	+0.435 281	+0.458 348	+0.476 767	+0.491 611	+0.503 680
1.70	+0.435 134	+0.457 620	+0.475 594	+0.490 092	+0.501 889
1.71	+0.434 946	+0.456 867	+0.474 408	+0.488 569	+0.500 100
1.72	+0.434 717	+0.456 093	+0.473 208	+0.487 042	+0.498 314
1.73	+0.434 450	+0.455 289	+0.471 997	+0.485 510	+0.496 531
1.74	+0.434 140	+0.454 465	+0.470 774	+0.483 970	+0.494 751
1.75	+0.433 806	+0.453 620	+0.469 540	+0.482 439	+0.492 973
1.76	+0.433 431	+0.452 754	+0.468 296	+0.480 899	+0.491 200
1.77	+0.433 024	+0.451 860	+0.467 042	+0.479 357	+0.489 430
1.78	+0.432 584	+0.450 965	+0.465 779	+0.477 813	+0.487 664
1.79	+0.432 114	+0.450 043	+0.464 508	+0.476 268	+0.485 902
1.80	+0.431 614	+0.449 104	+0.463 228	+0.474 722	+0.484 145
1.81	+0.431 086	+0.448 148	+0.461 942	+0.473 176	+0.482 392

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ Z	65°	70°	75°	80°	85°
1.81	+ 0.431 086	+ 0.448 148	+ 0.461 942	+ 0.473 176	+ 0.482 302
1.82	+ 0.430 531	+ 0.447 177	+ 0.460 648	+ 0.471 629	+ 0.480 644
1.83	+ 0.429 951	+ 0.446 191	+ 0.459 348	+ 0.470 082	+ 0.478 901
1.84	+ 0.429 343	+ 0.445 191	+ 0.458 041	+ 0.468 535	+ 0.477 163
1.85	+ 0.428 713	+ 0.444 177	+ 0.456 730	+ 0.466 989	+ 0.475 430
1.86	+ 0.428 059	+ 0.443 151	+ 0.455 414	+ 0.465 444	+ 0.473 703
1.87	+ 0.427 385	+ 0.442 112	+ 0.454 092	+ 0.463 900	+ 0.471 980
1.88	+ 0.426 686	+ 0.441 062	+ 0.452 768	+ 0.462 357	+ 0.470 265
1.89	+ 0.425 968	+ 0.440 001	+ 0.451 438	+ 0.460 816	+ 0.468 555
1.90	+ 0.425 229	+ 0.438 930	+ 0.450 105	+ 0.459 277	+ 0.466 850
1.91	+ 0.424 475	+ 0.437 849	+ 0.448 769	+ 0.457 739	+ 0.465 152
1.92	+ 0.423 701	+ 0.436 759	+ 0.447 431	+ 0.456 205	+ 0.463 460
1.93	+ 0.422 911	+ 0.435 659	+ 0.446 090	+ 0.454 672	+ 0.461 775
1.94	+ 0.422 103	+ 0.434 552	+ 0.444 747	+ 0.453 142	+ 0.460 095
1.95	+ 0.421 280	+ 0.433 437	+ 0.443 402	+ 0.451 616	+ 0.458 422
1.96	+ 0.420 442	+ 0.432 315	+ 0.442 056	+ 0.450 092	+ 0.456 756
1.97	+ 0.419 590	+ 0.431 186	+ 0.440 709	+ 0.448 571	+ 0.455 096
1.98	+ 0.418 724	+ 0.430 050	+ 0.439 361	+ 0.447 054	+ 0.453 443
1.99	+ 0.417 845	+ 0.428 909	+ 0.438 013	+ 0.445 541	+ 0.451 797
2.00	+ 0.416 953	+ 0.427 762	+ 0.436 664	+ 0.444 031	+ 0.450 158
2.01	+ 0.416 049	+ 0.426 610	+ 0.435 315	+ 0.442 525	+ 0.448 525
2.02	+ 0.415 134	+ 0.425 453	+ 0.433 966	+ 0.441 023	+ 0.446 899
2.03	+ 0.414 209	+ 0.424 292	+ 0.432 617	+ 0.439 525	+ 0.445 281
2.04	+ 0.413 274	+ 0.423 127	+ 0.431 270	+ 0.438 032	+ 0.443 670
2.05	+ 0.412 329	+ 0.421 958	+ 0.429 924	+ 0.436 543	+ 0.442 066
2.06	+ 0.411 376	+ 0.420 786	+ 0.428 578	+ 0.435 058	+ 0.440 469
2.07	+ 0.410 414	+ 0.419 611	+ 0.427 234	+ 0.433 578	+ 0.438 870
2.08	+ 0.409 442	+ 0.418 433	+ 0.425 891	+ 0.432 103	+ 0.437 297
2.09	+ 0.408 464	+ 0.417 253	+ 0.424 550	+ 0.430 632	+ 0.435 722
2.10	+ 0.407 479	+ 0.416 071	+ 0.423 211	+ 0.429 167	+ 0.434 154
2.11	+ 0.406 486	+ 0.414 886	+ 0.421 873	+ 0.427 700	+ 0.432 593
2.12	+ 0.405 488	+ 0.413 701	+ 0.420 538	+ 0.426 251	+ 0.431 040
2.13	+ 0.404 482	+ 0.412 513	+ 0.419 207	+ 0.424 800	+ 0.429 495
2.14	+ 0.403 471	+ 0.411 325	+ 0.417 875	+ 0.423 355	+ 0.427 950
2.15	+ 0.402 450	+ 0.410 136	+ 0.416 547	+ 0.421 910	+ 0.426 426
2.16	+ 0.401 435	+ 0.408 947	+ 0.415 222	+ 0.420 481	+ 0.424 902
2.17	+ 0.400 410	+ 0.407 757	+ 0.413 900	+ 0.419 052	+ 0.423 386
2.18	+ 0.399 380	+ 0.406 567	+ 0.412 581	+ 0.417 629	+ 0.421 878
2.19	+ 0.398 345	+ 0.405 370	+ 0.411 205	+ 0.416 211	+ 0.420 377
2.20	+ 0.397 308	+ 0.404 188	+ 0.409 953	+ 0.414 790	+ 0.418 883
2.21	+ 0.396 267	+ 0.402 997	+ 0.408 643	+ 0.413 392	+ 0.417 398
2.22	+ 0.395 223	+ 0.401 808	+ 0.407 337	+ 0.411 991	+ 0.415 910
2.23	+ 0.394 177	+ 0.400 620	+ 0.406 035	+ 0.410 596	+ 0.414 448
2.24	+ 0.393 128	+ 0.399 433	+ 0.404 730	+ 0.409 207	+ 0.412 984
2.25	+ 0.392 076	+ 0.398 247	+ 0.403 441	+ 0.407 823	+ 0.411 528
2.26	+ 0.391 022	+ 0.397 062	+ 0.402 149	+ 0.406 446	+ 0.410 080
2.27	+ 0.389 967	+ 0.395 870	+ 0.400 863	+ 0.405 074	+ 0.408 639
2.28	+ 0.388 910	+ 0.394 697	+ 0.399 580	+ 0.403 708	+ 0.407 205
2.29	+ 0.387 852	+ 0.393 517	+ 0.398 301	+ 0.402 348	+ 0.405 779
2.30	+ 0.386 793	+ 0.392 339	+ 0.397 026	+ 0.400 994	+ 0.404 360
2.31	+ 0.385 731	+ 0.391 163	+ 0.395 756	+ 0.399 646	+ 0.402 948
2.32	+ 0.384 672	+ 0.389 988	+ 0.394 489	+ 0.398 304	+ 0.401 544
2.33	+ 0.383 611	+ 0.388 817	+ 0.393 227	+ 0.396 968	+ 0.400 148
2.34	+ 0.382 549	+ 0.387 647	+ 0.391 969	+ 0.395 638	+ 0.398 758
2.35	+ 0.381 487	+ 0.386 480	+ 0.390 716	+ 0.394 315	+ 0.397 376
2.36	+ 0.380 425	+ 0.385 315	+ 0.389 467	+ 0.392 997	+ 0.396 002

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's ¹/_m Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	65°	70°	75°	80°	85°
2.36	+ 0.380 425	+ 0.385 315	+ 0.389 467	+ 0.392 997	+ 0.396 002
2.37	+ 0.379 364	+ 0.384 153	+ 0.388 223	+ 0.391 685	+ 0.394 634
2.38	+ 0.378 302	+ 0.382 994	+ 0.386 984	+ 0.390 380	+ 0.393 274
2.39	+ 0.377 243	+ 0.381 840	+ 0.385 750	+ 0.389 080	+ 0.391 921
2.40	+ 0.376 181	+ 0.380 683	+ 0.384 518	+ 0.387 787	+ 0.390 576
2.41	+ 0.375 122	+ 0.379 533	+ 0.383 293	+ 0.386 500	+ 0.389 238
2.42	+ 0.374 063	+ 0.378 385	+ 0.382 072	+ 0.385 219	+ 0.387 906
2.43	+ 0.373 006	+ 0.377 241	+ 0.380 856	+ 0.383 944	+ 0.386 583
2.44	+ 0.371 950	+ 0.376 100	+ 0.379 645	+ 0.382 675	+ 0.385 266
2.45	+ 0.370 895	+ 0.374 962	+ 0.378 439	+ 0.381 412	+ 0.383 956
2.46	+ 0.369 841	+ 0.373 827	+ 0.377 237	+ 0.380 155	+ 0.382 653
2.47	+ 0.368 789	+ 0.372 696	+ 0.376 041	+ 0.378 904	+ 0.381 358
2.48	+ 0.367 738	+ 0.371 568	+ 0.374 849	+ 0.377 660	+ 0.380 069
2.49	+ 0.366 690	+ 0.370 444	+ 0.373 662	+ 0.376 421	+ 0.378 788
2.50	+ 0.365 643	+ 0.369 323	+ 0.372 480	+ 0.375 189	+ 0.377 513
2.51	+ 0.364 599	+ 0.368 206	+ 0.371 304	+ 0.373 962	+ 0.376 245
2.52	+ 0.363 556	+ 0.367 093	+ 0.370 132	+ 0.372 742	+ 0.374 984
2.53	+ 0.362 516	+ 0.365 984	+ 0.368 966	+ 0.371 528	+ 0.373 730
2.54	+ 0.361 477	+ 0.364 878	+ 0.367 804	+ 0.370 319	+ 0.372 483
2.55	+ 0.360 441	+ 0.363 776	+ 0.366 647	+ 0.369 117	+ 0.371 243
2.56	+ 0.359 407	+ 0.362 678	+ 0.365 495	+ 0.367 921	+ 0.370 009
2.57	+ 0.358 376	+ 0.361 583	+ 0.364 348	+ 0.366 730	+ 0.368 783
2.58	+ 0.357 347	+ 0.360 493	+ 0.363 207	+ 0.365 546	+ 0.367 563
2.59	+ 0.356 321	+ 0.359 407	+ 0.362 071	+ 0.364 368	+ 0.366 349
2.60	+ 0.355 297	+ 0.358 324	+ 0.360 939	+ 0.363 195	+ 0.365 142
2.61	+ 0.354 277	+ 0.357 246	+ 0.359 813	+ 0.362 029	+ 0.363 942
2.62	+ 0.353 258	+ 0.356 171	+ 0.358 691	+ 0.360 868	+ 0.362 749
2.63	+ 0.352 243	+ 0.355 101	+ 0.357 575	+ 0.359 713	+ 0.361 561
2.64	+ 0.351 231	+ 0.354 035	+ 0.356 464	+ 0.358 564	+ 0.360 381
2.65	+ 0.350 221	+ 0.352 973	+ 0.355 358	+ 0.357 421	+ 0.359 207
2.66	+ 0.349 215	+ 0.351 915	+ 0.354 256	+ 0.356 284	+ 0.358 039
2.67	+ 0.348 212	+ 0.350 861	+ 0.353 160	+ 0.355 152	+ 0.356 878
2.68	+ 0.347 211	+ 0.349 811	+ 0.352 069	+ 0.354 027	+ 0.355 723
2.69	+ 0.346 214	+ 0.348 766	+ 0.350 983	+ 0.352 907	+ 0.354 574
2.70	+ 0.345 219	+ 0.347 724	+ 0.349 902	+ 0.351 792	+ 0.353 432
2.71	+ 0.344 228	+ 0.346 687	+ 0.348 826	+ 0.350 684	+ 0.352 296
2.72	+ 0.343 241	+ 0.345 654	+ 0.347 755	+ 0.349 581	+ 0.351 160
2.73	+ 0.342 256	+ 0.344 625	+ 0.346 689	+ 0.348 484	+ 0.350 042
2.74	+ 0.341 275	+ 0.343 601	+ 0.345 628	+ 0.347 392	+ 0.348 925
2.75	+ 0.340 297	+ 0.342 581	+ 0.344 573	+ 0.346 306	+ 0.347 813
2.76	+ 0.339 319	+ 0.341 565	+ 0.343 522	+ 0.345 225	+ 0.346 708
2.77	+ 0.338 344	+ 0.340 552	+ 0.342 476	+ 0.344 151	+ 0.345 608
2.78	+ 0.337 384	+ 0.339 546	+ 0.341 435	+ 0.343 081	+ 0.344 516
2.79	+ 0.336 410	+ 0.338 542	+ 0.340 398	+ 0.342 017	+ 0.343 428
2.80	+ 0.335 458	+ 0.337 544	+ 0.339 367	+ 0.340 959	+ 0.342 340
2.81	+ 0.334 501	+ 0.336 549	+ 0.338 341	+ 0.339 906	+ 0.341 271
2.82	+ 0.333 547	+ 0.335 558	+ 0.337 320	+ 0.338 859	+ 0.340 201
2.83	+ 0.332 596	+ 0.334 572	+ 0.336 303	+ 0.337 817	+ 0.339 137
2.84	+ 0.331 650	+ 0.333 590	+ 0.335 292	+ 0.336 780	+ 0.338 079
2.85	+ 0.330 707	+ 0.332 613	+ 0.334 285	+ 0.335 748	+ 0.337 027
2.86	+ 0.329 766	+ 0.331 639	+ 0.333 283	+ 0.334 722	+ 0.335 980
2.87	+ 0.328 830	+ 0.330 670	+ 0.332 280	+ 0.333 702	+ 0.334 939
2.88	+ 0.327 897	+ 0.329 705	+ 0.331 294	+ 0.332 686	+ 0.333 904
2.89	+ 0.326 969	+ 0.328 745	+ 0.330 307	+ 0.331 676	+ 0.332 874
2.90	+ 0.326 044	+ 0.327 789	+ 0.329 324	+ 0.330 671	+ 0.331 850
2.91	+ 0.325 122	+ 0.326 837	+ 0.328 346	+ 0.329 671	+ 0.330 832

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	65°	70°	75°	80°	85°
2.91	+0.325 122	+0.326 837	+0.328 346	+0.329 671	+0.330 832
2.92	+0.324 203	+0.325 889	+0.327 373	+0.328 676	+0.329 818
2.93	+0.323 288	+0.324 945	+0.326 405	+0.327 687	+0.328 811
2.94	+0.322 377	+0.324 005	+0.325 440	+0.326 702	+0.327 809
2.95	+0.321 470	+0.323 070	+0.324 482	+0.325 723	+0.326 812
2.96	+0.320 566	+0.322 139	+0.323 527	+0.324 748	+0.325 821
2.97	+0.319 666	+0.321 212	+0.322 577	+0.323 779	+0.324 835
2.98	+0.318 769	+0.320 289	+0.321 632	+0.322 815	+0.323 854
2.99	+0.317 877	+0.319 371	+0.320 692	+0.321 855	+0.322 878
3.00	+0.316 988	+0.318 457	+0.319 756	+0.320 901	+0.321 908
3.01	+0.316 103	+0.317 547	+0.318 825	+0.319 951	+0.320 943
3.02	+0.315 221	+0.316 641	+0.317 898	+0.319 007	+0.319 984
3.03	+0.314 342	+0.315 738	+0.316 975	+0.318 067	+0.319 029
3.04	+0.313 468	+0.314 841	+0.316 058	+0.317 132	+0.318 079
3.05	+0.312 597	+0.313 947	+0.315 144	+0.316 202	+0.317 134
3.06	+0.311 730	+0.313 057	+0.314 235	+0.315 276	+0.316 194
3.07	+0.310 866	+0.312 172	+0.313 331	+0.314 356	+0.315 260
3.08	+0.310 006	+0.311 290	+0.312 431	+0.313 440	+0.314 330
3.09	+0.309 150	+0.310 413	+0.311 535	+0.312 528	+0.313 405
3.10	+0.308 297	+0.309 539	+0.310 644	+0.311 622	+0.312 486
3.11	+0.307 448	+0.308 670	+0.309 757	+0.310 720	+0.311 570
3.12	+0.306 603	+0.307 805	+0.308 875	+0.309 822	+0.310 660
3.13	+0.305 761	+0.306 944	+0.307 997	+0.308 930	+0.309 755
3.14	+0.304 923	+0.306 086	+0.307 122	+0.308 041	+0.308 854
3.15	+0.304 088	+0.305 232	+0.306 252	+0.307 157	+0.307 959
3.16	+0.303 257	+0.304 383	+0.305 387	+0.306 278	+0.307 067
3.17	+0.302 429	+0.303 537	+0.304 526	+0.305 403	+0.306 181
3.18	+0.301 605	+0.302 695	+0.303 668	+0.304 533	+0.305 290
3.19	+0.300 785	+0.301 858	+0.302 816	+0.303 667	+0.304 422
3.20	+0.299 968	+0.301 024	+0.301 967	+0.302 806	+0.303 549
3.21	+0.299 155	+0.300 194	+0.301 122	+0.301 948	+0.302 681
3.22	+0.298 345	+0.299 367	+0.300 282	+0.301 096	+0.301 818
3.23	+0.297 539	+0.298 545	+0.299 445	+0.300 247	+0.300 959
3.24	+0.296 736	+0.297 727	+0.298 613	+0.299 403	+0.300 104
3.25	+0.295 937	+0.296 912	+0.297 785	+0.298 563	+0.299 254
3.26	+0.295 141	+0.296 101	+0.296 961	+0.297 727	+0.298 408
3.27	+0.294 349	+0.295 294	+0.296 140	+0.296 805	+0.297 567
3.28	+0.293 560	+0.294 490	+0.295 324	+0.296 008	+0.296 730
3.29	+0.292 774	+0.293 690	+0.294 512	+0.295 245	+0.295 897
3.30	+0.291 993	+0.292 894	+0.293 703	+0.294 425	+0.295 068
3.31	+0.291 214	+0.292 102	+0.292 899	+0.293 610	+0.294 244
3.32	+0.290 439	+0.291 313	+0.292 098	+0.292 799	+0.293 424
3.33	+0.289 668	+0.290 528	+0.291 301	+0.291 993	+0.292 608
3.34	+0.288 900	+0.289 747	+0.290 500	+0.291 190	+0.291 797
3.35	+0.288 135	+0.288 960	+0.289 710	+0.290 391	+0.290 989
3.36	+0.287 373	+0.288 195	+0.288 934	+0.289 500	+0.290 186
3.37	+0.286 615	+0.287 424	+0.288 152	+0.288 805	+0.289 387
3.38	+0.285 860	+0.286 657	+0.287 375	+0.288 018	+0.288 592
3.39	+0.285 109	+0.285 894	+0.286 601	+0.287 235	+0.287 801
3.40	+0.284 361	+0.285 134	+0.285 831	+0.286 455	+0.287 013
3.41	+0.283 617	+0.284 378	+0.285 064	+0.285 680	+0.286 230
3.42	+0.282 875	+0.283 625	+0.284 302	+0.284 908	+0.285 451
3.43	+0.282 137	+0.282 876	+0.283 543	+0.284 141	+0.284 676
3.44	+0.281 402	+0.282 130	+0.282 787	+0.283 377	+0.283 904
3.45	+0.280 670	+0.281 387	+0.282 035	+0.282 616	+0.283 137
3.46	+0.279 942	+0.280 648	+0.281 286	+0.281 860	+0.282 373

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	65°	70°	75°	80°	85°
3.46	+0.279 942	+0.280 648	+0.281 286	+0.281 860	+0.282 373
3.47	+0.279 217	+0.279 913	+0.280 542	+0.281 107	+0.281 613
3.48	+0.278 495	+0.279 181	+0.279 801	+0.280 358	+0.280 857
3.49	+0.277 776	+0.278 452	+0.279 063	+0.279 612	+0.280 165
3.50	+0.277 060	+0.277 726	+0.278 328	+0.278 871	+0.279 356
3.51	+0.276 348	+0.277 004	+0.277 598	+0.278 132	+0.278 612
3.52	+0.275 639	+0.276 285	+0.276 870	+0.277 398	+0.277 870
3.53	+0.274 933	+0.275 570	+0.276 147	+0.276 667	+0.277 133
3.54	+0.274 230	+0.274 858	+0.275 427	+0.275 939	+0.276 399
3.55	+0.273 530	+0.274 149	+0.274 710	+0.275 215	+0.275 669
3.56	+0.272 833	+0.273 443	+0.273 996	+0.274 495	+0.274 942
3.57	+0.272 140	+0.272 741	+0.273 286	+0.273 778	+0.274 220
3.58	+0.271 449	+0.272 041	+0.272 579	+0.273 064	+0.273 500
3.59	+0.270 761	+0.271 345	+0.271 875	+0.272 354	+0.272 784
3.60	+0.270 077	+0.270 653	+0.271 176	+0.271 647	+0.272 072
3.61	+0.269 396	+0.269 963	+0.270 479	+0.270 944	+0.271 363
3.62	+0.268 718	+0.269 278	+0.269 786	+0.270 244	+0.270 657
3.63	+0.268 042	+0.268 593	+0.269 094	+0.269 548	+0.269 955
3.64	+0.267 369	+0.267 913	+0.268 407	+0.268 854	+0.269 257
3.65	+0.266 700	+0.267 230	+0.267 724	+0.268 164	+0.268 561
3.66	+0.266 034	+0.266 562	+0.267 043	+0.267 478	+0.267 870
3.67	+0.265 370	+0.265 891	+0.266 365	+0.266 794	+0.267 181
3.68	+0.264 709	+0.265 223	+0.265 691	+0.266 114	+0.266 496
3.69	+0.264 051	+0.264 558	+0.265 010	+0.265 437	+0.265 814
3.70	+0.263 397	+0.263 896	+0.264 351	+0.264 763	+0.265 136
3.71	+0.262 744	+0.263 237	+0.263 686	+0.264 093	+0.264 460
3.72	+0.262 095	+0.262 581	+0.263 024	+0.263 420	+0.263 788
3.73	+0.261 449	+0.261 928	+0.262 365	+0.262 761	+0.263 110
3.74	+0.260 806	+0.261 278	+0.261 709	+0.262 100	+0.262 454
3.75	+0.260 165	+0.260 631	+0.261 056	+0.261 442	+0.261 791
3.76	+0.259 527	+0.259 987	+0.260 407	+0.260 787	+0.261 132
3.77	+0.258 892	+0.259 345	+0.259 759	+0.260 136	+0.260 476
3.78	+0.258 260	+0.258 707	+0.259 116	+0.259 487	+0.259 823
3.79	+0.257 630	+0.258 071	+0.258 474	+0.258 841	+0.259 172
3.80	+0.257 004	+0.257 439	+0.257 837	+0.258 198	+0.258 525
3.81	+0.256 379	+0.256 809	+0.257 202	+0.257 558	+0.257 882
3.82	+0.255 759	+0.256 182	+0.256 569	+0.256 922	+0.257 241
3.83	+0.255 140	+0.255 558	+0.255 940	+0.256 288	+0.256 603
3.84	+0.254 524	+0.254 930	+0.255 314	+0.255 657	+0.255 968
3.85	+0.253 911	+0.254 317	+0.254 690	+0.255 020	+0.255 339
3.86	+0.253 301	+0.253 702	+0.254 060	+0.254 404	+0.254 707
3.87	+0.252 692	+0.253 088	+0.253 451	+0.253 782	+0.254 081
3.88	+0.252 087	+0.252 478	+0.252 836	+0.253 162	+0.253 458
3.89	+0.251 485	+0.251 870	+0.252 224	+0.252 546	+0.252 838
3.90	+0.250 885	+0.251 265	+0.251 614	+0.251 932	+0.252 221
3.91	+0.250 288	+0.250 663	+0.251 007	+0.251 321	+0.251 600
3.92	+0.249 693	+0.250 063	+0.250 403	+0.250 713	+0.250 994
3.93	+0.249 100	+0.249 466	+0.249 802	+0.250 108	+0.250 380
3.94	+0.248 511	+0.248 871	+0.249 202	+0.249 505	+0.249 780
3.95	+0.247 924	+0.248 280	+0.248 607	+0.248 905	+0.249 177
3.96	+0.247 339	+0.247 690	+0.248 013	+0.248 308	+0.248 570
3.97	+0.246 757	+0.247 104	+0.247 423	+0.247 714	+0.247 979
3.98	+0.246 178	+0.246 520	+0.246 835	+0.247 122	+0.247 384
3.99	+0.245 601	+0.245 938	+0.246 249	+0.246 533	+0.246 792
4.00	+0.245 025	+0.245 350	+0.245 666	+0.245 947	+0.246 202

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z.	90°	95°	100°	105°	110°
0.01	+0.015 02	+0.275 85	+0.533 58	+0.786 27	+1.032 09
0.02	+0.029 99	+0.290 05	+0.545 92	+0.795 75	+1.037 78
0.03	+0.044 95	+0.304 14	+0.558 05	+0.804 91	+1.043 09
0.04	+0.059 88	+0.318 05	+0.569 89	+0.813 71	+1.048 00
0.05	+0.074 77	+0.331 81	+0.581 48	+0.822 22	+1.052 62
0.06	+0.089 60	+0.345 39	+0.592 80	+0.830 38	+1.056 87
0.07	+0.104 36	+0.358 78	+0.603 84	+0.838 21	+1.060 77
0.08	+0.119 04	+0.371 99	+0.614 60	+0.845 71	+1.064 34
0.09	+0.133 65	+0.385 00	+0.625 09	+0.852 89	+1.067 57
0.10	+0.148 15	+0.397 80	+0.635 30	+0.859 75	+1.070 49
0.11	+0.162 54	+0.410 39	+0.645 21	+0.866 28	+1.073 08
0.12	+0.176 81	+0.422 75	+0.654 84	+0.872 49	+1.075 37
0.13	+0.190 96	+0.434 89	+0.664 17	+0.878 39	+1.077 35
0.14	+0.204 97	+0.446 80	+0.673 22	+0.883 98	+1.079 04
0.15	+0.218 83	+0.458 48	+0.681 97	+0.889 25	+1.080 44
0.16	+0.232 54	+0.469 91	+0.690 44	+0.894 23	+1.081 56
0.17	+0.246 09	+0.481 08	+0.698 61	+0.899 90	+1.082 40
0.18	+0.259 46	+0.492 04	+0.706 49	+0.903 28	+1.082 98
0.19	+0.272 66	+0.502 73	+0.714 08	+0.907 36	+1.083 31
0.20	+0.285 67	+0.513 16	+0.721 39	+0.911 16	+1.083 38
0.21	+0.298 488	+0.523 345	+0.728 404	+0.914 690	+1.083 209
0.22	+0.311 104	+0.533 243	+0.735 135	+0.917 923	+1.082 802
0.23	+0.323 515	+0.542 893	+0.741 583	+0.920 899	+1.082 168
0.24	+0.335 716	+0.552 280	+0.747 752	+0.923 610	+1.081 314
0.25	+0.347 699	+0.561 401	+0.753 644	+0.926 062	+1.080 248
0.26	+0.359 460	+0.570 258	+0.759 260	+0.928 261	+1.078 976
0.27	+0.370 994	+0.578 846	+0.764 605	+0.930 214	+1.077 506
0.28	+0.382 299	+0.587 170	+0.769 682	+0.931 929	+1.075 846
0.29	+0.393 369	+0.595 228	+0.774 495	+0.933 404	+1.074 004
0.30	+0.404 201	+0.603 025	+0.779 050	+0.934 641	+1.071 964
0.31	+0.414 792	+0.610 549	+0.783 347	+0.935 681	+1.069 708
0.32	+0.425 140	+0.617 815	+0.787 392	+0.936 489	+1.067 444
0.33	+0.435 242	+0.624 820	+0.791 191	+0.937 090	+1.064 938
0.34	+0.445 098	+0.631 566	+0.794 746	+0.937 480	+1.062 282
0.35	+0.454 703	+0.638 053	+0.798 003	+0.937 683	+1.059 483
0.36	+0.464 059	+0.644 285	+0.801 146	+0.937 680	+1.056 548
0.37	+0.473 165	+0.650 266	+0.804 001	+0.937 509	+1.053 483
0.38	+0.482 018	+0.655 997	+0.806 632	+0.937 148	+1.050 293
0.39	+0.490 622	+0.661 480	+0.809 044	+0.936 614	+1.046 986
0.40	+0.498 973	+0.666 720	+0.811 243	+0.935 912	+1.043 566
0.41	+0.507 073	+0.671 720	+0.813 233	+0.935 047	+1.040 039
0.42	+0.514 924	+0.676 489	+0.815 029	+0.934 030	+1.036 411
0.43	+0.522 526	+0.681 013	+0.816 607	+0.932 853	+1.032 687
0.44	+0.529 881	+0.685 308	+0.818 002	+0.931 535	+1.028 872
0.45	+0.536 990	+0.689 391	+0.819 208	+0.930 112	+1.024 972
0.46	+0.543 854	+0.693 246	+0.820 231	+0.928 484	+1.020 900
0.47	+0.550 477	+0.696 881	+0.821 077	+0.926 752	+1.016 933
0.48	+0.556 860	+0.700 305	+0.821 748	+0.924 912	+1.012 803
0.49	+0.563 006	+0.703 518	+0.822 253	+0.922 949	+1.008 608
0.50	+0.568 915	+0.706 528	+0.822 595	+0.920 870	+1.004 350
0.51	+0.574 596	+0.709 337	+0.822 779	+0.918 670	+1.000 031
0.52	+0.580 047	+0.711 950	+0.822 809	+0.916 384	+0.995 659
0.53	+0.585 272	+0.714 373	+0.822 692	+0.913 990	+0.991 236
0.54	+0.590 273	+0.716 608	+0.822 433	+0.911 500	+0.986 766
0.55	+0.595 057	+0.718 661	+0.822 034	+0.908 919	+0.982 253
0.56	+0.599 625	+0.720 535	+0.821 502	+0.906 251	+0.977 700

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	90°	95°	100°	105°	110°
0.56	+0.599 625	+0.720 535	+0.821 502	+0.906 251	+0.977 700
0.57	+0.603 982	+0.722 237	+0.820 840	+0.903 500	+0.973 111
0.58	+0.608 130	+0.723 773	+0.820 054	+0.900 671	+0.968 488
0.59	+0.612 074	+0.725 138	+0.819 148	+0.897 767	+0.963 835
0.60	+0.615 818	+0.726 346	+0.818 120	+0.894 702	+0.959 156
0.61	+0.619 365	+0.727 399	+0.816 993	+0.891 750	+0.954 451
0.62	+0.622 719	+0.728 300	+0.815 752	+0.888 645	+0.949 725
0.63	+0.625 885	+0.729 045	+0.814 408	+0.885 479	+0.944 982
0.64	+0.628 867	+0.729 667	+0.812 965	+0.882 258	+0.940 224
0.65	+0.631 668	+0.730 141	+0.811 427	+0.878 982	+0.935 449
0.66	+0.634 293	+0.730 481	+0.809 798	+0.875 657	+0.930 664
0.67	+0.636 740	+0.730 692	+0.808 081	+0.872 285	+0.925 869
0.68	+0.639 032	+0.730 776	+0.806 281	+0.868 869	+0.921 065
0.69	+0.641 153	+0.730 739	+0.804 400	+0.865 412	+0.916 261
0.70	+0.643 114	+0.730 585	+0.802 443	+0.861 917	+0.911 452
0.71	+0.644 920	+0.730 317	+0.800 412	+0.858 386	+0.906 642
0.72	+0.646 574	+0.729 937	+0.798 311	+0.854 822	+0.901 832
0.73	+0.648 080	+0.729 454	+0.796 144	+0.851 227	+0.897 025
0.74	+0.649 443	+0.728 868	+0.793 913	+0.847 605	+0.892 222
0.75	+0.650 667	+0.728 183	+0.791 621	+0.843 956	+0.887 425
0.76	+0.651 754	+0.727 403	+0.789 272	+0.840 285	+0.882 635
0.77	+0.652 710	+0.726 531	+0.786 868	+0.836 592	+0.877 853
0.78	+0.653 538	+0.725 571	+0.784 413	+0.832 880	+0.873 081
0.79	+0.654 242	+0.724 526	+0.781 908	+0.829 150	+0.868 321
0.80	+0.654 826	+0.723 399	+0.779 356	+0.825 406	+0.863 575
0.81	+0.655 293	+0.722 194	+0.776 761	+0.821 647	+0.858 838
0.82	+0.655 646	+0.720 914	+0.774 124	+0.817 878	+0.854 118
0.83	+0.655 890	+0.719 561	+0.771 448	+0.814 098	+0.849 413
0.84	+0.656 029	+0.718 139	+0.768 735	+0.810 310	+0.844 725
0.85	+0.656 065	+0.716 651	+0.765 987	+0.806 515	+0.840 055
0.86	+0.656 001	+0.715 100	+0.763 207	+0.802 715	+0.835 403
0.87	+0.655 842	+0.713 487	+0.760 397	+0.798 912	+0.830 770
0.88	+0.655 591	+0.711 816	+0.757 558	+0.795 106	+0.826 157
0.89	+0.655 250	+0.710 090	+0.754 694	+0.791 298	+0.821 565
0.90	+0.654 823	+0.708 310	+0.751 804	+0.787 491	+0.816 994
0.91	+0.654 312	+0.706 480	+0.748 892	+0.783 686	+0.812 446
0.92	+0.653 722	+0.704 602	+0.745 959	+0.779 883	+0.807 920
0.93	+0.653 054	+0.702 677	+0.743 007	+0.776 083	+0.803 417
0.94	+0.652 311	+0.700 709	+0.740 038	+0.772 288	+0.798 936
0.95	+0.651 498	+0.698 699	+0.737 052	+0.768 499	+0.794 483
0.96	+0.650 615	+0.696 650	+0.734 052	+0.764 717	+0.790 053
0.97	+0.649 666	+0.694 563	+0.731 038	+0.760 942	+0.785 648
0.98	+0.648 653	+0.692 441	+0.728 013	+0.757 176	+0.781 269
0.99	+0.647 579	+0.690 286	+0.724 978	+0.753 419	+0.776 914
1.00	+0.646 447	+0.688 099	+0.721 934	+0.749 672	+0.772 586
1.01	+0.645 258	+0.685 881	+0.718 882	+0.745 935	+0.768 284
1.02	+0.644 015	+0.683 636	+0.715 823	+0.742 211	+0.764 010
1.03	+0.642 720	+0.681 364	+0.712 759	+0.738 498	+0.759 762
1.04	+0.641 376	+0.679 068	+0.709 691	+0.734 798	+0.755 541
1.05	+0.639 984	+0.676 748	+0.706 619	+0.731 112	+0.751 349
1.06	+0.638 547	+0.674 406	+0.703 545	+0.727 439	+0.747 183
1.07	+0.637 067	+0.672 044	+0.700 470	+0.723 781	+0.743 043
1.08	+0.635 545	+0.669 664	+0.697 394	+0.720 138	+0.738 935
1.09	+0.633 984	+0.667 265	+0.694 319	+0.716 511	+0.734 853
1.10	+0.632 385	+0.664 851	+0.691 246	+0.712 899	+0.730 799
1.11	+0.630 750	+0.662 421	+0.688 174	+0.709 304	+0.726 773

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	90°	95°	100°	105°	110°
1.11	+0.630 750	+0.662 421	+0.688 174	+0.709 304	+0.726 773
1.12	+0.629 081	+0.659 977	+0.685 106	+0.705 726	+0.722 774
1.13	+0.627 380	+0.657 522	+0.682 041	+0.702 165	+0.718 805
1.14	+0.625 647	+0.655 054	+0.678 980	+0.698 621	+0.714 864
1.15	+0.623 889	+0.652 575	+0.675 925	+0.695 094	+0.710 952
1.16	+0.622 097	+0.650 089	+0.672 875	+0.691 587	+0.707 067
1.17	+0.620 281	+0.647 594	+0.669 832	+0.688 097	+0.703 207
1.18	+0.618 441	+0.645 092	+0.666 796	+0.684 626	+0.699 382
1.19	+0.616 577	+0.642 583	+0.663 767	+0.681 174	+0.695 583
1.20	+0.614 691	+0.640 068	+0.660 746	+0.677 741	+0.691 811
1.21	+0.612 784	+0.637 549	+0.657 734	+0.674 327	+0.688 068
1.22	+0.610 858	+0.635 027	+0.654 730	+0.670 933	+0.684 353
1.23	+0.608 913	+0.632 501	+0.651 737	+0.667 558	+0.680 666
1.24	+0.606 951	+0.629 973	+0.648 753	+0.664 204	+0.677 006
1.25	+0.604 973	+0.627 443	+0.645 779	+0.660 869	+0.673 375
1.26	+0.602 980	+0.624 913	+0.642 817	+0.657 554	+0.669 772
1.27	+0.600 973	+0.622 383	+0.639 865	+0.654 260	+0.666 196
1.28	+0.598 953	+0.619 853	+0.636 925	+0.650 985	+0.662 644
1.29	+0.596 921	+0.617 325	+0.633 996	+0.647 732	+0.659 126
1.30	+0.594 878	+0.614 798	+0.631 080	+0.644 498	+0.655 636
1.31	+0.592 825	+0.612 273	+0.628 176	+0.641 285	+0.652 167
1.32	+0.590 763	+0.609 752	+0.625 284	+0.638 093	+0.648 727
1.33	+0.588 692	+0.607 233	+0.622 400	+0.634 921	+0.645 315
1.34	+0.586 614	+0.604 719	+0.619 540	+0.631 770	+0.641 929
1.35	+0.584 528	+0.602 209	+0.616 688	+0.628 640	+0.638 570
1.36	+0.582 437	+0.599 704	+0.613 850	+0.625 530	+0.635 239
1.37	+0.580 341	+0.597 205	+0.611 025	+0.622 441	+0.631 932
1.38	+0.578 230	+0.594 710	+0.608 215	+0.619 373	+0.628 652
1.39	+0.576 114	+0.592 222	+0.605 418	+0.616 325	+0.625 398
1.40	+0.574 020	+0.589 741	+0.602 636	+0.613 298	+0.622 170
1.41	+0.571 914	+0.587 260	+0.599 868	+0.610 291	+0.618 967
1.42	+0.569 801	+0.584 798	+0.597 115	+0.607 305	+0.615 791
1.43	+0.567 686	+0.582 338	+0.594 370	+0.604 343	+0.612 639
1.44	+0.565 570	+0.579 886	+0.591 652	+0.601 395	+0.609 512
1.45	+0.563 454	+0.577 442	+0.588 944	+0.598 471	+0.606 411
1.46	+0.561 337	+0.575 000	+0.586 250	+0.595 567	+0.603 334
1.47	+0.559 222	+0.572 570	+0.583 571	+0.592 683	+0.600 282
1.48	+0.557 107	+0.570 100	+0.580 908	+0.589 820	+0.597 254
1.49	+0.554 991	+0.567 751	+0.578 259	+0.586 976	+0.594 251
1.50	+0.552 882	+0.565 351	+0.575 620	+0.584 153	+0.591 271
1.51	+0.550 773	+0.562 961	+0.573 000	+0.581 350	+0.588 316
1.52	+0.548 666	+0.560 580	+0.570 400	+0.578 570	+0.585 384
1.53	+0.546 563	+0.558 200	+0.567 820	+0.575 804	+0.582 475
1.54	+0.544 463	+0.555 840	+0.565 248	+0.573 060	+0.579 590
1.55	+0.542 367	+0.553 498	+0.562 692	+0.570 337	+0.576 728
1.56	+0.540 274	+0.551 150	+0.560 152	+0.567 633	+0.573 889
1.57	+0.538 187	+0.548 820	+0.557 627	+0.564 948	+0.571 073
1.58	+0.536 103	+0.546 511	+0.555 118	+0.562 283	+0.568 279
1.59	+0.534 025	+0.544 203	+0.552 624	+0.559 637	+0.565 508
1.60	+0.531 952	+0.541 900	+0.550 145	+0.557 010	+0.562 759
1.61	+0.529 885	+0.539 620	+0.547 682	+0.554 402	+0.560 032
1.62	+0.527 824	+0.537 345	+0.545 235	+0.551 813	+0.557 327
1.63	+0.525 768	+0.535 081	+0.542 803	+0.549 243	+0.554 642
1.64	+0.523 719	+0.532 830	+0.540 386	+0.546 692	+0.551 980
1.65	+0.521 676	+0.530 589	+0.537 985	+0.544 159	+0.549 339
1.66	+0.519 640	+0.528 360	+0.535 600	+0.541 645	+0.546 718

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's ¹/_m Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	90°	95°	100°	105°	110°
1.66	+ 0.519 640	+ 0.528 360	+ 0.535 600	+ 0.541 645	+ 0.546 718
1.67	+ 0.517 610	+ 0.526 143	+ 0.533 229	+ 0.539 149	+ 0.544 119
1.68	+ 0.515 588	+ 0.523 937	+ 0.530 874	+ 0.536 672	+ 0.541 541
1.69	+ 0.513 573	+ 0.521 742	+ 0.528 534	+ 0.534 212	+ 0.538 983
1.70	+ 0.511 565	+ 0.519 560	+ 0.526 209	+ 0.531 771	+ 0.536 445
1.71	+ 0.509 565	+ 0.517 389	+ 0.523 899	+ 0.529 347	+ 0.533 928
1.72	+ 0.507 572	+ 0.515 230	+ 0.521 605	+ 0.526 941	+ 0.531 430
1.73	+ 0.505 588	+ 0.513 083	+ 0.519 325	+ 0.524 553	+ 0.528 952
1.74	+ 0.503 611	+ 0.510 948	+ 0.517 061	+ 0.522 183	+ 0.526 494
1.75	+ 0.501 642	+ 0.508 824	+ 0.514 811	+ 0.519 829	+ 0.524 054
1.76	+ 0.499 681	+ 0.506 712	+ 0.512 577	+ 0.517 494	+ 0.521 635
1.77	+ 0.497 729	+ 0.504 613	+ 0.510 357	+ 0.515 175	+ 0.519 234
1.78	+ 0.495 785	+ 0.502 525	+ 0.508 151	+ 0.512 873	+ 0.516 852
1.79	+ 0.493 850	+ 0.500 449	+ 0.505 961	+ 0.510 588	+ 0.514 489
1.80	+ 0.491 923	+ 0.498 385	+ 0.503 785	+ 0.508 320	+ 0.512 145
1.81	+ 0.490 005	+ 0.496 333	+ 0.501 623	+ 0.506 068	+ 0.509 818
1.82	+ 0.488 096	+ 0.494 293	+ 0.499 476	+ 0.503 833	+ 0.507 510
1.83	+ 0.486 195	+ 0.492 264	+ 0.497 343	+ 0.501 014	+ 0.505 220
1.84	+ 0.484 303	+ 0.490 248	+ 0.495 225	+ 0.499 412	+ 0.502 948
1.85	+ 0.482 420	+ 0.488 244	+ 0.493 121	+ 0.497 225	+ 0.500 693
1.86	+ 0.480 547	+ 0.486 251	+ 0.491 031	+ 0.495 055	+ 0.498 456
1.87	+ 0.478 682	+ 0.484 270	+ 0.488 955	+ 0.492 901	+ 0.496 237
1.88	+ 0.476 826	+ 0.482 301	+ 0.486 893	+ 0.490 762	+ 0.494 034
1.89	+ 0.474 980	+ 0.480 343	+ 0.484 844	+ 0.488 638	+ 0.491 849
1.90	+ 0.473 142	+ 0.478 398	+ 0.482 810	+ 0.486 531	+ 0.489 680
1.91	+ 0.471 314	+ 0.476 464	+ 0.480 789	+ 0.484 438	+ 0.487 528
1.92	+ 0.469 495	+ 0.474 542	+ 0.478 782	+ 0.482 301	+ 0.485 393
1.93	+ 0.467 686	+ 0.472 631	+ 0.476 789	+ 0.480 299	+ 0.483 273
1.94	+ 0.465 885	+ 0.470 732	+ 0.474 809	+ 0.478 252	+ 0.481 171
1.95	+ 0.464 094	+ 0.468 845	+ 0.472 842	+ 0.476 220	+ 0.479 084
1.96	+ 0.462 312	+ 0.466 969	+ 0.470 889	+ 0.474 202	+ 0.477 013
1.97	+ 0.460 540	+ 0.465 104	+ 0.468 948	+ 0.472 199	+ 0.474 958
1.98	+ 0.458 777	+ 0.463 251	+ 0.467 021	+ 0.470 211	+ 0.472 918
1.99	+ 0.457 023	+ 0.461 409	+ 0.465 107	+ 0.468 237	+ 0.470 895
2.00	+ 0.455 279	+ 0.459 579	+ 0.463 206	+ 0.466 277	+ 0.468 885
2.01	+ 0.453 544	+ 0.457 752	+ 0.461 318	+ 0.464 331	+ 0.466 802
2.02	+ 0.451 818	+ 0.455 945	+ 0.459 442	+ 0.462 398	+ 0.464 913
2.03	+ 0.450 101	+ 0.454 148	+ 0.457 579	+ 0.460 481	+ 0.462 950
2.04	+ 0.448 394	+ 0.452 362	+ 0.455 720	+ 0.458 578	+ 0.461 001
2.05	+ 0.446 697	+ 0.450 588	+ 0.453 891	+ 0.456 686	+ 0.459 060
2.06	+ 0.445 008	+ 0.448 825	+ 0.452 066	+ 0.454 810	+ 0.457 146
2.07	+ 0.443 329	+ 0.447 072	+ 0.450 253	+ 0.452 940	+ 0.455 241
2.08	+ 0.441 659	+ 0.445 330	+ 0.448 452	+ 0.451 096	+ 0.453 349
2.09	+ 0.439 999	+ 0.443 601	+ 0.446 663	+ 0.449 258	+ 0.451 472
2.10	+ 0.438 348	+ 0.441 881	+ 0.444 886	+ 0.447 434	+ 0.449 608
2.11	+ 0.436 705	+ 0.440 171	+ 0.443 123	+ 0.445 624	+ 0.447 759
2.12	+ 0.435 073	+ 0.438 474	+ 0.441 369	+ 0.443 825	+ 0.445 923
2.13	+ 0.433 449	+ 0.436 785	+ 0.439 628	+ 0.442 040	+ 0.444 100
2.14	+ 0.431 834	+ 0.435 108	+ 0.437 898	+ 0.440 267	+ 0.442 291
2.15	+ 0.430 229	+ 0.433 442	+ 0.436 180	+ 0.438 509	+ 0.440 495
2.16	+ 0.428 633	+ 0.431 787	+ 0.434 474	+ 0.436 758	+ 0.438 712
2.17	+ 0.427 045	+ 0.430 140	+ 0.432 779	+ 0.435 023	+ 0.436 943
2.18	+ 0.425 467	+ 0.428 503	+ 0.431 096	+ 0.433 300	+ 0.435 180
2.19	+ 0.423 898	+ 0.426 878	+ 0.429 423	+ 0.431 588	+ 0.433 442
2.20	+ 0.422 338	+ 0.425 264	+ 0.427 762	+ 0.429 888	+ 0.431 710
2.21	+ 0.420 787	+ 0.423 659	+ 0.426 112	+ 0.428 201	+ 0.429 992

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	90°	95°	100°	105°	110°
2.21	+0.420 787	+0.423 659	+0.426 112	+0.428 201	+0.429 992
2.22	+0.419 244	+0.422 063	+0.424 473	+0.426 526	+0.428 285
2.23	+0.417 711	+0.420 479	+0.422 845	+0.424 861	+0.426 591
2.24	+0.416 186	+0.418 902	+0.421 228	+0.423 210	+0.424 908
2.25	+0.414 670	+0.417 338	+0.419 621	+0.421 568	+0.423 238
2.26	+0.413 163	+0.415 783	+0.418 025	+0.419 938	+0.421 580
2.27	+0.411 665	+0.414 238	+0.416 440	+0.418 319	+0.419 934
2.28	+0.410 175	+0.412 700	+0.414 865	+0.416 713	+0.418 299
2.29	+0.408 694	+0.411 174	+0.413 300	+0.415 116	+0.416 676
2.30	+0.407 222	+0.409 658	+0.411 746	+0.413 531	+0.415 064
2.31	+0.405 758	+0.408 152	+0.410 202	+0.411 955	+0.413 464
2.32	+0.404 302	+0.406 652	+0.408 668	+0.410 392	+0.411 875
2.33	+0.402 855	+0.405 164	+0.407 145	+0.408 839	+0.410 298
2.34	+0.401 417	+0.403 685	+0.405 631	+0.407 296	+0.408 731
2.35	+0.399 987	+0.402 214	+0.404 127	+0.405 765	+0.407 175
2.36	+0.398 565	+0.400 753	+0.402 633	+0.404 243	+0.405 630
2.37	+0.397 151	+0.399 301	+0.401 149	+0.402 732	+0.404 096
2.38	+0.395 746	+0.397 859	+0.399 675	+0.401 230	+0.402 573
2.39	+0.394 340	+0.396 427	+0.398 210	+0.399 739	+0.401 060
2.40	+0.392 960	+0.394 999	+0.396 754	+0.398 260	+0.399 557
2.41	+0.391 579	+0.393 582	+0.395 308	+0.396 789	+0.398 065
2.42	+0.390 207	+0.392 175	+0.393 872	+0.395 328	+0.396 583
2.43	+0.388 842	+0.390 778	+0.392 444	+0.393 875	+0.395 111
2.44	+0.387 485	+0.389 388	+0.391 026	+0.392 433	+0.393 650
2.45	+0.386 136	+0.388 005	+0.389 617	+0.391 002	+0.392 198
2.46	+0.384 795	+0.386 632	+0.388 217	+0.389 580	+0.390 756
2.47	+0.383 462	+0.385 269	+0.386 827	+0.388 166	+0.389 324
2.48	+0.382 137	+0.383 912	+0.385 445	+0.386 763	+0.387 902
2.49	+0.380 819	+0.382 564	+0.384 071	+0.385 368	+0.386 488
2.50	+0.379 509	+0.381 224	+0.382 707	+0.383 984	+0.385 086
2.51	+0.378 207	+0.379 894	+0.381 351	+0.382 606	+0.383 692
2.52	+0.376 913	+0.378 571	+0.380 004	+0.381 239	+0.382 308
2.53	+0.375 625	+0.377 256	+0.378 666	+0.379 881	+0.380 933
2.54	+0.374 346	+0.375 950	+0.377 336	+0.378 532	+0.379 567
2.55	+0.373 074	+0.374 651	+0.376 015	+0.377 191	+0.378 210
2.56	+0.371 809	+0.373 360	+0.374 701	+0.375 859	+0.376 862
2.57	+0.370 552	+0.372 076	+0.373 397	+0.374 537	+0.375 524
2.58	+0.369 301	+0.370 800	+0.372 100	+0.373 222	+0.374 193
2.59	+0.368 059	+0.369 534	+0.370 811	+0.371 914	+0.372 872
2.60	+0.366 823	+0.368 274	+0.369 531	+0.370 618	+0.371 560
2.61	+0.365 595	+0.367 020	+0.368 259	+0.369 330	+0.370 256
2.62	+0.364 373	+0.365 777	+0.366 994	+0.368 047	+0.368 960
2.63	+0.363 150	+0.364 540	+0.365 738	+0.366 774	+0.367 673
2.64	+0.361 952	+0.363 311	+0.364 489	+0.365 509	+0.366 394
2.65	+0.360 752	+0.362 088	+0.363 248	+0.364 253	+0.365 124
2.66	+0.359 558	+0.360 873	+0.362 015	+0.363 004	+0.363 862
2.67	+0.358 372	+0.359 660	+0.360 780	+0.361 762	+0.362 608
2.68	+0.357 192	+0.358 466	+0.359 571	+0.360 530	+0.361 362
2.69	+0.356 020	+0.357 272	+0.358 361	+0.359 305	+0.360 124
2.70	+0.354 853	+0.356 086	+0.357 158	+0.358 086	+0.358 895
2.71	+0.353 694	+0.354 906	+0.355 962	+0.356 878	+0.357 673
2.72	+0.352 542	+0.353 734	+0.354 773	+0.355 675	+0.356 459
2.73	+0.351 395	+0.352 570	+0.353 592	+0.354 480	+0.355 252
2.74	+0.350 256	+0.351 412	+0.352 419	+0.353 292	+0.354 053
2.75	+0.349 123	+0.350 261	+0.351 252	+0.352 113	+0.352 862
2.76	+0.347 997	+0.349 116	+0.350 092	+0.350 940	+0.351 678

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	90°	95°	100°	105°	110°
2.76	+0.347 997	+0.349 116	+0.350 092	+0.350 940	+0.351 678
2.77	+0.346 877	+0.347 978	+0.348 940	+0.349 775	+0.350 502
2.78	+0.345 763	+0.346 849	+0.347 794	+0.348 616	+0.349 333
2.79	+0.344 656	+0.345 725	+0.346 655	+0.347 464	+0.348 172
2.80	+0.343 555	+0.344 606	+0.345 524	+0.346 322	+0.347 018
2.81	+0.342 460	+0.343 495	+0.344 399	+0.345 185	+0.345 870
2.82	+0.341 371	+0.342 390	+0.343 280	+0.344 056	+0.344 730
2.83	+0.340 289	+0.341 293	+0.342 169	+0.342 932	+0.343 598
2.84	+0.339 213	+0.340 202	+0.341 064	+0.341 815	+0.342 472
2.85	+0.338 143	+0.339 117	+0.339 966	+0.340 706	+0.341 353
2.86	+0.337 079	+0.338 036	+0.338 874	+0.339 604	+0.340 241
2.87	+0.336 020	+0.336 962	+0.337 789	+0.338 509	+0.339 136
2.88	+0.334 968	+0.335 897	+0.336 710	+0.337 419	+0.338 038
2.89	+0.333 922	+0.334 837	+0.335 638	+0.336 337	+0.336 946
2.90	+0.332 882	+0.333 784	+0.334 572	+0.335 259	+0.335 862
2.91	+0.331 847	+0.332 736	+0.333 512	+0.334 190	+0.334 783
2.92	+0.330 818	+0.331 694	+0.332 458	+0.333 127	+0.333 711
2.93	+0.329 796	+0.330 656	+0.331 411	+0.332 071	+0.332 646
2.94	+0.328 778	+0.329 626	+0.330 370	+0.331 018	+0.331 587
2.95	+0.327 767	+0.328 602	+0.329 335	+0.329 974	+0.330 535
2.96	+0.326 761	+0.327 585	+0.328 305	+0.328 935	+0.329 489
2.97	+0.325 760	+0.326 571	+0.327 282	+0.327 904	+0.328 449
2.98	+0.324 766	+0.325 563	+0.326 265	+0.326 879	+0.327 415
2.99	+0.323 776	+0.324 564	+0.325 254	+0.325 858	+0.326 388
3.00	+0.322 792	+0.323 569	+0.324 249	+0.324 844	+0.325 366
3.01	+0.321 814	+0.322 579	+0.323 249	+0.323 836	+0.324 351
3.02	+0.320 841	+0.321 594	+0.322 255	+0.322 834	+0.323 342
3.03	+0.319 873	+0.320 614	+0.321 267	+0.321 838	+0.322 339
3.04	+0.318 911	+0.319 643	+0.320 285	+0.320 847	+0.321 341
3.05	+0.317 954	+0.318 674	+0.319 308	+0.319 864	+0.320 350
3.06	+0.317 002	+0.317 712	+0.318 336	+0.318 884	+0.319 364
3.07	+0.316 056	+0.316 756	+0.317 371	+0.317 911	+0.318 384
3.08	+0.315 114	+0.315 804	+0.316 410	+0.316 943	+0.317 410
3.09	+0.314 178	+0.314 858	+0.315 456	+0.315 980	+0.316 442
3.10	+0.313 247	+0.313 917	+0.314 506	+0.315 024	+0.315 479
3.11	+0.312 321	+0.312 982	+0.313 562	+0.314 074	+0.314 522
3.12	+0.311 399	+0.312 051	+0.312 624	+0.313 128	+0.313 570
3.13	+0.310 483	+0.311 126	+0.311 690	+0.312 186	+0.312 624
3.14	+0.309 572	+0.310 205	+0.310 762	+0.311 252	+0.311 683
3.15	+0.308 666	+0.309 290	+0.309 830	+0.310 322	+0.310 747
3.16	+0.307 765	+0.308 380	+0.308 921	+0.309 398	+0.309 817
3.17	+0.306 868	+0.307 475	+0.308 009	+0.308 479	+0.308 892
3.18	+0.305 976	+0.306 574	+0.307 101	+0.307 565	+0.307 973
3.19	+0.305 089	+0.305 679	+0.306 198	+0.306 656	+0.307 059
3.20	+0.304 207	+0.304 788	+0.305 301	+0.305 752	+0.306 150
3.21	+0.303 330	+0.303 903	+0.304 408	+0.304 852	+0.305 246
3.22	+0.302 457	+0.303 022	+0.303 521	+0.303 960	+0.304 347
3.23	+0.301 589	+0.302 146	+0.302 638	+0.303 072	+0.303 453
3.24	+0.300 725	+0.301 275	+0.301 760	+0.302 188	+0.302 564
3.25	+0.299 866	+0.300 408	+0.300 887	+0.301 311	+0.301 681
3.26	+0.299 012	+0.299 546	+0.300 018	+0.300 431	+0.300 802
3.27	+0.298 162	+0.298 689	+0.299 155	+0.299 565	+0.299 928
3.28	+0.297 317	+0.297 836	+0.298 296	+0.298 701	+0.299 059
3.29	+0.296 476	+0.296 989	+0.297 442	+0.297 842	+0.298 195
3.30	+0.295 639	+0.296 145	+0.296 592	+0.296 987	+0.297 330
3.31	+0.294 807	+0.295 306	+0.295 747	+0.296 136	+0.296 481

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	90°	95°	100°	105°	110°
3.31	+0.294 807	+0.295 306	+0.295 747	+0.296 136	+0.296 481
3.32	+0.293 979	+0.294 471	+0.294 907	+0.295 291	+0.295 631
3.33	+0.293 156	+0.293 641	+0.294 071	+0.294 450	+0.294 786
3.34	+0.292 337	+0.292 816	+0.293 239	+0.293 617	+0.293 945
3.35	+0.291 522	+0.291 994	+0.292 412	+0.292 782	+0.293 109
3.36	+0.290 711	+0.291 177	+0.291 590	+0.291 956	+0.292 277
3.37	+0.289 905	+0.290 364	+0.290 772	+0.291 132	+0.291 450
3.38	+0.289 102	+0.289 556	+0.289 958	+0.290 315	+0.290 628
3.39	+0.288 304	+0.288 752	+0.289 148	+0.289 500	+0.289 810
3.40	+0.287 510	+0.287 952	+0.288 343	+0.288 690	+0.288 996
3.41	+0.286 720	+0.287 156	+0.287 542	+0.287 884	+0.288 187
3.42	+0.285 934	+0.286 364	+0.286 746	+0.287 084	+0.287 382
3.43	+0.285 153	+0.285 577	+0.285 953	+0.286 287	+0.286 582
3.44	+0.284 375	+0.284 793	+0.285 165	+0.285 493	+0.285 786
3.45	+0.283 601	+0.284 014	+0.284 381	+0.284 706	+0.284 994
3.46	+0.282 831	+0.283 239	+0.283 601	+0.283 923	+0.284 206
3.47	+0.282 065	+0.282 467	+0.282 825	+0.283 142	+0.283 423
3.48	+0.281 303	+0.281 700	+0.282 053	+0.282 366	+0.282 643
3.49	+0.280 545	+0.280 937	+0.281 285	+0.281 594	+0.281 868
3.50	+0.279 790	+0.280 177	+0.280 521	+0.280 826	+0.281 097
3.51	+0.279 040	+0.279 422	+0.279 761	+0.280 063	+0.280 330
3.52	+0.278 293	+0.278 670	+0.279 005	+0.279 303	+0.279 567
3.53	+0.277 550	+0.277 922	+0.278 253	+0.278 547	+0.278 808
3.54	+0.276 811	+0.277 178	+0.277 505	+0.277 795	+0.278 052
3.55	+0.276 075	+0.276 438	+0.276 760	+0.277 047	+0.277 301
3.56	+0.275 343	+0.275 701	+0.276 020	+0.276 304	+0.276 554
3.57	+0.274 615	+0.274 968	+0.275 283	+0.275 563	+0.275 811
3.58	+0.273 891	+0.274 239	+0.274 550	+0.274 827	+0.275 071
3.59	+0.273 170	+0.273 514	+0.273 821	+0.274 094	+0.274 336
3.60	+0.272 452	+0.272 792	+0.273 095	+0.273 364	+0.273 604
3.61	+0.271 738	+0.272 074	+0.272 373	+0.272 639	+0.272 876
3.62	+0.271 028	+0.271 360	+0.271 655	+0.271 918	+0.272 152
3.63	+0.270 321	+0.270 649	+0.270 940	+0.271 199	+0.271 431
3.64	+0.269 618	+0.269 941	+0.270 229	+0.270 480	+0.270 714
3.65	+0.268 918	+0.269 237	+0.269 522	+0.269 775	+0.270 001
3.66	+0.268 222	+0.268 537	+0.268 818	+0.269 068	+0.269 291
3.67	+0.267 529	+0.267 840	+0.268 118	+0.268 364	+0.268 585
3.68	+0.266 839	+0.267 146	+0.267 421	+0.267 665	+0.267 883
3.69	+0.266 153	+0.266 456	+0.266 727	+0.266 968	+0.267 184
3.70	+0.265 470	+0.265 770	+0.266 037	+0.266 277	+0.266 488
3.71	+0.264 790	+0.265 086	+0.265 351	+0.265 588	+0.265 796
3.72	+0.264 114	+0.264 406	+0.264 668	+0.264 900	+0.265 108
3.73	+0.263 441	+0.263 730	+0.263 988	+0.264 218	+0.264 423
3.74	+0.262 771	+0.263 057	+0.263 312	+0.263 540	+0.263 742
3.75	+0.262 105	+0.262 387	+0.262 639	+0.262 862	+0.263 064
3.76	+0.261 442	+0.261 720	+0.261 969	+0.262 190	+0.262 389
3.77	+0.260 782	+0.261 056	+0.261 302	+0.261 522	+0.261 717
3.78	+0.260 125	+0.260 396	+0.260 639	+0.260 857	+0.261 049
3.79	+0.259 471	+0.259 739	+0.259 979	+0.260 194	+0.260 384
3.80	+0.258 820	+0.259 085	+0.259 322	+0.259 534	+0.259 723
3.81	+0.258 173	+0.258 434	+0.258 669	+0.258 877	+0.259 065
3.82	+0.257 528	+0.257 787	+0.258 019	+0.258 225	+0.258 410
3.83	+0.256 887	+0.257 142	+0.257 371	+0.257 577	+0.257 758
3.84	+0.256 249	+0.256 501	+0.256 727	+0.256 930	+0.257 110
3.85	+0.255 613	+0.255 863	+0.256 086	+0.256 286	+0.256 464
3.86	+0.254 981	+0.255 227	+0.255 448	+0.255 645	+0.255 822

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	90°	95°	100°	105°	110°
3.80	+ 0.254 981	+ 0.255 227	+ 0.255 448	+ 0.255 615	+ 0.255 822
3.87	+ 0.254 352	+ 0.254 595	+ 0.254 813	+ 0.255 009	+ 0.255 183
3.88	+ 0.253 725	+ 0.253 966	+ 0.254 182	+ 0.254 374	+ 0.254 547
3.89	+ 0.253 102	+ 0.253 340	+ 0.253 553	+ 0.253 744	+ 0.253 914
3.90	+ 0.252 481	+ 0.252 716	+ 0.252 927	+ 0.253 116	+ 0.253 284
3.91	+ 0.251 864	+ 0.252 096	+ 0.252 304	+ 0.252 491	+ 0.252 657
3.92	+ 0.251 240	+ 0.251 478	+ 0.251 684	+ 0.251 869	+ 0.252 033
3.93	+ 0.250 637	+ 0.250 864	+ 0.251 067	+ 0.251 250	+ 0.251 412
3.94	+ 0.250 028	+ 0.250 252	+ 0.250 453	+ 0.250 634	+ 0.250 795
3.95	+ 0.249 422	+ 0.249 644	+ 0.249 842	+ 0.250 020	+ 0.250 180
3.96	+ 0.248 819	+ 0.249 038	+ 0.249 234	+ 0.249 410	+ 0.249 567
3.97	+ 0.248 218	+ 0.248 434	+ 0.248 629	+ 0.248 803	+ 0.248 958
3.98	+ 0.247 621	+ 0.247 834	+ 0.248 026	+ 0.248 199	+ 0.248 352
3.99	+ 0.247 026	+ 0.247 237	+ 0.247 427	+ 0.247 598	+ 0.247 749
4.00	+ 0.246 433	+ 0.246 642	+ 0.246 830	+ 0.246 999	+ 0.247 152

ψ z	115°	120°	125°	130°	135°
0.01	+ 1.269 28	+ 1.406 11	+ 1.710 95	+ 1.912 34	+ 2.098 90
0.02	+ 1.270 34	+ 1.491 89	+ 1.701 00	+ 1.806 34	+ 2.076 70
0.03	+ 1.271 65	+ 1.487 49	+ 1.690 87	+ 1.880 30	+ 2.054 90
0.04	+ 1.271 30	+ 1.482 64	+ 1.680 60	+ 1.864 28	+ 2.032 82
0.05	+ 1.271 45	+ 1.477 62	+ 1.670 16	+ 1.848 25	+ 2.011 18
0.06	+ 1.271 17	+ 1.472 34	+ 1.659 60	+ 1.832 26	+ 1.989 77
0.07	+ 1.270 58	+ 1.466 84	+ 1.648 92	+ 1.816 30	+ 1.968 55
0.08	+ 1.269 70	+ 1.461 11	+ 1.638 14	+ 1.800 38	+ 1.947 57
0.09	+ 1.268 49	+ 1.455 17	+ 1.627 25	+ 1.784 52	+ 1.926 81
0.10	+ 1.267 02	+ 1.449 03	+ 1.616 29	+ 1.768 72	+ 1.906 27
0.11	+ 1.265 28	+ 1.442 70	+ 1.605 26	+ 1.752 98	+ 1.885 90
0.12	+ 1.263 28	+ 1.436 19	+ 1.594 16	+ 1.737 32	+ 1.865 88
0.13	+ 1.261 03	+ 1.429 51	+ 1.583 00	+ 1.721 74	+ 1.846 04
0.14	+ 1.258 53	+ 1.422 68	+ 1.571 80	+ 1.706 25	+ 1.826 42
0.15	+ 1.255 80	+ 1.415 70	+ 1.560 56	+ 1.690 85	+ 1.807 00
0.16	+ 1.252 85	+ 1.408 58	+ 1.549 30	+ 1.675 50	+ 1.787 90
0.17	+ 1.249 68	+ 1.401 34	+ 1.538 02	+ 1.660 30	+ 1.768 99
0.18	+ 1.246 31	+ 1.393 97	+ 1.526 72	+ 1.645 27	+ 1.750 33
0.19	+ 1.242 73	+ 1.386 50	+ 1.515 42	+ 1.630 30	+ 1.731 90
0.20	+ 1.238 98	+ 1.378 93	+ 1.504 12	+ 1.615 44	+ 1.713 70
0.21	+ 1.235 048	+ 1.371 259	+ 1.492 839	+ 1.600 701	+ 1.695 730
0.22	+ 1.230 949	+ 1.363 597	+ 1.481 553	+ 1.586 084	+ 1.678 009
0.23	+ 1.226 684	+ 1.355 979	+ 1.470 298	+ 1.571 592	+ 1.660 512
0.24	+ 1.222 266	+ 1.347 780	+ 1.459 068	+ 1.557 229	+ 1.643 240
0.25	+ 1.217 703	+ 1.339 820	+ 1.447 869	+ 1.542 990	+ 1.626 219
0.26	+ 1.213 000	+ 1.331 803	+ 1.436 704	+ 1.528 894	+ 1.609 418
0.27	+ 1.208 170	+ 1.323 735	+ 1.425 583	+ 1.514 927	+ 1.592 844
0.28	+ 1.203 216	+ 1.315 629	+ 1.414 505	+ 1.501 090	+ 1.576 498
0.29	+ 1.198 145	+ 1.307 482	+ 1.403 474	+ 1.487 401	+ 1.560 374
0.30	+ 1.192 965	+ 1.299 397	+ 1.392 500	+ 1.473 843	+ 1.544 473
0.31	+ 1.187 688	+ 1.291 164	+ 1.381 575	+ 1.460 425	+ 1.528 793
0.32	+ 1.182 310	+ 1.282 882	+ 1.370 714	+ 1.447 147	+ 1.513 328
0.33	+ 1.176 845	+ 1.274 644	+ 1.359 914	+ 1.434 000	+ 1.498 084
0.34	+ 1.171 296	+ 1.266 395	+ 1.349 177	+ 1.421 000	+ 1.483 050
0.35	+ 1.165 670	+ 1.258 140	+ 1.338 510	+ 1.408 152	+ 1.468 220
0.36	+ 1.159 973	+ 1.249 885	+ 1.327 911	+ 1.395 433	+ 1.453 614

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	115°	120°	125°	130°	135°
0.36	+ 1.159 973	+ 1.249 885	+ 1.327 911	+ 1.395 433	+ 1.453 614
0.37	+ 1.154 209	+ 1.241 630	+ 1.317 385	+ 1.382 857	+ 1.439 207
0.38	+ 1.148 385	+ 1.233 383	+ 1.306 933	+ 1.370 420	+ 1.425 003
0.39	+ 1.142 505	+ 1.225 145	+ 1.296 556	+ 1.358 123	+ 1.411 001
0.40	+ 1.136 575	+ 1.216 922	+ 1.286 260	+ 1.345 969	+ 1.397 198
0.41	+ 1.130 600	+ 1.208 717	+ 1.276 043	+ 1.333 953	+ 1.383 590
0.42	+ 1.124 579	+ 1.200 528	+ 1.265 904	+ 1.322 076	+ 1.370 176
0.43	+ 1.118 526	+ 1.192 364	+ 1.255 848	+ 1.310 337	+ 1.356 954
0.44	+ 1.112 438	+ 1.184 226	+ 1.245 876	+ 1.298 736	+ 1.343 919
0.45	+ 1.106 322	+ 1.176 117	+ 1.235 988	+ 1.287 272	+ 1.331 070
0.46	+ 1.100 181	+ 1.168 039	+ 1.226 185	+ 1.275 944	+ 1.318 406
0.47	+ 1.094 019	+ 1.159 994	+ 1.216 467	+ 1.264 750	+ 1.305 919
0.48	+ 1.087 838	+ 1.151 984	+ 1.206 836	+ 1.253 693	+ 1.293 613
0.49	+ 1.081 646	+ 1.144 013	+ 1.197 291	+ 1.242 765	+ 1.281 480
0.50	+ 1.075 442	+ 1.136 081	+ 1.187 835	+ 1.231 971	+ 1.269 519
0.51	+ 1.069 228	+ 1.128 190	+ 1.178 467	+ 1.221 309	+ 1.257 731
0.52	+ 1.063 011	+ 1.120 343	+ 1.169 186	+ 1.210 775	+ 1.246 108
0.53	+ 1.056 792	+ 1.112 540	+ 1.159 994	+ 1.200 370	+ 1.234 651
0.54	+ 1.050 573	+ 1.104 783	+ 1.150 891	+ 1.190 093	+ 1.223 358
0.55	+ 1.044 358	+ 1.097 074	+ 1.141 876	+ 1.179 942	+ 1.212 223
0.56	+ 1.038 148	+ 1.089 414	+ 1.132 950	+ 1.169 915	+ 1.201 246
0.57	+ 1.031 947	+ 1.081 803	+ 1.124 112	+ 1.160 013	+ 1.190 424
0.58	+ 1.025 755	+ 1.074 243	+ 1.115 362	+ 1.150 232	+ 1.179 755
0.59	+ 1.019 576	+ 1.066 736	+ 1.106 701	+ 1.140 573	+ 1.169 237
0.60	+ 1.013 412	+ 1.059 281	+ 1.098 127	+ 1.131 032	+ 1.158 864
0.61	+ 1.007 263	+ 1.051 879	+ 1.089 641	+ 1.121 611	+ 1.148 639
0.62	+ 1.001 132	+ 1.044 532	+ 1.081 243	+ 1.112 306	+ 1.138 556
0.63	+ 0.995 034	+ 1.037 240	+ 1.072 932	+ 1.103 109	+ 1.128 610
0.64	+ 0.988 934	+ 1.030 003	+ 1.064 708	+ 1.094 041	+ 1.118 811
0.65	+ 0.982 864	+ 1.022 823	+ 1.056 566	+ 1.085 078	+ 1.109 144
0.66	+ 0.976 825	+ 1.015 699	+ 1.048 512	+ 1.076 227	+ 1.099 611
0.67	+ 0.970 809	+ 1.008 633	+ 1.040 544	+ 1.067 486	+ 1.090 209
0.68	+ 0.964 817	+ 1.001 623	+ 1.032 660	+ 1.058 853	+ 1.080 938
0.69	+ 0.958 857	+ 0.994 671	+ 1.024 860	+ 1.050 327	+ 1.071 794
0.70	+ 0.952 924	+ 0.987 777	+ 1.017 144	+ 1.041 909	+ 1.062 776
0.71	+ 0.947 022	+ 0.980 941	+ 1.009 510	+ 1.033 504	+ 1.053 881
0.72	+ 0.941 150	+ 0.974 163	+ 1.001 959	+ 1.025 384	+ 1.045 110
0.73	+ 0.935 310	+ 0.967 443	+ 0.994 488	+ 1.017 273	+ 1.036 455
0.74	+ 0.929 504	+ 0.960 782	+ 0.987 098	+ 1.009 263	+ 1.027 919
0.75	+ 0.923 731	+ 0.954 179	+ 0.979 788	+ 1.001 352	+ 1.019 498
0.76	+ 0.917 992	+ 0.947 634	+ 0.972 558	+ 0.993 539	+ 1.011 192
0.77	+ 0.912 388	+ 0.941 147	+ 0.965 407	+ 0.985 823	+ 1.002 995
0.78	+ 0.906 620	+ 0.934 719	+ 0.958 333	+ 0.978 202	+ 0.994 911
0.79	+ 0.900 989	+ 0.928 349	+ 0.951 337	+ 0.970 674	+ 0.986 934
0.80	+ 0.895 395	+ 0.922 037	+ 0.944 416	+ 0.963 239	+ 0.979 063
0.81	+ 0.889 835	+ 0.915 782	+ 0.937 573	+ 0.955 896	+ 0.971 297
0.82	+ 0.884 314	+ 0.909 585	+ 0.930 803	+ 0.948 642	+ 0.963 634
0.83	+ 0.878 831	+ 0.903 445	+ 0.924 108	+ 0.941 476	+ 0.956 071
0.84	+ 0.873 380	+ 0.897 303	+ 0.917 480	+ 0.934 390	+ 0.948 609
0.85	+ 0.867 981	+ 0.891 337	+ 0.910 937	+ 0.927 408	+ 0.941 244
0.86	+ 0.862 614	+ 0.885 368	+ 0.904 460	+ 0.920 501	+ 0.933 976
0.87	+ 0.857 286	+ 0.879 455	+ 0.898 054	+ 0.913 679	+ 0.926 802
0.88	+ 0.851 997	+ 0.873 598	+ 0.891 718	+ 0.906 939	+ 0.919 722
0.89	+ 0.846 748	+ 0.867 797	+ 0.885 452	+ 0.900 280	+ 0.912 732
0.90	+ 0.841 538	+ 0.862 051	+ 0.879 254	+ 0.893 702	+ 0.905 833
0.91	+ 0.836 369	+ 0.856 360	+ 0.873 124	+ 0.887 203	+ 0.899 023

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	115°	120°	125°	130°	135°
0.91	+ 0.836 369	+ 0.856 360	+ 0.873 124	+ 0.887 203	+ 0.899 023
0.92	+ 0.831 230	+ 0.850 724	+ 0.867 062	+ 0.880 781	+ 0.892 300
0.93	+ 0.826 140	+ 0.845 141	+ 0.861 005	+ 0.874 436	+ 0.885 662
0.94	+ 0.821 008	+ 0.839 613	+ 0.855 135	+ 0.868 168	+ 0.879 109
0.95	+ 0.816 080	+ 0.834 138	+ 0.849 270	+ 0.861 974	+ 0.872 639
0.96	+ 0.811 118	+ 0.828 710	+ 0.843 468	+ 0.855 854	+ 0.866 251
0.97	+ 0.806 180	+ 0.823 347	+ 0.837 730	+ 0.849 806	+ 0.859 945
0.98	+ 0.801 298	+ 0.818 020	+ 0.832 055	+ 0.843 830	+ 0.853 714
0.99	+ 0.796 448	+ 0.812 764	+ 0.826 442	+ 0.837 924	+ 0.847 562
1.00	+ 0.791 030	+ 0.807 549	+ 0.820 888	+ 0.832 087	+ 0.841 507
1.04	+ 0.772 780	+ 0.787 197	+ 0.799 275	+ 0.809 415	+ 0.817 931
1.08	+ 0.754 567	+ 0.767 626	+ 0.778 580	+ 0.787 776	+ 0.795 497
1.12	+ 0.736 658	+ 0.748 816	+ 0.758 700	+ 0.767 111	+ 0.774 124
1.16	+ 0.719 933	+ 0.730 728	+ 0.739 709	+ 0.747 365	+ 0.753 746
1.20	+ 0.703 532	+ 0.713 337	+ 0.721 568	+ 0.728 487	+ 0.734 300
1.24	+ 0.687 678	+ 0.696 613	+ 0.704 117	+ 0.710 427	+ 0.715 731
1.28	+ 0.672 374	+ 0.680 527	+ 0.687 377	+ 0.693 140	+ 0.697 986
1.32	+ 0.657 607	+ 0.665 052	+ 0.671 313	+ 0.676 583	+ 0.681 018
1.36	+ 0.643 353	+ 0.650 101	+ 0.655 890	+ 0.660 716	+ 0.664 779
1.40	+ 0.629 593	+ 0.635 827	+ 0.641 076	+ 0.645 502	+ 0.649 229
1.44	+ 0.616 310	+ 0.622 025	+ 0.626 842	+ 0.630 904	+ 0.634 328
1.48	+ 0.603 487	+ 0.608 732	+ 0.613 156	+ 0.616 890	+ 0.620 039
1.52	+ 0.591 106	+ 0.595 925	+ 0.599 993	+ 0.603 429	+ 0.606 328
1.56	+ 0.579 147	+ 0.583 580	+ 0.587 326	+ 0.590 491	+ 0.593 164
1.60	+ 0.567 596	+ 0.571 678	+ 0.575 130	+ 0.578 050	+ 0.580 518
1.64	+ 0.556 433	+ 0.560 198	+ 0.563 383	+ 0.566 080	+ 0.568 360
1.68	+ 0.545 648	+ 0.549 121	+ 0.552 064	+ 0.554 556	+ 0.556 665
1.72	+ 0.535 220	+ 0.538 429	+ 0.541 140	+ 0.543 450	+ 0.545 409
1.76	+ 0.525 136	+ 0.528 104	+ 0.530 622	+ 0.532 759	+ 0.534 570
1.80	+ 0.515 382	+ 0.518 129	+ 0.520 463	+ 0.522 445	+ 0.524 125
1.84	+ 0.505 945	+ 0.508 491	+ 0.510 656	+ 0.512 495	+ 0.514 056
1.88	+ 0.496 811	+ 0.499 173	+ 0.501 182	+ 0.502 892	+ 0.504 343
1.92	+ 0.487 908	+ 0.490 161	+ 0.492 028	+ 0.493 618	+ 0.494 909
1.96	+ 0.479 404	+ 0.481 442	+ 0.483 179	+ 0.484 659	+ 0.485 917
2.00	+ 0.471 107	+ 0.473 002	+ 0.474 620	+ 0.475 999	+ 0.477 172
2.04	+ 0.463 067	+ 0.464 832	+ 0.466 339	+ 0.467 625	+ 0.468 720
2.08	+ 0.455 272	+ 0.456 917	+ 0.458 323	+ 0.459 524	+ 0.460 546
2.12	+ 0.447 715	+ 0.449 248	+ 0.450 500	+ 0.451 682	+ 0.452 638
2.16	+ 0.440 383	+ 0.441 815	+ 0.443 041	+ 0.444 090	+ 0.444 985
2.20	+ 0.433 270	+ 0.434 607	+ 0.435 753	+ 0.436 735	+ 0.437 573
2.24	+ 0.426 365	+ 0.427 615	+ 0.428 688	+ 0.429 607	+ 0.430 392
2.28	+ 0.419 660	+ 0.420 820	+ 0.421 835	+ 0.422 697	+ 0.423 433
2.32	+ 0.413 140	+ 0.414 244	+ 0.415 186	+ 0.415 994	+ 0.416 686
2.36	+ 0.406 821	+ 0.407 849	+ 0.408 732	+ 0.409 491	+ 0.410 140
2.40	+ 0.400 674	+ 0.401 637	+ 0.402 466	+ 0.403 179	+ 0.403 789
2.44	+ 0.394 697	+ 0.395 601	+ 0.396 380	+ 0.397 050	+ 0.397 624
2.48	+ 0.388 885	+ 0.389 734	+ 0.390 466	+ 0.391 090	+ 0.391 636
2.52	+ 0.383 231	+ 0.384 029	+ 0.384 717	+ 0.385 311	+ 0.385 820
2.56	+ 0.377 730	+ 0.378 480	+ 0.379 128	+ 0.379 687	+ 0.380 167
2.60	+ 0.372 375	+ 0.373 081	+ 0.373 692	+ 0.374 210	+ 0.374 672
2.64	+ 0.367 162	+ 0.367 827	+ 0.368 403	+ 0.368 890	+ 0.369 327
2.68	+ 0.362 085	+ 0.362 712	+ 0.363 255	+ 0.363 724	+ 0.364 127
2.72	+ 0.357 141	+ 0.357 730	+ 0.358 243	+ 0.358 686	+ 0.359 067
2.76	+ 0.352 321	+ 0.352 878	+ 0.353 362	+ 0.353 780	+ 0.354 141
2.80	+ 0.347 623	+ 0.348 150	+ 0.348 607	+ 0.349 093	+ 0.349 344
2.84	+ 0.343 044	+ 0.343 541	+ 0.343 974	+ 0.344 348	+ 0.344 671

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	115°	120°	125°	130°	135°
2.84	+ 0.343 044	+ 0.343 541	+ 0.343 974	+ 0.344 348	+ 0.344 671
2.88	+ 0.338 578	+ 0.339 048	+ 0.339 457	+ 0.339 812	+ 0.340 118
2.92	+ 0.334 222	+ 0.334 666	+ 0.335 054	+ 0.335 389	+ 0.335 679
2.96	+ 0.329 971	+ 0.330 392	+ 0.330 759	+ 0.331 077	+ 0.331 352
3.00	+ 0.325 823	+ 0.326 222	+ 0.326 569	+ 0.326 871	+ 0.327 132
3.04	+ 0.321 774	+ 0.322 151	+ 0.322 481	+ 0.322 767	+ 0.323 015
3.08	+ 0.317 820	+ 0.318 178	+ 0.318 490	+ 0.318 762	+ 0.318 997
3.12	+ 0.313 958	+ 0.314 298	+ 0.314 594	+ 0.314 852	+ 0.315 076
3.16	+ 0.310 185	+ 0.310 508	+ 0.310 789	+ 0.311 034	+ 0.311 247
3.20	+ 0.306 499	+ 0.306 805	+ 0.307 072	+ 0.307 306	+ 0.307 508
3.24	+ 0.302 896	+ 0.303 187	+ 0.303 441	+ 0.303 663	+ 0.303 855
3.28	+ 0.299 374	+ 0.299 650	+ 0.299 892	+ 0.300 103	+ 0.300 286
3.32	+ 0.295 930	+ 0.296 193	+ 0.296 423	+ 0.296 624	+ 0.296 798
3.36	+ 0.292 562	+ 0.292 812	+ 0.293 031	+ 0.293 222	+ 0.293 389
3.40	+ 0.289 267	+ 0.289 505	+ 0.289 714	+ 0.289 896	+ 0.290 054
3.44	+ 0.286 043	+ 0.286 270	+ 0.286 468	+ 0.286 642	+ 0.286 793
3.48	+ 0.282 888	+ 0.283 104	+ 0.283 294	+ 0.283 459	+ 0.283 603
3.52	+ 0.279 800	+ 0.280 006	+ 0.280 186	+ 0.280 344	+ 0.280 482
3.56	+ 0.276 777	+ 0.276 973	+ 0.277 145	+ 0.277 296	+ 0.277 428
3.60	+ 0.273 816	+ 0.274 003	+ 0.274 168	+ 0.274 312	+ 0.274 437
3.64	+ 0.270 915	+ 0.271 094	+ 0.271 252	+ 0.271 389	+ 0.271 510
3.68	+ 0.268 075	+ 0.268 246	+ 0.268 396	+ 0.268 528	+ 0.268 642
3.72	+ 0.265 292	+ 0.265 455	+ 0.265 598	+ 0.265 724	+ 0.265 834
3.76	+ 0.262 565	+ 0.262 720	+ 0.262 857	+ 0.262 978	+ 0.263 083
3.80	+ 0.259 891	+ 0.260 040	+ 0.260 171	+ 0.260 286	+ 0.260 387
3.84	+ 0.257 270	+ 0.257 412	+ 0.257 538	+ 0.257 648	+ 0.257 744
3.88	+ 0.254 700	+ 0.254 836	+ 0.254 956	+ 0.255 062	+ 0.255 154
3.92	+ 0.252 180	+ 0.252 310	+ 0.252 425	+ 0.252 526	+ 0.252 615
3.96	+ 0.249 708	+ 0.249 832	+ 0.249 943	+ 0.250 040	+ 0.250 126
4.00	+ 0.247 285	+ 0.247 402	+ 0.247 508	+ 0.247 600	+ 0.247 682

ψ z	140°	145°	150°	155°	160°
0.01	+ 2.269 34	+ 2.422 48	+ 2.557 32	+ 2.672 06	+ 2.768 62
0.02	+ 2.240 97	+ 2.388 17	+ 2.517 48	+ 2.628 10	+ 2.710 56
0.03	+ 2.213 01	+ 2.354 55	+ 2.478 50	+ 2.584 54	+ 2.671 80
0.04	+ 2.185 47	+ 2.321 50	+ 2.440 60	+ 2.542 05	+ 2.625 55
0.05	+ 2.158 36	+ 2.289 26	+ 2.403 48	+ 2.500 65	+ 2.580 51
0.06	+ 2.131 66	+ 2.257 57	+ 2.367 21	+ 2.460 31	+ 2.536 72
0.07	+ 2.105 37	+ 2.226 51	+ 2.331 77	+ 2.420 08	+ 2.494 12
0.08	+ 2.079 51	+ 2.196 06	+ 2.297 14	+ 2.382 08	+ 2.452 68
0.09	+ 2.054 05	+ 2.166 20	+ 2.263 20	+ 2.345 32	+ 2.412 35
0.10	+ 2.028 99	+ 2.136 94	+ 2.230 20	+ 2.308 89	+ 2.373 10
0.11	+ 2.004 33	+ 2.108 24	+ 2.197 85	+ 2.273 35	+ 2.334 88
0.12	+ 1.980 06	+ 2.080 10	+ 2.169 24	+ 2.238 69	+ 2.297 67
0.13	+ 1.956 19	+ 2.052 52	+ 2.135 32	+ 2.204 88	+ 2.261 43
0.14	+ 1.932 71	+ 2.025 48	+ 2.105 00	+ 2.171 88	+ 2.226 12
0.15	+ 1.909 60	+ 1.998 96	+ 2.075 53	+ 2.139 67	+ 2.191 71
0.16	+ 1.886 87	+ 1.972 06	+ 2.046 61	+ 2.108 23	+ 2.158 18
0.17	+ 1.864 52	+ 1.947 40	+ 2.018 33	+ 2.077 55	+ 2.125 49
0.18	+ 1.842 53	+ 1.922 40	+ 1.990 66	+ 2.047 58	+ 2.093 62
0.19	+ 1.820 90	+ 1.897 05	+ 1.963 59	+ 2.018 32	+ 2.062 54
0.20	+ 1.799 63	+ 1.873 00	+ 1.937 10	+ 1.989 73	+ 2.032 22
0.21	+ 1.778 71	+ 1.850 32	+ 1.911 18	+ 1.961 81	+ 2.002 64

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	140°	145°	150°	155°	160°
0.21	+ 1.778 710	+ 1.850 324	+ 1.911 182	+ 1.961 808	+ 2.002 640
0.22	+ 1.758 136	+ 1.827 195	+ 1.885 812	+ 1.934 523	+ 1.973 777
0.23	+ 1.737 903	+ 1.804 510	+ 1.860 978	+ 1.907 857	+ 1.945 604
0.24	+ 1.718 006	+ 1.782 259	+ 1.836 670	+ 1.881 797	+ 1.918 104
0.25	+ 1.698 437	+ 1.760 430	+ 1.812 869	+ 1.856 320	+ 1.891 252
0.26	+ 1.679 194	+ 1.739 016	+ 1.789 564	+ 1.831 411	+ 1.865 029
0.27	+ 1.660 268	+ 1.718 005	+ 1.766 742	+ 1.807 054	+ 1.839 417
0.28	+ 1.641 658	+ 1.697 391	+ 1.744 390	+ 1.783 232	+ 1.814 393
0.29	+ 1.623 354	+ 1.677 169	+ 1.722 496	+ 1.759 931	+ 1.789 943
0.30	+ 1.605 356	+ 1.657 316	+ 1.701 050	+ 1.737 138	+ 1.766 048
0.31	+ 1.587 654	+ 1.637 836	+ 1.680 036	+ 1.714 823	+ 1.742 691
0.32	+ 1.570 240	+ 1.618 717	+ 1.659 448	+ 1.692 976	+ 1.719 855
0.33	+ 1.553 123	+ 1.599 955	+ 1.639 270	+ 1.671 630	+ 1.697 527
0.34	+ 1.536 284	+ 1.581 536	+ 1.619 495	+ 1.650 727	+ 1.675 691
0.35	+ 1.519 722	+ 1.563 455	+ 1.600 112	+ 1.630 253	+ 1.654 331
0.36	+ 1.503 432	+ 1.545 706	+ 1.581 111	+ 1.610 205	+ 1.633 434
0.37	+ 1.487 410	+ 1.528 278	+ 1.562 481	+ 1.590 569	+ 1.612 987
0.38	+ 1.471 650	+ 1.511 166	+ 1.544 210	+ 1.571 331	+ 1.592 977
0.39	+ 1.456 140	+ 1.494 307	+ 1.526 302	+ 1.552 501	+ 1.573 390
0.40	+ 1.440 899	+ 1.477 862	+ 1.508 734	+ 1.534 044	+ 1.554 216
0.41	+ 1.425 898	+ 1.461 655	+ 1.491 502	+ 1.515 958	+ 1.535 442
0.42	+ 1.411 140	+ 1.445 737	+ 1.474 598	+ 1.498 236	+ 1.517 058
0.43	+ 1.396 622	+ 1.430 102	+ 1.458 014	+ 1.480 803	+ 1.499 051
0.44	+ 1.382 338	+ 1.414 742	+ 1.441 742	+ 1.463 833	+ 1.481 411
0.45	+ 1.368 284	+ 1.399 651	+ 1.425 774	+ 1.447 138	+ 1.464 131
0.46	+ 1.354 450	+ 1.384 825	+ 1.410 103	+ 1.430 767	+ 1.447 198
0.47	+ 1.340 849	+ 1.370 257	+ 1.394 722	+ 1.414 711	+ 1.430 603
0.48	+ 1.327 460	+ 1.355 940	+ 1.379 622	+ 1.398 976	+ 1.414 337
0.49	+ 1.314 286	+ 1.341 872	+ 1.364 800	+ 1.383 520	+ 1.398 391
0.50	+ 1.301 317	+ 1.328 044	+ 1.350 248	+ 1.368 369	+ 1.382 758
0.51	+ 1.288 555	+ 1.314 449	+ 1.335 955	+ 1.353 500	+ 1.367 429
0.52	+ 1.275 995	+ 1.301 090	+ 1.321 921	+ 1.338 910	+ 1.352 394
0.53	+ 1.263 632	+ 1.287 955	+ 1.308 137	+ 1.324 591	+ 1.337 647
0.54	+ 1.251 464	+ 1.275 042	+ 1.294 598	+ 1.310 538	+ 1.323 181
0.55	+ 1.239 484	+ 1.262 343	+ 1.281 297	+ 1.296 741	+ 1.308 958
0.56	+ 1.227 692	+ 1.249 858	+ 1.268 230	+ 1.283 196	+ 1.295 061
0.57	+ 1.216 082	+ 1.237 589	+ 1.255 391	+ 1.269 895	+ 1.281 393
0.58	+ 1.204 652	+ 1.225 503	+ 1.242 773	+ 1.256 833	+ 1.267 978
0.59	+ 1.193 398	+ 1.213 616	+ 1.230 375	+ 1.244 008	+ 1.254 800
0.60	+ 1.182 316	+ 1.201 935	+ 1.218 189	+ 1.231 408	+ 1.241 881
0.61	+ 1.171 403	+ 1.190 436	+ 1.206 209	+ 1.219 031	+ 1.229 180
0.62	+ 1.160 657	+ 1.179 147	+ 1.194 434	+ 1.206 871	+ 1.216 721
0.63	+ 1.150 074	+ 1.168 018	+ 1.182 856	+ 1.194 920	+ 1.204 477
0.64	+ 1.139 650	+ 1.157 069	+ 1.171 472	+ 1.183 179	+ 1.192 451
0.65	+ 1.129 383	+ 1.146 296	+ 1.160 278	+ 1.171 642	+ 1.180 037
0.66	+ 1.119 271	+ 1.135 695	+ 1.149 269	+ 1.160 300	+ 1.169 030
0.67	+ 1.109 309	+ 1.125 260	+ 1.138 441	+ 1.149 150	+ 1.157 025
0.68	+ 1.099 496	+ 1.114 991	+ 1.127 791	+ 1.138 194	+ 1.146 417
0.69	+ 1.089 827	+ 1.104 880	+ 1.117 314	+ 1.127 412	+ 1.135 401
0.70	+ 1.080 301	+ 1.094 927	+ 1.107 006	+ 1.116 815	+ 1.124 574
0.71	+ 1.070 915	+ 1.085 128	+ 1.096 864	+ 1.106 393	+ 1.113 929
0.72	+ 1.061 667	+ 1.075 481	+ 1.086 885	+ 1.096 143	+ 1.103 404
0.73	+ 1.052 553	+ 1.065 981	+ 1.077 064	+ 1.086 061	+ 1.093 174
0.74	+ 1.043 572	+ 1.056 625	+ 1.067 398	+ 1.076 142	+ 1.083 055
0.75	+ 1.034 720	+ 1.047 412	+ 1.057 885	+ 1.066 383	+ 1.073 103
0.76	+ 1.025 997	+ 1.038 338	+ 1.048 520	+ 1.056 783	+ 1.063 315

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	140°	145°	150°	155°	160°
0.76	+ 1.025 997	+ 1.038 338	+ 1.048 520	+ 1.056 783	+ 1.063 315
0.77	+ 1.017 395	+ 1.029 399	+ 1.039 302	+ 1.047 336	+ 1.053 686
0.78	+ 1.008 920	+ 1.020 595	+ 1.030 225	+ 1.038 038	+ 1.044 213
0.79	+ 1.000 564	+ 1.011 921	+ 1.021 288	+ 1.028 887	+ 1.034 893
0.80	+ 0.992 326	+ 1.003 376	+ 1.012 488	+ 1.019 880	+ 1.025 721
0.81	+ 0.984 204	+ 0.994 956	+ 1.003 822	+ 1.011 012	+ 1.016 696
0.82	+ 0.976 196	+ 0.986 660	+ 0.995 287	+ 1.002 284	+ 1.007 813
0.83	+ 0.968 299	+ 0.978 484	+ 0.986 880	+ 0.993 689	+ 0.999 069
0.84	+ 0.960 513	+ 0.970 427	+ 0.978 599	+ 0.985 226	+ 0.990 462
0.85	+ 0.952 834	+ 0.962 486	+ 0.970 442	+ 0.976 893	+ 0.981 989
0.86	+ 0.945 262	+ 0.954 660	+ 0.962 405	+ 0.968 685	+ 0.973 646
0.87	+ 0.937 793	+ 0.946 944	+ 0.954 486	+ 0.960 601	+ 0.965 431
0.88	+ 0.930 426	+ 0.939 338	+ 0.946 683	+ 0.952 638	+ 0.957 341
0.89	+ 0.923 159	+ 0.931 840	+ 0.938 994	+ 0.944 793	+ 0.949 374
0.90	+ 0.915 991	+ 0.924 447	+ 0.931 416	+ 0.937 065	+ 0.941 526
0.91	+ 0.908 920	+ 0.917 158	+ 0.923 947	+ 0.929 450	+ 0.933 796
0.92	+ 0.901 944	+ 0.909 971	+ 0.916 585	+ 0.921 946	+ 0.926 181
0.93	+ 0.895 060	+ 0.902 883	+ 0.909 328	+ 0.914 552	+ 0.918 679
0.94	+ 0.888 268	+ 0.895 892	+ 0.902 174	+ 0.907 265	+ 0.911 286
0.95	+ 0.881 567	+ 0.888 998	+ 0.895 120	+ 0.900 083	+ 0.904 002
0.96	+ 0.874 954	+ 0.882 197	+ 0.888 165	+ 0.893 002	+ 0.896 824
0.97	+ 0.868 429	+ 0.875 490	+ 0.881 308	+ 0.886 024	+ 0.889 749
0.98	+ 0.861 987	+ 0.868 873	+ 0.874 546	+ 0.879 144	+ 0.882 775
0.99	+ 0.855 630	+ 0.862 345	+ 0.867 877	+ 0.872 300	+ 0.875 902
1.00	+ 0.849 355	+ 0.855 904	+ 0.861 299	+ 0.865 672	+ 0.869 125
1.04	+ 0.825 053	+ 0.830 984	+ 0.835 870	+ 0.839 830	+ 0.842 958
1.08	+ 0.801 960	+ 0.807 340	+ 0.811 773	+ 0.815 360	+ 0.818 204
1.12	+ 0.779 997	+ 0.784 886	+ 0.788 915	+ 0.792 180	+ 0.794 760
1.16	+ 0.759 090	+ 0.763 540	+ 0.767 207	+ 0.770 180	+ 0.772 529
1.20	+ 0.739 170	+ 0.743 228	+ 0.746 571	+ 0.749 282	+ 0.751 425
1.24	+ 0.720 176	+ 0.723 879	+ 0.726 933	+ 0.729 410	+ 0.731 368
1.28	+ 0.702 050	+ 0.705 430	+ 0.708 220	+ 0.710 404	+ 0.712 285
1.32	+ 0.684 737	+ 0.687 837	+ 0.690 395	+ 0.692 471	+ 0.694 112
1.36	+ 0.668 188	+ 0.671 031	+ 0.673 378	+ 0.675 282	+ 0.676 788
1.40	+ 0.652 358	+ 0.654 968	+ 0.657 124	+ 0.658 873	+ 0.660 257
1.44	+ 0.637 203	+ 0.639 603	+ 0.641 586	+ 0.643 195	+ 0.644 469
1.48	+ 0.622 685	+ 0.624 894	+ 0.626 720	+ 0.628 203	+ 0.629 377
1.52	+ 0.608 766	+ 0.610 803	+ 0.612 487	+ 0.613 855	+ 0.614 937
1.56	+ 0.595 413	+ 0.597 293	+ 0.598 847	+ 0.600 111	+ 0.601 111
1.60	+ 0.582 594	+ 0.584 331	+ 0.585 768	+ 0.586 936	+ 0.587 861
1.64	+ 0.570 280	+ 0.571 886	+ 0.573 216	+ 0.574 207	+ 0.575 154
1.68	+ 0.558 442	+ 0.559 930	+ 0.561 162	+ 0.562 164	+ 0.562 958
1.72	+ 0.547 056	+ 0.548 436	+ 0.549 578	+ 0.550 508	+ 0.551 245
1.76	+ 0.536 098	+ 0.537 378	+ 0.538 438	+ 0.539 302	+ 0.539 987
1.80	+ 0.525 544	+ 0.526 733	+ 0.527 719	+ 0.528 522	+ 0.529 159
1.84	+ 0.515 374	+ 0.516 480	+ 0.517 398	+ 0.518 145	+ 0.518 738
1.88	+ 0.505 570	+ 0.506 500	+ 0.507 454	+ 0.508 150	+ 0.508 702
1.92	+ 0.496 111	+ 0.497 071	+ 0.497 867	+ 0.498 516	+ 0.499 032
1.96	+ 0.486 982	+ 0.487 877	+ 0.488 620	+ 0.489 226	+ 0.489 707
2.00	+ 0.478 166	+ 0.479 001	+ 0.479 695	+ 0.480 261	+ 0.480 711
2.04	+ 0.469 648	+ 0.470 428	+ 0.471 077	+ 0.471 606	+ 0.472 027
2.08	+ 0.461 414	+ 0.462 143	+ 0.462 750	+ 0.463 246	+ 0.463 640
2.12	+ 0.453 450	+ 0.454 133	+ 0.454 701	+ 0.455 165	+ 0.455 534
2.16	+ 0.445 744	+ 0.446 384	+ 0.446 916	+ 0.447 351	+ 0.447 698
2.20	+ 0.438 284	+ 0.438 884	+ 0.439 384	+ 0.439 792	+ 0.440 117
2.24	+ 0.431 060	+ 0.431 622	+ 0.432 091	+ 0.432 474	+ 0.432 780

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	140°	145°	150°	155°	160°
2.24	+ 0.431 000	+ 0.431 022	+ 0.432 091	+ 0.432 474	+ 0.432 780
2.28	+ 0.424 050	+ 0.424 588	+ 0.425 028	+ 0.425 388	+ 0.425 675
2.32	+ 0.417 274	+ 0.417 770	+ 0.418 184	+ 0.418 523	+ 0.418 792
2.36	+ 0.410 603	+ 0.411 160	+ 0.411 550	+ 0.411 808	+ 0.412 122
2.40	+ 0.404 309	+ 0.404 748	+ 0.405 115	+ 0.405 415	+ 0.405 654
2.44	+ 0.398 113	+ 0.398 527	+ 0.398 872	+ 0.399 155	+ 0.399 381
2.48	+ 0.392 097	+ 0.392 487	+ 0.392 813	+ 0.393 080	+ 0.393 292
2.52	+ 0.386 254	+ 0.386 622	+ 0.386 929	+ 0.387 181	+ 0.387 382
2.56	+ 0.380 577	+ 0.380 924	+ 0.381 214	+ 0.381 451	+ 0.381 641
2.60	+ 0.375 058	+ 0.375 386	+ 0.375 660	+ 0.375 884	+ 0.376 063
2.64	+ 0.369 692	+ 0.370 003	+ 0.370 260	+ 0.370 472	+ 0.370 642
2.68	+ 0.364 472	+ 0.364 764	+ 0.365 009	+ 0.365 210	+ 0.365 371
2.72	+ 0.359 393	+ 0.359 670	+ 0.359 902	+ 0.360 092	+ 0.360 244
2.76	+ 0.354 450	+ 0.354 712	+ 0.354 931	+ 0.355 111	+ 0.355 255
2.80	+ 0.349 630	+ 0.349 884	+ 0.350 092	+ 0.350 263	+ 0.350 399
2.84	+ 0.344 948	+ 0.345 183	+ 0.345 380	+ 0.345 542	+ 0.345 671
2.88	+ 0.340 380	+ 0.340 603	+ 0.340 789	+ 0.340 943	+ 0.341 066
2.92	+ 0.335 928	+ 0.336 140	+ 0.336 317	+ 0.336 462	+ 0.336 579
2.96	+ 0.331 588	+ 0.331 789	+ 0.331 957	+ 0.332 096	+ 0.332 206
3.00	+ 0.327 350	+ 0.327 546	+ 0.327 706	+ 0.327 838	+ 0.327 943
3.04	+ 0.323 228	+ 0.323 408	+ 0.323 560	+ 0.323 686	+ 0.323 786
3.08	+ 0.319 199	+ 0.319 371	+ 0.319 516	+ 0.319 635	+ 0.319 730
3.12	+ 0.315 268	+ 0.315 432	+ 0.315 569	+ 0.315 682	+ 0.315 773
3.16	+ 0.311 430	+ 0.311 586	+ 0.311 716	+ 0.311 826	+ 0.311 910
3.20	+ 0.307 682	+ 0.307 830	+ 0.307 955	+ 0.308 058	+ 0.308 140
3.24	+ 0.304 021	+ 0.304 163	+ 0.304 281	+ 0.304 379	+ 0.304 457
3.28	+ 0.300 444	+ 0.300 579	+ 0.300 692	+ 0.300 785	+ 0.300 860
3.32	+ 0.296 948	+ 0.297 077	+ 0.297 185	+ 0.297 274	+ 0.297 345
3.36	+ 0.293 532	+ 0.293 656	+ 0.293 757	+ 0.293 842	+ 0.293 910
3.40	+ 0.290 191	+ 0.290 308	+ 0.290 406	+ 0.290 487	+ 0.290 552
3.44	+ 0.286 924	+ 0.287 035	+ 0.287 129	+ 0.287 207	+ 0.287 269
3.48	+ 0.283 728	+ 0.283 834	+ 0.283 924	+ 0.283 998	+ 0.284 058
3.52	+ 0.280 601	+ 0.280 703	+ 0.280 788	+ 0.280 859	+ 0.280 916
3.56	+ 0.277 541	+ 0.277 638	+ 0.277 720	+ 0.277 788	+ 0.277 842
3.60	+ 0.274 546	+ 0.274 639	+ 0.274 717	+ 0.274 782	+ 0.274 834
3.64	+ 0.271 613	+ 0.271 702	+ 0.271 777	+ 0.271 839	+ 0.271 889
3.68	+ 0.268 742	+ 0.268 827	+ 0.268 898	+ 0.268 958	+ 0.269 005
3.72	+ 0.265 929	+ 0.266 010	+ 0.266 079	+ 0.266 130	+ 0.266 182
3.76	+ 0.263 174	+ 0.263 252	+ 0.263 317	+ 0.263 372	+ 0.263 416
3.80	+ 0.260 474	+ 0.260 548	+ 0.260 611	+ 0.260 664	+ 0.260 706
3.84	+ 0.257 828	+ 0.257 899	+ 0.257 960	+ 0.258 010	+ 0.258 050
3.88	+ 0.255 234	+ 0.255 303	+ 0.255 361	+ 0.255 409	+ 0.255 447
3.92	+ 0.252 691	+ 0.252 757	+ 0.252 813	+ 0.252 859	+ 0.252 896
3.96	+ 0.250 198	+ 0.250 261	+ 0.250 314	+ 0.250 358	+ 0.250 394
4.00	+ 0.247 752	+ 0.247 813	+ 0.247 864	+ 0.247 907	+ 0.247 941

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	165°	170°	175°	180°
0.01	+2.843 68	+2.897 61	+2.930 10	+2.940 96
0.02	+2.791 18	+2.842 58	+2.873 52	+2.883 87
0.03	+2.740 24	+2.789 26	+2.818 76	+2.828 61
0.04	+2.690 80	+2.737 58	+2.765 71	+2.775 09
0.05	+2.642 84	+2.687 48	+2.714 31	+2.723 25
0.06	+2.596 28	+2.638 88	+2.664 48	+2.673 01
0.07	+2.551 04	+2.591 74	+2.616 17	+2.624 32
0.08	+2.507 11	+2.546 00	+2.569 34	+2.577 10
0.09	+2.464 43	+2.501 58	+2.523 87	+2.531 29
0.10	+2.422 93	+2.458 47	+2.479 78	+2.486 85
0.11	+2.382 59	+2.416 58	+2.436 94	+2.443 71
0.12	+2.343 35	+2.375 87	+2.395 35	+2.401 83
0.13	+2.305 19	+2.336 32	+2.354 95	+2.361 15
0.14	+2.268 06	+2.297 86	+2.315 69	+2.321 63
0.15	+2.231 91	+2.260 47	+2.277 55	+2.283 23
0.16	+2.196 73	+2.224 09	+2.240 45	+2.245 89
0.17	+2.162 46	+2.188 70	+2.204 38	+2.209 58
0.18	+2.129 10	+2.154 25	+2.169 28	+2.174 27
0.19	+2.096 64	+2.120 72	+2.135 12	+2.139 92
0.20	+2.065 11	+2.088 07	+2.101 89	+2.106 48
0.21	+2.034 032	+2.056 266	+2.069 528	+2.073 933
0.22	+2.003 935	+2.025 283	+2.038 012	+2.042 242
0.23	+1.974 587	+1.995 091	+2.007 313	+2.011 373
0.24	+1.945 963	+1.965 664	+1.977 403	+1.981 303
0.25	+1.918 039	+1.936 974	+1.948 254	+1.952 000
0.26	+1.890 795	+1.908 997	+1.919 837	+1.923 438
0.27	+1.864 206	+1.881 710	+1.892 131	+1.895 593
0.28	+1.838 249	+1.855 088	+1.865 111	+1.868 438
0.29	+1.812 906	+1.829 109	+1.838 750	+1.841 952
0.30	+1.788 160	+1.803 755	+1.813 034	+1.816 112
0.31	+1.763 988	+1.779 002	+1.787 932	+1.790 896
0.32	+1.740 366	+1.754 833	+1.763 437	+1.766 285
0.33	+1.717 297	+1.731 228	+1.739 511	+1.742 258
0.34	+1.694 748	+1.708 169	+1.716 148	+1.718 792
0.35	+1.672 704	+1.685 640	+1.693 328	+1.695 880
0.36	+1.651 153	+1.663 625	+1.671 036	+1.673 494
0.37	+1.630 079	+1.642 100	+1.649 252	+1.651 620
0.38	+1.609 468	+1.621 068	+1.627 961	+1.630 247
0.39	+1.589 308	+1.600 498	+1.607 145	+1.609 350
0.40	+1.569 581	+1.580 381	+1.586 796	+1.588 922
0.41	+1.550 278	+1.560 702	+1.566 892	+1.568 945
0.42	+1.531 386	+1.541 450	+1.547 424	+1.549 407
0.43	+1.512 892	+1.522 612	+1.528 383	+1.530 295
0.44	+1.494 784	+1.504 175	+1.509 750	+1.511 595
0.45	+1.477 055	+1.486 127	+1.491 512	+1.493 296
0.46	+1.459 691	+1.468 458	+1.473 662	+1.475 386
0.47	+1.442 681	+1.451 157	+1.456 187	+1.457 852
0.48	+1.426 018	+1.434 212	+1.439 074	+1.440 684
0.49	+1.409 691	+1.417 615	+1.422 317	+1.423 873
0.50	+1.393 687	+1.401 355	+1.405 905	+1.407 408
0.51	+1.378 006	+1.385 422	+1.389 822	+1.391 277
0.52	+1.362 632	+1.369 808	+1.374 065	+1.375 474
0.53	+1.347 558	+1.354 504	+1.358 624	+1.359 988
0.54	+1.332 778	+1.339 501	+1.343 490	+1.344 810
0.55	+1.318 281	+1.324 790	+1.328 651	+1.329 932
0.56	+1.304 064	+1.310 369	+1.314 108	+1.315 346

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	165°	170°	175°	180°
0.56	+ 1.304 064	+ 1.310 360	+ 1.314 108	+ 1.315 346
0.57	+ 1.299 114	+ 1.296 223	+ 1.299 846	+ 1.301 044
0.58	+ 1.276 432	+ 1.282 148	+ 1.285 855	+ 1.287 048
0.59	+ 1.263 001	+ 1.268 736	+ 1.272 137	+ 1.273 201
0.60	+ 1.249 822	+ 1.255 380	+ 1.258 676	+ 1.259 766
0.61	+ 1.229 885	+ 1.242 273	+ 1.245 468	+ 1.246 525
0.62	+ 1.224 186	+ 1.229 411	+ 1.232 510	+ 1.233 533
0.63	+ 1.211 722	+ 1.216 785	+ 1.219 790	+ 1.220 782
0.64	+ 1.199 476	+ 1.204 390	+ 1.207 304	+ 1.208 268
0.65	+ 1.187 453	+ 1.192 221	+ 1.195 048	+ 1.195 982
0.66	+ 1.175 645	+ 1.180 271	+ 1.183 016	+ 1.183 920
0.67	+ 1.164 045	+ 1.168 534	+ 1.171 195	+ 1.172 076
0.68	+ 1.152 650	+ 1.157 007	+ 1.159 590	+ 1.160 444
0.69	+ 1.141 452	+ 1.145 683	+ 1.148 191	+ 1.149 020
0.70	+ 1.130 450	+ 1.134 558	+ 1.136 993	+ 1.137 798
0.71	+ 1.119 636	+ 1.123 626	+ 1.125 992	+ 1.126 772
0.72	+ 1.109 067	+ 1.112 883	+ 1.115 181	+ 1.115 940
0.73	+ 1.098 590	+ 1.102 325	+ 1.104 557	+ 1.105 294
0.74	+ 1.088 280	+ 1.091 947	+ 1.094 115	+ 1.094 832
0.75	+ 1.078 160	+ 1.081 744	+ 1.083 853	+ 1.084 548
0.76	+ 1.068 262	+ 1.071 714	+ 1.073 760	+ 1.074 439
0.77	+ 1.058 491	+ 1.061 851	+ 1.063 842	+ 1.064 500
0.78	+ 1.048 887	+ 1.052 152	+ 1.054 087	+ 1.054 727
0.79	+ 1.039 440	+ 1.042 613	+ 1.044 494	+ 1.045 117
0.80	+ 1.030 143	+ 1.033 230	+ 1.035 060	+ 1.035 665
0.81	+ 1.020 997	+ 1.024 000	+ 1.025 780	+ 1.026 368
0.82	+ 1.011 998	+ 1.014 919	+ 1.016 651	+ 1.017 223
0.83	+ 1.003 141	+ 1.005 984	+ 1.007 660	+ 1.008 226
0.84	+ 0.994 425	+ 0.997 191	+ 0.998 831	+ 0.999 373
0.85	+ 0.985 845	+ 0.988 538	+ 0.990 135	+ 0.990 662
0.86	+ 0.977 400	+ 0.980 022	+ 0.981 576	+ 0.982 080
0.87	+ 0.969 086	+ 0.971 638	+ 0.973 150	+ 0.973 651
0.88	+ 0.960 900	+ 0.963 385	+ 0.964 801	+ 0.965 345
0.89	+ 0.952 840	+ 0.955 260	+ 0.956 694	+ 0.957 168
0.90	+ 0.944 901	+ 0.947 250	+ 0.948 657	+ 0.949 118
0.91	+ 0.937 084	+ 0.939 381	+ 0.940 743	+ 0.941 191
0.92	+ 0.929 386	+ 0.931 622	+ 0.932 947	+ 0.933 386
0.93	+ 0.921 801	+ 0.923 980	+ 0.925 272	+ 0.925 698
0.94	+ 0.914 327	+ 0.916 452	+ 0.917 712	+ 0.918 127
0.95	+ 0.906 967	+ 0.909 037	+ 0.910 264	+ 0.910 669
0.96	+ 0.899 714	+ 0.901 732	+ 0.902 928	+ 0.903 323
0.97	+ 0.892 568	+ 0.894 533	+ 0.895 698	+ 0.896 084
0.98	+ 0.885 522	+ 0.887 440	+ 0.888 577	+ 0.888 953
0.99	+ 0.878 570	+ 0.880 451	+ 0.881 561	+ 0.881 925
1.00	+ 0.871 717	+ 0.873 562	+ 0.874 644	+ 0.875 000
1.01	+ 0.864 964	+ 0.866 776	+ 0.867 856	+ 0.868 278
1.02	+ 0.858 311	+ 0.860 081	+ 0.861 140	+ 0.861 553
1.03	+ 0.851 758	+ 0.853 488	+ 0.854 528	+ 0.854 941
1.04	+ 0.845 305	+ 0.846 976	+ 0.847 996	+ 0.848 419
1.05	+ 0.838 952	+ 0.840 583	+ 0.841 583	+ 0.842 006
1.06	+ 0.832 699	+ 0.834 280	+ 0.835 260	+ 0.835 683
1.07	+ 0.826 546	+ 0.828 087	+ 0.829 057	+ 0.829 480
1.08	+ 0.820 493	+ 0.821 994	+ 0.822 944	+ 0.823 367
1.09	+ 0.814 540	+ 0.815 991	+ 0.816 921	+ 0.817 344
1.10	+ 0.808 687	+ 0.810 088	+ 0.811 008	+ 0.811 431
1.11	+ 0.802 934	+ 0.804 285	+ 0.805 195	+ 0.805 618
1.12	+ 0.797 281	+ 0.798 582	+ 0.799 482	+ 0.799 905
1.13	+ 0.791 728	+ 0.792 979	+ 0.793 879	+ 0.794 302
1.14	+ 0.786 275	+ 0.787 476	+ 0.788 366	+ 0.788 789
1.15	+ 0.780 922	+ 0.782 073	+ 0.782 953	+ 0.783 376
1.16	+ 0.775 669	+ 0.776 770	+ 0.777 640	+ 0.778 063
1.17	+ 0.770 516	+ 0.771 567	+ 0.772 427	+ 0.772 850
1.18	+ 0.765 463	+ 0.766 464	+ 0.767 314	+ 0.767 737
1.19	+ 0.760 510	+ 0.761 461	+ 0.762 301	+ 0.762 724
1.20	+ 0.755 657	+ 0.756 558	+ 0.757 398	+ 0.757 821
1.21	+ 0.750 904	+ 0.751 755	+ 0.752 585	+ 0.753 008
1.22	+ 0.746 251	+ 0.747 052	+ 0.747 872	+ 0.748 295
1.23	+ 0.741 698	+ 0.742 449	+ 0.743 249	+ 0.743 672
1.24	+ 0.737 245	+ 0.737 946	+ 0.738 716	+ 0.739 139
1.25	+ 0.732 892	+ 0.733 543	+ 0.734 313	+ 0.734 736
1.26	+ 0.728 639	+ 0.729 240	+ 0.729 990	+ 0.730 413
1.27	+ 0.724 486	+ 0.725 037	+ 0.725 787	+ 0.726 210
1.28	+ 0.720 433	+ 0.720 934	+ 0.721 684	+ 0.722 107
1.29	+ 0.716 480	+ 0.716 931	+ 0.717 681	+ 0.718 104
1.30	+ 0.712 627	+ 0.713 028	+ 0.713 778	+ 0.714 201
1.31	+ 0.708 874	+ 0.709 225	+ 0.709 975	+ 0.710 398
1.32	+ 0.705 221	+ 0.705 572	+ 0.706 322	+ 0.706 745
1.33	+ 0.701 668	+ 0.702 019	+ 0.702 769	+ 0.703 192
1.34	+ 0.698 215	+ 0.698 516	+ 0.699 266	+ 0.699 689
1.35	+ 0.694 862	+ 0.695 113	+ 0.695 863	+ 0.696 286
1.36	+ 0.691 609	+ 0.691 860	+ 0.692 610	+ 0.693 033
1.37	+ 0.688 456	+ 0.688 657	+ 0.689 407	+ 0.689 830
1.38	+ 0.685 403	+ 0.685 554	+ 0.686 304	+ 0.686 727
1.39	+ 0.682 450	+ 0.682 551	+ 0.683 301	+ 0.683 724
1.40	+ 0.679 597	+ 0.679 648	+ 0.680 408	+ 0.680 831
1.41	+ 0.676 844	+ 0.676 845	+ 0.677 605	+ 0.678 028
1.42	+ 0.674 191	+ 0.674 142	+ 0.674 902	+ 0.675 325
1.43	+ 0.671 638	+ 0.671 539	+ 0.672 309	+ 0.672 732
1.44	+ 0.669 185	+ 0.669 036	+ 0.670 006	+ 0.670 429
1.45	+ 0.666 832	+ 0.666 633	+ 0.667 503	+ 0.667 926
1.46	+ 0.664 579	+ 0.664 380	+ 0.665 400	+ 0.665 823
1.47	+ 0.662 426	+ 0.662 177	+ 0.663 147	+ 0.663 570
1.48	+ 0.660 373	+ 0.660 074	+ 0.661 044	+ 0.661 467
1.49	+ 0.658 420	+ 0.658 071	+ 0.659 041	+ 0.659 464
1.50	+ 0.656 567	+ 0.656 168	+ 0.657 138	+ 0.657 561
1.51	+ 0.654 814	+ 0.654 365	+ 0.655 335	+ 0.655 758
1.52	+ 0.653 161	+ 0.652 662	+ 0.653 632	+ 0.654 055
1.53	+ 0.651 608	+ 0.651 059	+ 0.652 029	+ 0.652 452
1.54	+ 0.650 155	+ 0.649 556	+ 0.650 526	+ 0.650 949
1.55	+ 0.648 802	+ 0.648 153	+ 0.649 123	+ 0.649 546
1.56	+ 0.647 549	+ 0.646 850	+ 0.647 870	+ 0.648 293
1.57	+ 0.646 396	+ 0.645 647	+ 0.646 617	+ 0.647 040
1.58	+ 0.645 343	+ 0.644 544	+ 0.645 514	+ 0.645 937
1.59	+ 0.644 390	+ 0.643 541	+ 0.644 511	+ 0.644 934
1.60	+ 0.643 537	+ 0.642 638	+ 0.643 638	+ 0.644 057
1.61	+ 0.642 784	+ 0.641 835	+ 0.642 895	+ 0.643 318
1.62	+ 0.642 131	+ 0.641 132	+ 0.642 242	+ 0.642 665
1.63	+ 0.641 578	+ 0.640 529	+ 0.641 689	+ 0.642 112
1.64	+ 0.641 125	+ 0.640 026	+ 0.641 236	+ 0.641 655
1.65	+ 0.640 772	+ 0.639 623	+ 0.640 883	+ 0.641 302
1.66	+ 0.640 519	+ 0.639 360	+ 0.640 630	+ 0.641 049
1.67	+ 0.640 366	+ 0.639 207	+ 0.640 477	+ 0.640 896
1.68	+ 0.640 313	+ 0.639 154	+ 0.640 424	+ 0.640 843
1.69	+ 0.640 360	+ 0.639 201	+ 0.640 471	+ 0.640 890
1.70	+ 0.640 507	+ 0.639 348	+ 0.640 618	+ 0.641 037
1.71	+ 0.640 754	+ 0.639 595	+ 0.640 865	+ 0.641 284
1.72	+ 0.641 101	+ 0.640 042	+ 0.641 212	+ 0.641 631
1.73	+ 0.641 548	+ 0.640 489	+ 0.641 659	+ 0.642 078
1.74	+ 0.642 095	+ 0.641 036	+ 0.642 206	+ 0.642 625
1.75	+ 0.642 742	+ 0.641 683	+ 0.642 853	+ 0.643 272
1.76	+ 0.643 489	+ 0.642 430	+ 0.643 600	+ 0.644 019
1.77	+ 0.644 336	+ 0.643 277	+ 0.644 447	+ 0.644 866
1.78	+ 0.645 283	+ 0.644 224	+ 0.645 394	+ 0.646 313
1.79	+ 0.646 330	+ 0.645 271	+ 0.646 441	+ 0.647 360
1.80	+ 0.647 477	+ 0.646 418	+ 0.647 588	+ 0.648 507
1.81	+ 0.648 724	+ 0.647 665	+ 0.648 835	+ 0.649 754
1.82	+ 0.649 971	+ 0.648 912	+ 0.649 982	+ 0.650 901
1.83	+ 0.651 318	+ 0.650 259	+ 0.651 329	+ 0.652 250
1.84	+ 0.652 765	+ 0.651 706	+ 0.652 776	+ 0.653 697
1.85	+ 0.654 312	+ 0.653 253	+ 0.654 323	+ 0.655 244
1.86	+ 0.655 959	+ 0.654 900	+ 0.655 970	+ 0.656 891
1.87	+ 0.657 706	+ 0.656 647	+ 0.657 717	+ 0.658 738
1.88	+ 0.659 553	+ 0.658 494	+ 0.659 564	+ 0.660 585
1.89	+ 0.661 500	+ 0.660 441	+ 0.661 511	+ 0.662 532
1.90	+ 0.663 547	+ 0.662 488	+ 0.663 558	+ 0.664 579
1.91	+ 0.665 694	+ 0.664 635	+ 0.665 705	+ 0.666 726
1.92	+ 0.667 941	+ 0.666 882	+ 0.667 952	+ 0.668 973
1.93	+ 0.670 288	+ 0.669 229	+ 0.670 299	+ 0.671 430
1.94	+ 0.672 735	+ 0.671 676	+ 0.672 746	+ 0.673 877
1.95	+ 0.675 282	+ 0.674 223	+ 0.675 293	+ 0.676 424
1.96	+ 0.677 929	+ 0.676 870	+ 0.677 940	+ 0.679 071
1.97	+ 0.680 676	+ 0.679 617	+ 0.680 687	+ 0.681 818
1.98	+ 0.683 523	+ 0.682 464	+ 0.683 534	+ 0.684 665
1.99	+ 0.686 470	+ 0.685 411	+ 0.686 481	+ 0.687 612
2.00	+ 0.689 517	+ 0.688 458	+ 0.689 528	+ 0.690 659

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

$\frac{z}{\psi}$	165°	170°	175°	180°
1.44	+ 0.645 434	+ 0.646 108	+ 0.646 508	+ 0.646 640
1.48	+ 0.630 266	+ 0.630 887	+ 0.631 255	+ 0.631 378
1.52	+ 0.615 756	+ 0.616 331	+ 0.616 672	+ 0.616 784
1.56	+ 0.601 869	+ 0.602 399	+ 0.602 714	+ 0.602 818
1.60	+ 0.588 563	+ 0.589 053	+ 0.589 344	+ 0.589 440
1.64	+ 0.575 803	+ 0.576 258	+ 0.576 527	+ 0.576 617
1.68	+ 0.563 560	+ 0.563 982	+ 0.564 232	+ 0.564 315
1.72	+ 0.551 804	+ 0.552 195	+ 0.552 427	+ 0.552 504
1.76	+ 0.540 506	+ 0.540 870	+ 0.541 086	+ 0.541 157
1.80	+ 0.529 642	+ 0.529 981	+ 0.530 182	+ 0.530 248
1.84	+ 0.519 187	+ 0.519 503	+ 0.519 690	+ 0.519 752
1.88	+ 0.509 121	+ 0.509 416	+ 0.509 590	+ 0.509 648
1.92	+ 0.499 423	+ 0.499 697	+ 0.499 860	+ 0.499 914
1.96	+ 0.490 072	+ 0.490 329	+ 0.490 481	+ 0.490 531
2.00	+ 0.481 053	+ 0.481 292	+ 0.481 435	+ 0.481 482
2.04	+ 0.472 347	+ 0.472 571	+ 0.472 704	+ 0.472 748
2.08	+ 0.463 939	+ 0.464 149	+ 0.464 273	+ 0.464 315
2.12	+ 0.455 813	+ 0.456 012	+ 0.456 129	+ 0.456 167
2.16	+ 0.447 960	+ 0.448 145	+ 0.448 254	+ 0.448 291
2.20	+ 0.440 364	+ 0.440 537	+ 0.440 640	+ 0.440 674
2.24	+ 0.433 010	+ 0.433 174	+ 0.433 271	+ 0.433 303
2.28	+ 0.425 893	+ 0.426 046	+ 0.426 137	+ 0.426 167
2.32	+ 0.418 997	+ 0.419 142	+ 0.419 228	+ 0.419 256
2.36	+ 0.412 316	+ 0.412 451	+ 0.412 532	+ 0.412 558
2.40	+ 0.405 836	+ 0.405 964	+ 0.406 041	+ 0.406 066
2.44	+ 0.399 551	+ 0.399 673	+ 0.399 746	+ 0.399 768
2.48	+ 0.393 454	+ 0.393 568	+ 0.393 636	+ 0.393 658
2.52	+ 0.387 534	+ 0.387 642	+ 0.387 700	+ 0.387 727
2.56	+ 0.381 785	+ 0.381 887	+ 0.381 947	+ 0.381 967
2.60	+ 0.376 200	+ 0.376 296	+ 0.376 353	+ 0.376 372
2.64	+ 0.370 771	+ 0.370 862	+ 0.370 915	+ 0.370 934
2.68	+ 0.365 493	+ 0.365 579	+ 0.365 630	+ 0.365 647
2.72	+ 0.360 359	+ 0.360 441	+ 0.360 489	+ 0.360 505
2.76	+ 0.355 365	+ 0.355 442	+ 0.355 488	+ 0.355 503
2.80	+ 0.350 503	+ 0.350 576	+ 0.350 620	+ 0.350 634
2.84	+ 0.345 770	+ 0.345 839	+ 0.345 880	+ 0.345 894
2.88	+ 0.341 160	+ 0.341 220	+ 0.341 265	+ 0.341 278
2.92	+ 0.336 668	+ 0.336 731	+ 0.336 768	+ 0.336 780
2.96	+ 0.332 291	+ 0.332 350	+ 0.332 385	+ 0.332 398
3.00	+ 0.328 024	+ 0.328 080	+ 0.328 114	+ 0.328 125
3.04	+ 0.323 863	+ 0.323 916	+ 0.323 947	+ 0.323 959
3.08	+ 0.319 802	+ 0.319 854	+ 0.319 885	+ 0.319 895
3.12	+ 0.315 842	+ 0.315 891	+ 0.315 920	+ 0.315 930
3.16	+ 0.311 977	+ 0.312 023	+ 0.312 051	+ 0.312 060
3.20	+ 0.308 203	+ 0.308 247	+ 0.308 273	+ 0.308 282
3.24	+ 0.304 517	+ 0.304 559	+ 0.304 584	+ 0.304 593
3.28	+ 0.300 917	+ 0.300 958	+ 0.300 981	+ 0.300 989
3.32	+ 0.297 400	+ 0.297 438	+ 0.297 461	+ 0.297 469
3.36	+ 0.293 962	+ 0.293 999	+ 0.294 021	+ 0.294 028
3.40	+ 0.290 602	+ 0.290 637	+ 0.290 658	+ 0.290 665
3.44	+ 0.287 310	+ 0.287 350	+ 0.287 369	+ 0.287 376
3.48	+ 0.284 102	+ 0.284 135	+ 0.284 154	+ 0.284 160
3.52	+ 0.280 960	+ 0.280 990	+ 0.281 008	+ 0.281 014
3.56	+ 0.277 884	+ 0.277 913	+ 0.277 929	+ 0.277 936
3.60	+ 0.274 874	+ 0.274 901	+ 0.274 917	+ 0.274 924
3.64	+ 0.271 927	+ 0.271 954	+ 0.271 969	+ 0.271 975

Tafel XVI.

Leuschner's Erweiterung von Oppolzer's $\frac{1}{m}$ Tafel zur Bestimmung der geocentrischen Distanz bei ersten Bahnbestimmungen.

ψ z	165°	170°	175°	180°
3.64	+ 0.271 927	+ 0.271 954	+ 0.271 969	+ 0.271 975
3.68	+ 0.269 041	+ 0.269 068	+ 0.269 083	+ 0.269 088
3.72	+ 0.266 216	+ 0.266 241	+ 0.266 256	+ 0.266 261
3.76	+ 0.263 448	+ 0.263 473	+ 0.263 487	+ 0.263 491
3.80	+ 0.260 738	+ 0.260 760	+ 0.260 774	+ 0.260 778
3.84	+ 0.258 081	+ 0.258 102	+ 0.258 116	+ 0.258 120
3.88	+ 0.255 476	+ 0.255 498	+ 0.255 511	+ 0.255 514
3.92	+ 0.252 924	+ 0.252 944	+ 0.252 956	+ 0.252 960
3.96	+ 0.250 421	+ 0.250 441	+ 0.250 452	+ 0.250 456
4.00	+ 0.247 967	+ 0.247 985	+ 0.247 996	+ 0.248 000

Tafel XVII.
Enckes f -Tafel.

q	$\log f$	Diff.	q	$\log f$	Diff.
— 0.0300	0.5107980		— 0.0240	0.5038798	
0.0299	0.5106819	—1161	0.0239	0.5037653	—1145
0.0298	0.5105658	1161	0.0238	0.5036508	1145
0.0297	0.5104499	1159	0.0237	0.5035364	1144
0.0296	0.5103338	1161	0.0236	0.5034219	1145
0.0295	0.5102179	1159	0.0235	0.5033075	1144
0.0294	0.5101019	1160	0.0234	0.5031932	1143
0.0293	0.5099860	1159	0.0233	0.5030788	1144
0.0292	0.5098701	1159	0.0232	0.5029645	1143
0.0291	0.5097542	1159	0.0231	0.5028502	1143
		—1158			—1143
— 0.0290	0.5096384		— 0.0230	0.5027359	
0.0289	0.5095226	—1158	0.0229	0.5026217	—1142
0.0288	0.5094068	1158	0.0228	0.5025075	1142
0.0287	0.5092910	1158	0.0227	0.5023933	1142
0.0286	0.5091753	1157	0.0226	0.5022791	1142
0.0285	0.5090595	1158	0.0225	0.5021650	1141
0.0284	0.5089439	1156	0.0224	0.5020509	1141
0.0283	0.5088282	1157	0.0223	0.5019368	1141
0.0282	0.5087126	1156	0.0222	0.5018227	1141
0.0281	0.5085970	1156	0.0221	0.5017087	1140
		—1156			—1140
— 0.0280	0.5084814		— 0.0220	0.5015947	
0.0279	0.5083658	—1156	0.0219	0.5014807	—1140
0.0278	0.5082503	1155	0.0218	0.5013667	1140
0.0277	0.5081348	1155	0.0217	0.5012528	1139
0.0276	0.5080193	1155	0.0216	0.5011389	1139
0.0275	0.5079039	1154	0.0215	0.5010250	1139
0.0274	0.5077885	1154	0.0214	0.5009112	1138
0.0273	0.5076731	1154	0.0213	0.5007973	1139
0.0272	0.5075577	1154	0.0212	0.5006835	1138
0.0271	0.5074423	1154	0.0211	0.5005698	1137
		—1153			—1138
— 0.0270	0.5073270		— 0.0210	0.5004560	
0.0269	0.5072117	—1153	0.0209	0.5003423	—1137
0.0268	0.5070965	1152	0.0208	0.5002286	1137
0.0267	0.5069812	1153	0.0207	0.5001149	1137
0.0266	0.5068660	1152	0.0206	0.5000013	1136
0.0265	0.5067509	1151	0.0205	0.4998876	1137
0.0264	0.5066357	1152	0.0204	0.4997740	1136
0.0263	0.5065206	1151	0.0203	0.4996605	1135
0.0262	0.5064055	1151	0.0202	0.4995469	1136
0.0261	0.5062904	1151	0.0201	0.4994334	1135
		—1151			—1135
— 0.0260	0.5061753		— 0.0200	0.4993199	
0.0259	0.5060603	—1150	0.0199	0.4992064	—1135
0.0258	0.5059453	1150	0.0198	0.4990930	1134
0.0257	0.5058303	1150	0.0197	0.4989796	1134
0.0256	0.5057154	1149	0.0196	0.4988662	1134
0.0255	0.5056005	1149	0.0195	0.4987528	1134
0.0254	0.5054856	1149	0.0194	0.4986395	1133
0.0253	0.5053707	1149	0.0193	0.4985262	1133
0.0252	0.5052559	1148	0.0192	0.4984129	1133
0.0251	0.5051410	1149	0.0191	0.4982996	1133
		—1147			—1132
— 0.0250	0.5050263		— 0.0190	0.4981864	
0.0249	0.5049115	—1148	0.0189	0.4980731	—1133
0.0248	0.5047968	1147	0.0188	0.4979600	1131
0.0247	0.5046820	1148	0.0187	0.4978468	1132
0.0246	0.5045674	1146	0.0186	0.4977337	1131
0.0245	0.5044527	1147	0.0185	0.4976205	1132
0.0244	0.5043381	1146	0.0184	0.4975075	1130
0.0243	0.5042235	1146	0.0183	0.4973944	1131
0.0242	0.5041089	1146	0.0182	0.4972814	1130
0.0241	0.5039943	1146	0.0181	0.4971684	1130
		—1145			—1130
— 0.0240	0.5038798		— 0.0180	0.4970554	

Tafel XVII.
Enckes f -Tafel.

q	$\log f$	Diff.	q	$\log f$	Diff.
— 0.0180	0.4970554		— 0.0120	0.4903223	
0.0179	0.4969424	—1130	0.0119	0.4902109	1114
0.0178	0.4968295	1129	0.0118	0.4900994	1115
0.0177	0.4967166	1129	0.0117	0.4899880	1114
0.0176	0.4966037	1129	0.0116	0.4898767	1113
0.0175	0.4964908	1129	0.0115	0.4897653	1114
0.0174	0.4963780	1128	0.0114	0.4896540	1113
0.0173	0.4962652	1128	0.0113	0.4895427	1113
0.0172	0.4961524	1128	0.0112	0.4894314	1113
0.0171	0.4960396	1128	0.0111	0.4893201	1113
— 0.0170	0.4959269	—1127	— 0.0110	0.4892089	—1112
0.0169	0.4958142	—1127	0.0109	0.4890977	—1112
0.0168	0.4957015	1127	0.0108	0.4889865	1112
0.0167	0.4955889	1126	0.0107	0.4888753	1112
0.0166	0.4954762	1127	0.0106	0.4887642	1111
0.0165	0.4953636	1126	0.0105	0.4886531	1111
0.0164	0.4952511	1125	0.0104	0.4885420	1111
0.0163	0.4951385	1126	0.0103	0.4884309	1111
0.0162	0.4950260	1125	0.0102	0.4883199	1110
0.0161	0.4949135	1125	0.0101	0.4882089	1110
— 0.0160	0.4948010	—1125	— 0.0100	0.4880979	—1110
0.0159	0.4946885	—1125	0.0099	0.4879869	1109
0.0158	0.4945761	1124	0.0098	0.4878760	1109
0.0157	0.4944637	1124	0.0097	0.4877651	1109
0.0156	0.4943513	1124	0.0096	0.4876542	1109
0.0155	0.4942390	1123	0.0095	0.4875433	1109
0.0154	0.4941266	1124	0.0094	0.4874325	1108
0.0153	0.4940143	1123	0.0093	0.4873217	1108
0.0152	0.4939021	1122	0.0092	0.4872109	1108
0.0151	0.4937898	1123	0.0091	0.4871001	1108
— 0.0150	0.4936776	—1122	— 0.0090	0.4869894	—1107
0.0149	0.4935654	—1122	0.0089	0.4868786	—1108
0.0148	0.4934532	1122	0.0088	0.4867679	1107
0.0147	0.4933410	1122	0.0087	0.4866573	1106
0.0146	0.4932289	1121	0.0086	0.4865466	1107
0.0145	0.4931168	1121	0.0085	0.4864360	1106
0.0144	0.4930047	1121	0.0084	0.4863254	1106
0.0143	0.4928927	1120	0.0083	0.4862148	1106
0.0142	0.4927806	1121	0.0082	0.4861043	1105
0.0141	0.4926686	1120	0.0081	0.4859938	1105
— 0.0140	0.4925567	—1119	— 0.0080	0.4858833	—1105
0.0139	0.4924447	—1120	0.0079	0.4857728	—1105
0.0138	0.4923328	1119	0.0078	0.4856623	1105
0.0137	0.4922209	1119	0.0077	0.4855519	1104
0.0136	0.4921090	1119	0.0076	0.4854415	1104
0.0135	0.4919972	1118	0.0075	0.4853311	1104
0.0134	0.4918853	1119	0.0074	0.4852208	1103
0.0133	0.4917735	1118	0.0073	0.4851105	1103
0.0132	0.4916617	1118	0.0072	0.4850001	1104
0.0131	0.4915500	1117	0.0071	0.4848899	1102
— 0.0130	0.4914383	—1117	— 0.0070	0.4847796	—1103
0.0129	0.4913266	—1117	0.0069	0.4846694	1102
0.0128	0.4912149	1117	0.0068	0.4845592	1102
0.0127	0.4911032	1117	0.0067	0.4844490	1102
0.0126	0.4909916	1116	0.0066	0.4843388	1102
0.0125	0.4908800	1116	0.0065	0.4842287	1101
0.0124	0.4907684	1116	0.0064	0.4841186	1101
0.0123	0.4906568	1116	0.0063	0.4840085	1101
0.0122	0.4905453	1115	0.0062	0.4838984	1101
0.0121	0.4904338	1115	0.0061	0.4837884	1100
— 0.0120	0.4903223	—1115	— 0.0060	0.4836784	—1100

Tafel XVII.
Enckes f -Tafel.

q	$\log f$	Diff.	q	$\log f$	Diff.
— 0.0060	0.4836784	—1100	0.0000	0.4771213	—1086
0.0059	0.4835684	1100	+ 0.0001	0.4770127	1085
0.0058	0.4834584	1099	0.0002	0.4769042	1086
0.0057	0.4833485	1099	0.0003	0.4767956	1085
0.0056	0.4832386	1099	0.0004	0.4766871	1084
0.0055	0.4831287	1099	0.0005	0.4765787	1085
0.0054	0.4830188	1099	0.0006	0.4764702	1084
0.0053	0.4829089	1098	0.0007	0.4763618	1084
0.0052	0.4827991	1098	0.0008	0.4762534	1084
0.0051	0.4826893	—1098	0.0009	0.4761450	—1083
— 0.0050	0.4825795	—1097	+ 0.0010	0.4760367	—1083
0.0049	0.4824698	1097	0.0011	0.4759284	1083
0.0048	0.4823601	1097	0.0012	0.4758201	1083
0.0047	0.4822504	1097	0.0013	0.4757118	1083
0.0046	0.4821407	1097	0.0014	0.4756035	1082
0.0045	0.4820310	1096	0.0015	0.4754953	1082
0.0044	0.4819214	1096	0.0016	0.4753871	1082
0.0043	0.4818118	1096	0.0017	0.4752789	1082
0.0042	0.4817022	1095	0.0018	0.4751707	1081
0.0041	0.4815927	—1096	0.0019	0.4750626	—1081
— 0.0040	0.4814831	—1095	+ 0.0020	0.4749545	—1081
0.0039	0.4813736	1095	0.0021	0.4748464	1081
0.0038	0.4812641	1094	0.0022	0.4747383	1080
0.0037	0.4811547	1095	0.0023	0.4746303	1081
0.0036	0.4810452	1094	0.0024	0.4745222	1080
0.0035	0.4809358	1094	0.0025	0.4744142	1079
0.0034	0.4808264	1093	0.0026	0.4743063	1080
0.0033	0.4807171	1094	0.0027	0.4741983	1079
0.0032	0.4806077	1093	0.0028	0.4740904	1079
0.0031	0.4804984	—1093	0.0029	0.4739825	—1079
— 0.0030	0.4803891	—1093	+ 0.0030	0.4738746	—1079
0.0029	0.4802798	1092	0.0031	0.4737667	1078
0.0028	0.4801706	1093	0.0032	0.4736589	1078
0.0027	0.4800613	1092	0.0033	0.4735511	1078
0.0026	0.4799521	1091	0.0034	0.4734433	1078
0.0025	0.4798430	1092	0.0035	0.4733355	1077
0.0024	0.4797338	1091	0.0036	0.4732278	1077
0.0023	0.4796247	1091	0.0037	0.4731201	1077
0.0022	0.4795156	1091	0.0038	0.4730124	1077
0.0021	0.4794065	—1091	0.0039	0.4729047	—1077
— 0.0020	0.4792974	1090	+ 0.0040	0.4727970	—1076
0.0019	0.4791884	1090	0.0041	0.4726894	1076
0.0018	0.4790794	1090	0.0042	0.4725818	1076
0.0017	0.4789704	1089	0.0043	0.4724742	1076
0.0016	0.4788615	1090	0.0044	0.4723666	1075
0.0015	0.4787525	1089	0.0045	0.4722591	1075
0.0014	0.4786436	1089	0.0046	0.4721516	1075
0.0013	0.4785347	1089	0.0047	0.4720441	1075
0.0012	0.4784258	1088	0.0048	0.4719366	1074
0.0011	0.4783170	—1088	0.0049	0.4718292	—1074
— 0.0010	0.4782082	—1088	+ 0.0050	0.4717218	—1074
0.0009	0.4780994	1088	0.0051	0.4716144	1074
0.0008	0.4779906	1088	0.0052	0.4715070	1073
0.0007	0.4778818	1087	0.0053	0.4713997	1074
0.0006	0.4777731	1087	0.0054	0.4712923	1073
0.0005	0.4776644	1087	0.0055	0.4711850	1073
0.0004	0.4775557	1086	0.0056	0.4710777	1072
0.0003	0.4774471	1087	0.0057	0.4709705	1073
0.0002	0.4773384	1086	0.0058	0.4708632	1072
0.0001	0.4772298	—1085	0.0059	0.4707560	—1072
0.0000	0.4771213		+ 0.0060	0.4706488	

Tafel XVII.

Enckes f -Tafel.

q	$\log f$	Diff.	q	$\log f$	Diff.
+ 0.0060	0.4706488		+ 0.0120	0.4642590	
0.0061	0.4705417	—1071	0.0121	0.4641532	—1058
0.0062	0.4704345	1072	0.0122	0.4640474	1058
0.0063	0.4703274	1071	0.0123	0.4639417	1057
0.0064	0.4702203	1071	0.0124	0.4638359	1058
0.0065	0.4701132	1071	0.0125	0.4637302	1057
0.0066	0.4700062	1070	0.0126	0.4636245	1057
0.0067	0.4698991	1071	0.0127	0.4635188	1057
0.0068	0.4697921	1070	0.0128	0.4634132	1056
0.0069	0.4696851	1070	0.0129	0.4633076	1056
+ 0.0070	0.4695782	—1069	+ 0.0130	0.4632020	—1056
0.0071	0.4694712	—1070	0.0131	0.4630964	—1056
0.0072	0.4693643	1069	0.0132	0.4629908	1056
0.0073	0.4692574	1069	0.0133	0.4628853	1055
0.0074	0.4691506	1068	0.0134	0.4627798	1055
0.0075	0.4690437	1069	0.0135	0.4626743	1055
0.0076	0.4689369	1068	0.0136	0.4625688	1055
0.0077	0.4688301	1068	0.0137	0.4624633	1055
0.0078	0.4687233	1068	0.0138	0.4623579	1054
0.0079	0.4686166	1067	0.0139	0.4622525	1054
+ 0.0080	0.4685098	—1068	+ 0.0140	0.4621471	—1054
0.0081	0.4684031	—1067	0.0141	0.4620417	—1054
0.0082	0.4682964	1067	0.0142	0.4619364	1053
0.0083	0.4681898	1066	0.0143	0.4618311	1053
0.0084	0.4680831	1067	0.0144	0.4617258	1053
0.0085	0.4679765	1066	0.0145	0.4616205	1053
0.0086	0.4678699	1066	0.0146	0.4615153	1052
0.0087	0.4677633	1066	0.0147	0.4614100	1053
0.0088	0.4676568	1065	0.0148	0.4613048	1052
0.0089	0.4675502	1066	0.0149	0.4611996	1052
+ 0.0090	0.4674437	—1065	+ 0.0150	0.4610945	—1051
0.0091	0.4673372	—1065	0.0151	0.4609893	—1052
0.0092	0.4672308	1064	0.0152	0.4608842	1051
0.0093	0.4671243	1065	0.0153	0.4607791	1051
0.0094	0.4670179	1064	0.0154	0.4606741	1050
0.0095	0.4669115	1064	0.0155	0.4605690	1051
0.0096	0.4668052	1063	0.0156	0.4604640	1050
0.0097	0.4666988	1064	0.0157	0.4603590	1050
0.0098	0.4665925	1063	0.0158	0.4602540	1050
0.0099	0.4664862	1063	0.0159	0.4601490	1050
+ 0.0100	0.4663799	—1063	+ 0.0160	0.4600441	—1049
0.0101	0.4662737	—1062	0.0161	0.4599392	—1049
0.0102	0.4661674	1063	0.0162	0.4598343	1049
0.0103	0.4660612	1062	0.0163	0.4597294	1049
0.0104	0.4659550	1062	0.0164	0.4596245	1049
0.0105	0.4658488	1062	0.0165	0.4595197	1048
0.0106	0.4657427	1061	0.0166	0.4594149	1048
0.0107	0.4656366	1061	0.0167	0.4593101	1048
0.0108	0.4655305	1061	0.0168	0.4592053	1047
0.0109	0.4654244	1061	0.0169	0.4591006	1047
+ 0.0110	0.4653183	—1061	+ 0.0170	0.4589959	—1047
0.0111	0.4652123	—1060	0.0171	0.4588912	—1047
0.0112	0.4651063	1060	0.0172	0.4587865	1047
0.0113	0.4650003	1060	0.0173	0.4586818	1047
0.0114	0.4648944	1059	0.0174	0.4585772	1046
0.0115	0.4647884	1060	0.0175	0.4584726	1046
0.0116	0.4646825	1059	0.0176	0.4583680	1046
0.0117	0.4645766	1059	0.0177	0.4582634	1046
0.0118	0.4644707	1059	0.0178	0.4581589	1045
0.0119	0.4643649	1058	0.0179	0.4580544	1045
+ 0.0120	0.4642590	—1059	+ 0.0180	0.4579499	—1045

Tafel XVII.

Enckes f -Tafel.

q	$\log f$	Diff.	q	$\log f$	Diff.
+ 0.0180	0.4579499	—1045	+ 0.0240	0.4517194	—1032
0.0181	0.4578454	1045	0.0241	0.4516162	1032
0.0182	0.4577409	1044	0.0242	0.4515130	1031
0.0183	0.4576365	1044	0.0243	0.4514099	1031
0.0184	0.4575321	1044	0.0244	0.4513068	1031
0.0185	0.4574277	1044	0.0245	0.4512037	1031
0.0186	0.4573233	1044	0.0246	0.4511006	1031
0.0187	0.4572189	1043	0.0247	0.4509975	1030
0.0188	0.4571146	1043	0.0248	0.4508945	1030
0.0189	0.4570103	—1043	0.0249	0.4507915	—1030
+ 0.0190	0.4569060	—1042	+ 0.0250	0.4506885	—1030
0.0191	0.4568018	1043	0.0251	0.4505855	1030
0.0192	0.4566975	1042	0.0252	0.4504825	1029
0.0193	0.4565933	1042	0.0253	0.4503796	1029
0.0194	0.4564891	1042	0.0254	0.4502767	1029
0.0195	0.4563849	1041	0.0255	0.4501738	1028
0.0196	0.4562808	1042	0.0256	0.4500710	1029
0.0197	0.4561766	1041	0.0257	0.4499681	1028
0.0198	0.4560725	1041	0.0258	0.4498653	1028
0.0199	0.4559684	—1040	0.0259	0.4497625	1028
+ 0.0200	0.4558644	—1041	+ 0.0260	0.4496597	1028
0.0201	0.4557603	1040	0.0261	0.4495569	1027
0.0202	0.4556563	1040	0.0262	0.4494542	1027
0.0203	0.4555523	1040	0.0263	0.4493515	1027
0.0204	0.4554483	1039	0.0264	0.4492488	1027
0.0205	0.4553444	1040	0.0265	0.4491461	1026
0.0206	0.4552404	1039	0.0266	0.4490435	1027
0.0207	0.4551365	1039	0.0267	0.4489408	1026
0.0208	0.4550326	1039	0.0268	0.4488382	1026
0.0209	0.4549287	—1038	0.0269	0.4487356	—1025
+ 0.0210	0.4548249	—1038	+ 0.0270	0.4486331	—1026
0.0211	0.4547211	1038	0.0271	0.4485305	1025
0.0212	0.4546173	1038	0.0272	0.4484280	1025
0.0213	0.4545135	1038	0.0273	0.4483255	1025
0.0214	0.4544097	1037	0.0274	0.4482230	1025
0.0215	0.4543060	1038	0.0275	0.4481205	1024
0.0216	0.4542022	1037	0.0276	0.4480181	1024
0.0217	0.4540985	1036	0.0277	0.4479157	1025
0.0218	0.4539949	1037	0.0278	0.4478132	1023
0.0219	0.4538912	—1036	0.0279	0.4477109	—1024
+ 0.0220	0.4537876	—1036	+ 0.0280	0.4476085	—1023
0.0221	0.4536840	1036	0.0281	0.4475062	1023
0.0222	0.4535804	1035	0.0282	0.4474039	1023
0.0223	0.4534768	1036	0.0283	0.4473016	1023
0.0224	0.4533732	1035	0.0284	0.4471993	1023
0.0225	0.4532697	1035	0.0285	0.4470970	1022
0.0226	0.4531662	1035	0.0286	0.4469948	1022
0.0227	0.4530627	1034	0.0287	0.4468926	1022
0.0228	0.4529593	1035	0.0288	0.4467904	1022
0.0229	0.4528558	—1034	0.0289	0.4466882	—1021
+ 0.0230	0.4527524	—1034	+ 0.0290	0.4465861	—1022
0.0231	0.4526490	1034	0.0291	0.4464839	1021
0.0232	0.4525456	1033	0.0292	0.4463818	1021
0.0233	0.4524423	1034	0.0293	0.4462797	1020
0.0234	0.4523389	1033	0.0294	0.4461777	1021
0.0235	0.4522356	1033	0.0295	0.4460756	1020
0.0236	0.4521323	1032	0.0296	0.4459736	1020
0.0237	0.4520291	1033	0.0297	0.4458716	1020
0.0238	0.4519258	1032	0.0298	0.4457696	1019
0.0239	0.4518226	—1032	0.0299	0.4456677	—1020
+ 0.0240	0.4517194		+ 0.0300	0.4455657	

Tafel XVIII.

Tafel der Quadrate der Zahlen von 0.000 bis 3.000.

N	N ² 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.
0.00	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	0 1
0.01	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0003	.0004	1 0.0 0.1
0.02	.0004	.0004	.0005	.0005	.0006	.0006	.0007	.0007	.0008	.0008	2 0.0 0.2
0.03	.0009	.0010	.0010	.0011	.0012	.0012	.0013	.0014	.0014	.0015	3 0.0 0.3
0.04	.0016	.0017	.0018	.0018	.0019	.0020	.0021	.0022	.0023	.0024	4 0.0 0.4
0.05	.0025	.0026	.0027	.0028	.0029	.0030	.0031	.0032	.0034	.0035	5 0.0 0.5
0.06	.0036	.0037	.0038	.0040	.0041	.0042	.0044	.0045	.0046	.0048	6 0.0 0.6
0.07	.0049	.0050	.0052	.0053	.0055	.0056	.0058	.0059	.0061	.0062	7 0.0 0.7
0.08	.0064	.0066	.0067	.0069	.0071	.0072	.0074	.0076	.0077	.0079	8 0.0 0.8
0.09	.0081	.0083	.0085	.0086	.0088	.0090	.0092	.0094	.0096	.0098	9 0.0 0.9
0.10	.0100	.0102	.0104	.0106	.0108	.0110	.0112	.0114	.0117	.0119	2 3
0.11	.0121	.0123	.0125	.0128	.0130	.0132	.0135	.0137	.0139	.0142	1 0.2 0.3
0.12	.0144	.0146	.0149	.0151	.0154	.0156	.0159	.0161	.0164	.0166	2 0.4 0.6
0.13	.0169	.0172	.0174	.0177	.0180	.0182	.0185	.0188	.0190	.0193	3 0.6 0.9
0.14	.0196	.0199	.0202	.0204	.0207	.0210	.0213	.0216	.0219	.0222	4 0.8 1.2
0.15	.0225	.0228	.0231	.0234	.0237	.0240	.0243	.0246	.0250	.0253	5 1.0 1.5
0.16	.0256	.0259	.0262	.0266	.0269	.0272	.0276	.0279	.0282	.0286	6 1.2 1.8
0.17	.0289	.0292	.0296	.0299	.0303	.0306	.0310	.0313	.0317	.0320	7 1.4 2.1
0.18	.0324	.0328	.0331	.0335	.0339	.0342	.0346	.0350	.0353	.0357	8 1.6 2.4
0.19	.0361	.0365	.0369	.0372	.0376	.0380	.0384	.0388	.0392	.0396	9 1.8 2.7
0.20	.0400	.0404	.0408	.0412	.0416	.0420	.0424	.0428	.0433	.0437	4 5
0.21	.0441	.0445	.0449	.0454	.0458	.0462	.0467	.0471	.0475	.0480	1 0.4 0.5
0.22	.0484	.0488	.0493	.0497	.0502	.0506	.0511	.0515	.0520	.0524	2 0.8 1.0
0.23	.0529	.0534	.0538	.0543	.0548	.0552	.0557	.0562	.0566	.0571	3 1.2 1.5
0.24	.0576	.0581	.0586	.0590	.0595	.0600	.0605	.0610	.0615	.0620	4 1.6 2.0
0.25	.0625	.0630	.0635	.0640	.0645	.0650	.0655	.0660	.0666	.0671	5 2.0 2.5
0.26	.0676	.0681	.0686	.0692	.0697	.0702	.0708	.0713	.0718	.0724	6 2.4 3.0
0.27	.0729	.0734	.0740	.0745	.0751	.0756	.0762	.0767	.0773	.0778	7 2.8 3.5
0.28	.0784	.0790	.0795	.0801	.0807	.0812	.0818	.0824	.0829	.0835	8 3.2 4.0
0.29	.0841	.0847	.0853	.0858	.0864	.0870	.0876	.0882	.0888	.0894	9 3.6 4.5
0.30	.0900	.0906	.0912	.0918	.0924	.0930	.0936	.0942	.0949	.0955	6 7
0.31	.0961	.0967	.0973	.0980	.0986	.0992	.0999	.1005	.1011	.1018	1 0.6 0.7
0.32	.1024	.1030	.1037	.1043	.1050	.1056	.1063	.1069	.1076	.1082	2 1.2 1.4
0.33	.1089	.1096	.1102	.1109	.1116	.1122	.1129	.1136	.1142	.1149	3 1.8 2.1
0.34	.1156	.1163	.1170	.1176	.1183	.1190	.1197	.1204	.1211	.1218	4 2.4 2.8
0.35	.1225	.1232	.1239	.1246	.1253	.1260	.1267	.1274	.1282	.1289	5 3.0 3.5
0.36	.1296	.1303	.1310	.1318	.1325	.1332	.1340	.1347	.1354	.1362	6 3.6 4.2
0.37	.1369	.1376	.1384	.1391	.1399	.1406	.1414	.1421	.1429	.1436	7 4.2 4.9
0.38	.1444	.1452	.1459	.1467	.1475	.1482	.1490	.1498	.1505	.1513	8 4.8 5.6
0.39	.1521	.1529	.1537	.1544	.1552	.1560	.1568	.1576	.1584	.1592	9 5.4 6.3
0.40	.1600	.1608	.1616	.1624	.1632	.1640	.1648	.1656	.1665	.1673	8 9
0.41	.1681	.1689	.1697	.1706	.1714	.1722	.1731	.1739	.1747	.1756	1 0.8 0.9
0.42	.1764	.1772	.1781	.1789	.1798	.1806	.1815	.1823	.1832	.1840	2 1.6 1.8
0.43	.1849	.1858	.1866	.1875	.1884	.1892	.1901	.1910	.1918	.1927	3 2.4 2.7
0.44	.1936	.1945	.1954	.1962	.1971	.1980	.1989	.1998	.2007	.2016	4 3.2 3.6
0.45	.2025	.2034	.2043	.2052	.2061	.2070	.2079	.2088	.2098	.2107	5 4.0 4.5
0.46	.2116	.2125	.2134	.2144	.2153	.2162	.2172	.2181	.2190	.2200	6 4.8 5.4
0.47	.2209	.2218	.2228	.2237	.2247	.2256	.2266	.2275	.2285	.2294	7 5.6 6.3
0.48	.2304	.2314	.2323	.2333	.2343	.2352	.2362	.2372	.2381	.2391	8 6.4 7.2
0.49	.2401	.2411	.2421	.2430	.2440	.2450	.2460	.2470	.2480	.2490	9 7.2 8.1
0.50	.2500	.2510	.2520	.2530	.2540	.2550	.2560	.2570	.2581	.2591	10 11
N	N ² 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.

Tafel XVIII.

Tafel der Quadrate der Zahlen von 0.000 bis 3.000.

N	N ² 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.	
0.50	0.2500	.2510	.2520	.2530	.2540	.2550	.2560	.2570	.2581	.2591	10	11
0.51	.2601	.2611	.2621	.2632	.2642	.2652	.2663	.2673	.2683	.2694	1	1.0 1.1
0.52	.2704	.2714	.2725	.2735	.2746	.2756	.2767	.2777	.2788	.2798	2	2.0 2.2
0.53	.2809	.2820	.2830	.2841	.2852	.2862	.2873	.2884	.2894	.2905	3	3.0 3.3
0.54	.2916	.2927	.2938	.2948	.2959	.2970	.2981	.2992	.3003	.3014	4	4.0 4.4
0.55	0.3025	.3036	.3047	.3058	.3069	.3080	.3091	.3102	.3114	.3125	5	5.0 5.5
0.56	.3136	.3147	.3158	.3170	.3181	.3192	.3204	.3215	.3226	.3238	6	6.0 6.6
0.57	.3249	.3260	.3272	.3283	.3295	.3306	.3318	.3329	.3341	.3352	7	7.0 7.7
0.58	.3364	.3376	.3387	.3399	.3411	.3422	.3434	.3446	.3457	.3469	8	8.0 8.8
0.59	.3481	.3493	.3505	.3516	.3528	.3540	.3552	.3564	.3576	.3588	9	9.0 9.9
0.60	0.3600	.3612	.3624	.3636	.3648	.3660	.3672	.3684	.3697	.3709	12	13
0.61	.3721	.3733	.3745	.3758	.3770	.3782	.3795	.3807	.3819	.3832	1	1.2 1.3
0.62	.3844	.3856	.3869	.3881	.3894	.3906	.3919	.3931	.3944	.3956	2	2.4 2.6
0.63	.3969	.3982	.3994	.4007	.4020	.4032	.4045	.4058	.4070	.4083	3	3.0 3.9
0.64	.4096	.4109	.4122	.4134	.4147	.4160	.4173	.4186	.4199	.4212	4	4.8 5.2
0.65	0.4225	.4238	.4251	.4264	.4277	.4290	.4303	.4316	.4330	.4343	5	5.0 6.5
0.66	.4356	.4369	.4382	.4396	.4409	.4422	.4436	.4449	.4462	.4476	6	6.0 6.5
0.67	.4489	.4502	.4516	.4529	.4543	.4556	.4570	.4583	.4597	.4610	7	7.2 7.8
0.68	.4624	.4638	.4651	.4665	.4679	.4692	.4706	.4720	.4733	.4747	8	8.4 9.1
0.69	.4761	.4775	.4789	.4802	.4816	.4830	.4844	.4858	.4872	.4886	9	9.6 10.4
0.70	0.4900	.4914	.4928	.4942	.4956	.4970	.4984	.4998	.5013	.5027	10.8	11.7
0.71	.5041	.5055	.5069	.5084	.5098	.5112	.5127	.5141	.5155	.5170	14	15
0.72	.5184	.5198	.5213	.5227	.5242	.5256	.5271	.5285	.5300	.5314	1	1.4 1.5
0.73	.5329	.5344	.5358	.5373	.5388	.5402	.5417	.5432	.5446	.5461	2	2.8 3.0
0.74	.5476	.5491	.5506	.5520	.5535	.5550	.5565	.5580	.5595	.5610	3	4.2 4.5
0.75	0.5625	.5640	.5655	.5670	.5685	.5700	.5715	.5730	.5746	.5761	4	5.6 6.0
0.76	.5776	.5791	.5806	.5822	.5837	.5852	.5868	.5883	.5898	.5914	5	7.0 7.5
0.77	.5929	.5944	.5960	.5975	.5991	.6006	.6022	.6037	.6053	.6068	6	8.4 9.0
0.78	.6084	.6100	.6115	.6131	.6147	.6162	.6178	.6194	.6209	.6225	7	9.8 10.5
0.79	.6241	.6257	.6273	.6288	.6304	.6320	.6336	.6352	.6368	.6384	8	11.2 12.0
0.80	0.6400	.6416	.6432	.6448	.6464	.6480	.6496	.6512	.6529	.6545	9	12.6 13.5
0.81	.6561	.6577	.6593	.6610	.6626	.6642	.6659	.6675	.6691	.6708	16	17
0.82	.6724	.6740	.6757	.6773	.6790	.6806	.6823	.6839	.6856	.6872	1	1.6 1.7
0.83	.6889	.6906	.6922	.6939	.6956	.6972	.6989	.7006	.7022	.7039	2	3.2 3.4
0.84	.7056	.7073	.7090	.7106	.7123	.7140	.7157	.7174	.7191	.7208	3	4.8 5.1
0.85	0.7225	.7242	.7259	.7276	.7293	.7310	.7327	.7344	.7362	.7379	4	6.4 6.8
0.86	.7396	.7413	.7430	.7448	.7465	.7482	.7500	.7517	.7534	.7552	5	8.0 8.5
0.87	.7569	.7586	.7604	.7621	.7639	.7656	.7674	.7691	.7709	.7726	6	9.6 10.2
0.88	.7744	.7762	.7779	.7797	.7815	.7832	.7850	.7868	.7885	.7903	7	11.2 11.9
0.89	.7921	.7939	.7957	.7974	.7992	.8010	.8028	.8046	.8064	.8082	8	12.8 13.6
0.90	0.8100	.8118	.8136	.8154	.8172	.8190	.8208	.8226	.8245	.8263	9	14.4 15.3
0.91	.8281	.8299	.8317	.8336	.8354	.8372	.8391	.8409	.8427	.8446	18	19
0.92	.8464	.8482	.8501	.8519	.8538	.8556	.8575	.8593	.8612	.8630	1	1.8 1.9
0.93	.8649	.8668	.8686	.8705	.8724	.8742	.8761	.8780	.8798	.8817	2	3.6 3.8
0.94	.8836	.8855	.8874	.8892	.8911	.8930	.8949	.8968	.8987	.9006	3	5.4 5.7
0.95	0.9025	.9044	.9063	.9082	.9101	.9120	.9139	.9158	.9178	.9197	4	7.2 7.6
0.96	.9216	.9235	.9254	.9274	.9293	.9312	.9332	.9351	.9370	.9390	5	9.0 9.5
0.97	.9409	.9428	.9448	.9467	.9487	.9506	.9526	.9545	.9565	.9584	6	10.8 11.4
0.98	.9604	.9624	.9643	.9663	.9683	.9702	.9722	.9742	.9761	.9781	7	12.6 13.3
0.99	0.9801	.9821	.9841	.9860	.9880	.9900	.9920	.9940	.9960	.9980	8	14.4 15.2
1.00	1.0000	.0020	.0040	.0060	.0080	.0100	.0120	.0140	.0161	.0181	9	16.2 17.1
N	N ² 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.	

Tafel XVIII.

Tafel der Quadrate der Zahlen von 0.000 bis 3.000.

N	N² 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.
1.00	1.0000	.0020	.0040	.0060	.0080	.0100	.0120	.0140	.0161	.0181	20 21
1.01	.0201	.0241	.0281	.0321	.0361	.0401	.0441	.0481	.0521	.0561	1 2.0 2.1
1.02	.0404	.0444	.0484	.0524	.0564	.0604	.0644	.0684	.0724	.0764	2 4.0 4.2
1.03	.0609	.0649	.0689	.0729	.0769	.0809	.0849	.0889	.0929	.0969	3 6.0 6.5
1.04	.0816	.0856	.0896	.0936	.0976	.1016	.1056	.1096	.1136	.1176	4 8.0 8.4
1.05	.1025	.1065	.1105	.1145	.1185	.1225	.1265	.1305	.1345	.1385	5 10.0 10.5
1.06	.1236	.1276	.1316	.1356	.1396	.1436	.1476	.1516	.1556	.1596	6 12.0 12.6
1.07	.1449	.1489	.1529	.1569	.1609	.1649	.1689	.1729	.1769	.1809	7 14.0 14.7
1.08	.1664	.1704	.1744	.1784	.1824	.1864	.1904	.1944	.1984	.2024	8 16.0 16.8
1.09	.1881	.1921	.1961	.2001	.2041	.2081	.2121	.2161	.2201	.2241	9 18.0 18.9
1.10	1.2100	.2122	.2144	.2166	.2188	.2210	.2232	.2254	.2277	.2299	22 23
1.11	.2321	.2344	.2366	.2388	.2410	.2432	.2455	.2477	.2499	.2522	1 2.2 2.3
1.12	.2544	.2566	.2588	.2611	.2634	.2656	.2679	.2701	.2724	.2746	2 4.4 4.6
1.13	.2769	.2792	.2814	.2837	.2860	.2882	.2905	.2928	.2950	.2973	3 6.6 6.9
1.14	.2996	.3019	.3042	.3064	.3087	.3110	.3133	.3156	.3179	.3202	4 8.8 9.2
1.15	.3225	.3248	.3271	.3294	.3317	.3340	.3363	.3386	.3410	.3433	5 11.0 11.5
1.16	.3456	.3479	.3502	.3526	.3549	.3572	.3596	.3619	.3642	.3666	6 13.2 13.8
1.17	.3689	.3712	.3736	.3759	.3783	.3806	.3830	.3853	.3877	.3900	7 15.4 16.1
1.18	.3924	.3948	.3971	.3995	.4019	.4042	.4066	.4090	.4113	.4137	8 17.6 18.4
1.19	.4161	.4185	.4209	.4232	.4256	.4280	.4304	.4328	.4352	.4376	9 19.8 20.7
1.20	1.4400	.4424	.4448	.4472	.4496	.4520	.4544	.4568	.4593	.4617	24 25
1.21	.4641	.4665	.4689	.4714	.4738	.4762	.4787	.4811	.4835	.4860	1 2.4 2.5
1.22	.4884	.4908	.4933	.4957	.4982	.5006	.5031	.5055	.5080	.5104	2 4.8 5.0
1.23	.5129	.5154	.5178	.5203	.5228	.5252	.5277	.5302	.5326	.5351	3 7.2 7.5
1.24	.5376	.5401	.5426	.5450	.5475	.5500	.5525	.5550	.5575	.5600	4 9.6 10.0
1.25	.5625	.5650	.5675	.5700	.5725	.5750	.5775	.5800	.5826	.5851	5 12.0 12.5
1.26	.5876	.5901	.5926	.5952	.5977	.6002	.6028	.6053	.6078	.6104	6 14.4 15.0
1.27	.6129	.6154	.6180	.6205	.6231	.6256	.6282	.6307	.6333	.6358	7 16.8 17.5
1.28	.6384	.6410	.6435	.6461	.6487	.6512	.6538	.6564	.6589	.6615	8 19.2 20.0
1.29	.6641	.6667	.6693	.6718	.6744	.6770	.6796	.6822	.6848	.6874	9 21.6 22.5
1.30	1.6900	.6926	.6952	.6978	.7004	.7030	.7056	.7082	.7109	.7135	26 27
1.31	.7161	.7187	.7213	.7240	.7266	.7292	.7319	.7345	.7371	.7398	1 2.6 2.7
1.32	.7424	.7450	.7477	.7503	.7530	.7556	.7583	.7609	.7636	.7662	2 5.2 5.4
1.33	.7689	.7716	.7742	.7769	.7796	.7822	.7849	.7876	.7902	.7929	3 7.8 8.1
1.34	.7956	.7983	.8010	.8036	.8063	.8090	.8117	.8144	.8171	.8198	4 10.4 10.8
1.35	.8225	.8252	.8279	.8306	.8333	.8360	.8387	.8414	.8442	.8469	5 13.0 13.5
1.36	.8496	.8523	.8550	.8578	.8605	.8632	.8660	.8687	.8714	.8742	6 15.6 16.2
1.37	.8769	.8796	.8824	.8851	.8879	.8906	.8934	.8961	.8989	.9016	7 18.2 18.0
1.38	.9044	.9072	.9099	.9127	.9155	.9182	.9210	.9238	.9266	.9293	8 20.8 21.6
1.39	.9321	.9349	.9377	.9404	.9432	.9460	.9488	.9516	.9544	.9572	9 23.4 24.3
1.40	1.9600	.9628	.9656	.9684	.9712	.9740	.9768	.9796	.9825	.9853	28 29
1.41	.9881	.9909	.9937	.9966	.9994	2.0022	.0051	.0079	.0107	.0136	1 2.8 2.9
1.42	2.0164	.0192	.0221	.0249	.0278	.0306	.0335	.0363	.0392	.0420	2 5.6 5.8
1.43	.0449	.0478	.0506	.0535	.0564	.0592	.0621	.0650	.0678	.0707	3 8.4 8.7
1.44	.0736	.0765	.0794	.0822	.0851	.0880	.0909	.0938	.0967	.0996	4 11.2 11.6
1.45	.1025	.1054	.1083	.1112	.1141	.1170	.1199	.1228	.1257	.1287	5 14.0 14.5
1.46	.1316	.1345	.1374	.1404	.1433	.1462	.1492	.1521	.1550	.1580	6 16.8 17.4
1.47	.1609	.1638	.1668	.1697	.1727	.1756	.1786	.1815	.1845	.1874	7 19.0 20.3
1.48	.1904	.1934	.1963	.1993	.2023	.2052	.2082	.2112	.2141	.2171	8 22.4 23.2
1.49	.2201	.2231	.2261	.2290	.2320	.2350	.2380	.2410	.2440	.2470	9 25.2 26.1
1.50	2.2500	.2530	.2560	.2590	.2620	.2650	.2680	.2710	.2741	.2771	30 31
N	N² 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.

Tafel XVIII.

Tafel der Quadrate der Zahlen von 0.000 bis 3.000.

N	N² 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.	
1.50	2.2500	.2530	.2560	.2590	.2620	.2650	.2680	.2710	.2741	.2771	30	31
1.51	.2801	.2831	.2861	.2892	.2922	.2952	.2983	.3013	.3043	.3074	1	3.0 3.1
1.52	.3104	.3134	.3165	.3195	.3226	.3256	.3287	.3317	.3348	.3378	2	6.0 6.2
1.53	.3409	.3440	.3470	.3501	.3532	.3562	.3593	.3624	.3654	.3685	3	9.0 9.3
1.54	.3716	.3747	.3778	.3808	.3839	.3870	.3901	.3932	.3963	.3994	4	12.0 12.4
1.55	.4025	.4056	.4087	.4118	.4149	.4180	.4211	.4242	.4274	.4305	5	15.0 15.5
1.56	.4336	.4367	.4398	.4430	.4461	.4492	.4524	.4555	.4586	.4618	6	18.0 18.6
1.57	.4649	.4680	.4712	.4743	.4775	.4806	.4838	.4869	.4901	.4932	7	21.0 21.7
1.58	.4964	.4996	.5027	.5059	.5091	.5122	.5154	.5186	.5217	.5249	8	24.0 24.8
1.59	.5281	.5313	.5345	.5376	.5408	.5440	.5472	.5504	.5536	.5568	9	27.0 27.9
1.60	2.5600	.5632	.5664	.5696	.5728	.5760	.5792	.5824	.5857	.5889	32	33
1.61	.5921	.5953	.5985	.6018	.6050	.6082	.6115	.6147	.6179	.6212	1	3.2 3.3
1.62	.6244	.6276	.6309	.6341	.6374	.6406	.6439	.6471	.6504	.6536	2	6.4 6.6
1.63	.6569	.6602	.6634	.6667	.6700	.6732	.6765	.6798	.6830	.6863	3	9.6 9.9
1.64	.6896	.6929	.6962	.6994	.7027	.7060	.7093	.7126	.7159	.7192	4	12.8 13.2
1.65	.7225	.7258	.7291	.7324	.7357	.7390	.7423	.7456	.7490	.7523	5	16.0 16.5
1.66	.7556	.7589	.7622	.7656	.7689	.7722	.7756	.7789	.7822	.7856	6	19.2 19.8
1.67	.7889	.7922	.7956	.7989	.8023	.8056	.8090	.8123	.8157	.8190	7	22.4 23.1
1.68	.8224	.8258	.8291	.8325	.8359	.8392	.8426	.8460	.8493	.8527	8	25.6 26.4
1.69	.8561	.8595	.8629	.8662	.8696	.8730	.8764	.8798	.8832	.8866	9	28.8 29.7
1.70	2.8900	.8934	.8968	.9002	.9036	.9070	.9104	.9138	.9173	.9207	34	35
1.71	.9241	.9275	.9309	.9344	.9378	.9412	.9447	.9481	.9515	.9550	1	3.4 3.5
1.72	.9584	.9618	.9653	.9687	.9722	.9756	.9791	.9825	.9860	.9894	2	6.8 7.0
1.73	2.9929	.9964	.9998	3.0033	.0068	.0102	.0137	.0172	.0206	.0241	3	10.2 10.5
1.74	3.0276	.0311	.0346	.0380	.0415	.0450	.0485	.0520	.0555	.0590	4	13.6 14.0
1.75	3.0625	.0660	.0695	.0730	.0765	.0800	.0835	.0870	.0906	.0941	5	17.0 17.5
1.76	.0976	.1011	.1046	.1082	.1117	.1152	.1188	.1223	.1258	.1294	6	20.4 21.0
1.77	.1329	.1364	.1400	.1435	.1471	.1506	.1542	.1577	.1613	.1648	7	23.8 24.5
1.78	.1684	.1720	.1755	.1791	.1827	.1862	.1898	.1934	.1969	.2005	8	27.2 28.0
1.79	.2041	.2077	.2113	.2148	.2184	.2220	.2256	.2292	.2328	.2364	9	30.6 31.5
1.80	3.2400	.2436	.2472	.2508	.2544	.2580	.2616	.2652	.2689	.2725	36	37
1.81	.2761	.2797	.2833	.2870	.2906	.2942	.2979	.3015	.3051	.3088	1	3.6 3.7
1.82	.3124	.3160	.3197	.3233	.3270	.3306	.3343	.3379	.3416	.3452	2	7.2 7.4
1.83	.3489	.3526	.3562	.3599	.3636	.3672	.3709	.3746	.3782	.3819	3	10.8 11.1
1.84	.3856	.3893	.3930	.3966	.4003	.4040	.4077	.4114	.4151	.4188	4	14.4 14.8
1.85	.4225	.4262	.4299	.4336	.4373	.4410	.4447	.4484	.4522	.4559	5	18.0 18.5
1.86	.4596	.4633	.4670	.4708	.4745	.4782	.4820	.4857	.4894	.4932	6	21.6 22.2
1.87	.4969	.5006	.5044	.5081	.5119	.5156	.5194	.5231	.5269	.5306	7	25.2 25.9
1.88	.5344	.5382	.5419	.5457	.5495	.5532	.5570	.5608	.5645	.5683	8	28.8 29.6
1.89	.5721	.5759	.5797	.5834	.5872	.5910	.5948	.5986	.6024	.6062	9	32.4 33.3
1.90	3.6100	.6138	.6176	.6214	.6252	.6290	.6328	.6366	.6405	.6443	38	39
1.91	.6481	.6519	.6557	.6596	.6634	.6672	.6711	.6749	.6787	.6826	1	3.8 3.9
1.92	.6864	.6902	.6941	.6979	.7018	.7056	.7095	.7133	.7172	.7210	2	7.6 7.8
1.93	.7249	.7288	.7326	.7365	.7404	.7442	.7481	.7520	.7558	.7597	3	11.4 11.7
1.94	.7636	.7675	.7714	.7752	.7791	.7830	.7869	.7908	.7947	.7986	4	15.2 15.6
1.95	.8025	.8064	.8103	.8142	.8181	.8220	.8259	.8298	.8338	.8377	5	19.0 19.5
1.96	.8416	.8455	.8494	.8534	.8573	.8612	.8652	.8691	.8730	.8770	6	22.8 23.4
1.97	.8809	.8848	.8888	.8927	.8967	.9006	.9046	.9085	.9125	.9164	7	26.6 27.3
1.98	.9204	.9244	.9283	.9323	.9363	.9402	.9442	.9482	.9521	.9561	8	30.4 31.2
1.99	.9601	.9641	.9681	.9720	.9760	.9800	.9840	.9880	.9920	.9960	9	34.2 35.1
2.00	4.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0200	.0240	.0280	.0321	.0361	40	41
N	N² 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.	

Tafel XVIII.

Tafel der Quadrate der Zahlen von 0.000 bis 3.000.

N	N² 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.
2.00	4.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0200	.0240	.0280	.0321	.0361	40 41
2.01	.0401	.0441	.0481	.0522	.0562	.0602	.0643	.0683	.0723	.0764	1 4.0 4.1
2.02	.0804	.0844	.0885	.0925	.0966	.1006	.1047	.1087	.1128	.1168	2 8.0 8.2
2.03	.1209	.1250	.1290	.1331	.1372	.1412	.1453	.1494	.1534	.1575	3 12.0 12.3
2.04	.1616	.1657	.1698	.1738	.1779	.1820	.1861	.1902	.1943	.1984	4 16.0 16.4
2.05	.2025	.2066	.2107	.2148	.2189	.2230	.2271	.2312	.2354	.2395	5 20.0 20.5
2.06	.2436	.2477	.2518	.2560	.2601	.2642	.2684	.2725	.2766	.2808	6 24.0 24.6
2.07	.2849	.2890	.2932	.2973	.3015	.3056	.3098	.3139	.3181	.3222	7 28.0 28.7
2.08	.3264	.3306	.3347	.3389	.3431	.3472	.3514	.3556	.3597	.3639	8 32.0 32.8
2.09	.3681	.3723	.3765	.3806	.3848	.3890	.3932	.3974	.4016	.4058	9 36.0 36.9
2.10	4.4100	.4142	.4184	.4226	.4268	.4310	.4352	.4394	.4437	.4479	42 43
2.11	.4521	.4563	.4605	.4648	.4690	.4732	.4775	.4817	.4859	.4902	1 4.2 4.3
2.12	.4944	.4986	.5029	.5071	.5114	.5156	.5199	.5241	.5284	.5326	2 8.4 8.6
2.13	.5369	.5412	.5454	.5497	.5540	.5582	.5625	.5668	.5710	.5753	3 12.6 12.9
2.14	.5796	.5839	.5882	.5924	.5967	.6010	.6053	.6096	.6139	.6182	4 16.8 17.2
2.15	.6225	.6268	.6311	.6354	.6397	.6440	.6483	.6526	.6570	.6613	5 21.0 21.5
2.16	.6656	.6699	.6742	.6786	.6829	.6872	.6916	.6959	.7002	.7046	6 25.2 25.8
2.17	.7089	.7132	.7176	.7219	.7263	.7306	.7350	.7393	.7437	.7480	7 29.4 30.1
2.18	.7524	.7568	.7611	.7655	.7699	.7742	.7786	.7830	.7873	.7917	8 33.6 34.4
2.19	.7961	.8005	.8049	.8092	.8136	.8180	.8224	.8268	.8312	.8356	9 37.8 38.7
2.20	4.8400	.8444	.8488	.8532	.8576	.8620	.8664	.8708	.8753	.8797	44 45
2.21	.8841	.8885	.8929	.8974	.9018	.9062	.9107	.9151	.9195	.9240	1 4.4 4.5
2.22	.9284	.9328	.9373	.9417	.9462	.9506	.9551	.9595	.9640	.9684	2 8.8 9.0
2.23	4.9729	.9774	.9818	.9863	.9908	.9952	.9997	5.0042	.0086	.0131	3 13.2 13.5
2.24	5.0176	.0221	.0266	.0310	.0355	.0400	.0445	.0490	.0535	.0580	4 17.6 18.0
2.25	5.0625	.0670	.0715	.0760	.0805	.0850	.0895	.0940	.0986	.1031	5 22.0 22.5
2.26	.1076	.1121	.1166	.1212	.1257	.1302	.1348	.1393	.1438	.1484	6 26.4 27.0
2.27	.1529	.1574	.1620	.1665	.1711	.1756	.1802	.1847	.1893	.1938	7 30.8 31.5
2.28	.1984	.2030	.2075	.2121	.2167	.2212	.2258	.2304	.2349	.2395	8 35.2 36.0
2.29	.2441	.2487	.2533	.2578	.2624	.2670	.2716	.2762	.2808	.2854	9 39.6 40.5
2.30	5.2900	.2946	.2992	.3038	.3084	.3130	.3176	.3222	.3269	.3315	46 47
2.31	.3361	.3407	.3453	.3500	.3546	.3592	.3639	.3685	.3731	.3778	1 4.6 4.7
2.32	.3824	.3870	.3917	.3963	.4010	.4056	.4103	.4149	.4196	.4242	2 9.2 9.4
2.33	.4289	.4336	.4382	.4429	.4476	.4522	.4569	.4616	.4662	.4709	3 13.8 14.1
2.34	.4756	.4803	.4850	.4896	.4943	.4990	.5037	.5084	.5131	.5178	4 18.4 18.8
2.35	5.5225	.5272	.5319	.5366	.5413	.5460	.5507	.5554	.5602	.5649	5 23.0 23.5
2.36	.5696	.5743	.5790	.5838	.5885	.5932	.5980	.6027	.6074	.6122	6 27.6 28.2
2.37	.6169	.6216	.6264	.6311	.6359	.6406	.6454	.6501	.6549	.6596	7 32.2 32.9
2.38	.6644	.6692	.6739	.6787	.6835	.6882	.6930	.6978	.7025	.7073	8 36.8 37.6
2.39	.7121	.7169	.7217	.7264	.7312	.7360	.7408	.7456	.7504	.7552	9 41.4 42.3
2.40	5.7600	.7648	.7696	.7744	.7792	.7840	.7888	.7936	.7985	.8033	48 49
2.41	.8081	.8129	.8177	.8226	.8274	.8322	.8371	.8419	.8467	.8516	1 4.8 4.9
2.42	.8564	.8612	.8661	.8709	.8758	.8806	.8855	.8903	.8952	.9000	2 9.6 9.8
2.43	.9049	.9098	.9146	.9195	.9244	.9292	.9341	.9390	.9438	.9487	3 14.4 14.7
2.44	5.9536	.9585	.9634	.9682	.9731	.9780	.9829	.9878	.9927	.9976	4 19.2 19.6
2.45	6.0025	.0074	.0123	.0172	.0221	.0270	.0319	.0368	.0418	.0467	5 24.0 24.5
2.46	.0516	.0565	.0614	.0664	.0713	.0762	.0812	.0861	.0910	.0960	6 28.8 29.4
2.47	.1009	.1058	.1108	.1157	.1207	.1256	.1306	.1355	.1405	.1454	7 33.6 34.3
2.48	.1504	.1554	.1603	.1653	.1703	.1752	.1802	.1852	.1901	.1951	8 38.4 39.2
2.49	.2001	.2051	.2101	.2150	.2200	.2250	.2300	.2350	.2400	.2450	9 43.2 44.1
2.50	6.2500	.2550	.2600	.2650	.2700	.2750	.2800	.2850	.2901	.2951	50 51
N	N² 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.

Tafel XVIII.

Tafel der Quadrate der Zahlen von 0.000 bis 3.000.

N	N² 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.
2.50	6.2500	.2550	.2600	.2650	.2700	.2750	.2800	.2850	.2901	.2951	50 51
2.51	.3001	.3051	.3101	.3152	.3202	.3252	.3303	.3353	.3403	.3454	1 5.0 5.1
2.52	.3504	.3554	.3605	.3655	.3706	.3756	.3807	.3857	.3908	.3958	2 10.0 10.2
2.53	.4009	.4060	.4110	.4161	.4212	.4262	.4313	.4364	.4414	.4465	3 15.0 15.3
2.54	.4516	.4567	.4618	.4668	.4719	.4770	.4821	.4872	.4923	.4974	4 20.0 20.4
2.55	.5025	.5076	.5127	.5178	.5229	.5280	.5331	.5382	.5434	.5485	5 25.0 25.5
2.56	.5536	.5587	.5638	.5690	.5741	.5792	.5844	.5895	.5946	.5998	6 30.0 30.6
2.57	.6049	.6100	.6152	.6203	.6255	.6306	.6358	.6409	.6461	.6512	7 35.0 35.7
2.58	.6564	.6616	.6667	.6719	.6771	.6822	.6874	.6926	.6977	.7029	8 40.0 40.8
2.59	.7081	.7133	.7185	.7236	.7288	.7340	.7392	.7444	.7496	.7548	9 45.0 45.9
2.60	6.7600	.7652	.7704	.7756	.7808	.7860	.7912	.7964	.8017	.8069	52 53
2.61	.8121	.8173	.8225	.8278	.8330	.8382	.8435	.8487	.8539	.8592	1 5.2 5.3
2.62	.8644	.8696	.8749	.8801	.8854	.8906	.8959	.9011	.9064	.9116	2 10.4 10.6
2.63	.9169	.9222	.9274	.9327	.9380	.9432	.9485	.9538	.9590	.9643	3 15.6 15.9
2.64	6.9696	.9749	.9802	.9854	.9907	.9960	7.0013	.0066	.0119	.0172	4 20.8 21.2
2.65	7.0225	.0278	.0331	.0384	.0437	.0490	.0543	.0596	.0650	.0703	5 26.0 26.5
2.66	.0756	.0809	.0862	.0916	.0969	.1022	.1076	.1129	.1182	.1236	6 31.2 31.8
2.67	.1289	.1342	.1396	.1449	.1503	.1556	.1610	.1663	.1717	.1770	7 36.4 37.1
2.68	.1824	.1878	.1931	.1985	.2039	.2092	.2146	.2200	.2253	.2307	8 41.6 42.4
2.69	.2361	.2415	.2469	.2522	.2576	.2630	.2684	.2738	.2792	.2846	9 46.8 47.7
2.70	7.2900	.2954	.3008	.3062	.3116	.3170	.3224	.3278	.3333	.3387	54 55
2.71	.3441	.3495	.3549	.3604	.3658	.3712	.3767	.3821	.3875	.3930	1 5.4 5.5
2.72	.3984	.4038	.4093	.4147	.4202	.4256	.4311	.4365	.4420	.4474	2 10.8 11.0
2.73	.4529	.4584	.4638	.4693	.4748	.4802	.4857	.4912	.4966	.5021	3 16.2 16.5
2.74	.5076	.5131	.5186	.5240	.5295	.5350	.5405	.5460	.5515	.5570	4 21.6 22.0
2.75	7.5625	.5680	.5735	.5790	.5845	.5900	.5955	.6010	.6066	.6121	5 27.0 27.5
2.76	.6176	.6231	.6286	.6342	.6397	.6452	.6508	.6563	.6618	.6674	6 32.4 33.0
2.77	.6729	.6784	.6840	.6895	.6951	.7006	.7062	.7117	.7173	.7228	7 37.8 38.5
2.78	.7284	.7340	.7395	.7451	.7507	.7562	.7618	.7674	.7729	.7785	8 43.2 44.0
2.79	.7841	.7897	.7953	.8008	.8064	.8120	.8176	.8232	.8288	.8344	9 48.6 49.5
2.80	7.8400	.8456	.8512	.8568	.8624	.8680	.8736	.8792	.8849	.8905	56 57
2.81	.8961	.9017	.9073	.9130	.9186	.9242	.9299	.9355	.9411	.9468	1 5.6 5.7
2.82	7.9524	.9580	.9637	.9693	.9750	.9806	.9863	.9919	.9976	8.0032	2 11.2 11.4
2.83	8.0089	.0146	.0202	.0259	.0316	.0372	.0429	.0486	.0542	.0599	3 16.8 17.1
2.84	.0656	.0713	.0770	.0826	.0883	.0940	.0997	.1054	.1111	.1168	4 22.4 22.8
2.85	8.1225	.1282	.1339	.1396	.1453	.1510	.1567	.1624	.1682	.1739	5 28.0 28.5
2.86	.1796	.1853	.1910	.1968	.2025	.2082	.2140	.2197	.2254	.2312	6 33.6 34.2
2.87	.2369	.2426	.2484	.2541	.2599	.2656	.2714	.2771	.2829	.2886	7 39.2 39.9
2.88	.2944	.3002	.3059	.3117	.3175	.3232	.3290	.3348	.3405	.3463	8 44.8 45.6
2.89	.3521	.3579	.3637	.3694	.3752	.3810	.3868	.3926	.3984	.4042	9 50.4 51.3
2.90	8.4100	.4158	.4216	.4274	.4332	.4390	.4448	.4506	.4565	.4623	58 59
2.91	.4681	.4739	.4797	.4856	.4914	.4972	.5031	.5089	.5147	.5206	1 5.8 5.9
2.92	.5264	.5322	.5381	.5439	.5498	.5556	.5615	.5673	.5732	.5790	2 11.6 11.8
2.93	.5849	.5908	.5966	.6025	.6084	.6142	.6201	.6260	.6318	.6377	3 17.4 17.7
2.94	.6436	.6495	.6554	.6612	.6671	.6730	.6789	.6848	.6907	.6966	4 23.2 23.6
2.95	8.7025	.7084	.7143	.7202	.7261	.7320	.7379	.7438	.7498	.7557	5 29.0 29.5
2.96	.7616	.7675	.7734	.7794	.7853	.7912	.7972	.8031	.8090	.8150	6 34.8 35.4
2.97	8.8200	.8268	.8328	.8387	.8447	.8506	.8566	.8625	.8685	.8744	7 40.4 41.3
2.98	.8804	.8864	.8923	.8983	.9043	.9102	.9162	.9222	.9281	.9341	8 46.4 47.2
2.99	8.9401	.9461	.9521	.9580	.9640	.9700	.9760	.9820	.9880	.9940	9 52.2 53.1
3.00	9.0000	.0060	.0120	.0180	.0240	.0300	.0360	.0420	.0481	.0541	60 61
N	N² 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.

Tafel XIX.

Tafel der Gauss'schen Constanten für die nicht identischen Kometenbahnen.

No.	T	$\pi - \Omega$	A	B	C	log a	log b	log c
1	240	81° 54' 59" 81 54 5	292° 39' 30" 293 49 8	208° 25' 0" 209 39 38	332° 41' 9" 331 56 36	9.97222 9.96967	9.98454 9.98549	9.63800 9.64498
2	539	256 22 6 256 26 43	163 44 54 165 5 12	78 29 25 79 48 37	54 56 57 55 59 22	9.99378 9.99370	9.95414 9.95499	9.66987 9.66701
3	565	70 2 44 70 3 39	272 34 24 271 54 57	49 46 5 41 0 30	2 11 34 1 38 4	9.99844 9.99913	9.06100 8.99945	9.99868 9.99870
4	568	20 17 8 20 10 4	43 2 30 44 33 18	311 33 18 313 5 50	319 7 4 320 28 57	9.99940 9.99942	9.95276 9.95248	9.64859 9.64969
5	574	15 31 16 15 31 47	243 49 32 244 58 31	146 28 22 147 39 53	27 40 50 27 3 31	9.95779 9.96092	9.98403 9.98286	9.69683 9.69063
6	770	93 42 59 93 43 51	330 59 50 328 36 38	105 13 29 104 41 40	24 13 32 23 57 41	9.71777 9.72529	9.96362 9.95968	9.97264 9.97402
7	837	277 7 55 277 7 51	231 38 2 230 17 43	317 17 14 315 50 56	332 31 17 331 34 11	9.99681 9.99661	9.92894 9.92980	9.73394 9.73250
8	961	82 32 11 82 32 20	89 42 32 89 27 7	177 23 51 175 7 13	0 45 47 1 25 57	9.99989 9.99943	9.74824 9.74929	9.91849 9.91861
9	1092	30 22 56 30 23 57	228 47 0 230 8 40	139 31 45 140 43 1	55 9 24 55 18 16	9.97311 9.97450	9.99973 9.99982	9.53545 9.52380
10	1097	124 56 46 124 56 10	281 57 50 281 7 53	222 45 6 224 52 40	343 13 39 343 8 26	9.91411 9.90474	9.90624 9.90338	9.91540 9.92694
11	1231	121 32 41 121 33 17	127 19 34 128 37 45	39 20 26 40 41 57	30 26 30 31 30 16	9.99908 9.99902	9.94477 9.94514	9.67972 9.67874
12	1264	83 59 42 83 59 53	257 7 55 258 17 47	165 29 14 166 46 15	26 45 25 24 54 36	9.99478 9.99566	9.99278 9.99251	9.37599 9.36500
13	1299	103 51 34 103 52 13	298 31 50 297 16 28	103 58 16 103 42 45	19 34 20 19 12 41	9.79722 9.80783	9.89705 9.88940	9.99661 9.99702
14	1337	90 46 6 90 47 18	348 27 0 346 37 54	99 28 50 98 27 45	31 30 30 31 5 58	9.88489 9.88611	9.96329 9.96030	9.87678 9.87990
15	1366	213 37 2 213 36 28	307 34 47 309 3 57	216 20 40 217 46 50	228 11 50 229 59 46	9.99912 9.99906	9.97642 9.97624	9.51445 9.51665
16	1385	166 40 59 166 40 46	174 12 38 171 57 30	249 5 40 248 19 49	330 46 0 330 36 50	9.78823 9.78965	9.99123 9.99276	9.91057 9.90754
17	1433	212 45 23 212 45 50	279 37 30 279 9 42	113 8 10 113 29 30	15 29 27 15 3 31	9.87886 9.88751	9.82239 9.81144	9.99698 9.99665
18	1468	65 13 9 65 14 17	30 24 22 28 40 13	122 11 37 121 12 3	34 42 50 34 38 24	9.88383 9.88073	9.99970 9.99943	9.80937 9.81434
19	1472	158 6 10 157 51 20	240 15 40 249 2 35	329 48 28 338 42 41	332 19 2 340 31 30	9.99994 9.99997	9.95673 9.95626	9.62880 9.63072
20	1490	129 52 35 129 51 43	33 34 0 35 23 10	263 34 55 264 23 12	335 38 27 336 1 18	9.83819 9.84296	9.93121 9.92606	9.95071 9.95246
21	1491	154 57 49 154 56 60	173 50 22 168 35 16	246 53 20 246 34 31	335 44 10 335 42 20	9.41545 9.42125	9.99866 9.99930	9.98620 9.98508
22	1506	242 14 46 242 15 26	304 4 12 302 46 19	73 37 20 72 17 40	17 54 12 17 22 14	9.94057 9.94401	9.82025 9.81198	9.95219 9.95333
23	1532	16 38 15 16 39 10	220 24 55 221 54 56	129 0 10 130 2 36	36 5 40 36 0 43	9.91422 9.91746	9.99972 9.99949	9.75766 9.75157
24	1533	277 51 20 277 50 2	35 44 15 37 14 8	287 29 45 288 54 1	331 35 47 332 16 28	9.96218 9.96348	9.90971 9.90620	9.84950 9.85189
25	1556	98 48 48 98 47 11	268 23 27 269 34 33	178 16 56 179 32 54	6 18 51 1 39 52	9.99994 0.00000	9.99704 9.99702	9.07076 9.06808

Tafel XIX.

Tafel der Gauss'schen Constanten für die nicht identischen Kometenbahnen.

No.	T	$\pi - \Omega$	A	B	C	$\log a$	$\log b$	$\log c$
26	1558	2° 46' 28" 2 46 13	97° 28' 10" 97 0 23'	211° 47' 37" 210 18 24	347° 53' 22" 348 30 12	9.96194 9.96621	9.86227 9.85732	9.89982 9.89820
27	1577	256 39 12 256 39 43	82 28 30 82 1 6	144 44 3 143 21 20	12 54 27 13 28 6	9.95265 9.94750	9.86187 9.86746	9.91194 9.91357
28	1580	89 22 37 89 22 57	99 35 23 100 16 39	88 52 40 89 32 33	8 24 10 8 56 2	9.97482 9.97132	9.52640 9.55290	9.99925 9.99916
29	1582	332 1 23 332 0 40	238 28 50 237 3 51	264 30 37 263 53 51	341 19 4 340 53 9	9.86352 9.85534	9.85801 9.86747	9.98808 9.98729
30	1585	330 36 17 330 36 52	129 40 33 130 58 31	41 46 7 43 7 8	32 25 0 33 28 55	9.99899 9.99893	9.94553 9.94593	9.67752 9.67643
31	1590	307 39 53 307 40 14	280 36 40 279 22 55	18 17 19 16 12 56	6 3 2 5 21 18	9.99765 9.99816	9.78902 9.78725	9.90045 9.90068
32	1593	12 4 10 12 4 53	269 30 17 269 33 15	153 25 23 155 47 59	5 54 20 5 18 35	9.98774 9.99015	9.68193 9.67361	9.95790 9.95741
33	1596	59 25 51 59 25 31	107 47 51 106 48 57	207 28 8 206 10 51	339 58 14 340 45 19	9.96918 9.97221	9.96313 9.96149	9.73007 9.72558
34	1618	24 53 26 24 51 35	26 51 40 28 20 50	284 50 42 286 15 19	323 46 49 324 34 41	9.97517 9.97578	9.93360 9.93135	9.78500 9.78794
35	1618	287 22 57 287 24 18	164 30 46 166 12 4	95 18 37 96 21 21	31 58 39 32 24 19	9.90697 9.90579	9.95404 9.95705	9.86588 9.86271
36	1652	300 9 28 300 10 18	177 18 31 184 55 2	113 2 23 113 14 47	23 48 39 23 50 24	9.26251 9.26367	9.99861 9.99925	9.99405 9.99334
37	1661	33 23 26 33 24 56	171 48 56 173 26 47	97 48 34 98 54 32	36 13 18 36 14 19	9.92482 9.92436	9.96341 9.96580	9.82549 9.82165
38	1664	310 40 41 310 38 27	7 55 51.5 6 23 57	105 36 27 104 21 4.5	54 8 12 53 20 20	9.96980 9.96962	9.97526 9.97394	9.68781 9.69333
39	1665	156 6 54 156 6 12	254 25 34 253 41 13.5	250 45 8 250 49 32	342 26 21 342 4 28	9.83126 9.82031	9.86671 9.87544	9.99978 9.99984
40	1668	206 42 27 206 41 44	283 55 44 285 12 9	194 16 8 195 33 3	305 34 30 304 10 22	9.99673 9.99613	9.99950 9.99955	9.11864 9.14759
41	1672	109 28 29 109 27 50	78 3 4.5 78 42 38	246 48 54 246 40 27	339 27 28 339 44 32	9.68950 9.70734	9.94258 9.93714	9.99848 9.99815
42	1677	99 12 38 99 13 24	253 12 17 252 19 39	248 58 57 238 39 55	340 7 11 338 21 30	9.74514 9.72994	9.92003 9.96511	9.99975 9.96727
43	1678	159 27 47 159 29 50	254 19 40 255 43 13.5	164 37 13 165 59 8	162 17 11.5 163 51 49	9.99996 9.99996	9.97098 9.97101	9.54900 9.54863
44	1680	350 38 57 350 38 2	6 22 21 9 11 47.5	250 35 35 251 11 10	333 51 47 334 2 37	9.69206 9.69424	9.98725 9.98502	9.95554 9.95745
45	1683	86 46 32 86 46 30	270 37 26 270 28 19	162 46 34 166 45 12	2 24 4 1 49 18	9.99782 9.99875	9.49332 9.48453	9.98025 9.98012
46	1684	330 36 25 330 35 32	355 33 7 358 59 25	247 44 27 248 21 10	334 25 13 331 24 28	9.61359 9.62366	9.99591 9.99428	9.96468 9.96452
47	1686	86 25 49 86 25 49	82 42 10 83 54 3.5	346 30 45.5 348 41 33	355 50 54 356 31 41	9.99870 9.99909	9.76590 9.76422	9.91165 9.91192
48	1689	180 44 43 180 45 30	357 31 29 354 48 13	109 51 27 109 31 23	26 42 13 26 31 43	9.71107 9.71212	9.98902 9.98697	9.94743 9.94954
49	1695	203 59 10 203 58 2	304 42 50 306 6 13	213 28 12 214 44 45	281 37 28 282 15 24.5	9.98879 9.98803	9.99807 9.99786	9.38627 9.40113
50	1698	356 50 56 356 46 58	181 36 18 180 14 46	266 28 8 265 10 40	296 24 50 295 21 34	9.99079 9.99078	9.96317 9.96407	9.64787 9.64397

Tafel XIX.

Tafel der Gauss'schen Constanten für die nicht identischen Kometenbahnen.

No.	<i>T</i>	$\pi - \Omega$	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>log a</i>	<i>log b</i>	<i>log c</i>
51	1699	109° 14' 16" 109 13 50	105° 10' 24" 104 27 47	221° 35' 59" 220 28 9	342° 0' 4" 342 30 7	9.91469 9.92118	9.92513 9.92092	9.89494 9.89253
52	1701	164 59 31 164 58 33	143 1 35 141 29 6	233 4 40 232 2 46	323 10 51 323 12 15	9.91126 9.91430	9.99999 9.99996	9.76281 9.75680
53	1702	309 41 55 309 43 37	279 37 45.5 281 4 31	189 22 24 190 46 52	191 45 40 193 30 53	9.99996 9.99995	9.97535 9.97532	9.51556 9.51607
54	1706	59 25 12 59 25 34	97 58 23 98 47 55	50 27 1 53 33 50	5 34 15 6 7 18	9.99149 9.98969	9.45301 9.47543	9.99064 9.99047
55	1707	27 8 40 27 9 22	91 52 54 91 58 6	117 35 43 117 12 2	19 6 14 19 24 52	9.77588 9.76132	9.91942 9.92558	9.98971 9.99046
56	1718	6 15 55 6 17 0	317 13 34 315 46 57	68 37 24 67 11 6	24 28 24 23 49 56	9.96102 9.96266	9.88776 9.88352	9.87717 9.87913
57	1723	331 21 35 331 21 10	99 30 44 100 26 30	41 5 45 44 2 31	6 2 5 6 35 54	9.99173 9.99008	9.54663 9.56088	9.98033 9.98007
58	1729	9 53 13 9 52 40	75 33 0 76 13 35	249 52 39 249 45 19	342 27 59 342 51 17	9.83025 9.84089	9.86812 9.85908	9.99947 9.99931
59	1737	99 32 44 99 30 37	315 3 34 316 29 35	222 36 20 223 54 13	276 40 41 276 52 38	9.98836 9.98780	9.99288 9.99247	9.46323 9.47404
60	1737	138 43 3 138 44 0	221 8 6 222 24 24	130 33 0 131 29 6	39 0 30 38 57 10	9.93036 9.93271	9.99996 9.99985	9.71944 9.71341
61	1739	104 46 30 104 45 55	253 36 27 252 41 14	286 53 28 285 29 0	349 5 37 348 34 42	9.96565 9.96210	9.64715 9.66367	9.98872 9.98833
62	1742	328 1 1 328 1 14	267 46 33 267 13 44	263 0 8 263 51 12	357 44 10 357 11 7	9.99818 9.99718	8.96222 9.05622	9.99998 9.99999
63	1743	25 27 18 25 47 15	157 35 28 158 57 15	68 32 43 69 54 40	62 57 31 64 15 29	9.99971 9.99971	9.95964 9.95986	9.61638 9.61542
64	1743	118 95 51 118 59 28	85 32 48 84 33 32	173 42 59 172 20 18	6 38 3.5 8 3 2	9.99863 9.99797	9.96742 9.96779	9.58158 9.58385
65	1744	151 26 8 151 27 2	125 3 17 126 21 52	77 46 56 78 56 31	18 22 18 18 51 22	9.92962 9.92570	9.82851 9.83667	9.95765 9.95651
66	1747	230 16 36 230 16 57	276 54 3 276 31 26	116 21 22 117 3 41	12 33 50 12 4 13	9.92847 9.93487	9.74218 9.72752	9.99461 9.99428
67	1748	17 51 25 17 50 42	264 0 43 263 45 19.5	244 14 38 244 32 7.5	341 12 28 340 53 12	9.78289 9.76873	9.90971 9.91649	9.99388 9.99440
68	1748	245 38 42 245 39 17	104 17 37 105 1 14	97 39 7 97 54 50	12 36 5 13 4 18.5	9.93642 9.93077	9.70446 9.72049	9.99944 9.99933
69	1757	268 45 20 268 42 52	303 33 26 304 52 0	211 49 25 213 9 52	242 13 34 244 9 28	9.99660 9.99635	9.98927 9.98899	9.40214 9.41020
70	1758	36 48 4 36 47 19	294 18 42 295 24 47	230 31 55 231 23 54	337 54 5 337 35 38	9.84180 9.83236	9.96367 9.96686	9.91346 9.91609
71	1759	273 57 49 273 58 15	260 48 15 261 13 57	131 20 4 132 18 36	17 2 25 16 35 30	9.88696 9.89523	9.89908 9.89304	9.94536 9.94373
72	1759	59 42 34 59 52 30	10 50 7 9 16 15	102 45 16 101 12 35	89 52 41 88 19 26	9.99859 9.99858	9.96559 9.96524	9.59239 9.59449
73	1762	115 28 54 115 28 57	89 6 2 89 12 40	209 20 53 206 21 26	355 8 50 355 43 25	9.99106 9.99310	9.57616 9.56413	9.97672 9.97638
74	1763	88 39 48 88 39 53	88 50 10 89 15 12	210 27 23 200 43 12	358 26 40 359 0 9	9.99909 9.99963	9.08879 9.05217	9.99763 9.99759
75	1764	104 49 48 104 49 0	316 22 50 314 47 10	93 0 19 92 11 58	22 4 32 21 39 54	9.85884 9.86436	9.90110 9.89460	9.96314 9.96448

Tafel XIX.

Tafel der Gauss'schen Constanten für die nicht identischen Kometenbahnen.

No.	T	$\pi - \Omega$	A	B	C	$\log a$	$\log b$	$\log c$
76	1766	100° 55' 36"	212° 51' 16"	273° 4' 15"	333° 57' 8"	9.90805	9.91663	9.91108
		100 54 51	211 15 7	272 0 29	333 29 55	9.90538	9.92128	9.90889
77	1766	177 0 32	163 49 30	77 31 18	58 14 16	9.99605	9.95567	9.65340
		177 6 19	165 8 8	78 49 30	59 19 40	9.99600	9.95634	9.65092
78	1769	329 7 31	266 3 31	175 0 34	6 53 28	9.99924	9.98025	9.47822
		329 6 16	267 7 45	176 21 43	5 2 26	9.99959	9.98006	9.47615
79	1770	224 13 6	221 47 16	132 16 20	128 56 20	9.99990	9.96589	9.58186
		224 32 1	222 52 3	133 20 29	130 4 59	9.99991	9.96597	9.58138
80	1770	100 19 43	338 40 44	87 23 32	32 49 34	9.93904	9.94011	9.84324
		100 18 19	337 5 0	86 9 26	32 14 32	9.94020	9.93695	9.84628
81	1771	46 10 34	327 4 48	62 24 44	40 52 47	9.99403	9.94136	9.71070
		46 14 22	328 25 38	63 47 16	41 51 42	9.99385	9.94237	9.70833
82	1773	313 8 30	232 13 22	126 44 15	25 41 46	9.82418	9.98793	9.89232
		313 9 13	233 41 20	127 34 55	25 27 58	9.83230	9.98610	9.88909
83	1774	136 43 8	270 2 50	180 44 43	0 11 16	0.00000	9.70063	9.93694
		136 43 7	270 12 34	183 17 31	359 10 14	9.99979	9.70131	9.93703
84	1779	62 10 2	111 10 18	38 3 53	11 45 47	9.98879	9.79305	9.91133
		62 10 52	112 24 20	39 56 23	12 24 35	9.98756	9.79766	9.91037
85	1780	237 5 32	310 54 18	91 56 15	20 41 30	9.86812	9.88179	9.97100
		237 4 48	310 5 30	91 30 21	20 27 27	9.87131	9.87780	9.97162
86	1780	255 9 8	283 43 28	105 26 30	14 19 30	9.90671	9.77169	9.99994
		255 8 42	283 3 56	105 30 16.5	13 51 57	9.91371	9.75815	9.99991
87	1781	156 11 2	137 51 30	112 30 53	23 20 31	9.28444	9.99328	9.99857
		156 11 11	143 43 36	112 37 3	23 25 22	9.24920	9.99488	9.99821
88	1781	61 19 14	14 36 30	112 17 20	48 49 33	9.95201	9.98486	9.71215
		61 21 0	12 9 31	108 8 25	63 28 30	9.98097	9.97567	9.63926
89	1783	354 17 28	135 39 20	83 16 31	22 3 33	9.91087	9.88044	9.94041
		354 18 30	137 8 32	84 20 19	22 31 6	9.90717	9.88668	9.93881
90	1784	336 5 17	46 42 32	129 28 50	29 55 17	9.88160	9.99531	9.82255
		336 4 18	45 10 0	128 29 53	30 5 0	9.87648	9.99621	9.82714
91	1785	205 39 59	341 57 26	245 51 12	334 29 22	9.54838	9.99965	9.97141
		205 39 7	345 48 46	246 18 33	335 1 57	9.54095	9.99919	9.97297
92	1785	127 4 1	84 56 27	116 42 49	21 30 21	9.64243	9.96544	9.98988
		127 4 48	83 52 51	116 30 28	21 44 26	9.62070	9.96970	9.99021
93	1786	323 15 7	279 30 8	195 11 56	347 43 35	9.99117	9.95374	9.68246
		323 14 42	280 25 35	196 35 14	346 41 27	9.98944	9.95484	9.68573
94	1787	99 7 4	336 13 58	98 0 22	26 43 27	9.84388	9.94890	9.92933
		99 8 3	334 19 25	97 14 15	26 21 13	9.84723	9.94484	9.93151
95	1788	57 48 14	293 5 38	26 32 29	16 2 37	9.99838	9.91463	9.76094
		57 49 13	292 41 27	26 4 46	15 45 55.5	9.99843	9.91453	9.76095
96	1788	30 25 28	86 29 21	283 38 37	356 46 18	9.99644	9.12506	9.99967
		30 26 0	87 5 38	286 55 12	357 19 30	9.99756	9.05050	9.99969
97	1790	114 25 18	276 42 58	11 47 5	3 50 17	9.99903	9.78092	9.90303
		114 24 42	275 30 24	9 40 37.5	3 8 54	9.99935	9.77982	9.90314
98	1790	204 36 23	353 44 50	248 20 13	332 15 54	9.73828	9.99354	9.93157
		204 35 25	356 17 39	249 1 44	332 24 51	9.73709	9.99203	9.93405
99	1790	119 27 20	74 15 38	144 40 18	17 37 20	9.94203	9.93206	9.85077
		119 27 56	73 26 26	143 26 41	18 10 47	9.93685	9.93540	9.85364
100	1792	154 21 47	262 11 31	339 52 22	355 29 50	9.99724	9.67034	9.94977
		154 21 23	261 6 34	337 14 58	354 53 1	9.99643	9.67493	9.94949

Tafel XIX.

Tafel der Gauss'schen Constanten für die nicht identischen Kometenbahnen.

No.	T	$\pi - \Omega$	A	B	C	log a	log b	log c
101	1792	147° 22' 19" 147 21 19	161° 3' 10" 159 4 49	244° 11' 50" 243 20 46	328° 35' 49" 328 30 52	9.82934 9.83222	9.99743 9.99814	9.87258 9.86888
102	1793	239 56 38 239 57 29	326 53 31 324 43 46	103 19 27 102 45 43	23 50 31 23 32 44	9.74982 9.75730	9.95285 9.94832	9.97204 9.97341
103	1793	69 53 46 69 53 57	90 52 27 91 44 29	4 57 42 9 49 51	0 34 44 1 9 10	9.99992 9.99968	9.41483 9.41869	9.98490 9.98487
104	1796	184 17 18 184 17 40	82 53 23 82 14 54	160 33 53 159 1 10	9 32 28 10 17 26.5	9.98532 9.98270	9.89103 9.89371	9.83133 9.83310
105	1797	279 48 40 279 48 16	111 8 22 110 5 44	210 42 56 209 28 58	337 13 51 337 56 33	9.96152 9.96480	9.97103 9.96943	9.72918 9.72432
106	1798	342 54 10 342 55 4	220 21 17 221 52 13	128 30 29 129 31 59	35 3 4 34 57 34	9.90735 9.91084	9.99957 9.99929	9.77158 9.76577
107	1798	215 3 37 215 2 26	207 40 7 205 58 20	268 22 4 267 22 35	332 52 27 332 27 37	9.89053 9.88792	9.93238 9.93660	9.91093 9.90858
108	1799	95 44 18 95 45 18	346 19 45.5 344 10 49	103 47 5 102 59 37	27 39 36 27 21 30	9.80597 9.80845	9.97018 9.96701	9.92840 9.93084
109	1799	136 7 42 136 7 21	98 37 35 98 11 44	222 44 9 221 32 57	344 44 54 345 15 35	9.92260 9.92910	9.88043 9.87443	9.92965 9.92797
110	1801	220 38 5 220 39 51	48 16 29 46 51 21	140 13 30 138 57 0	76 33 33.5 75 38 38	9.98580 9.98504	9.99630 9.99597	9.45204 9.46456
111	1802	338 6 55 338 6 17	122 28 34.5 121 13 41	226 37 35 225 37 46	334 17 18 334 37 50	9.88676 9.89288	9.98183 9.97990	9.84362 9.83963
112	1804	331 56 56 331 56 51	267 48 40 268 33 12	175 40 43.5 177 8 8	2 52 59 1 54 43	9.99928 9.99970	9.92412 9.92380	9.73728 9.73668
113	1806	225 20 15 225 19 33	122 57 59 121 40 30	214 52 26 213 40 54	317 38 29 318 1 48	9.97046 9.97240	9.99836 9.99805	9.56472 9.55418
114	1807	4 8 2 4 7 7	351 9 53 354 13 49	247 12 55 247 47 43	333 45 42 333 51 50	9.65863 9.65619	9.99671 9.99558	9.95355 9.95557
115	1808	253 46 25 253 45 52	118 27 38 117 16 24	215 25 23 214 15 2	330 48 33 331 22 0	9.95348 9.95669	9.98704 9.98595	9.69965 9.69322
116	1808	131 32 1 131 32 43	70 41 7 69 30 40	157 9 33 155 53 21	28 40 4 29 40 38	9.98462 9.98286	9.98909 9.98970	9.53476 9.54363
117	1810	102 24 0 102 23 23	59 41 32 60 55 21	264 32 33 265 6 34	341 38 26 342 3 51.5	9.86744 9.87467	9.85182 9.84249	9.98921 9.98985
118	1811	65 23 54 65 24 21	283 58 3 283 18 27	106 34 55 106 39 57	14 58 27 14 31 39	9.89447 9.90200	9.79289 9.78045	9.99990 9.99984
119	1811	314 24 39 314 26 11	182 33 59 184 10 18	104 29 13 105 35 31	40 39 30 41 6 51	9.93187 9.93207	9.97621 9.97798	9.78589 9.78119
120	1812	199 18 13 199 17 23	312 18 36 314 47 26	242 3 18 242 33 50	335 44 31 335 39 38	9.61752 9.60102	9.99491 9.99620	9.96505 9.96677
121	1813	350 50 56 350 53 2	31 52 10 30 23 26	125 49 30 124 33 13	67 2 8 66 11 43	9.97757 9.97690	9.99070 9.99004	9.57303 9.58178
122	1813	204 56 43 204 57 21	82 4 36 81 41 40.5	129 16 27 128 25 45	17 9 11.5 17 32 33	9.87666 9.86782	9.89743 9.90337	9.95419 9.95562
123	1815	65 32 37 65 33 46	169 39 2 171 33 41	102 4 38 102 58 23	30 9 37 30 28 14	9.85673 9.85556	9.96855 9.97134	9.89543 9.89246
124	1816	304 20 59 304 20 24	60 34 37 61 48 20	294 43 52 296 18 43	344 8 25 344 42 0	9.95841 9.96130	9.79046 9.78209	9.94972 9.95063
125	1818	205 4 35 205 2 16	337 52 20 339 22 20	242 36 34 243 53 50	295 55 30 296 47 33	9.97652 9.97606	9.98456 9.98366	9.61663 9.62400

Tafel XIX.

Tafel der Gauss'schen Constanten für die nicht identischen Kometenbahnen.

No.	T	$\pi - \Omega$	A	B	C	$\log a$	$\log b$	$\log c$
126	1818	112° 18' 38"	90° 43' 35"	114° 47' 9"	22° 6' 51"	9.54393	9.97602	9.99609
		112 19 26	90 46 23	114 35 27	22 16 52	9.51525	9.97919	9.99652
127	1818	347 0 18	1 47 43.5	111 25 20	26 7 0	9.66207	9.99355	9.95646
		347 1 13	358 44 32	110 51 8	25 58 53	9.66196	9.99192	9.95840
128	1819	13 21 54	16 45 2	247 8 48	336 21 13	9.22368	9.99749	9.99640
		13 21 6	24 23 30	247 19 31	336 25 51	9.24468	9.99632	9.99692
129	1819	350 0 43	166 9 51	80 20 31	58 32 15	9.99490	9.95622	9.65672
		350 5 54	167 29 22	81 38 31	59 38 33	9.99487	9.95699	9.65381
130	1821	169 11 1	72 43 35	129 22 39	20 7 14	9.84815	9.94327	9.93254
		169 11 43	71 54 13.5	128 31 29	20 28 5	9.83820	9.94749	9.93465
131	1822	344 37 23	272 7 50	14 25 39	1 27 53	9.99946	9.36222	9.98874
		344 37 29	271 19 3	9 1 39	0 53 9	9.99979	9.35490	9.98880
132	1822	237 56 40	351 22 41	99 47 36	33 26 43	9.90004	9.96577	9.85580
		237 57 56	349 36 39	98 43 44	33 0 35	9.90085	9.96307	9.85923
133	1822	181 3 42	357 8 40	108 6 15.5	28 23 45	9.78333	9.98435	9.92283
		181 4 42	354 50 24	107 20 28	28 9 41	9.78467	9.98206	9.92542
134	1823	28 28 57	110 51 45	237 6 31	338 6 53	9.75407	9.96658	9.95699
		28 28 19	109 52 31	236 28 43	338 23 9	9.76772	9.96301	9.95518
135	1824	334 3 17	216 47 38	304 59 44	314 10 56	9.99912	9.95312	9.64856
		333 58 26	215 24 18	303 35 8	312 56 55	9.99908	9.95351	9.64714
136	1824	85 16 10	14 0 36	254 40 44	333 12 57	9.77137	9.97373	9.94184
		85 15 13	16 19 25	255 23 26	333 28 43.5	9.77442	9.97065	9.94396
137	1825	106 10 46	79 15 43	159 41 14.5	13 4 18	9.98320	9.93580	9.75952
		106 11 13	79 25 24	158 16 58	13 54 32	9.98065	9.93765	9.76242
138	1825	177 18 26	270 3 43	205 7 58	354 52 38	9.99058	9.64833	9.96328
		177 18 9	270 4 21	207 37 17	354 17 33	9.98822	9.65770	9.96371
139	1825	256 55 57	240 1 16	308 3 10	343 47 35	9.97739	9.82147	9.90957
		256 54 56	238 44 9	306 24 8	343 10 24	9.97572	9.82674	9.90829
140	1826	279 41 20	283 35 29	196 35 13	338 5 52	9.99174	9.98522	9.50668
		279 40 46	285 33 33	198 51 52	335 47 27	9.98931	9.98616	9.52038
141	1826	4 40 30	50 42 5.5	141 52 53.5	131 15 0	9.99925	9.97477	9.52678
		4 41 9	49 11 55	140 25 5	129 31 11	9.99921	9.97453	9.52895
142	1826	13 40 49	130 2 37	55 37 58	22 18 4	9.97969	9.88013	9.85527
		13 42 16	131 24 4	57 9 4.5	22 59 4	9.97859	9.88338	9.85355
143	1826	279 37 5	255 43 31.5	248 31 56	341 9 28	9.78239	9.90196	9.99830
		279 36 21	255 0 37	248 39 8	340 50 10	9.76884	9.90907	9.99940
144	1827	150 57 42	269 16 32	195 39 43	358 38 8	9.99929	9.29981	9.99192
		150 57 31	268 58 33	201 34 45	358 4 20	9.99857	9.31581	9.99196
145	1827	20 39 16	123 55 54	219 22 55	327 17 10	9.94578	9.99320	9.70052
		20 38 36	122 39 19	218 14 33.5	327 41 56	9.94898	9.99236	9.69364
146	1827	258 41 48	289 44 15.5	74 2 57	12 26 7	9.95733	9.69693	9.98441
		258 42 12	288 41 32	72 39 15	11 54 31	9.96100	9.68230	9.98491
147	1830	5 49 0	293 42 10	203 4 26.5	269 3 22	9.99473	9.99893	9.23027
		5 47 45	295 3 23	204 21 36	270 23 52	9.99417	9.99883	9.25166
148	1830	26 54 1	106 56 45.5	202 22 21	337 52 0	9.98256	9.97793	9.62001
		26 53 43	105 53 1.5	201 5 6	338 53 15	9.98458	9.97701	9.61392
149	1832	204 31 15	22 25 26	117 53 50	34 55 55	9.87720	9.99742	9.82356
		204 32 26	20 36 31	116 55 0	34 46 21	9.87485	9.99667	9.82818
150	1833	260 57 17	312 9 1	220 32 51	236 53 28	9.99839	9.97824	9.50591
		261 2 5	313 37 38	221 58 15	238 38 36	9.99830	9.97794	9.50921

Tafel XIX.

Tafel der Gauss'schen Constanten für die nicht identischen Kometenbahnen.

No.	T	$\pi - \Omega$	A	B	C	$\log a$	$\log b$	$\log c$
151	1834	49° 50' 23" 49 44 1	315° 23' 52" 316 53 55	223° 54' 48" 225 22 10	237° 20' 38" 239 3 7	9.99880 9.99875	9.97505 9.97477	9.52851 9.53117
152	1835	212 50 37 212 55 21	32 20 29 31 1 44	125 4 33 123 39 52	100 56 56.5 99 23 18	9.99612 9.99600	9.97709 9.97662	9.53568 9.54019
153	1835	110 36 25 110 39 24	37 23 30 35 56 13	130 35 51 129 17 48	80 2 28.5 78 51 22	9.98638 9.98588	9.98976 9.98923	9.51442 9.52361
154	1840	72 13 21 72 14 10	222 22 49 223 59 55	125 56 13 126 50 26	29 26 39 29 18 4.5	9.85295 9.85858	9.99719 9.99637	9.85156 9.84739
155	1840	156 31 42 156 30 48	233 15 18.5 231 48 34	264 12 39.5 263 36 48	340 0 58 339 38 26	9.84856 9.84120	9.88108 9.88862	9.89279 9.98189
156	1840	138 9 53 138 9 42	270 50 38 271 5 34	187 53 22 190 8 41	357 42 53 357 3 14	9.99853 9.99754	9.74663 9.74908	9.92111 9.92142
157	1840	133 36 9 133 35 13	322 15 39 324 13 41	238 22 48 239 10 46	332 8 54 332 5 47	9.79280 9.78592	9.99846 9.99904	9.89687 9.90012
158	1842	240 33 16 240 32 46	261 57 10 261 28 13	249 56 55 250 27 53	349 43 5 349 13 24	9.95596 9.95108	9.63966 9.65880	9.99854 9.99869
159	1843	82 34 25 82 34 37	90 2 30 88 54 23	180 2 55 178 44 12	359 54 9.5 2 31 43	0.00000 9.99999	9.99004 9.99007	9.32570 9.32620
160	1843	124 14 35 124 14 51	254 53 19 255 49 13	155 36 0 156 55 25	17 38 47 16 48 7	9.97585 9.97857	9.95655 9.95495	9.72861 9.72463
161	1844	298 27 29 298 42 38	152 29 56 153 38 36	63 11 31.5 64 50 46	56 56 4 57 59 47	9.99956 9.99955	9.95803 9.95824	9.62493 9.62400
162	1844	212 2 29 212 3 12	68 6 7 66 58 37	150 55 43.5 149 41 9	25 2 38 25 45 40	9.96859 9.96572	9.97927 9.98046	9.67680 9.68285
163	1844	177 42 5 177 43 0	216 6 54.5 217 43 33	125 11 3 126 9 38	33 49 20 33 46 27	9.88697 9.89067	9.99991 9.99976	9.80439 9.79923
164	1845	114 36 25 114 36 7	72 35 29 73 38 36	306 13 55 308 21 2	349 44 26 350 18 40	9.97896 9.98124	9.67558 9.66396	9.96923 9.96976
165	1845	205 26 38 205 26 32	82 0 55 82 49 22	305 30 8 308 47 7	354 17 13 354 50 45	9.99073 9.99246	9.44201 9.41677	9.99232 9.99250
166	1845	75 46 15 75 45 58	106 1 17 105 1 15	203 10 52 201 52 34	340 28 21 341 24 9	9.97958 9.98191	9.96823 9.96703	9.67689 9.67202
167	1846	337 57 1 337 57 59	208 0 20 209 47 24	120 14 54 121 9 35	32 39 56 32 41 30	9.85784 9.86143	9.99964 9.99986	9.84154 9.83714
168	1846	12 52 40 12 53 29	109 13 5.5 111 15 55	112 59 51 112 58 17	22 45 27 22 52 50	9.40181 9.36203	9.98578 9.98819	9.99995 9.00000
169	1846	78 38 59 78 38 1	281 3 24 280 15 3	68 12 33 66 9 27	7 57 56 7 25 30	9.98103 9.98357	9.52943 9.50605	9.99319 9.99339
170	1846	339 40 9 339 41 15	347 26 18 349 3 55	248 43 7 249 52 43	315 36 22 316 5 24	9.93838 9.93774	9.98530 9.98394	9.74743 9.75296
171	1846	99 48 48 99 47 8	190 47 25 189 13 47	265 57 48.5 264 47 55	322 10 29 321 37 48	9.94233 9.94183	9.95766 9.96001	9.80660 9.80274
172	1846	94 8 43 94 8 56	92 8 22 93 2 35	10 20 17.5 14 34 59	1 22 25.5 1 57 6	9.99958 9.99916	9.46890 9.47448	9.98078 9.98071
173	1847	254 19 58 254 20 30	103 46 2 104 45 16	49 50 43 52 9 50	8 25 23.5 8 58 47	9.98468 9.98252	9.62052 9.63309	9.97565 9.97526
174	1847	35 44 18 35 44 17	271 20 51 271 6 24	152 6 59 156 23 6	3 14 11 2 40 6	9.99596 9.99726	9.43191 9.41552	9.98780 9.98767
175	1847	91 31 57 91 31 44	92 46 53 92 36 3	216 9 23 214 30 16	349 49 30 350 23 51	9.96431 9.96860	9.78479 9.77680	9.94615 9.94519

Tafel XIX.

Tafel der Gauss'schen Constanten für die nicht identischen Kometenbahnen.

No.	T	$\pi - \Omega$	A	B	C	$\log a$	$\log b$	$\log c$
176	1847	54° 22' 57" 54 23 56	155° 50' 45" 157 58 36	101° 59' 27" 102 40 42	25° 36' 8.5" 25 52 40	9.79091 9.78662	9.95774 9.96152	9.95020 9.94830
177	1847	129 24 51 129 24 50	40 4 48 41 31 6	299 39 16 301 9 30	329 45 36 330 36 23	9.98522 9.98581	9.91710 9.91504	9.79168 9.79390
178	1847	276 37 12 276 37 28	267 1 13 266 34 24	237 28 8 240 34 35	356 13 30 355 40 35	9.99462 9.99291	9.25330 9.29826	9.99834 9.99841
179	1848	261 0 31 261 0 0	266 47 3 266 36 30	235 16 29 236 16 10	348 2 33 347 33 39	9.93728 9.93104	9.74941 9.76197	9.98551 9.98609
180	1849	208 2 38 208 2 5	273 18 56 273 30 0	227 51 9 228 56 0	345 55 49 345 27 28	9.92002 9.91281	9.83839 9.84655	9.96032 9.96148
181	1849	33 12 14 33 11 48	278 34 8 279 11 20	205 22 58 206 51 35	348 23 25 347 42 49	9.97443 9.97091	9.88867 9.89224	9.85470 9.85665
182	1849	237 33 36 237 34 8	102 21 13 104 35 2	96 40 4 97 28 57	11 12 22 12 44 13	9.95122 9.93495	9.65352 9.70900	9.99965 9.99936
183	1850	181 30 45 181 21 37	184 2 24 187 44 56	112 26 30 112 53 24	25 9 3 25 12 47	9.57042 9.57297	9.99655 9.99760	9.97161 9.97002
184	1850	243 17 15 243 16 34	289 16 30 290 26 21	203 6 45 204 22 58	332 14 20 331 14 56	9.98377 9.98193	9.98780 9.98847	9.55144 9.55953
185	1851	87 19 19 87 18 18	305 32 17 306 53 15	218 20 18 219 31 6	321 21 32 321 3 58	9.95886 9.95641	9.99753 9.99795	9.63229 9.64082
186	1851	294 24 15 294 24 55	104 25 7 105 5 51	107 31 23 107 26 52	15 45 6 16 9 33	9.87836 9.86966	9.81654 9.82745	9.99983 9.99991
187	1852	38 47 49 38 47 11	122 11 10 120 53 29	220 57 17 219 47 42	331 24 32 331 51 5	9.92994 9.93428	9.98713 9.98576	9.76140 9.75568
188	1852	223 20 28.7 223 16 44	333 49 47 335 18 22	240 11 32 241 33 52	274 59 22 276 19 58	9.99148 9.99129	9.97916 9.97852	9.55683 9.56278
189	1853	57 3 49 57 3 40.3	78 21 3 79 26 17	329 23 48 331 56 28	353 17 30 353 54 14	9.99346 9.99458	9.67592 9.66950	9.95286 9.95327
190	1853	275 46 54.6 275 49 12.0	23 12 20 21 43 27	118 20 30 117 32 42	64 19 20 63 27 18	9.97643 9.97595	9.98538 9.98450	9.61274 9.61994
191	1853	160 46 14.8 160 47 23	66 17 20 65 12 42	140 43 53 139 35 53	22 27 53 22 56 20	9.92560 9.92024	9.96479 9.96717	9.82161 9.82550
192	1853	170 25 7.5 170 25 37.3	247 32 45 248 31 2	138 34 12 139 39 54	21 28 56 21 0 21	9.91261 9.91855	9.95800 9.95515	9.85258 9.84921
193	1853	82 9 44.2 82 9 3.2	248 47 20 247 49 14	269 54 40 269 15 11	345 22 0 344 54 22	9.92301 9.91728	9.75823 9.77114	9.99340 9.99298
194	1854	170 22 37.8 170 21 54.5	247 28 18 246 28 43	261 5 29 260 45 15	343 21 30 342 57 0	9.87962 9.87183	9.82151 9.83202	9.99693 9.99660
195	1854	101 38 43.2 101 38 13.1	97 38 18 97 23 13.5	234 6 30 233 33 13	341 50 54 342 8 8	9.84570 9.85324	9.91083 9.90640	9.96353 9.96251
196	1854	74 51 13.8 74 51 9.2	94 28 53 94 0 45	198 1 12 196 17 16	352 47 53 353 30 44	9.98891 9.99108	9.84457 9.84114	9.87448 9.87339
197	1854	129 56 22.3 129 55 40.7	60 21 0 61 36 5	297 58 38 299 35 41	344 5 58 344 40 42	9.96340 9.96594	9.79576 9.78805	9.94174 9.94278
198	1854	287 1 50 286 59 49	325 48 47 327 16 31	232 33 24 233 54 4.5	272 2 44 273 24 1	9.99075 9.99045	9.98445 9.98389	9.52218 9.52950
199	1855	323 5 46.2 323 5 28.2	264 49 16 263 56 28	332 40 48 328 41 34	356 35 50 350 1 42.5	9.99725 9.99624	9.45831 9.47148	9.98427 9.98412
200	1855	20 39 51.6 20 37 47.6	192 12 37 190 44 10	270 30 10 269 15 4	317 54 0 317 12 52	9.96500 9.96466	9.95409 9.95608	9.76537 9.76144

Tafel XIX.

Tafel der Gauss'schen Constanten für die nicht identischen Kometenbahnen.

No.	T	$\pi - \Omega$	A	B	C	$\log a$	$\log b$	$\log c$
201	1855	325° 36' 29"	40° 24' 27"	132° 45' 55"	106° 18' 57"	9.99597	9.98124	9.50252
		325 40 24.4	38 56 37	131 22 39	104 40 55.5	9.99579	9.98082	9.50794
202	1857	121 34 54.5	87 40 15	241 15 4	342 11 37	9.82305	9.89296	9.98804
		121 34 23.2	87 46 15	240 46 14	342 34 28	9.83462	9.88537	9.98731
203	1857	13 59 31.3	191 48 50	110 38 53	44 48 40	9.94058	9.98429	9.74506
		14 1 4.4	193 22 35	111 46 3	45 15 45	9.94123	9.98561	9.73946
204	1857	134 5 59.5	78 7 53	156 1 2	14 9 37	9.97596	9.93067	9.78882
		134 6 28.6	77 18 38	154 38 14	14 55 12.5	9.97283	9.93305	9.79156
205	1857	180 58 22.3	286 25 13	197 49 50	323 54 50	9.99291	9.99607	9.34960
		180 57 40.2	287 38 37	199 6 25	322 29 40	9.99189	9.99631	9.36423
206	1857	124 49 45	82 23 12	165 32 24	9 39 35.5	9.99174	9.93221	9.74249
		124 50 7.6	81 34 12	164 5 7	10 34 38	9.98997	9.93362	9.74535
207	1857	95 5 30.4	305 36 38	64 34 17	18 35 12	9.95968	9.83386	9.92383
		95 6 14.7	304 16 30	63 2 55	17 59 40	9.96204	9.82751	9.92517
208	1857	174 34 37	237 45 38	149 19 8	115 13 22	9.99622	9.99103	9.38058
		174 36 0.7	239 6 50	150 35 23	117 20 41	9.99651	9.99128	9.37131
209	1858	206 49 26.3	355 46 20	249 16 24	331 36 3	9.76579	9.99116	9.92250
		206 48 26.6	358 12 36	250 1 29	331 46 48	9.76516	9.98941	9.92517
210	1858	162 4 56	202 25 58	115 55 38	86 7 42	9.99334	9.97551	9.56808
		162 8 39.5	203 46 59	117 11 40	87 24 52	9.99348	9.97611	9.56311
211	1858	25 15 46.1	260 3 0	170 6 37	91 8 48	9.99883	9.99995	8.87259
		25 15 51.2	261 20 12	171 23 0	92 44 7	9.99912	9.99996	8.81346
212	1858	98 51 40.7	97 17 24	226 25 44	344 23 4	9.90850	9.87721	9.94486
		98 51 17.4	96 56 16	225 20 35	344 52 0	9.91579	9.87060	9.94335
213	1858	129 6 48.4	277 30 13	80 3 33	6 23 33	9.98616	9.41433	9.99876
		129 6 46.8	276 49 44	78 32 23	5 50 55	9.98845	9.37833	9.99884
214	1858	155 32 14.7	290 24 27	27 38 20	12 17 50	9.99604	9.86519	9.84087
		155 32 45.7	289 4 35	25 54 40	11 30 7	9.99651	9.86356	9.84173
215	1859	282 0 7.6	90 28 12	187 37 18	358 5 2	9.99886	9.70161	9.93816
		282 0 11.2	90 18 49	185 5 48	358 43 26	9.99949	9.69972	9.93798
216	1860	209 42 21.2	82 6 32	245 0 50	345 49 25	9.90372	9.78942	9.99539
		209 42 45.3	82 30 13	244 30 8	346 16 51	9.91123	9.77714	9.99500
217	1860	41 19 34.4	94 57 3	20 54 56	3 6 8	9.99798	9.52005	9.97702
		41 19 52.3	95 53 30	24 34 12	3 41 3.5	9.99716	9.52847	9.97687
218	1860	76 49 14.6	147 14 0	112 9 56	23 29 6	9.34149	9.99275	9.99662
		76 50 17.2	152 54 58	112 19 27	23 34 12	9.31781	9.99441	9.99610
219	1860	352 16 44.8	345 37 26	90 20 5	37 13 37	9.94799	9.95173	9.80761
		352 18 21.1	344 2 15	89 24 55	36 35 53	9.94866	9.94919	9.81121
220	1861	213 25 45.8	95 29 35	119 39 14	11 5 55	9.94639	9.70047	9.99272
		213 25 15.6	95 48 31.5	118 46 21	11 35 13	9.94075	9.71577	9.99309
221	1861	330 7 20	58 36 10	246 55 20	336 44 5	9.18035	9.99506	9.99991
		330 6 23.2	62 54 39	246 57 15	336 50 4	9.23680	9.99347	9.99997
222	1861	331 35 45	298 46 30	62 34 37	15 31 37	9.96275	9.78804	9.94629
		331 36 19.4	297 32 24	60 57 28	14 57 14	9.96539	9.77989	9.94728
223	1862	182 30 30.7	63 32 14	329 33 37	341 51 6	9.99769	9.91372	9.76477
		182 31 37.6	64 33 24	330 55 43	342 46 35	9.99791	9.91300	9.76554
224	1862	97 15 14	124 42 40	213 19 50	229 13 36	9.99864	9.98081	9.37913
		97 12 35.7	123 21 47	212 2 19	227 31 54	9.99873	9.98108	9.47534
225	1862	152 44 53.5	291 12 24	99 1 46	16 11 13	9.88652	9.81062	9.99760
		152 46 4.7	290 15 39	98 42 8	15 44 33.5	9.89395	9.79894	9.99787

Tafel XIX.

Tafel der Gauss'schen Constanten für die nicht identischen Kometenbahnen.

No.	<i>T</i>	$\pi - \Omega$	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>log a</i>	<i>log b</i>	<i>log c</i>
226	1862	200° 35' 50.3"	118° 2' 48"	213° 16' 12"	328° 28' 55"	9.96327	9.99045	9.64903
		200 35 17.0	116 50 39	212 4 30	329 5 23	9.96594	9.98963	9.64148
227	1863	74 56 26.6	260 7 21	117 12 53	21 51 32	9.63000	9.97125	9.98703
		74 57 7.6	260 42 32	117 34 35	21 37 50	9.65187	9.96753	9.98602
228	1863	4 1 9	223 53 6	254 5 58	337 27 31	9.69960	9.95156	9.98867
		4 0 17	221 41 49	253 44 52	337 12 46	9.68795	9.95612	9.98779
229	1863	55 32 28.3	281 15 33	243 35 22	337 41 58	9.57421	9.97878	9.98939
		55 31 50.6	282 5 51	243 53 48	337 32 17	9.54778	9.98170	9.99028
230	1863	357 12 16.8	206 42 19	114 9 25	24 0 56	9.36120	9.99997	9.98824
		357 13 15.2	211 54 22	114 26 45	23 59 30	9.38201	9.99977	9.98725
231	1863	115 41 46.6	56 34 16	259 26 16	340 6 26	9.81630	9.89281	9.99123
		115 41 6.1	57 57 40	259 51 40	340 28 58	9.82540	9.88515	9.99188
232	1863	78 5 3	244 5 4	115 13 40	23 16 41	9.41258	9.99396	9.99126
		78 5 48.6	246 18 29	115 19 10	23 9 58	9.44674	9.99226	9.99039
233	1864	349 19 15.6	272 51 28	77 27 52.5	2 40 46	9.99753	9.04240	9.99982
		349 19 14.0	272 15 42	73 45 57	2 7 36	9.99845	8.94927	9.99984
234	1864	150 34 56.4	356 48 30	87 37 2.5	82 33 55.5	9.99978	9.96220	9.60314
		150 59 25.4	355 0 15	85 49 5	80 45 23	9.99954	9.92410	9.60400
235	1864	232 26 45.8	78 55 21	144 19 53	14 59 1	9.94498	9.89787	9.88872
		232 27 18.2	78 18 8	142 2 45	15 32 20	9.93960	9.90238	9.89085
236	1864	118 29 58	284 36 34	201 26 21.5	341 50 47	9.98258	9.96603	9.67309
		118 29 25.4	285 36 57	202 45 40	340 55 0	9.98028	9.96726	9.67780
237	1864	98 30 11.2	289 51 3	24 45 20	12 40 12.5	9.99764	9.88878	9.80726
		98 31 7.0	288 29 35	23 6 20	11 48 19	9.99795	9.88770	9.80805
238	1865	108 48 33.6	262 42 3	246 6 6	337 43 42	9.50613	9.97826	9.99834
		108 47 45.5	262 4 50	246 13 42	337 34 15	9.47392	9.98129	9.99868
239	1866	171 0 0	221 27 4	302 28 12	329 32 46	9.98849	9.91968	9.77652
		170 57 40	220 5 3	301 1 57	328 43 28	9.98801	9.92145	9.77864
240	1866	200 17 59.7	297 33 42.5	206 17 49	48 50 28	9.99812	9.98813	9.39548
		200 15 33.6	298 59 0	207 38 48	50 55 40	9.99795	9.98790	9.40180
241	1867	357 13 27.3	166 21 6	85 26 2	46 14 12	9.97893	9.95262	9.73024
		357 16 3.2	167 46 11	86 44 6	47 2 26	9.97861	9.95423	9.72654
242	1867	354 4 18.6	257 2 22	167 28 26	162 40 13	9.99988	9.97943	9.47928
		354 4 55.0	258 25 0	168 48 16	164 30 14	9.99990	9.97951	9.47830

Anmerkung. Diese Tafel giebt für jede der verschiedenen Kometenbahnen in zwei Zeilen $\pi - \Omega$ und die Gauss'schen Constanten, und zwar in der oberen für die Epoche 1750.0, in der unteren für 1850.0, mit Rücksicht auf die Schlussbemerkung der 46. Vorlesung.

Tafel XX.
Constanten-Tafel.

A. Mathematische Constanten.

		<i>log</i>
Basis der natürlichen Logarithmen	$e = 2.71828183$	0.43429448
Modul der Brigg'schen Logarithmen	$M = 0.43429448$	9.63778431 — 10
Radius des Kreises in Graden	$r^0 = \frac{180}{\pi} = 57.29578$	1.75812263
" " " " Minuten	$r' = \frac{10800}{\pi} = 3437.7468$	3.53627388
" " " " Sekunden	$r'' = \frac{648000}{\pi} = 206264.806$	5.31442513
Umfang des Kreises in Graden	$= 360^0$	2.55630250
" " " " Minuten	$= 21600'$	4.33445375
" " " " Sekunden	$= 1296000''$	6.11260500
" " " " für $2r = 1$	$\pi = 3.14159265$	0.49714987
Länge des Halbkreises für den Radius 1	$\pi = 3.14159265$	0.49714987
$\sin 1^0$	0.01745241	8.2418553 — 10
$\sin 1'$	0.000290882	6.4637261 — 10
$\sin 1''$	0.000004848137	4.6855749 — 10

B. Astronomische Constanten.

Aequatorialhorizontalparallaxe der Sonne (Pariser Conferenz)	8".80	0.94448
Scheinbarer Sonnenhalbmesser (nach Auwers)	15'59".63	
" " " " (nach Schur, aus 9jährigen Beobachtungen am 6zölligen Göttinger Heliometer)	16'0".0	
Länge des Sternjahres nach Hansen u. Olufsen	365.2563582 Tage	2.56259778
Länge des tropischen Jahres nach Hansen und Olufsen	365.2422008 Tage	2.56258095
Dieser Werth des tropischen Jahres gilt für 1850,0. Nach Newcomb ist die:	Die jährl. Variation ist — 0".0000000624.	
Dauer des siderischen Jahres	365.25636042 mittl. Tage	2.56259778
" " tropischen "	365.24219879 " "	2.56258094
" " julianischen "	365.25 " "	2.56259022
Ein mittl. Sonnentag in Sterntagen = $24^h 3^m 56^s.555$	= 1.00273791 (Sterntage)	0.00118743
Ein Sterntag in mittl. Sonnentagen = $23^h 56^m 4^s.091$	= 0.99726957 (mittlere Sonnentage)	9.99881256 — 10
Anzahl der Sekunden in einem Tage	= 86400 ^s	4.93651374
Lichtgeschwindigkeit (Pariser Conferenz)	299860 km pro Sekunde mittlerer Zeit	<i>log</i> 5.4769185
Lichtzeit (Pariser Conferenz)	498 ^s .5 (498 ^s .46)	
Anziehungskraft d. Sonne k^2 (Gauss'sche Constante): k (in Theilen des Radius)	0.017202099	8.23558144 — 10
k (in Sekunden)	3548".18761	3.55000657
Aberrationsconstante nach Struve	20".445	
" " " " Nyrén	20".492	
" " " " (Pariser Conferenz)	20".47	
Nutationsconstante nach Peters	9".22;	
" " " " (Pariser Conferenz)	9".21	
Mittlere Schiefe der Ekliptik 1750 + t nach Bessel	$23^0 28' 18''.00 - 0''.48368 t$	— 0".00000272295 t^2
" " " " 1800 + t nach Struve und Peters	$23^0 27' 54''.22 - 0''.4738 t - 0''.0000014 t^2$	
Mittlere Schiefe der Ekliptik 1900,0 (Newcomb)	$23^0 27' 8''.26 - 46''.845 t$	— 0".0059 t^2 + 0".00181 t^3
Allgem. Präcession f. d. Jahr 1750 + t nach Bessel	$50''.21129 + 0''.0002442966 t$	
" " " " 1750 + t nach Struve	$50''.22980 + 0''.000226 t$	
" " " " 1850 + t (Newcomb)	$50''.2453 + 0''.000225 t$	
Mittlere Entfernung Erde—Sonne (Pariser Con- ferenz, nach Gill)	149465000 km	
Mittlere Entfernung Erde—Sonne für die Parallaxe 8".80 und die Bessel'schen Erddimensionen	149480976 km	

Tafel XX.
Constanten-Tafel.

Dimensionen der Erde.

A. nach Bessel¹⁾ (1841).

		log
Halbe grosse Axe (Radius des Aequators)	$a = 6377397.15$ Meter	6.80464 346
Halbe kleine Axe (Umdrehungsaxe)	$b = 6356078.96$ "	6.80318 928
Abplattung	$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{299.1528} = 0.0033428$	7.52410 69 — 10
Excentricität der Erdmeridiane	$\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = 0.08169683$	8.91220 52 — 10
Ein Meridiangrad am Aequator	$= 110563.68$ Meter	5.04361 25
" " " Pol	$= 111679.90$ "	5.04797 50
Ein Grad des Aequators	$= 111306.58$ "	5.04652 08
Eine geographische Meile $= \frac{1}{15}$ Grad des Aequators	$= 7420.4385$ "	3.87042 96
Radius d. Kugel von gleicher Oberfläche mit d. Erde	$= 6370289.5$ "	6.80415 92
Radius d. Kugel von gleichem Volumen mit d. Erde	$= 6370283.2$ "	6.80415 87
Schwerkraft im Niveau des Meeres für die geo-	$= 9^m.780$	0.99034
graphische Breite φ	$+ 0^m.0519 \sin^2 \varphi$	0.7152 — 10
Länge des Sekundenpendels im Niveau des Meeres	$= 0^m.00002$	0.00604 — 10
und im luftleeren Raume für die geographische	$+ 0^m.00002$	7.7212 — 10
Breite φ	$+ 0^m.00002$	7.7212 — 10
Mittlere Dichtigkeit der Erde	$= 5.54$	0.7435
Oberfläche	$= 509950714$ Quadratkilometer	
Inhalt	$= 1082841320000$ Cubikkilometer	

B. nach Helmert (1907).

Halbe grosse Axe	6378200.00 Meter
Halbe kleine Axe	6356818.17 "
Abplattung $\frac{1}{298.3}$	0.0033523
Excentricität	0.0818133
Schwerkraft im Niveau des Meeres für die geo-	$g = 9.7803 \text{ m} + 0.0518 \text{ m} \sin^2 \varphi$
graphische Breite φ	
Länge des Sekundenpendels im Niveau des Meeres	$l = 0.99005 \text{ m} + 0.00525 \text{ m} \sin^2 \varphi$
und im luftleeren Raume für die geographische	
Breite φ	
Mittlere Dichtigkeit der Erde	$= 5.52$

C. nach Hayford²⁾ (1910).

Halbe große Axe	6378388 ± 18 Meter (wahrsch. Fehler)
Halbe kleine Axe	6356909 Meter
Abplattung	$1:297.0 \pm 0.5$

¹⁾ Bessel giebt a und b , sowie die Abplattung in übertriebener Genauigkeit. Auch jetzt sind a und b höchstens auf circa 100 Meter bekannt und die Abplattung auf 0.1. Dass ausserdem a wesentlich grösser als bei Bessel angenommen werden muss (wahrscheinlich mehr als 700 Meter), ist nicht mehr zweifelhaft. —

²⁾ Abgeleitet im Auftrag der Vermessungsbehörde der Vereinigten Staaten von Amerika, der *Coast and Geodetic Survey in Washington* aus einem grossen Beobachtungsmaterial. Cf. „*John J. Hayford, Supplementary investigation in 1909 of the Figure of the Earth and Isostasy. Washington 1910.*“ Dabei ist α ausserdem durch die Schweremessungen (1:298,3) controllirt. Dass die Genauigkeit der Hayford'schen Werthe indess etwas überschätzt ist, wurde von Seiten der ersten Autorität auf dem Gebiet nachgewiesen, in den Sitzungsberichten der physikalisch-mathematischen Classe der Königl. Preussischen Academie der Wissenschaften vom 12. Jan. 1911: „*Ueber die Genauigkeit der Dimensionen des Hayford'schen Erdellipsoides von F. R. Helmert.*“ Die kritische Betrachtung schliesst mit den Worten:

„Wenn wir die Ergebnisse der Untersuchung von Hayford nun auch etwas weniger genau finden, als die amerikanische Abhandlung 1910 angiebt, so bleiben sie doch jedenfalls noch so genau, dass ihre grosse Bedeutung für die Erkenntniss der Grösse und Gestalt der Erde dadurch nicht beeinträchtigt wird.“

Tafel XX.
Constanten-Tafel.
Bahnelemente der grossen Planeten.

Name	Epoche und mittl. Äquin. Berlin, ob M. Zt.	Mittlere Länge	Länge des Perihels	Länge des Knotens	Neigung gegen die Ekliptik	Excentri- citätswinkel	Mittlere tag- liche Bewe- gung	Log. der grossen Halbaxe	Autorität
♿ Merkur	1000 Jan. 0.0	178° 1' 36" .50	75° 53' 58" .01	47° 8' 45" .40	7° 0' 10" .37	11° 51' 55" .64	14732" .41974	9.58782160	Newcomb.
♀ Venus	1900 Jan. 0.0	342 42 26 .78	130 9 49 .8	75 46 46 .73	3 23 37 .07	0 23 26 .88	5767 .66977	9.85933745	Newcomb.
♁ Erde	1900 Jan. 0.0	99 39 36 .02	101 13 15 .0	0 0 0 .0	0 0 0 .0	0 57 35 .31	3548 .19283	0.00000010	Newcomb.
♂ Mars	1900 Jan. 0.0	293 43 41 .16	334 13 6 .88	48 47 9 .36	1 51 1 .32	5 21 14 .39	1886 .51862	0.18289616	Newcomb.
♃ Jupiter	1850 Jan. 0.0	159 56 13 .40	11 54 26 .72	98 55 58 .16	1 18 41 .81	2 45 56 .93	299 .12837656	0.71623737	Hill.
♄ Saturn	1850 Jan. 0.0	14 49 35 .47	6 9 39 .53	112 20 51 .38	2 29 39 .26	3 12 49 .42	120 .45504214	0.97949571	Hill.
♅ Uranus	1900 Jan. 0.0	243 21 43 .09	169 2 55 .6	73 29 24 .9	0 46 21 .60	2 41 47 .14	42 .23434	1.28309711	Newcomb.
♆ Neptun	1900 Jan. 0.0	85 1 29 .83	43 45 20 .2	130 40 44 .0	1 46 45 .32	0 29 20 .16	21 .53266	1.47814314	Newcomb.

Massen der grossen Planeten (Sonnenmasse = 1).

Mercur	...	Masse: 1:6000000	log m: 3.22185 — 10
Venus	...	"	4.38934 — 10
Erde + Mond	...	"	4.48229 — 10
Mars	...	"	3.50955 — 10
Jupiter	...	"	6.979906 — 10
Saturn	...	"	6.455733 — 10
Uranus	...	"	5.64075 — 10
Neptun	...	"	5.70553 — 10

Scheinbare Halbmesser der grossen Planeten,
reducirt auf die mittlere Entfernung Sonne—Erde.

Mercur	...	3' .38 Hartwig
Venus	...	8 .62 Hartwig
Mars	...	4 .68 Hartwig
Jupiter	...	97 .36 Schur
Saturn	...	83 .32 Struve
Uranus	...	34 .28 Hind
Neptun	...	36 .56 Barnard

Anhang

zu den

Leuschner'schen Methoden der Bahnbestimmung.

Zusammenstellung der Formeln nebst Rechenbeispielen.

I. Formeln.

A. Die directen Methoden der Bahnbestimmung.

(Die zur vollständigen Elimination der Parallaxe dienenden Formeln sind in den Anmerkungen zusammengestellt.)

Man benutzt die Formelsysteme, wie folgt:

- (a) Für Parabeln: Ia, IIa, IIIa, u. s. w.
- (b) Für Kreisbahnen: Ib, IIb, IIIb, u. s. w.
- (c) Für allgemeine Bahnen: Ic, IIc, IIIc, u. s. w.

Ia, b, c.

Es wird angenommen, dass die Bahn aus drei Oertern mit kurzen Zwischenzeiten bestimmt werden soll.

Man reducire die beobachteten Rectascensionen und Declinationen auf den Jahresanfang in der üblichen Weise mit Einschluss der Aberrationsglieder. Es seien die Beobachtungszeiten in Decimalen des Tages und die mittleren Oerter: $t_1, \alpha_1, \delta_1, t_2, \alpha_2, \delta_2, t_3, \alpha_3, \delta_3$.

Aus einer astronomischen Ephemeride interpolire man für den Jahresanfang die auf den Aequator bezogenen Sonnenkoordinaten für die Beobachtungszeiten $t_1, t_2 = t_0, t_3$:

$$X_1, Y_1, Z_1, \quad X_2, Y_2, Z_2, \quad X_3, Y_3, Z_3.$$

Gleichzeitig berechne man die Geschwindigkeiten X', Y', Z' zur Zeit t_0 nach einer der beiden folgenden Formeln der numerischen Differentiation:

$$kw \frac{df(l)}{dl} = f'(a + iw) + N_1^3(n) f'''(a + iw) + \dots + n \{ f^{(n)}(a + iw) + N_1^4(n) f^{(n+1)}(a + iw) \dots \}$$
$$l = a + [i + n]w = t_0$$

$$kw \frac{df(l)}{dl} = f'(a + [i + \frac{1}{2}]w) + M_1^3(m) f'''(a + [i + \frac{1}{2}]w) \dots + m^4 f^{(m+1)}(a + [i + \frac{1}{2}]w) + M_1^4(m) f^{(m+2)}(a + [i + \frac{1}{2}]w) \dots$$
$$l = a + [i + \frac{1}{2} + m]w = t_0$$

$$X', Y', Z' = \frac{df(l)}{dl}.$$

Die Differenzen sind der Ephemeride so genau wie möglich zu entnehmen (gewöhnlich inclusive bis zur 7. Decimale). Man benutzt die n - oder m -Formel, je nachdem

$l = t_0$ einem tabulirten Argumente oder der Mitte zweier Argumente am nächsten liegt; m oder n sind dann immer numerisch $\leq 0,25$. Die $M(m)$ und $N(n)$ -Coëfficienten sind den Tafeln XIV und XV zu entnehmen. Man kann die Differenzen für einhalb-, ein-, zwei- oder mehrtägige Intervalle entnehmen. Für einhalbtägige Intervalle ist $w = \frac{1}{2}$ und $\log \frac{1}{kw} = 2.065449$. Zur theilweisen Elimination der geocentrischen (gewöhnlichen) Parallaxe ertheile man den Sonnencoordinaten zur Zeit der Epoche t_2 nur die folgenden Correctionen¹⁾:

$c X_2 = \cos \delta \sin \alpha p_\alpha \varrho + \sin \delta \cos \alpha p_\delta \varrho$; $c Y_2 = -\cos \delta \cos \alpha p_\alpha \varrho + \sin \delta \sin \alpha p_\delta \varrho$; $c Z_2 = -\cos \delta p_\delta \varrho$, wo hier $p_\alpha \varrho$, $p_\delta \varrho$ die geocentrischen (gewöhnlichen) Parallaxen-Factoren sind.

$$R \cos D \cos A = X_2^2), \quad R \cos D \sin A = Y_2, \quad S = R \cos D, \quad R \sin D = Z_2.$$

$$\tau_1 = k(t_3 - t_2), \quad \tau_3 = k(t_2 - t_1), \quad \log k = 8.2355814 - 10.$$

IIa, b, c³⁾.

Die Differenzen der Rectascensionen und Declinationen setzt man am bequemsten in Bogensekunden an. Dann ist, in Einheiten des mittleren Sonnentages:

$$\alpha'_3 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1}, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{t_3 - t_1}; \quad \delta'_3 = \frac{\delta_2 - \delta_1}{t_2 - t_1}, \quad \delta'_1 = \frac{\delta_3 - \delta_2}{t_3 - t_2},$$

und in $\frac{1}{k}$ mittleren Sonnentagen, sowie in Theilen des Radius:

¹⁾ Will man aber die geocentrische und barycentrische Parallaxe vollständig eliminiren, so berechne man für die Zeiten t_1 , t_2 , t_3 :

$$A_1 X = -d_1 \cos \delta_\odot \cos \alpha_\odot, \quad A_1 Y = -d_1 \cos \delta_\odot \sin \alpha_\odot, \quad A_1 Z = -d_1 \sin \delta_\odot,$$

$$p_\alpha^m \varrho_m = \frac{d_1}{\sin 1''} \frac{\cos \delta_\odot}{\cos \delta} \sin(\alpha - \alpha_\odot), \quad p_\delta^m \varrho_m = \frac{d_1}{\sin 1''} \{-\sin \delta_\odot \cos \delta + \cos \delta_\odot \sin \delta \cos(\alpha - \alpha_\odot)\},$$

wo α_\odot , δ_\odot die Mondcoordinaten, welche für jede der drei Beobachtungszeiten interpolirt werden müssen, darstellen, und $\log d_1 = 5.4943^{-10}$; $\frac{d_1}{\sin 1''} = 6''.4372$ ist. Ferner für alle drei Beobachtungen:

$$p_\alpha \varrho = p_\alpha^g \varrho_g + p_\alpha^m \varrho_m, \quad p_\delta \varrho = p_\delta^g \varrho_g + p_\delta^m \varrho_m,$$

wo $p_\alpha^g \varrho_g$, $p_\delta^g \varrho_g$ die gewöhnlich mit $p_\alpha \varrho$ oder $p_\alpha A$ etc. bezeichneten geocentrischen Parallaxen-factoren sind und alle Parallaxenfactoren in Bogensekunden angesetzt sind. Und weiter:

$$A_2 X = [\cos \delta \sin \alpha p_\alpha \varrho + \sin \delta \cos \alpha p_\delta \varrho] \sin 1'', \quad A_2 Y = [-\cos \delta \cos \alpha p_\alpha \varrho + \sin \delta \sin \alpha p_\delta \varrho] \sin 1''$$

$$A_2 Z = -\cos \delta p_\delta \varrho \sin 1''.$$

$$A X = A_1 X + A_2 X, \quad A Y = A_1 Y + A_2 Y, \quad A Z = A_1 Z + A_2 Z; \quad (X) = X + A X, \quad (Y) = Y + A Y, \quad (Z) = Z + A Z.$$

$$d_x = \frac{A_2 X_3(t_0 - t_1) + A_2 X_1(t_3 - t_0)}{A_2 X_2(t_3 - t_1)} - 1, \quad d_y = \frac{A_2 Y_3(t_0 - t_1) + A_2 Y_1(t_3 - t_0)}{A_2 Y_2(t_3 - t_1)} - 1, \quad d_z = \frac{A_2 Z_3(t_0 - t_1) + A_2 Z_1(t_3 - t_0)}{A_2 Z_2(t_3 - t_1)} - 1,$$

$$j \cos a = \left[\frac{1}{R^3} + \frac{2 dx}{\tau_1 \tau_3} \right] A_2 X_2, \quad j \sin a = \left[\frac{1}{R^3} + \frac{2 dy}{\tau_1 \tau_3} \right] A_2 Y_2, \quad j \tan d = \left[\frac{1}{R^3} + \frac{2 dz}{\tau_1 \tau_3} \right] A_2 Z_2.$$

Endlich nur für allgemeine Bahnen Ic:

$$A_2 R_2 = \frac{X_2 A_2 X_2 + Y_2 A_2 Y_2 + Z_2 A_2 Z_2}{R_2},$$

wo für R , X , Y , Z die corrigirten oder uncorrigirten Werthe benutzt werden können.

²⁾ Zur vollständigen Elimination der Parallaxe sind $(X)_2$, $(Y)_2$, $(Z)_2$ nach Anmerkung 1 statt X_2 , Y_2 , Z_2 einzusetzen.

³⁾ Für sehr unregelmässige geocentrische Bewegung beachte man die Anmerkung 1, S. 456. Man kann auch die Curven der beobachteten α und δ zeichnen, dann die α und δ für fünf äquidistante Daten den Curven entnehmen und die Geschwindigkeiten hierauf nach den in Ia, b, c gegebenen Formeln der numerischen Differentiation berechnen, während Formeln für die Beschleunigungen sich durch nochmalige Differentiation der Formeln (9) und (11), S. 453, ergeben.

⁴⁾ Zur Parallaxenelimination sind $(A X)'$, $(A Y)'$, $(A Z)'$ aus den Werthen $(A X)_1$, $(A X)_2$, $(A X)_3$ etc. in derselben Weise zu berechnen, wie oben α' , δ' aus α_1 , α_2 , α_3 etc.

$$\begin{aligned}\alpha' &= \frac{\sin 1''}{k} \frac{(t_3 - t_2) \alpha'_3 + (t_2 - t_1) \alpha'_1}{t_3 - t_1}, & \delta' &= \frac{\sin 1''}{k} \frac{(t_3 - t_2) \delta'_3 + (t_2 - t_1) \delta'_1}{t_3 - t_1}, \\ \alpha'' &= \frac{2}{k^2} \sin 1'' \frac{\alpha'_1 - \alpha'_3}{t_3 - t_1}, & \delta'' &= \frac{2}{k^2} \sin 1'' \frac{\delta'_1 - \delta'_3}{t_3 - t_1}, \\ \log \frac{\sin 1''}{k} &= 6.4499934 - 10, & \log \frac{2 \sin 1''}{k^2} &= 8.5154420 - 10. \\ (tg \delta)' &= \sec^2 \delta \delta'; & (tg \delta)'' &= \sec^2 \delta [2 tg \delta \delta'^2 + \delta''].\end{aligned}$$

IIIa, b, c¹⁾.

$$n = \alpha'^2 tg \delta + (tg \delta)'',$$

$$C_1 = tg \delta \cos(A - \alpha) - tg D, \quad C_2 = \sin(A - \alpha), \quad C_3 = S \cos(A - \alpha).$$

$$c = \cos \psi = \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos(A - \alpha), \quad s = \sin \psi.$$

C_3 wird nur zur Berechnung von s'' gebraucht und kann gewöhnlich fortgelassen werden. Da alle Grössen sich auf die Epoche beziehen, ist das Subscript 2 oder 0 auch bei α_2, δ_2 fortgelassen.

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{C_2}{C_1}, & \Phi &= \alpha' + \Gamma(tg \delta)', & \frac{\lambda}{\kappa} &= -\frac{\alpha' + \Gamma n}{2 \Phi}. \\ a_x &= \cos \alpha \frac{\lambda}{\kappa} - \sin \alpha \alpha', & a_y &= \sin \alpha \frac{\lambda}{\kappa} + \cos \alpha \alpha', & a_z &= tg \delta \frac{\lambda}{\kappa} + (tg \delta)'. \end{aligned}$$

Ferner nur für IIIc allgemeine Bahnen; oder auch für IIIa, wenn man im Laufe der Rechnung die Zulässigkeit der Annahme einer Parabel prüfen will, was bei sehr kleinen Zwischenzeiten gewöhnlich nicht nöthig ist:

$$N = \alpha'^3 tg \delta - \alpha'' (tg \delta)' + \alpha' (tg \delta)'', \quad \kappa = -\frac{S}{N} \{C_1 \alpha' + C_2 (tg \delta)'\}.$$

IV a, b^{2) 3)}.

$$\begin{aligned}a^2 &= [a_x^2 + a_y^2 + a_z^2] \cos^2 \delta, & b &= [a_x X' + a_y Y' + a_z Z'] \cos \delta, & G^2 &= X'^2 + Y'^2 + Z'^2, \\ q'^2 &= \frac{a^2 G^2 - b^2}{a^4 R^2}, & p' &= \frac{b}{a^2 R}, & \text{IV a: } h &= \frac{2}{a^2 R^3}, & \text{IV b: } h &= \frac{1}{a^2 R^3}, & c' &= c - p'.\end{aligned}$$

Die geocentrische Distanz $\varrho = Rz$, wobei z sich aus der Lösung der folgenden Gleichungen ergibt:

$$y' = f(\vartheta) = (\xi + c')^2 - (\eta - q'^2) = 0, \quad \xi = s tg \vartheta, \quad \eta = \frac{h}{s} \cos \vartheta.$$

$$\begin{aligned}\text{IV a: } \cos \vartheta_m &= \frac{a^2 q'^2 s}{2} \left\{ \psi - 90^\circ < \vartheta < \vartheta_m, \right. \\ \text{IV b: } \cos \vartheta_m &= a^2 q'^2 s \left. \right\} \quad z_1 = s tg \vartheta + c.\end{aligned}$$

Anleitungen zur schnellen graphischen Bestimmung von z_1 aus diesen Gleichungen finden sich auf S. 470. Zur Verbesserung von z_1 :

¹⁾ Zur Parallaxenelimination ist ausserdem zu berechnen:

$$\begin{aligned}c_1 &= tg \delta \cos(a - \alpha) - tg d, & c_2 &= \sin(a - \alpha), & c_3 &= j \cos(a - \alpha), & \gamma &= \frac{c_2}{c_1}, & \beta &= -\frac{j c_2}{2} \frac{1 - \frac{\Gamma}{\gamma}}{\Phi}, \\ [X]' &= X' + (AX)' + \beta \cos \alpha \text{ anstatt } X', & [Y]' &= Y' + (AY)' + \beta \sin \alpha \text{ anstatt } Y', \\ [Z]' &= Z' + (AZ)' + \beta tg \delta \text{ anstatt } Z', \\ \text{III c: } Ax &= -\frac{j}{N} [c_1 \alpha' + c_2 (tg \delta)'].\end{aligned}$$

²⁾ IVb: Man vergewissere sich über die Möglichkeit einer Lösung. Die Kriterien für die Anzahl der Lösungen finden sich in den Anmerkungen 1, S. 468 für die Parabel, S. 472 für den Kreis.

³⁾ Zur Parallaxenelimination hat man in G^2 und in b zu setzen: $[X]'$ anstatt X' , $[Y]'$ anstatt Y' , $[Z]'$ anstatt Z' .

$$\mu_1 = (z_1 - c)^2 + s^2, \quad M_1 = (z_1 - p')^2 + q'^2 - h \mu_1^{-1/2},$$

$$z_2 = z_1 - \frac{M_1}{2(z_1 - p') + (h \mu_1^{-1/2})(z_1 - c) \mu_1^{-1}}, \text{ etc.}$$

$$\text{IV a: } m = -\frac{\kappa}{R^4 \cos \delta}, \quad z_L = m (1 - \mu^{-1/2}).$$

IV a: Aus der Differenz $z - z_L$ entscheidet man, ob eine und, im Falle dreier Lösungen, welche Parabel möglich ist, siehe S. 471. Ist eine Parabel nicht möglich, so geht man zur allgemeinen Bahn nach IV c über.

IV c 1).

$$m = -\frac{\kappa}{R^4 \cos \delta},$$

z mit den Argumenten ψ und $\frac{1}{m}$ aus Tafel XVI.

V a, b, c.

$$\varrho = R z, \quad \sigma = \varrho \cos \delta, \quad \sigma'' = \sigma \left[\frac{C_3}{\kappa} + \alpha'^2 - \frac{1}{r^3} \right],$$

wo die Formel für r weiter unten folgt,

$$\varrho_1 = \frac{\sigma}{\cos \delta_1} \left[1 - \frac{\lambda}{\kappa} \tau_3 \right] + \frac{\tau_3^2 \sigma''}{2 \cos \delta_1}, \quad \varrho_3 = \frac{\sigma}{\cos \delta_3} \left[1 + \frac{\lambda}{\kappa} \tau_1 \right] + \frac{\tau_1^2 \sigma''}{2 \cos \delta_3}.$$

Die Berechnung von σ'' kann gewöhnlich fortgelassen werden²⁾. Dann sind in ϱ_1 und ϱ_3 die mit dem Quadrate der Zwischenzeiten multiplicirten Glieder der Null gleich zu setzen. Mit $\varrho_1, \varrho_2 = \varrho, \varrho_3$ berechnet man jetzt die drei reducirten Beobachtungszeiten nach: Reducirte Beobachtungszeit $t =$ Beobachtungszeit $t - \alpha \varrho$, wo nach S. 118 in Decimalen des Tages $\log \alpha = 7.76112 - 10$ ist (bei Annahme von 498⁶⁵ Lichtzeit: 7,76129 — 10).

$$\tau_1 = k (t_3 - t_2), \quad \tau_3 = k (t_2 - t_1), \quad \log k = 8.2355814 - 10.$$

$$x = \sigma \cos \alpha - X^3, \quad y = \sigma \sin \alpha - Y, \quad z = \sigma \operatorname{tg} \delta - Z, \quad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ r^2 = R^2 \mu \text{ Controlle,} \end{cases}$$

$$x' = a_x \sigma - X', \quad y' = a_y \sigma - Y', \quad z' = a_z \sigma - Z', \quad r r' = x x' + y y' + z z'.$$

Um den Charakter der Bahn zu bestimmen, kann man gleich berechnen:

$$g^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \quad \frac{1}{a} = \frac{2}{r} - g^2, \quad p = r^2 [g^2 - r'^2], \quad e^2 = \frac{a - p}{a}.$$

Für die Parabel ist: $p = 2q = 2r - (r r')^2$. Als Controlle der Rechnung muss sein: für die Parabel $\frac{1}{a} = 0$; für den Kreis $a = r$.

¹⁾ Zur Parallaxenelimination rechne man noch:

$$(m) = m \left(1 + \frac{3 \Delta \varrho R}{R} \right) + \frac{\Delta x}{R \cos \delta}$$

und dann zur Verbesserung des Tafelwerthes z_1 [wo mit Vernachlässigung der Parallaxe $(m) = m$ ist]

$$\mu_1 = (z_1 - c)^2 + s^2, \quad (\nu)_1 = z_1 - (m), \quad \mu_1^3 (\nu)_1^3 - m^2 = M_1,$$

$$z_2 = z_1 - \frac{M_1}{2 \mu_1^2 (\nu)_1 [\mu_1 + 3 (\nu)_1 (z_1 - c)]} \text{ u. s. w.}$$

²⁾ Die Berechnung von σ'' ist ausser bei längeren Zwischenzeiten nur angebracht, wenn zwischen der ersten und dritten Beobachtung σ' das Zeichen wechselt, was man aus sehr kleinen Werthen von σ' schliessen kann.

³⁾ Ist aber die Parallaxe vollständig eliminirt worden, so setze man (X) anstatt X etc., und $[X]'$ anstatt X' , etc.

VIa, b, c.

Nur für VIb:

$$a = r, \quad f_1 = 1 - \frac{\tau_3^2}{2a^3} + \frac{\tau_3^4}{24a^5} \dots \quad g_1 = -\tau_3 + \frac{\tau_3^3}{6a^3} - \frac{\tau_3^5}{120a^5} \dots,$$

$$f_3 = 1 - \frac{\tau_1^2}{2a^3} + \frac{\tau_1^4}{24a^5} \dots, \quad g_3 = \tau_1 - \frac{\tau_1^3}{6a^3} + \frac{\tau_1^5}{120a^5} \dots$$

VIa, VIc:

$$f(2) = -\frac{1}{2r^3}, f(3) = \frac{r'}{2r^4}, f(4) = \frac{1}{6r^6} \left[1 - \left(\frac{15}{4} \frac{(rr')^2}{r} + \frac{3}{4} \frac{r}{a} \right) \right], f(5) = -\frac{r'}{2r^7} \left[1 - \left(\frac{7}{4} \frac{(rr')^2}{r} + \frac{3}{4} \frac{r}{a} \right) \right],$$

$$g(3) = -\frac{1}{6r^3}, g(4) = \frac{r'}{4r^4}, g(5) = \frac{1}{12r^6} \left[1 - \left(\frac{9}{2} \frac{(rr')^2}{r} + \frac{9}{10} \frac{r}{a} \right) \right], g(6) = -\frac{7}{24r^7} \left[1 - \left(2 \frac{(rr')^2}{r} + \frac{6}{7} \frac{r}{a} \right) \right].$$

$$f_1 = 1 + \tau_3^2 f(2) - \tau_3^3 f(3) + \tau_3^4 f(4) - \tau_3^5 f(5) + \dots \quad g_1 = -\tau_3 - \tau_3^3 g(3) + \tau_3^4 g(4) - \tau_3^5 g(5) + \tau_3^6 g(6) - \dots$$

$$f_3 = 1 + \tau_1^2 f(2) + \tau_1^3 f(3) + \tau_1^4 f(4) + \tau_1^5 f(5) + \dots \quad g_3 = \tau_1 + \tau_1^3 g(3) + \tau_1^4 g(4) + \tau_1^5 g(5) + \tau_1^6 g(6) + \dots$$

Für die Parabel verschwinden die durch a dividirten Glieder. Im Allgemeinen genügen die mit $f(1)$, $f(3)$, $g(3)$ multiplicirten Glieder. Man vergewissert sich zunächst durch angenäherte Rechnung der letzten Glieder, ob man mit den Reihen auskommt. Im Nothfalle sind die im II. Abschnitte entwickelten geschlossenen Ausdrücke für f und g zu benutzen, oder man berechnet zunächst die Constanten für den Aequator aus VII, 1a, VII, 1b, VII, 1c.

$$\begin{aligned} \varrho_1 \cos \delta_1 \cos \alpha_1 &= X_1 + f_1 x + g_1 x' = \xi_1, & \varrho_3 \cos \delta_3 \cos \alpha_3 &= X_3 + f_3 x + g_3 x' = \xi_3, \\ \varrho_1 \cos \delta_1 \sin \alpha_1 &= Y_1 + f_1 y + g_1 y' = \eta_1, & \varrho_3 \cos \delta_3 \sin \alpha_3 &= Y_3 + f_3 y + g_3 y' = \eta_3, \\ \varrho_1 \sin \delta_1 &= Z_1 + f_1 z + g_1 z' = \zeta_1, & \varrho_3 \sin \delta_3 &= Z_3 + f_3 z + g_3 z' = \zeta_3. \end{aligned}$$

Hat man aber die Constanten für den Aequator berechnet, so berechnet man aus diesen die Oerter in der üblichen Weise. Mit den resultirenden Werthen von ϱ_1 und ϱ_3 reducire man den ersten und dritten beobachteten Ort auf das Erdcentrum mit den geocentrischen (gewöhnlichen) Parallaxenfactoren¹⁾.

Dann bilde man die Unterschiede Beobachtung — Rechnung $\partial, \alpha_1 = \cos \delta_1 \partial \alpha_1$, $\partial \delta_1$, $\partial, \alpha_3 = \cos \delta_3 \partial \alpha_3$, $\partial \delta_3$. Sind diese Unterschiede zufriedenstellend, so berechne man die noch fehlenden Elemente nach VIIa, b, c. Will man aber die Beobachtungen noch genauer darstellen, so wende man zunächst eine der unter B. zusammengestellten Methoden der Bahnverbesserung an.

VIIa, b, c.

Reducirte Zeit der Epoche: $t_2 - \alpha \varrho_2$. ε — mittlere Schiefe der Ekliptik am Jahresanfang.

(a) Parabel: $p = 2q = 2r - (rr')^2$, $e \sin v = r' \sqrt{p}$, $e \cos v = \frac{p}{r} - 1$, $e = 1$, Controle, oder für v :

$$g^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{2}{r}, \quad \text{Controle,} \quad \sin \frac{v}{2} = r' \sqrt{\frac{r}{2}} = \frac{r'}{g}, \quad \cos \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{q}{r}},$$

wo v dasselbe Vorzeichen wie r' erhält.

(c) Allgemeine Bahn: $g^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, $\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - g^2$, $p = r^2(g^2 - r'^2)$,

$$e \sin v = r' \sqrt{p}, \quad e \cos v = \frac{p}{r} - 1, \quad a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad \text{Controle.}$$

¹⁾ Hat man aber die Parallaxe eliminirt, so setzt man einfach $(X)_1$ anstatt X_1 u. s. w., $(X)_3$ anstatt X_3 u. s. w.

Weiter kann man 1. die Constanten für den Aequator zuerst und aus diesen die ekliptikalen Elemente, oder 2. die äquatorealen Elemente zuerst und aus diesen die Constanten für den Aequator berechnen. Im letzteren Falle sind dann die Elemente noch auf die Ekliptik zu übertragen.

1. (a), (c) Parabel und allgemeine Bahn:

$$\begin{aligned} \sin a \sin (A' + v) &= \frac{x}{r}, & \sin b \sin (B' + v) &= \frac{y}{r}, & \sin c \sin (C' + v) &= \frac{z}{r}, \\ \sin a \cos (A' + v) &= \frac{r x' - x r'}{\sqrt{p}}, & \sin b \cos (B' + v) &= \frac{r y' - y r'}{\sqrt{p}}, & \sin c \cos (C' + v) &= \frac{r z' - z r'}{\sqrt{p}}, \\ \frac{\sin i}{\cos \varepsilon} \cos u &= \sin c \cos (C' + v) - \sin b \cos (B' + v) \operatorname{tg} \varepsilon, \\ \frac{\sin i}{\cos \varepsilon} \sin u &= \sin c \sin (C' + v) - \sin b \sin (B' + v) \operatorname{tg} \varepsilon, \\ \omega &= u - v, & A &= A' - \omega, & B &= B' - \omega, & C &= C' - \omega. \end{aligned}$$

1. (b) Kreisbahn:

$$\begin{aligned} p &= a^2 - r, & (r' &= 0), \\ \sin a \sin A' &= \frac{x}{a}, & \sin b \sin B' &= \frac{y}{a}, & \sin c \sin C' &= \frac{z}{a}, \\ \sin a \cos A' &= \sqrt{a} x', & \sin b \cos B' &= \sqrt{a} y', & \sin c \cos C' &= \sqrt{a} z', \\ \frac{\sin i}{\cos \varepsilon} \cos u &= \sin c \cos C' - \sin b \cos B' \operatorname{tg} \varepsilon, \\ \frac{\sin i}{\cos \varepsilon} \sin u &= \sin c \sin C' - \sin b \sin B' \operatorname{tg} \varepsilon, \\ A &= A' - u, & B &= B' - u, & C &= C' - u. \end{aligned}$$

1. (a), (b), (c):

$$\begin{aligned} \cos i &= -\sin a \cos A \operatorname{cosec} \Omega, \\ \sin \Omega &= \frac{\sin b \sin B}{\cos \varepsilon} = \frac{\sin c \sin C}{\sin \varepsilon}, \quad \text{Controlle.} \\ \cos \Omega &= \sin a \sin A, & \pi &= \omega + \Omega, & \operatorname{tg} i &= \frac{\sin b \sin c \sin (C - B)}{\sin a \cos A}, \quad \text{Controlle.} \end{aligned}$$

Die oben berechneten Elemente beziehen sich auf die Ekliptik.

Oder 2. (a), (b), (c):

$$\begin{aligned} \text{Aequator} \left\{ \begin{aligned} \sqrt{p} \cos(i) &= x y' - y x', & r \sin(u) &= \frac{z}{\sin(i)}, \\ \sqrt{p} \sin(i) \sin(\Omega) &= y z' - z y', & r \cos(u) &= x \cos(\Omega) + y \sin(\Omega), \\ \sqrt{p} \sin(i) \cos(\Omega) &= x z' - z x', & r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \quad \text{Controlle.} \end{aligned} \right. \\ \sin a \sin(A) &= \cos(\Omega), & \sin b \sin(B) &= \sin(\Omega), & (C) &= 0, \\ \sin a \cos(A) &= -\sin(\Omega) \cos(i), & \sin b \cos(B) &= \cos(\Omega) \cos(i), & \sin c &= \sin(i). \\ \sin \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} [\Omega + \sigma] &= \sin \frac{1}{2} [(i) + \varepsilon] \sin \frac{1}{2} (\Omega) \\ \sin \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} [\Omega + \sigma] &= \sin \frac{1}{2} [(i) - \varepsilon] \cos \frac{1}{2} (\Omega) \\ \cos \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} [\Omega - \sigma] &= \cos \frac{1}{2} [(i) + \varepsilon] \sin \frac{1}{2} (\Omega) \\ \cos \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} [\Omega - \sigma] &= \cos \frac{1}{2} [(i) - \varepsilon] \cos \frac{1}{2} (\Omega) \end{aligned}$$

$(\omega) = (u) - v$, $\omega = (\omega) - \sigma$, $\pi = \Omega + \omega$, $A' = (A) + (\omega)$, $B' = (B) + (\omega)$, $C' = (\omega)$, wo nun i , Ω , ω , π ebenfalls auf die Ekliptik bezogen sind, und wo für die Kreisbahn ω und π fortzulassen sind, und $A + u$ anstatt $A' + v$ etc. zu setzen ist, wo $A = (A) + \sigma$ etc. ist.

<p>Ellipse:</p> $tg \frac{1}{2} E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} tg \frac{v}{2},$ $M = E - \frac{e}{\sin 1''} \sin E,$ $\mu = k'' a^{-3/2},$ $\log k'' = 3.5500066,$ $\text{Epoche} = t_2 - \alpha q_2.$	<p>Parabel:</p> $q = \frac{p}{2},$ <p>Mit v als Argument, M aus der Barker- schen Tafel VI,</p> $T = t_2 - \alpha q_2 - \frac{(-a)^{3/2}}{k} \left[e tg F - \frac{\log tg \left[45^\circ + \frac{F}{2} \right]}{\text{Mod.}} \right].$	<p>Hyperbel:</p> $tg \frac{F}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} tg \frac{v}{2},$
--	--	--

Die Ephemeride berechnet man wie gewöhnlich aus den Constanten für den Aequator oder mit Benutzung der Reihen (VI) oder der geschlossenen Ausdrücke (B.) für f und g .

B. Die Methoden der Bahnverbesserung.

α) Verbesserung der directen Lösung mit Beibehaltung der mittleren Beobachtung.

Man setze die Unterschiede $(B - R)$, $\partial \alpha_1 = \cos \delta_1 \partial \alpha_1, \partial \delta_1, \partial \alpha_3 = \cos \delta_3 \partial \alpha_3, \partial \delta_3$ in Theilen des Radius an. Hat man bei der Berechnung von f_1 und f_3 höchstens noch die mit τ^4 multiplicirten Glieder mitzunehmen brauchen, dann rechne man nach folgenden Formeln:

a) Bahnverbesserung mit Benutzung der Reihen für ∂f und ∂g .

Für eine Parabel oder eine allgemeine Bahn:

$$\cos \beta = \frac{q - R \cos \psi}{r}$$

$$\left. \begin{aligned} f_{x_1} &= \frac{f_1}{q} \xi + \frac{\cos \beta}{2 r^4} \left[3 \tau_3^2 x - \tau_3^3 \left(x' - \frac{4 r'}{r} x \right) \right]; & f_{x_3} &= \frac{f_3}{q} \xi + \frac{\cos \beta}{2 r^4} \left[3 \tau_1^2 x + \tau_1^3 \left(x' - \frac{4 r'}{r} x \right) \right] \\ f_{y_1} &= \frac{f_1}{q} \eta + \frac{\cos \beta}{2 r^4} \left[3 \tau_3^2 y - \tau_3^3 \left(y' - \frac{4 r'}{r} y \right) \right]; & f_{y_3} &= \frac{f_3}{q} \eta + \frac{\cos \beta}{2 r^4} \left[3 \tau_1^2 y + \tau_1^3 \left(y' - \frac{4 r'}{r} y \right) \right] \\ f_{z_1} &= \frac{f_1}{q} \xi + \frac{\cos \beta}{2 r^4} \left[3 \tau_3^2 z - \tau_3^3 \left(z' - \frac{4 r'}{r} z \right) \right]; & f_{z_3} &= \frac{f_3}{q} \xi + \frac{\cos \beta}{2 r^4} \left[3 \tau_1^2 z + \tau_1^3 \left(z' - \frac{4 r'}{r} z \right) \right] \\ A_1^{(1)} &= \frac{1}{q_1} [\cos \alpha_1 f_{y_1} - \sin \alpha_1 f_{x_1}]; & A_3^{(1)} &= \frac{1}{q_3} [\cos \alpha_3 f_{y_3} - \sin \alpha_3 f_{x_3}] \\ B_1^{(1)} &= -\frac{1}{q_1} [\sin \delta_1 (\sin \alpha_1 f_{y_1} + \cos \alpha_1 f_{x_1}) - \cos \delta_1 f_{z_1}]; & B_3^{(1)} &= -\frac{1}{q_3} [\sin \delta_3 (\sin \alpha_3 f_{y_3} + \cos \alpha_3 f_{x_3}) - \cos \delta_3 f_{z_3}] \\ C_1 &= \frac{g_1}{q_1}; & C_3 &= \frac{g_3}{q_3} \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \frac{C_3 \cos \alpha_3 \partial \alpha_1 - C_1 \cos \alpha_1 \partial \alpha_3}{C_1 C_3 \sin (\alpha_3 - \alpha_1)}; & Q_x &= \frac{A_1 C_3 \cos \alpha_3 - A_3 C_1 \cos \alpha_1}{C_1 C_3 \sin (\alpha_3 - \alpha_1)} \\ P_y &= \frac{C_3 \sin \alpha_3 \partial \alpha_1 - C_1 \sin \alpha_1 \partial \alpha_3}{C_1 C_3 \sin (\alpha_3 - \alpha_1)}; & Q_y &= \frac{A_1 C_3 \sin \alpha_3 - A_3 C_1 \sin \alpha_1}{C_1 C_3 \sin (\alpha_3 - \alpha_1)} \\ P_{x_1} &= \frac{\partial \delta_1 + C_1 \sin \delta_1 (\cos \alpha_1 P_x + \sin \alpha_1 P_y)}{C_1 \cos \delta_1}; & Q_{x_1} &= \frac{B_1 + C_1 \sin \delta_1 (\cos \alpha_1 Q_x + \sin \alpha_1 Q_y)}{C_1 \cos \delta_1} \\ P_{x_3} &= \frac{\partial \delta_3 + C_3 \sin \delta_3 (\cos \alpha_3 P_x + \sin \alpha_3 P_y)}{C_3 \cos \delta_3}; & Q_{x_3} &= \frac{B_3 + C_3 \sin \delta_3 (\cos \alpha_3 Q_x + \sin \alpha_3 Q_y)}{C_3 \cos \delta_3} \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

¹⁾ Zur Elimination etwaiger Aenderung der Parallaxencorrectionen sind die Correctionsglieder, Formel 187, S. 490, zu berücksichtigen.

Für eine allgemeine Bahn:

$$\left. \begin{aligned} \partial \varrho &= \frac{P_{z_3} - P_{z_1}}{Q_{z_3} - Q_{z_1}}; & \partial x' &= P_x - Q_x \partial \varrho; & \partial y' &= P_y - Q_y \partial \varrho; & \partial z' &= P_{z_1} - Q_{z_1} \partial \varrho \\ & & \text{oder } \partial z' &= P_{z_3} - Q_{z_3} \partial \varrho & & & \\ \partial x &= \frac{x}{\varrho} \partial \varrho; & \partial y &= \frac{\eta}{\varrho} \partial \varrho; & \partial z &= \frac{\xi}{\varrho} \partial \varrho \end{aligned} \right\} \quad (\text{III})$$

Die sechs Correctionen $\partial x, \partial y, \partial z, \partial x', \partial y', \partial z'$ werden nun an die Anfangswerthe x, y, z, x', y', z' angebracht; mit diesen neuen Werthen werden dann die verbesserten Elemente nach A, VII berechnet.

Für eine Parabel:

$$P = \frac{1}{2a} - [x' P_x + y' P_y + z' P_z]; \quad Q = \frac{\cos \beta}{r^2} - [x' Q_x + y' Q_y + z' Q_z] \quad (\text{IV})$$

Je nachdem man δ_1 oder δ_3 genau repräsentiren will, setze man $P_z = P_{z_1}, Q_z = Q_{z_1}$; oder $P_z = P_{z_3}, Q_z = Q_{z_3}$. Will man aber die schliesslich übrig bleibenden Fehler auf die äusseren Declinationen vertheilen, dann sind Werthe P_z und Q_z anzuwenden, die sowohl von P_{z_1} als P_{z_3} , und Q_{z_1} als Q_{z_3} , respective, abhängen. Will man ferner die Fehler in den äusseren Orten gleich machen, so ertheilt man zur Bestimmung von P_z, Q_z den Coëfficienten P_{z_1}, P_{z_3} und Q_{z_1}, Q_{z_3} Gewichte, die sich direct aus den Zwischenzeiten und dem Gange der Function $\sin \delta$ ergeben.

In der Praxis ist es jedenfalls am besten, $P_z = P_{z_3}$ und $Q_z = Q_{z_3}$ zu setzen.

$$Q \partial \varrho = P - \frac{1}{2} [(\partial x')^2 + (\partial y')^2 + (\partial z')^2] - \frac{1 - 3 \cos^2 \beta}{2 r^3} (\partial \varrho)^2 + \frac{3 \cos \beta (1 - \frac{5}{3} \cos^2 \beta)}{2 r^4} (\partial \varrho)^3 \dots \quad (\text{V})$$

Dies rechnet man nach Annäherungen. In der ersten Annäherung ist:

$$\partial \varrho = \frac{P}{Q}; \quad \partial x' = P_x - Q_x \partial \varrho; \quad \partial y' = P_y - Q_y \partial \varrho; \quad \partial z' = P_z - Q_z \partial \varrho \quad (\text{VI})$$

Diese Werthe substituirt man in die Glieder rechter Hand der Gleichung (V), und rechnet einen genaueren Werth von $\partial \varrho$, u. s. w. Somit ergeben sich gleichzeitig die endgültigen Werthe der gesuchten Correctionen $\partial \varrho, \partial x', \partial y', \partial z'$. Des weiteren verfährt man ganz ähnlich wie oben, im Falle der allgemeinen Bahn. Mit den neuen Werthen x, y, z, x', y', z' hat man als Controlle:

$$g^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{2}{r}.$$

Wenn $g^2 \neq \frac{2}{r}$, dann besteht entweder ein Irrthum in der Rechnung, oder es waren die von $(\partial \varrho)^4$ und den höheren Potenzen abhängigen Glieder in Gleichung (V) nicht zu vernachlässigen.

Für eine Kreisbahn:

Zur Verbesserung einer Kreisbahn, entweder mit oder ohne Annahme über die Excentricität, verfährt man ganz ähnlich, wie oben im Falle der Parabel. Da aber für den Kreis die geschlossenen Ausdrücke für f und g ebenso bequem sind wie die entsprechenden Reihen, so kann man die Verbesserung einer Kreisbahn stets auf die geschlossenen Ausdrücke für f und g gründen (S. 1009, XV).

b) Bahnverbesserung mit Benutzung der geschlossenen Ausdrücke für ∂f und ∂g .

Können die obigen auf den Reihen für ∂f und ∂g beruhenden Formeln nicht angewandt werden (cf. oben S. 1004, B α), dann hat man zunächst f_1, f_3, g_1, g_3 aus geschlossenen Formeln, wie folgt, zu ermitteln. Die dabei auftretenden Hilfsgrößen ergeben sich, wenn nicht besonders angegeben (cf. auch A, VII), in der üblichen Weise, je nach der Art der Ausgangsbahn:

$$\left. \begin{aligned} \text{Ellipse: } v, E, M, \mu, t; E_1, E_3, r_1, r_3; 2\bar{g}_1 = E_1 - E, 2\bar{g}_3 = E_3 - E; \gamma_1 = \sqrt{2a \sin \bar{g}_1}; \gamma_3 = \sqrt{2a \sin \bar{g}_3} \\ \text{Hyperbel: } F, T; F_1, F_3; v_1, v_3; r_1, r_3; \gamma_1 = \sqrt{\frac{2rr_1}{p}} \sin \frac{1}{2}(v_1 - v); \gamma_3 = \sqrt{\frac{2rr_3}{p}} \sin \frac{1}{2}(v_3 - v) \\ \text{Parabelnahe Bahn}^1): \theta, P_1, P_3, T; \varepsilon, \alpha, \beta; M_1, x_1, n_1, v_1, \theta_1, r_1; M_3, x_3, n_3, v_3, \theta_3, r_3; \\ \gamma_1 = \sqrt{\frac{2r_1 r}{p}} \sin \frac{1}{2}(v_1 - v); \gamma_3 = \sqrt{\frac{2r_3 r}{p}} \sin \frac{1}{2}(v_3 - v) \\ \text{Parabel: } v, q, T; v_1, v_3, r_1, r_3; \gamma_1 = \sqrt{r_1 - q} - \sqrt{r - q}; \gamma_3 = \sqrt{r_3 - q} - \sqrt{r - q} \\ \text{Kreis: } 2\bar{g}_1 = -\frac{\tau_3}{a^{3/2}}, 2\bar{g}_3 = \frac{\tau_1}{a^{3/2}}; f_1 = \cos 2\bar{g}_1, f_3 = \cos 2\bar{g}_3; g_1 = a^{3/2} \sin 2\bar{g}_1, g_3 = a^{3/2} \sin 2\bar{g}_3 \end{aligned} \right\} \text{VI'}$$

Dann rechne man für alle Ausgangsbahnen, ausgenommen die Kreisbahn:

$$f_1 = 1 - \frac{\gamma_1^2}{r}, \quad f_3 = 1 - \frac{\gamma_3^2}{r}, \quad g_1^2 = [2r_1 r - p\gamma_1^2] \gamma_1^2, \quad g_3^2 = [2r_3 r - p\gamma_3^2] \gamma_3^2 \quad \dots \text{VI''}$$

wo γ und g nur für ein der Epoche $t_2 = t_0$ vorangehendes Datum negativ zu nehmen ist. Und weiter im Falle einer elliptischen oder hyperbolischen Ausgangsbahn²⁾:

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta &= \varrho - \frac{R \cos \psi}{r}; & \varphi &= \frac{x' \xi + y' \eta + z' \zeta}{\varrho} \\ \gamma_1^c &= \sqrt{1 - \frac{\gamma_1^2}{2a}}; & \gamma_3^c &= \sqrt{1 - \frac{\gamma_3^2}{2a}} \\ \Phi_1 &= \varphi + \frac{\sqrt{2} \cos \beta \gamma_1^c}{\gamma_1}; & \Phi_3 &= \varphi + \frac{\sqrt{2} \cos \beta \gamma_3^c}{\gamma_3} \\ M_1 &= -\frac{a \gamma_1}{r r_1} \left[r_1 \gamma_1 + \gamma_1^c \left(2r \gamma_1 \gamma_1^c + \frac{r r' \gamma_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_3 \right) \right] \\ M_3 &= -\frac{a \gamma_3}{r r_3} \left[r_3 \gamma_3 + \gamma_3^c \left(2r \gamma_3 \gamma_3^c + \frac{r r' \gamma_3^2}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_1 \right) \right] \\ N_1 &= -a \left[\frac{3}{2} \left(-\tau_3 \left\{ 1 - \frac{\gamma_1^2}{r_1} \right\} - g_1 \right) + \frac{\gamma_1^3}{r_1} \left(\sqrt{2} r \gamma_1^c + \frac{r r' \gamma_1}{2} \right) \right] \\ N_3 &= -a \left[\frac{3}{2} \left(\tau_1 \left\{ 1 - \frac{\gamma_3^2}{r_3} \right\} - g_3 \right) + \frac{\gamma_3^3}{r_3} \left(\sqrt{2} r \gamma_3^c + \frac{r r' \gamma_3}{2} \right) \right] \end{aligned} \right\} \dots \text{(VII)}$$

¹⁾ Cf. v. Oppolzer, „Lehrbuch der Bahnbestimmung“, Vol. I, p. 73, 75.

²⁾ Eine nahezu parabolische oder eine nahezu kreisförmige Ausgangsbahn macht man jedoch am besten genau parabolisch oder kreisförmig, und zwar vor der Berechnung der Unterschiede $B - R$, indem man z. B. z' willkürlich ändert, so dass genau $x^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{2}{r}$ bezüglich $= \frac{1}{r}$ ist.

$$\left. \begin{aligned} g_{x_1} &= \frac{\gamma_1^3}{r r_1} [x' r \gamma_1 + \sqrt{2} x \gamma_1^c]; & g_{x_3} &= \frac{\gamma_3^3}{r r_3} [x' r \gamma_3 + \sqrt{2} x \gamma_3^c] \\ g_{y_1} &= \frac{\gamma_1^3}{r r_1} [y' r \gamma_1 + \sqrt{2} y \gamma_1^c]; & g_{y_3} &= \frac{\gamma_3^3}{r r_3} [y' r \gamma_3 + \sqrt{2} y \gamma_3^c] \\ g_{z_1} &= \frac{\gamma_1^3}{r r_1} [z' r \gamma_1 + \sqrt{2} z \gamma_1^c]; & g_{z_3} &= \frac{\gamma_3^3}{r r_3} [z' r \gamma_3 + \sqrt{2} z \gamma_3^c] \\ m_{x_1} &= x M_1 + x' N_1; & m_{x_3} &= x M_3 + x' N_3 \\ m_{y_1} &= y M_1 + y' N_1; & m_{y_3} &= y M_3 + y' N_3 \\ m_{z_1} &= z M_1 + z' N_1; & m_{z_3} &= z M_3 + z' N_3 \end{aligned} \right\} \quad \text{(VIII)}$$

$$\begin{aligned} f_{x_1} &= f_1 \frac{\xi}{\varrho} + \frac{\cos \beta}{r^2} [2 m_{x_1} + x \gamma_1^2] + g_{x_1} \Phi_1; & f_{x_3} &= f_3 \frac{\xi}{\varrho} + \frac{\cos \beta}{r^2} [2 m_{x_3} + x \gamma_3^2] + g_{x_3} \Phi_3 \\ f_{y_1} &= f_1 \frac{\eta}{\varrho} + \frac{\cos \beta}{r^2} [2 m_{y_1} + y \gamma_1^2] + g_{y_1} \Phi_1; & f_{y_3} &= f_3 \frac{\eta}{\varrho} + \frac{\cos \beta}{r^2} [2 m_{y_3} + y \gamma_3^2] + g_{y_3} \Phi_3 \\ f_{z_1} &= f_1 \frac{\xi}{\varrho} + \frac{\cos \beta}{r^2} [2 m_{z_1} + z \gamma_1^2] + g_{z_1} \Phi_1; & f_{z_3} &= f_3 \frac{\xi}{\varrho} + \frac{\cos \beta}{r^2} [2 m_{z_3} + z \gamma_3^2] + g_{z_3} \Phi_3 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} A_{f_1^1} &= \frac{1}{\varrho_1} [\cos \alpha_1 f_{y_1} - \sin \alpha_1 f_{x_1}]; & A_{f_3^1} &= \frac{1}{\varrho_3} [\cos \alpha_3 f_{y_3} - \sin \alpha_3 f_{x_3}] \\ A_{g_1} &= \frac{1}{\varrho_1} [\cos \alpha_1 g_{y_1} - \sin \alpha_1 g_{x_1}]; & A_{g_3} &= \frac{1}{\varrho_3} [\cos \alpha_3 g_{y_3} - \sin \alpha_3 g_{x_3}] \\ A_{m_1} &= \frac{1}{\varrho_1} [\cos \alpha_1 m_{y_1} - \sin \alpha_1 m_{x_1}]; & A_{m_3} &= \frac{1}{\varrho_3} [\cos \alpha_3 m_{y_3} - \sin \alpha_3 m_{x_3}] \end{aligned} \right\} \quad \text{(IX)}$$

$$\left. \begin{aligned} B_{f_1^1} &= -\frac{1}{\varrho_1} [\sin \delta_1 (\sin \alpha_1 f_{y_1} + \cos \alpha_1 f_{x_1}) - \cos \delta_1 f_{z_1}]; & B_{f_3^1} &= -\frac{1}{\varrho_3} [\sin \delta_3 (\sin \alpha_3 f_{y_3} + \cos \alpha_3 f_{x_3}) - \cos \delta_3 f_{z_3}] \\ B_{g_1} &= -\frac{1}{\varrho_1} [\sin \delta_1 (\sin \alpha_1 g_{y_1} + \cos \alpha_1 g_{x_1}) - \cos \delta_1 g_{z_1}]; & B_{g_3} &= -\frac{1}{\varrho_3} [\sin \delta_3 (\sin \alpha_3 g_{y_3} + \cos \alpha_3 g_{x_3}) - \cos \delta_3 g_{z_3}] \\ B_{m_1} &= -\frac{1}{\varrho_1} [\sin \delta_1 (\sin \alpha_1 m_{y_1} + \cos \alpha_1 m_{x_1}) - \cos \delta_1 m_{z_1}]; & B_{m_3} &= -\frac{1}{\varrho_3} [\sin \delta_3 (\sin \alpha_3 m_{y_3} + \cos \alpha_3 m_{x_3}) - \cos \delta_3 m_{z_3}] \\ C_1 &= \frac{g_1}{\varrho_1}; & C_3 &= \frac{g_3}{\varrho_3} \end{aligned} \right\} \quad \text{(IX)}$$

Dann löse man die vier Gleichungen $a_i \partial \varrho + b_i \partial x' + c_i \partial y' + d_i \partial z' = n_i$, wo $i = 1, 2, 3, 4$ zu setzen, nach $\partial \varrho$, $\partial x'$, $\partial y'$ und $\partial z'$ auf, wobei:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= A_{f_1}; & b_1 &= -[\sin \alpha_1 C_1 - x A_{g_1} - 2 x' A_{m_1}]; & c_1 &= [\cos \alpha_1 C_1 + y A_{g_1} + 2 y' A_{m_1}] \\ a_2 &= B_{f_1}; & b_2 &= -[\sin \delta_1 \cos \alpha_1 C_1 - x B_{g_1} - 2 x' B_{m_1}]; & c_2 &= -[\sin \delta_1 \sin \alpha_1 C_1 - y B_{g_1} - 2 y' B_{m_1}] \\ a_3 &= A_{f_3}; & b_3 &= -[\sin \alpha_3 C_3 - x A_{g_3} - 2 x' A_{m_3}]; & c_3 &= [\cos \alpha_3 C_3 + y A_{g_3} + 2 y' A_{m_3}] \\ a_4 &= B_{f_3}; & b_4 &= -[\sin \delta_3 \cos \alpha_3 C_3 - x B_{g_3} - 2 x' B_{m_3}]; & c_4 &= -[\sin \delta_3 \sin \alpha_3 C_3 - y B_{g_3} - 2 y' B_{m_3}] \\ d_1 &= [z A_{g_1} + 2 z' A_{m_1}]; & n_1 &= \partial \alpha_1 \\ d_2 &= [\cos \delta_1 C_1 + z B_{g_1} + 2 z' B_{m_1}]; & n_2 &= \partial \delta_1 \\ d_3 &= [z A_{g_3} + 2 z' A_{m_3}]; & n_3 &= \partial \alpha_3 \\ d_4 &= [\cos \delta_3 C_3 + z B_{g_3} + 2 z' B_{m_3}]; & n_4 &= \partial \delta_3 \end{aligned} \right\} \quad \text{(X)}$$

Dann rechnet man ∂x , ∂y , ∂z nach III.

¹⁾ Siehe die Anmerkung S. 1004.

Im Falle einer parabolischen Ausgangsbahn:

$$\left. \begin{aligned}
 \cos \beta &= \frac{\varrho - R \cos \psi}{r} ; & \varphi &= \frac{x' \xi + y' \eta + z' \zeta}{\varrho} \\
 \Phi_1 &= \varphi + \frac{\sqrt{2} \cos \beta}{\gamma_1} ; & \Phi_3 &= \varphi + \frac{\sqrt{2} \cos \beta}{\gamma_3} \\
 g_{x_1} &= \frac{\gamma_1^3}{r r_1} [x' r \gamma_1 + \sqrt{2} x] ; & g_{x_3} &= \frac{\gamma_3^3}{r r_3} [x' r \gamma_3 + \sqrt{2} x] \\
 g_{y_1} &= \frac{\gamma_1^3}{r r_1} [y' r \gamma_1 + \sqrt{2} y] ; & g_{y_3} &= \frac{\gamma_3^3}{r r_3} [y' r \gamma_3 + \sqrt{2} y] \\
 g_{z_1} &= \frac{\gamma_1^3}{r r_1} [z' r \gamma_1 + \sqrt{2} z] ; & g_{z_3} &= \frac{\gamma_3^3}{r r_3} [z' r \gamma_3 + \sqrt{2} z] \\
 f_{x_1} &= f_1 \frac{\xi}{\varrho} + \frac{\cos \beta}{r^2} x \gamma_1^2 + \Phi_1 g_{x_1} ; & f_{x_3} &= f_3 \frac{\xi}{\varrho} + \frac{\cos \beta}{r^2} x \gamma_3^2 + \Phi_3 g_{x_3} \\
 f_{y_1} &= f_1 \frac{\eta}{\varrho} + \frac{\cos \beta}{r^2} y \gamma_1^2 + \Phi_1 g_{y_1} ; & f_{y_3} &= f_3 \frac{\eta}{\varrho} + \frac{\cos \beta}{r^2} y \gamma_3^2 + \Phi_3 g_{y_3} \\
 f_{z_1} &= f_1 \frac{\zeta}{\varrho} + \frac{\cos \beta}{r^2} z \gamma_1^2 + \Phi_1 g_{z_1} ; & f_{z_3} &= f_3 \frac{\zeta}{\varrho} + \frac{\cos \beta}{r^2} z \gamma_3^2 + \Phi_3 g_{z_3}
 \end{aligned} \right\} \text{(XI)}$$

$$\left. \begin{aligned}
 A_{f_1^1} &= \frac{1}{\varrho_1} [\cos \alpha_1 f_{y_1} - \sin \alpha_1 f_{x_1}] ; & A_{f_3^1} &= \frac{1}{\varrho_3} [\cos \alpha_3 f_{y_3} - \sin \alpha_3 f_{x_3}] \\
 A_{g_1} &= \frac{1}{\varrho_1} [\cos \alpha_1 g_{y_1} - \sin \alpha_1 g_{x_1}] ; & A_{g_3} &= \frac{1}{\varrho_3} [\cos \alpha_3 g_{y_3} - \sin \alpha_3 g_{x_3}] \\
 B_{f_1^1} &= -\frac{1}{\varrho_1} [\sin \delta_1 (\sin \alpha_1 f_{y_1} + \cos \alpha_1 f_{x_1}) - \cos \delta_1 f_{z_1}] ; & B_{f_3^1} &= -\frac{1}{\varrho_3} [\sin \delta_3 (\sin \alpha_3 f_{y_3} + \cos \alpha_3 f_{x_3}) - \cos \delta_3 f_{z_3}] \\
 B_{g_1} &= -\frac{1}{\varrho_1} [\sin \delta_1 (\sin \alpha_1 g_{y_1} + \cos \alpha_1 g_{x_1}) - \cos \delta_1 g_{z_1}] ; & B_{g_3} &= -\frac{1}{\varrho_3} [\sin \delta_3 (\sin \alpha_3 g_{y_3} + \cos \alpha_3 g_{x_3}) - \cos \delta_3 g_{z_3}] \\
 C_1 &= \frac{g_1}{\varrho_1} ; & C_3 &= \frac{g_3}{\varrho_3} \\
 A &= A_{f_1} A_{g_3} - A_{f_3} A_{g_1}
 \end{aligned} \right\} \text{(XII)}$$

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 &= \sin \alpha_1 C_1 A_{g_3} - \sin \alpha_3 C_3 A_{g_1} ; & b_1 &= -[\cos \alpha_1 C_1 A_{g_3} - \cos \alpha_3 C_3 A_{g_1}] \\
 a_2 &= \sin \alpha_1 C_1 A_{f_3} - \sin \alpha_3 C_3 A_{f_1} + x A ; & b_2 &= -[\cos \alpha_1 C_1 A_{f_3} - \cos \alpha_3 C_3 A_{f_1} - y A] \\
 a_3 &= \sin \delta_1 \cos \alpha_1 C_1 - x B_{g_1} ; & b_3 &= \sin \delta_1 \sin \alpha_1 C_1 - y B_{g_1} \\
 a_4 &= \sin \delta_3 \cos \alpha_3 C_3 - x B_{g_3} ; & b_4 &= \sin \delta_3 \sin \alpha_3 C_3 - y B_{g_3} \\
 d_1 &= A ; & e_1 &= A_{g_1} \partial_{\alpha_3} - A_{g_3} \partial_{\alpha_1} \\
 c_2 &= A z ; & e_2 &= A_{f_1} \partial_{\alpha_3} - A_{f_3} \partial_{\alpha_1} \\
 c_3 &= -[\cos \delta_1 C_1 + z B_{g_1}] ; & d_3 &= B_{f_1} ; & e_3 &= -\partial \delta_1 \\
 c_4 &= -[\cos \delta_3 C_3 + z B_{g_3}] ; & d_4 &= B_{f_3} ; & e_4 &= -\partial \delta_3 \\
 a &= a_3 - \frac{c_3}{c_2} a_2 - \frac{d_3}{d_1} a_1 ; & b &= b_3 - \frac{c_3}{c_2} b_2 - \frac{d_3}{d_1} b_1 ; & e &= e_3 - \frac{c_3}{c_2} e_2 - \frac{d_3}{d_1} e_1
 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \text{(XIII)}$$

¹⁾ Siehe die Anmerkung S. 1004.

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \frac{b e_1 - b_1 e}{a_1 b - a b_1}; & Q_x &= \frac{-b d_1}{a_1 b - a b_1} \\ P_y &= \frac{a_1 e - a e_1}{a_1 b - a b_1}; & Q_y &= \frac{a d_1}{a_1 b - a b_1} \\ P_{x_1} &= \frac{e_3 - a_3 P_x - b_3 P_y}{c_3}; & Q_{x_1} &= -\frac{d_3 + a_3 Q_x + b_3 Q_y}{c_3} \\ P_{x_3} &= \frac{e_4 - a_4 P_x - b_4 P_y}{c_4}; & Q_{x_3} &= -\frac{d_4 + a_4 Q_x + b_4 Q_y}{c_4} \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \text{ (XIV)}$$

$$\partial \varrho = \frac{P_{x_3} - P_{x_1}}{Q_{x_3} - Q_{x_1}}, \text{ für die allgemeine Lösung;}$$

u. s. w., wie in III.

Will man die corrigirte Bahn zur Parabel machen, dann verfähre man wie bei den Gleichungen (IV), (V) und (VI), S. 1005.

Im Falle einer kreisförmigen Ausgangsbahn:

$$\left. \begin{aligned} d &= \frac{3 \cos \beta}{2 a}; & c_1 &= -\frac{\tau_3 g_1}{a^3}; & c'_1 &= \tau_3 f_1 + g_1 \\ & & c_3 &= \frac{\tau_1 g_3}{a^3}; & c'_3 &= -(\tau_1 f_3 - g_3) \\ f_{x_1} &= f_1 \frac{\xi}{\varrho} + d[c_1 x + c'_1 x']; & f_{x_3} &= f_3 \frac{\xi}{\varrho} + d[c_3 x + c'_3 x'] \\ f_{y_1} &= f_1 \frac{\eta}{\varrho} + d[c_1 y + c'_1 y']; & f_{y_3} &= f_3 \frac{\eta}{\varrho} + d[c_3 y + c'_3 y'] \\ f_{z_1} &= f_1 \frac{\zeta}{\varrho} + d[c_1 z + c'_1 z']; & f_{z_3} &= f_3 \frac{\zeta}{\varrho} + d[c_3 z + c'_3 z'] \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \text{ (XV)}$$

$$\left. \begin{aligned} &\text{Mit diesen rechne man } A_1, B_1, C_1, A_3, B_3, C_3, P_x, Q_x, P_y, Q_y, P_{x_1}, P_{x_3}, \\ &Q_{x_1} \text{ und } Q_{x_3}, \text{ nach den Gleichungen (I) und (II), S. 1004.} \\ &\text{Dann ist:} \\ &\partial \varrho = \frac{P_{x_3} - P_{x_1}}{Q_{x_3} - Q_{x_1}} \text{ für die allgemeine Lösung, u. s. w., wie in III.} \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \text{ (XVI)}$$

War die Ausgangsbahn nicht genau kreisförmig, und man will die corrigirte Bahn zum Kreis machen, so rechne man:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{a} - \frac{1}{r} \\ P &= \frac{A}{2} - [x' P_x + y' P_y + z' P_z]; & Q &= \frac{\cos \beta}{2 r^2} - [x' Q_x + y' Q_y + z' Q_z] \\ \text{wo die Werthe von } P_x \text{ und } Q_x \text{ wie bei der Parabel auf S. 1005 zu wählen} \\ \text{sind. Dann durch Annäherungen:} \\ Q \partial \varrho &= P - \frac{1}{2} [(\partial x')^2 + (\partial y')^2 + (\partial z')^2] - \frac{1 - 3 \cos^2 \beta}{4 r^3} (\partial \varrho)^2 + \frac{3 \cos \beta (1 - 5/3 \cos^2 \beta)}{4 r^4} (\partial \varrho)^3 \cdot \cdot \\ \partial x' &= P_x - Q_x \partial \varrho; & \partial y' &= P_y - Q_y \partial \varrho; & \partial z' &= P_z - Q_z \partial \varrho \\ \text{dann, wie in III:} \\ c x &= \frac{\xi}{\varrho} \partial \varrho; & \partial y &= \frac{\eta}{\varrho} \partial \varrho; & \partial z &= \frac{\zeta}{\varrho} \partial \varrho. \end{aligned} \right\} \text{ (XVII)}$$

Zur Controlle, dass die Bahn ein Kreis ist, hat man:

$$g^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{1}{r}.$$

Für alle Ausgangsbahnen:

Die sechs Correctionen $\partial x, \partial y, \partial z, \partial x', \partial y', \partial z'$ bringt man nun an die zu Grunde gelegten Werthe von x, y, z, x', y', z' an und erhält so die corrigirten Werthe, aus denen, nach A, VII, die Elemente gerechnet werden.

β) Die Bahnverbesserung auf Grund einer beliebigen Ausgangsbahn.

Das Verfahren besteht einfach darin, dass man q, x', y', z' für die neue Ausgangs-epoche $t_0 = t_2$ aus dem gegebenen Zahlenmaterial, gewöhnlich aus den Elementen und Constanten für den Aequator berechnet, und sodann diese vier Werthe in Verbindung mit der mittleren Rectascension α und Declination δ als fundamentale Ausgangswerthe ansetzt. Mit diesen berechnet man die Unterschiede $(B - R)$ für den ersten und dritten Ort. Des Weiteren gelten die entsprechenden unter **a** gegebenen Differentialformeln, wobei die Sonnenkoordinaten und ψ in der üblichen Weise zu berechnen sind.

Zunächst rechnet man r, v und z für die neue Ausgangs-epoche $t_0 = t_2$ aus den gegebenen Elementen und Constanten für den Aequator. Dann ist:

$$q = \frac{z + Z}{\sin \delta}.$$

(Ebenso erhält man q_1 und q_3 zur Berücksichtigung der Aberration und der Parallaxe. Existirt aber eine Ephemeride, dann können q_1, q und q_3 interpolirt werden.)

Die Geschwindigkeiten ergeben sich aus:

Allgemeine Bahn:	Parabel:	Kreis:	
$x' = \frac{\sin a}{\sqrt{p}} [\cos(A' + v) + e \cos A'];$	$x' = \sqrt{\frac{2}{q}} \sin a \cos\left(A' + \frac{1}{2}v\right) \cos \frac{1}{2}v;$	$x' = \frac{\sin a \cos(A' + u)}{a^{1/2}}$	(XVIII)
$y' = \frac{\sin b}{\sqrt{p}} [\cos(B' + v) + e \cos B'];$	$y' = \sqrt{\frac{2}{q}} \sin b \cos\left(B' + \frac{1}{2}v\right) \cos \frac{1}{2}v;$	$y' = \frac{\sin b \cos(B' + u)}{a^{1/2}}$	
$z' = \frac{\sin c}{\sqrt{p}} [\cos(C' + v) + e \cos C'];$	$z' = \sqrt{\frac{2}{q}} \sin c \cos\left(C' + \frac{1}{2}v\right) \cos \frac{1}{2}v;$	$z' = \frac{\sin c \cos(C' + u)}{a^{1/2}}$	

Dann:

$$\sigma = q \cos \delta; \quad x = \sigma \cos \alpha - X; \quad y = \sigma \sin \alpha - Y; \quad z = \sigma \operatorname{tg} \delta - Z$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad g^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2; \quad r' = \frac{1}{r} (xx' + yy' + zz'); \quad \frac{1}{a} = \frac{2}{r} - g^2.$$

Ist $\frac{1}{a}$ nahezu Null, und man will die Ausgangsbahn zur Parabel machen, dann kann man jetzt willkürlich einen Werth von z' wählen, so dass $g^2 = \frac{2}{r}$ wird. Ist ähnlich a nahezu gleich r , und man will die Ausgangsbahn zum Kreis machen, dann kann man willkürlich einen Werth von z' wählen, so dass $g^2 = \frac{1}{r}$ wird. Hierdurch vermeidet man die Formeln, welche bei einer allgemeinen Ausgangsbahn anzuwenden wären.

Dann rechnet man f_1, g_1, f_3, g_3 mit strenger Berücksichtigung der adoptirten Fundamentalgrößen. Sind die Reihen für f und g anwendbar, dann gelten die entsprechenden Ausdrücke unter A, VI. Ist es aber nothwendig, nach den geschlossenen Ausdrücken für f und g zu rechnen, dann gelten, je nach der Excentricität der Ausgangsbahn, die entsprechenden Formeln B, VI', VII'.

Mit x, y, z, x', y', z' und f_1, f_2, g_1 und g_2 rechnet man die Unterschiede ($B - R$) für den ersten und dritten Ort, wie unter A, VI. Dann gelten wieder die entsprechenden Differentialformeln¹⁾ unter α , woraus sich wieder solche Correctionen zu ϱ, x', y' und z' ergeben, dass die Unterschiede Beobachtung — Rechnung beseitigt sind, vorausgesetzt, dass die linearen Beziehungen zwischen den Unterschieden $B - R$ und den Correctionen der Fundamentalgrößen genügen. Sind die nach A, VI berechneten neuen Unterschiede noch nicht befriedigend, so muss die Rechnung wiederholt werden; doch braucht man gewöhnlich nur die von den Unterschieden $B - R$ abhängigen Größen neu zu rechnen. —

¹⁾ Es sei noch darauf hingewiesen, dass man, dem Sinne der obigen Formeln gemäss, dieselben statt „Differentialformeln“ eben so gut auch „differentielle“ Formeln oder „Correctionsformeln“ nennen könnte.

In der Astronomie ist es eine üblich gewordene, mathematisch genommen nicht ganz correcte Bezeichnungsweise, Differentialformeln da zu gebrauchen, wo es sich um endliche Zuwüchse handelt. Practisch ist dies freilich belanglos. Denn man wendet diese Differentialformeln ja nur da an, wo die Zuwüchse so klein sind, dass man bereits ihre doppelten Producte und Quadrate vernachlässigen kann. Während in den Differentialformeln der reinen Mathematik das Increment Δx zum Differential dx wird durch Grenzübergang, wobei alle höheren Potenzen von Δx in der That verschwinden.

Deshalb kann man (wie Kramer in seiner zweiten Arbeit über den Hecubatypus, cf. S. 10, Anmerkung 3, sowie die Vorbemerkungen S. XXVII des vorliegenden Werkes) solche Correctionsformeln treffend als „Incrementformeln“ und diese Art der Berechnung als „Corrections- oder Incrementrechnung“ bezeichnen. Das Rechnungsmittel der Incrementrechnung ist dabei der Taylor'sche Satz. Hat man z. B. beim Bahnverbesserungsproblem $\alpha = f(r, w, i, \delta)$, wie es in einer Phase der Fall ist, so ist, bei Aenderung von α um das Increment $\Delta\alpha$, nach dem Taylor'schen Satz:

$$\begin{aligned} \alpha + \Delta\alpha &= f(r + \Delta r, w + \Delta w, i + \Delta i, \delta + \Delta\delta) = f(r, w, i, \delta) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial f}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial f}{\partial i} \Delta i + \frac{\partial f}{\partial \delta} \Delta\delta \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} (\Delta r)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} (\Delta w)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial i^2} (\Delta i)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \delta^2} (\Delta\delta)^2 \right. \\ &+ 2 \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial w} \Delta r \Delta w + 2 \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial i} \Delta r \Delta i + 2 \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial \delta} \Delta r \Delta\delta \\ &\left. + 2 \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial i} \Delta w \Delta i + 2 \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial \delta} \Delta w \Delta\delta + 2 \frac{\partial f}{\partial i} \frac{\partial f}{\partial \delta} \Delta i \Delta\delta \right] \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Hier kennt man auch gleich den Fehler der Näherung. Practisch ist es freilich bequemer zu differentiiren. Nur sollte man in solchen Fällen eigentlich nicht das „ d “-Zeichen, sondern das „ Δ “-Zeichen verwenden. In den oben erwähnten Formeln ist von Leuschner das „ d “-Zeichen des partiellen Differentialquotienten gewählt; Oppolzer bevorzugt in ähnlichen Fällen das Variationszeichen „ δ “. Im Uebrigen ist es natürlich belanglos, ob man die obigen Formeln (und die entsprechenden der 82. Vorlesung) als „differentielle“, oder als „Differential“-Formeln, oder wie sonst bezeichnet, wenn man ihren Sinn festhält. — Anmerkung des Herausgebers der dritten Ausgabe.

II. Beispiele.

Zur Erläuterung der Formeln dienen folgende Beispiele:

Erstes Beispiel.

Als Beispiel einer directen parabolischen Bahnbestimmung (Formeln Aa) möge folgende, von Prof. Crawford durchgeführte Rechnung der Bahn des Kometen α 1909 (Daniel) dienen:

Da beabsichtigt ist, eine Parabel zu berechnen, so sind die Formeln Ia, IIa, IIIa u. s. w. anzuwenden. Die Grundlage beruht auf folgenden drei Beobachtungen des Kometen α 1909 (Daniel):

1909 Gr. M. Z.	α (app.)	δ (app.)	Beobachter
Juni 16,5306	1 ^h 41 ^m 54 ^s ,1	+ 29° 58' 18"	Javelle-Nice
Juni 18,9809	1 48 49,5	+ 33 26 15	Campbell-Lick
Juni 21,9659	1 57 51,0	+ 37 25 9	Albrecht-Lick

Ia.

Reducirt auf den Jahresanfang 1909.0, einschliesslich der Aberrationsglieder:

α_1	25° 28' 38"	δ_1	+ 20° 58' 25"
α_2	27 12 29	δ_2	+ 33 26 22
α_3	29 27 51	δ_3	+ 37 25 17

Die Interpolation der Sonnenkoordinaten, auf 1909.0 bezogen, ergibt aus den American Ephemeris und Nautical Almanac für die drei Beobachtungszeiten:

X_1	+ 0,085 434	Y_1	+ 0,928 875	Z_1	+ 0,402 945
X_2	+ 0,044 042	Y_2	+ 0,931 466	Z_2	+ 0,404 071
X_3	— 0,006 472	Y_3	+ 0,932 482	Z_3	+ 0,404 513

Die Berechnung der Geschwindigkeiten der Sonnenkoordinaten stellt sich wie folgt ($w = 1$):

1909	X	f^I	f^{II}	f^{III}	Y	f^I	f^{II}	f^{III}	Z	f^I	f^{II}	f^{III}
Juni 17,5	+ 0,0690722	— 0,0168981			+ 0,9300897	+ 0,0009930			+ 0,4034724	+ 0,0004316		
18,5	521741	169126	— 145	+ 53	9310827	7290	— 2640	+ 1	4039040	3169	— 1147	+ 1
19,5	352615	— 0,0169218	— 92		9318117		— 2639		4042209		— 1146	
20,5	+ 0,0183397				+ 0,9322768	+ 0,0004651			+ 0,4044232	+ 0,0002023		

Epoche 1909, Juni 18.9809		$f(l)$	X	Y	Z
$m =$	— 0,0191	$f^I(a + \frac{1}{2}w)$ $m f^{II}(a + \frac{1}{2}w)$ $M_1^3(m) f^{III}(a + \frac{1}{2}w)$	— 0,0169126 + 2 — 2	+ 0,0007290 + 50 0	+ 0,0003169 + 22 0
(Tafel XV) $M_1^3(m) =$	— 0,041	$k df(l)/dl$ $\log k df(l)/dl$ $\log X'; Y'; Z'$	— 0,0169126 8,22821n 9,99263n	+ 0,0007340 6,86570 8,63012	+ 0,0003191 6,50393 8,26835

Theilweise Elimination der geocentrischen Parallaxe für die Epoche. Die Parallaxenfactoren sind in Bogenmaass angesetzt.

$\log p \varrho$. . .	5,5810 _n	$\log I$. . .	5,1625 _n	$\log I$. . .	5,4515 _n	$\log I$. . .	5,0913
$\log p \delta \varrho$. . .	5,1699	$\log II$. . .	4,8602	$\log II$. . .	4,5712		
$\sin \alpha$	9,6601	X_2	+ 0,044042	Y_2	+ 0,931466	Z_2	+ 0,404071
$\cos \alpha$	9,9491	I	— 14	$-I$	+ 28	$-I$	— 12
$\sin \delta$	9,7412	II	+ 7	II	+ 4	Z_2	+ 0,404059
$\cos \delta$	9,9214	X_2	+ 0,044035	Y_2	+ 0,931498		

$R \cos D \cos A$. .	8,64380	$\sin A$	9,99951	$\log(t_2 - t_2)$	0,474944
$R \cos D \sin A$. .	9,90918	$\cos A$	8,67414	$\log(t_2 - t_1)$	0,389219
$tg A$	1,32538	$\log S = R \cos D$. .	9,96966	$\log(t_3 - t_1)$	0,735224
A	87,02934	$R \sin D$	9,60644	$\log \tau_1$	8,7105
$A - \alpha$	60,0853	$tg D$	9,63678	$\log \tau_3$	8,6248
		$\sin D$	9,59042		
		$\cos D$	9,96264		
		$\log R$	0,00702		

IIa.

$\alpha_2 - \alpha_1$	+ 6231''	$\delta_2 - \delta_1$	+ 12467''		
$\alpha_3 - \alpha_2$	+ 8122	$\delta_3 - \delta_2$	+ 14335		
$\log(\alpha_2 - \alpha_1)$	3,794558	$\log(\delta_2 - \delta_1)$	4,096110		
$\log(\alpha_3 - \alpha_2)$	3,909663	$\log(\delta_3 - \delta_2)$	4,156398		
$\log \alpha'_2$	3,405339	$\log \delta'_3$	3,706891	$\sec^2 \delta$	0,157180
$\log \alpha'_1$	3,434719	$\log \delta'_1$	3,681454	$\log(tg \delta)'$	0,302780
Sub.	8,845043	Sub.	8,780467	$\log \delta'^2$	0,291200
$\log(\alpha'_1 - \alpha'_2)$	2,250382	$\log(\delta'_1 - \delta'_2)$	2,461921 _n	$tg \delta$	9,819785
$\log \frac{2}{k^2} \sin 1''$	8,515442			$\log I$	0,412015
$colog(t_2 - t_1)^1$	9,264776	$\log \delta''$	0,242139 _n	$\log II = \log \delta''$	0,242139 _n
$\log \alpha''$	0,030600			Add.	9,680050
		$\log(t_2 - t_2) \delta'_3$	4,181835	$\log[I + II]$	9,922189
$\log(t_2 - t_2) \alpha'_3$	3,880283	$\log(t_2 - t_1) \delta'_1$	4,070673	$\log(tg \delta)''$	0,079369
$\log(t_2 - t_1) \alpha'_1$	3,823938	Add.	0,248996		
Add.	0,273771	Summe	4,430831		
Summe	4,154054				
$colog(t_2 - t_1)$	9,264776				
$\log \frac{\sin 1''}{k}$	6,449993	$\log \delta'$	0,145600		
$\log \alpha'$	9,868823				

IIIa.

$\log \alpha'^2$	9,73765	$\log \alpha'$	9,86882	$\log \lambda/x \cos \alpha$	9,52105 _n	$\sin \delta$	9,74120
$tg \delta$	9,81978	$\log \Gamma(tg \delta)'$	1,22380 _n	$\log \alpha' \sin \alpha$	9,52895	$\sin D$	9,59942
$\log \alpha'^2 tg \delta$	9,55743	Add.	9,98039	Sub.	0,29710	$\log I$	9,34062
$\log(tg \delta)''$	0,07937	$\log \Phi$	1,20419 _n	$\log \alpha_x$	9,82605 _n		
Add.	0,11416					$\cos \delta$	9,92141
$\log n$	0,19353	$\log \alpha''$	0,03060	$\log \lambda/x \sin \alpha$	9,23211 _n	$\cos D$	9,96264
		$\log \Gamma n$	1,11455 _n	$\log \alpha' \cos \alpha$	9,81789	$\cos(A - \alpha)$	9,99785
$\cos(A - \alpha)$	9,69785	Add.	9,96265	Add.	9,86949	$\log II$	9,58190
$tg \delta \cos(A - \alpha)$	9,51763	Zähler	1,07720 _n	$\log \alpha_y$	9,68738	Add.	0,19094
$tg D$	9,63678	$\log(-2 \Phi)$	1,50522			$\log c$	9,77884
Sub.	9,49925	$\log \lambda/x$	9,57198 _n	$\log \lambda/x tg \delta$	9,39176 _n		
$\log C_1$	9,01688 _n			$\log(tg \delta)'$	0,30278	ψ	53°.062
				Add.	9,94313	$\log s$	9,90270
$\log C_2$	9,93790			$\log a_z$	0,24591		
$\log \Gamma$	0,92102 _n						

¹⁾ $colog x$ bedeutet $\log \frac{1}{x}$.

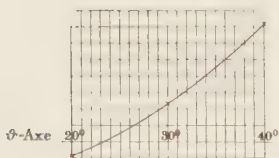
IV a.

$\log a_x^2$	9,65210	$\log X'^2$	9,98526		
$\log a_y^2$	9,37476	$\log Y'^2$	7,26024	$\log 2$	0,30103
Add.	0,18413	Add.	0,00082	$\operatorname{colog} a^2$	9,57864
Summe	9,83623	Summe	9,98608	$\operatorname{colog} R^3$	9,97894
$\log a_z^2$	0,49182	$\log Z'^2$	6,53670	$\log h$	9,85861
Add.	0,08672	Add.	0,00015		
$\log [\]$	0,57854	$\log G^2$	9,98623	$\log c$	9,77884
$\cos^2 \delta$	0,84282			$\log p'$	9,34559
$\log a^2$	0,42136			Sub.	9,80019
		$\log a^2 G^2$	0,40759	$\log c'$	9,57903
		$\log b^2$	9,54794		
$\log a_x X'$	9,81868	Sub.	9,93543	c'	+ 0,37934
$\log a_y Y'$	8,31750	Diff.	0,34302		
Add.	0,01348	$\log a^4 R^2$	0,85676	$\log s$	9,9027
Summe	9,83216	$\log q'^2$	9,48626	$\log a^2$	0 4214
$\log a_z Z'$	8,51426	q'^2	+ 0,30638	$\log q'^2$	9,4863
Add.	0,02040			$\operatorname{colog} 2$	9,6990
$\log [\]$	9,85256	$\log a^2 R$	0,42838	$\cos \vartheta_m$	9,5094
$\cos \delta$	9,92141	$\log p'$	9,34559	ϑ_m	71°
$\log b$	9,77397			$\log h/s$	9,95591
				h/s	+ 0,90346
				s	+ 0,79928

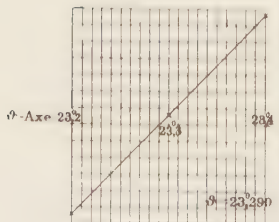
Graphische Bestimmung von $z = z_1$.

Verbesserung von z_1 .

	ϑ	z'^2	y	$f(\vartheta)$
	70°	6,7	0,0	+ 6,7
	40	1,10	0,39	+ 0,71
	30	0,71	0,48	+ 0,23
	20	0,45	0,54	— 0,09



23,4°	+ 0,5261	0,5228	+ 0,0033
23,3	0 5237	0,5234	+ 0,0003
23,2	+ 0,5213	+ 0,5240	— 0,0027



$\operatorname{tg} \vartheta$. . .	9,63393
$\log s \operatorname{tg} \vartheta$. . .	9,53663
$\log c$. . .	9,77884
Add. . . .	0,19659
$\log z_1$. . .	9,97543

	I.	II.
$\log z$	9,97543	9,97548
Sub.	9,88394	9,88396
$\log (z - p')$	9,85937	9,85944
$\log I = \log (z - p')^2$	9,71874	9,71888
Sub.		9,75792
$\log (z - c)$	9,53663	9,53676
$\log (z - c)^2$	9,07326	9,07352
Add.	0,07383—	0,07387 —
$\log \mu$	9,87923	9,87927
$\log \mu^{1/2}$	9,93961	9,93963
$\log III = \log h \mu^{-1/2}$	9,91900	9,91898
I	+ 0,52329	+ 0,52346
— III	— 0,82985	— 0,82982
M	— 0,00018	+ 0,00002
$\log h \mu^{-1/2}$	9,9190	
$\log (z - c)$	9,5366	
$\log \mu^{-1}$	0,1208	
$\log II$	9,5764	
$\log I = 2 (z - p')$	0,1604	
Add.	0,1006	
Nenner	0,2610	
$\log (-M)$	6,2553	
$\log \vartheta z$	5,9943	
Add.	0,00005	
$\log z$	9,97548	

Die graphische Lösung hat demnach den Werth von $\log z$ bis auf eine halbe Einheit der vierten Decimale genau ergeben.

V a.

$\log R$	0,00702	$\log \lambda/x \tau_3$	8,1968 _n	$\log \lambda/x \tau_1$	8,2825 _n
$\log z$	9,97548	$\log (1 - \lambda/x \tau_3)$	0,0068	$\log (1 + \lambda/x \tau_1)$	9,9916
$\log \varrho$	9,98250	$\sec \delta_1$	0,0624	$\sec \delta_3$	0,1001
		$\log \varrho_1$	9,9731	$\log \varrho_3$	9,9956
$\log \alpha \varrho$	7,7438	$\log \alpha \varrho_1$	7,7344	$\log \alpha \varrho_3$	7,756 _n
$\alpha \varrho$	0,0055	$\alpha \varrho_1$	0,0054	$\alpha \varrho_3$	0,0057
t_3 (Beob.)	18,0809	t_1 (Beob.)	16,5306	t_3 (Beob.)	21,9659
t_3 (reducirt)	18,9754	t_1	16,5252	t_3	21,9602
		$\log (t_2 - t_1)$	0,38920	$\log (t_3 - t_2)$	0,47491
		$\log \tau_3$	8,62478	$\log \tau_1$	8,71049
$\cos \delta$	9,92141				
$\log \sigma$	9,90391				
$\cos \alpha$	9,94907				
$\log \sigma \cos \alpha$	9,85298	$\log \alpha_x \sigma$	9,72996 _n	$\log xx'$	9,47480
$\log X$	8,64380	$\log X'$	9,99263 _n	$\log yy'$	9,29306 _n
Sub.	9,97230	Sub.	9,91956	Add.	9,71571
$\log x$	9,82528	$\log x'$	9,64952	Summe	9,00877
				$\log zz'$	9,24177
$\sin \alpha$	9,66013			Add.	0,19997
$\log \sigma \sin \alpha$	9,56404	$\log a_y \sigma$	9,59129	$\log rr'$	9,44174
$\log Y$	9,96918	$\log Y'$	8,63012	$\log r'$	9,49508
Sub.	0,18803	Sub.	9,94970		
$\log y$	9,75207 _n	$\log y'$	9,54099		
$tg \delta$	9,81978				
$\log \sigma tg \delta$	9,72369	$\log a_z \sigma$	0,14982		
$\log Z$	9,60644	$\log Z'$	8,26835		
Sub.	9,49126	Sub.	9,99425		
$\log z$	9,09770	$\log z'$	0,14407		
$\log x^2$	9,65056	$\log x'^2$	9,29904		
$\log y^2$	9,50414	$\log y'^2$	9,08198		
Add.	0,23396	Add.	0,20592		
Summe	9,88452	Summe	9,50496		
$\log z^2$	8,19540	$\log z'^2$	0,28814		
Add.	0,00880	Add.	0,06623		
$\log r^2$	9,89332	$\log g^2$	0,35437		
$\log r$	9,94666				
		Controlle			
		$\log \frac{2}{r}$	0,35437		
Controlle					
$\log R^2$	0,01404				
$\log \mu$	9,87927				
$\log r^2$	9,89331				

Via. Darstellung des ersten und dritten Ortes.

f_i, g_i	1	3	α_i, δ_i	1	3
$\log \tau$	8,62478	8,71049	$\log f_1 x$	9,82471	0,82447
$\log \tau^2$	7,24956	7,42098	$\log f_1 y$	9,75150 _n	9,75126 _n
$\log \tau^3$	5,8743	6,1315	$\log f_1 z$	9,09713	9,09689
$\log \tau^4$	4,499	4,842	$\log g_1 x'$	8,27411 _n	8,35974
			$\log g_1 y'$	8,16558 _n	8,25121
$\log r^3$	9,83998		$\log g_1 z'$	8,76866 _n	8,85429
$\log f(2)$	9,85899 _n		X_i	+ 0,085434	- 0,006472
			$f_i x$	+ 0,667900	+ 0,667519
$\log r'$	9,49508		$g_i x'$	- 0,018793	+ 0,022895
$\log 2 r^4$	0,08767		δ_i	+ 0,734536	+ 0,083042
$\log f(3)$	9,4074		Y_i	+ 0,028875	+ 0,032482
$\log (rr')^2$	8,8835		$f_i y$	- 0,564288	- 0,563975
$\colog r$	0,0533		$g_i y'$	- 0,014641	+ 0,017832
$\log \frac{1}{4}$	0,5740				

Via. Darstellung des ersten und dritten Ortes (Fortsetzung).

f_i, g_i	1	3	α_i, δ_i	1	3
$\log II. \dots\dots\dots$	9,5108		$\eta_i \dots\dots\dots$	+ 0,349946	+ 0,386339
$\log (1 - II) \dots\dots\dots$	9,8298		$Z_i \dots\dots\dots$	+ 0,402945	+ 0,404513
$\log 6 r^6 \dots\dots\dots$	0,4581		$f_i^2 \dots\dots\dots$	+ 0,125063	+ 0,124994
$\log f(4) \dots\dots\dots$	9,372		$g_i^2 \dots\dots\dots$	- 0,058703	+ 0,071497
			$\zeta_i \dots\dots\dots$	+ 0,469305	+ 0,601004
$\log g(3) \dots\dots\dots$	9,3819 _n		$q \cos \delta \cos \alpha \dots\dots\dots$	9,86601	9,83502
$\log 4 r^4 \dots\dots\dots$	0,3887		$q \cos \delta \sin \alpha \dots\dots\dots$	9,54400	9,58697
$\log g(4) \dots\dots\dots$	9,106		$tg \alpha \dots\dots\dots$	9,67799	9,75195
			$\alpha_R \dots\dots\dots$	25,4740	29,4611
$\log \tau^2 f(2) \dots\dots\dots$	7,10855 _n	7,27997 _n	$\alpha_B \dots\dots\dots$	25,4750	29,4617
$\log \tau^3 f(3) \dots\dots\dots$	5,2817	5,5389	$(B - R) \begin{cases} \delta, \alpha \\ \delta, \alpha \cos \delta \end{cases} \dots\dots\dots$	+ 0,0010	+ 0,0006
$\log \tau^4 f(4) \dots\dots\dots$	3,871	4,214		+ 0,0009	+ 0,0005
$\log \tau^3 g(3) \dots\dots\dots$	5,2562 _n	5,5134 _n	$\sin \alpha \dots\dots\dots$	9,63357	9,69182
$\log \tau^4 g(4) \dots\dots\dots$	3,605	3,948	$\cos \alpha \dots\dots\dots$	9,95558	9,93987
	1,000000	1,000000	$q \cos \delta \dots\dots\dots$	9,91043	9,89515
$\tau^2 f(2) \dots\dots\dots$	— 1284	— 1905	$q \sin \delta \dots\dots\dots$	9,67145	9,77887
$\mp \tau^3 f(3) \dots\dots\dots$	— 19	+ 35	$tg \delta \dots\dots\dots$	9,76102	9,88372
$\tau^4 f(4) \dots\dots\dots$	+ 1	+ 2	$\delta_R \dots\dots\dots$	+ 29,9761	+ 37,4200
$f_1; f_2 \dots\dots\dots$	+ 0,998698	+ 0,998132	$\delta_B \dots\dots\dots$	+ 29,9753	+ 37,4222
$\log f_1; \log f_2 \dots\dots\dots$	9,99943	9,99913	$(B - R) \delta \delta \dots\dots\dots$	— 0,0008	+ 0,0022
			$\sin \delta \dots\dots\dots$	9,69866	9,78366
$\mp \tau \dots\dots\dots$	— 0,042148	+ 0,051344	$\cos \delta \dots\dots\dots$	9,93764	9,89993
$\mp \tau^3 g(3) \dots\dots\dots$	+ 18	— 33	$\log q \dots\dots\dots$	9,97279	9,99522
$\tau^4 g(4) \dots\dots\dots$	0	+ 1	$\log p_\alpha q \dots\dots\dots$	0,864 _n	0,932 _n
$g_1; g_2 \dots\dots\dots$	— 0,042130	+ 0,051312	$\log p_\delta q \dots\dots\dots$	0,748	0,493
$\log g_1; \log g_2 \dots\dots\dots$	8,62459 _n	8,71022	$\log p_\alpha \dots\dots\dots$	0,891 _n	0,937 _n
			$\log p_\delta \dots\dots\dots$	0,775	0,498
			$p_\alpha \dots\dots\dots$	— 8''	— 9''
			$p_\delta \dots\dots\dots$	+ 6	+ 3

VIIa1. Constanten für den Aequator 1909.0 und Elemente.

$d \quad w \quad D'$	$a \quad x \quad A'$	$b \quad y \quad B'$	$c \quad z \quad C'$
$\log r w' \dots\dots\dots$	9,59618	9,48765	0,09073
$\log w r' \dots\dots\dots$	9,32036	9,24715 _n	8,59278
Sub. $\dots\dots\dots$	9,04802	0,19722	9,98598
$\log [r w' - w r'] \dots\dots\dots$	9,26838	9,68487	0,07671
$\sin d \cos (D' + v) \dots\dots\dots$	9,15413	9,57062	9,96246
$\sin d \sin (D' + v) \dots\dots\dots$	9,87862	9,80541 _n	9,15104
$tg (D' + v) \dots\dots\dots$	9,72449	0,23479 _n	9,18858
$(D' + v) \dots\dots\dots$	79,3202	300,2159	8,7758
$D' = A'; B'; C' \dots\dots\dots$	55,3191	276,2148	344,7747
$\sin (D' + v) \dots\dots\dots$	9,99241	9,93658 _n	9,18346
$\cos (D' + v) \dots\dots\dots$	9,26792	9,70180	9,99488
$\sin d = \sin a; \sin b; \sin c \dots\dots\dots$	9,88621	9,86882	9,96758

$\log r'$	9,49508	$tg \epsilon$	9,63728	A	50",324
$\log q$	0,17718	$\log I$	9,96246	B	271,2281
$\sin \frac{1}{2} v$	0,31700	$\log II$	9,20790	C	339,7880
$\frac{1}{2} c$	12,0005 ⁶	Sub.	9,91594	$\sin B$	9,99990 _n
v	24,0011	$\sec \epsilon \sin i \cos u$. .	9,87840	$\sin b$	9,86882
$\log M$	1,24892	$\log I$	9,15104	$\sec \epsilon$	0,03744
$\log 2r$	0,24769	$\log II$	9,44269 _n	$\sin \Omega$	9,90616 _n
$\log (rr')^2$	8,88348	Sub.	0,17924	$\sin a$	9,88621
Sub.	9,98081	$\sec \epsilon \sin i \sin u$. .	9,62193	$\sin A$	9,88635
$\log p$	0,22850	$tg u$	9,74353	$\cos \Omega$	9,77256
$\log q$	9,92747	u	28,9878	Ω	306,3220
$\log q^3$	9,89120	ω	4,9867	$(- \sin a)$	9,88621 _n
$\log M q^3$	1,14012	$\sin u$	9,68540	$\cos A$	9,80505
$M q^3$	13,8077	$\cos u$	9,94187	$\operatorname{cosec} \Omega$	0,09384 _n
T Juni	18,9754	$\sec \epsilon \sin i$	9,93653	$\cos i$	9,78510
$T = \text{Juni}$	5,1677 Gr. M. Z.	$\cos \epsilon$	9,96256	i	52,4340
		$\sin i$	9,89909		
		Controlle		Controlle	
		$\sin b, \sin c$	9,83640	$\sin c$	9,96758
		$\sin (C - B)$	9,96886	$\sin C$	9,53844 _n
		$\operatorname{cosec} a$	0,11379	$\operatorname{cosec} \epsilon$	0,40016
		$\sec A$	0,19495	$\sin \Omega$	9,90618 _n
		$tg i$	0,11400		

Zusammenstellung der Resultate.

Elemente.			Constanten für den Aequator 1909.0.	
T	1909 Juni	5,1677 Gr. M. Z.		
ω	4,9867	} Ekliptik 1909.0	$x = r [9,88621] \sin (55,3191 + v)$	
Ω	306,3220		$y = r [9,86882] \sin (276,2148 + v)$	
i	52,4340		$z = r [9,96758] \sin (344,7747 + v)$	
$\log q$	9,92747			

In dem obigen Beispiel einer directen parabolischen Bahnbestimmung ist die Rechnung ohne Weiteres durchgeführt worden, um den Gang der Rechnung nicht zu unterbrechen. Man wird wie oben verfahren, wenn man entschlossen ist, sich auf jeden Fall mit einer Parabel zu begnügen. Jedoch ist es immer rathsam, folgende Betrachtungen, welche in der That auch in diesem Falle gemacht wurden, anzustellen.

Zunächst vergewissere man sich über die Anzahl der Lösungen durch Anwendung der Kriterien in der Anmerkung 1, S. 468. Da p' und c positiv sind, so sind drei Lösungen nur möglich, wenn $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ negativ ist, d. h. wenn p negativ ist, d. h.

wenn $9(2s^2 + q'^2)$ kleiner als $7c'^2$ ist. Eine ganz oberflächliche Abschätzung dieser beiden Ausdrücke auf Grund der oben angegebenen Werthe von s, q'^2 und c' zeigt aber sofort, dass $9(2s^2 + q'^2)$ bedeutend grösser als $7c'^2$ und daher nur eine Lösung möglich ist.

Ferner ist es von Wichtigkeit, zu wissen, ob die parabolische Hypothese innerhalb der Unsicherheit der Bahnbestimmung berechtigt war oder ob dieselbe zu verwerfen ist.

Zu diesem Zwecke hat man zunächst noch N, κ und $\frac{1}{m}$ nach A, III a und IV a angenähert zu rechnen und die Genauigkeit von $\frac{1}{m}$ abzuschätzen. Es soll hier durch einen Punkt

über der letzten verbürgten Zahl angedeutet werden, in wie weit man sich auf die diesbezüglichen Zahlen verlassen kann. Nimmt man an, daß die Beobachtungsfehler nur einige Secunden betragen, so sind die Differenzen in α und δ zu drei bezüglich vier Stellen sicher. Die betreffenden Differenzen und die Intervalle sind:

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= 2,4503, & \alpha_2 - \alpha_1 &= 62\dot{3}1'', & \delta_2 - \delta_1 &= 124\dot{6}7'' \\ t_3 - t_2 &= 2,9850, & \alpha_3 - \alpha_2 &= 81\dot{2}2, & \delta_3 - \delta_2 &= 143\dot{3}5 \end{aligned}$$

Die nicht ganz gleichen Intervalle betragen nahezu drei Tage. Um die Sachlage besser überblicken zu können, sollen die Differenzen in α und δ durchweg durch Proportionalrechnung auf ein dreitägiges Intervall reducirt werden. Man hat dann, da die Differenzen angenähert für das Mittel der Beobachtungszeiten gelten:

	f_α^I	Differenz	f_α^{II}	f_δ^I	Differenz	f_δ^{II}
Juni 17,7557	7629''	(534'')	589''	15276''	(870'')	960''
Juni 20,4734	8163			14406		

Die in Klammern angesetzten Differenzen beziehen sich auf das Intervall von 2,7177 Tagen. Wiederum auf ein dreitägiges Intervall reducirt, ergeben sich die unter f_α^{II} , f_δ^{II} stehenden Werthe. Da α'' , δ'' der Hauptsache nach von den f'' abhängen, so ersieht man sofort, dass diese Beschleunigungen nur auf zwei Stellen verbürgt sind. Nun hat man aber noch den durch die Vernachlässigung der f''' bedingten Fehler abzuschätzen. Die f'' betragen in α etwas weniger als ein Zehntel der f^I . Nimmt man ein ebensolches weiteres Fallen an, so erhält man:

$$f_\alpha''' = 59'', \quad f_\delta''' = 96''.$$

Nach den Formeln (5 a), S. 452, oder auch nach S. 454 bis 455 ist aber der Fehler in den Geschwindigkeiten, bezw. Beschleunigungen, $\frac{\tau_1 \tau_3}{6} \alpha'''$ bezüglich $(\tau_3 - \tau_2) \frac{\alpha'''}{3}$; oder, da angenähert $\alpha''' = \frac{f'''}{\tau^3}$, ferner angenähert $\tau_3 - \tau_1 = 0,5 k$, und man sonst $\tau_1 = \tau_3 = \tau = 3 k$ setzen kann, so sind die Fehler in den Geschwindigkeiten: $\frac{f'''}{6 \tau}$ und in den Beschleunigungen: $\frac{0,5 k f'''}{3 \tau^3}$. Für die Geschwindigkeiten ist also $\frac{f'''}{6}$ mit f^I , und für die Beschleunigungen $\frac{0,5 f'''}{9}$ mit f'' zu vergleichen. Für die $\frac{f'''}{6}$ hat man nach dem Obigen $\frac{59''}{6} = 10''$ in α und $\frac{96''}{6} = 16''$ in δ . Vergleicht man diese Fehler mit den f^I , so ergibt sich, dass die Unsicherheit der Geschwindigkeiten in α bezüglich δ in die dritte bezüglich vierte Stelle durch Vernachlässigung der dritten Differenzen eingedrungen ist.

Für $\frac{0,5 f'''}{9}$ erhält man $\frac{59''}{18}$ in α und $\frac{96''}{18}$ in δ , also etwa 3'' +, bezw. 5'' +. Vergleicht man diese Fehler mit den f'' , so überschreiten dieselben, allein genommen, die durch die angenommenen Beobachtungsfehler bedingte Unsicherheit in f'' und daher in den Beschleunigungen zwar nicht, vereint mit den Beobachtungsfehlern jedoch (cfr. auch S. 457) kann die Unsicherheit leicht in die zweitletzte Stelle dringen, und da in f'' nur drei Stellen vorhanden sind, so kann man sich genau auf nur eine Stelle verlassen. Fassen wir das Vorhergehende zusammen, so sind verbürgt: α' auf zwei Stellen, δ' auf drei Stellen, α'' auf eine Stelle, δ'' auf eine Stelle.

Es ist aber leicht ersichtlich, dass die Verhältnisse für δ'' etwas günstiger liegen als für α'' . Aus der Rechnung von $(tg \delta)'$ und $(tg \delta)''$ folgt, dass diese Werthe von der Ordnung der Genauigkeit von δ' und δ'' sind.

Weiter lässt sich jetzt entscheiden, dass unter den obwaltenden Verhältnissen nichts durch eine vollständige Elimination der Parallaxe zu gewinnen ist; denn die Correctionen für die Parallaxe können kaum je mehr, als die in diesem Falle schon unsichere zweit-letzte Stelle schädigen. Die oben durch Anbringung von Correctionen an die mittleren Sonnencoordinaten durchgeführte theilweise Elimination der geocentrischen Parallaxe hat nur den Zweck der späteren genauen Berechnung der Unterschiede $B - R$ für den ersten und dritten Ort, indem durch diese Elimination die geocentrische Parallaxe in den Coordinaten des mittleren Ortes berücksichtigt ist.

Durch genäherte Rechnung findet man jetzt weiter für die drei Glieder der Hilfsgrösse N nach A, IIIa aus den Zahlen des Beispieles:

$$N = 0,267 - 2,155 + 0,888 = -1,000.$$

Da α'' am wenigsten sicher ist, so ist das zweite Glied für die Genauigkeit von N ausschlaggebend. Nach den obigen Betrachtungen beträgt also die Unsicherheit von N einige Einheiten der ersten Decimalstelle. Weiter folgt nach A, IIIa: $\log \kappa = 0,191$ und nach A, IVa: $\frac{1}{m} = -0,57$. Die Werthe von κ und $\frac{1}{m}$ sind von derselben Genauigkeitsordnung wie der Werth von N , was aus den entsprechenden Formeln ersichtlich ist. Schätzt man nach dem Obigen die Unsicherheit von N auf etwa 0,2, also auf etwa den fünften Theil seines Werthes, so wird auch die Unsicherheit von $\frac{1}{m}$ denselben Theil seines Werthes, also etwas mehr als 0,1 betragen. Ferner findet sich für z_L nach A, IVa: $z_L = 0,901$ und daher: $z - z_L = 0,044$. In dem hier in Betracht kommenden Theile der Tafel XVI entspricht nun eine Aenderung von 0,01 in z einer Aenderung von etwa 0,03 in $\frac{1}{m}$. Der Unterschied 0,044 zwischen z und z_L entspricht also einer Ungenauigkeit von 0,13 in $\frac{1}{m}$. Dieser Werth stimmt so nahe mit der oben, ziemlich genau abgeleiteten Unsicherheit von mehr als 0,1 in $\frac{1}{m}$ überein, dass an eine Verwerfung der parabolischen Lösung nicht zu denken ist. Interpolirt man noch zum Ueberfluss den Werth von z für die allgemeine Lösung aus der Tafel XVI mit den Argumenten $\psi = 53^{\circ}062$ und, etwas genauer als oben, $\frac{1}{m} = -0,5739$, so findet sich $z = 0,936$. Die Uebereinstimmung dieser allgemeinen Lösung mit der parabolischen Lösung $z = 0,945$ bestätigt das soeben abgeleitete Resultat völlig. Aus dem hier gegebenen Beobachtungsmaterial ist also eine allgemeine Bahnbestimmung mit Sicherheit nicht möglich.

Man könnte nun aus der eben angeführten Uebereinstimmung der parabolischen und allgemeinen Werthe von z den Schluss ziehen, dass es praktischer sei, sich eine erste Annäherung des parabolischen Werthes von z aus der Tafel XVI, anstatt auf graphischem Wege zu verschaffen. Dies ist aber nicht der Fall, da man in den meisten Fällen gezwungen sein würde, den Anfangswerth von z mehrfach mit Anwendung der Differentialformel in A, IVa zu verbessern.

Am Schlusse dieses Beispieles mag noch bemerkt werden, dass der geübte Rechner die oben sehr ausführlich dargestellten Betrachtungen in aller Kürze, etwa wie im zweiten Beispiele, erledigen wird.

Ferner sei noch hervorgehoben, dass der grösste Unterschied $B - R$ etwa $8''$ beträgt, und dass eine Verbesserung der parabolischen Bahn wegen der Schwierigkeit der Beobachtung dieses Kometen sich nicht lohnen würde.

Zweites Beispiel.

Als Beispiel zur Anwendung der Formeln für eine directe Bahnbestimmung, ohne Voraussetzung über die Excentricität, mit Benutzung der Tafel XVI, möge eine von Herrn W. F. Meyer und Fräulein Sophia H. Levy durchgeführte Berechnung der Bahn des Kometen *e* 1910 (Cerulli-Faye) dienen.

In diesem sowie in den folgenden Beispielen sind nur diejenigen Formeln ausführlich durchgerechnet, welche nicht bereits in einem vorhergehenden Beispiele erläutert sind.

Die Bahnbestimmung beruht auf den folgenden Beobachtungen, welche bereits auf den Jahresanfang 1910.0, einschliesslich der Aberrationsglieder, reducirt sind:

Ia.

1910 Gr. M. Z.	α (1910.0)	δ (1910.0)	Beobachter
Nov. 9.3131	54° 38' 11"	+ 8° 43' 3"	Millosevic-Rome
Nov. 11.5801	54 35 57	+ 8 9 0	Eppes-Washington
Nov. 13.8217	54 32 54	+ 7 36 17	Young-Lick

Sonnencoordinaten.

X_1	— 0,681 211	Y_1	— 0,659 264	Z_1	— 0,285 987
X_2	— 0,651 732	Y_2	— 0,683 228	Z_2	— 0,296 381
X_3	— 0,621 586	Y_3	— 0,705 867	Z_3	— 0,306 201

Geschwindigkeiten der Sonnencoordinaten zur Zeit der mittleren Beobachtung.

$\log X'$	9,88600	$\log Y'$	9,77878 _n	$\log Z'$	9,41602 _n
---------------------	---------	---------------------	----------------------	---------------------	----------------------

Um zu entscheiden, ob es in Betracht der geringen Bewegung in α und der Verschiedenheit der Beobachtungsorte nötig sein wird, eine vollständige Elimination der Parallaxe vorzunehmen, sollen die diesbezüglichen Betrachtungen über die Genauigkeit der Bahnbestimmung gleich hier angestellt werden. Es ist

$t_2 - t_1$	2,2670	$\alpha_2 - \alpha_1$	134"	$\delta_2 - \delta_1$	2043"
$t_3 - t_2$	2,2416	$\alpha_3 - \alpha_2$	183	$\delta_3 - \delta_2$	1963

Wegen der Natur des Kometen können die Beobachtungen in diesem Falle als bedeutend genauer betrachtet werden, als im ersten Beispiel. Da die Zwischenzeiten fast gleich sind, so verursacht die Vernachlässigung der f''' keinen Fehler in den Beschleunigungen. Ueberschlagsweise auf ein 2¹/₄ tägliches Intervall reducirt, ergeben die obigen Differenzen:

f'_α	f''_α	f'_δ	f''_δ
133"	51"	2028"	58"
184		1970	

Die f'' betragen etwa $\frac{1}{8}$ bezw. $\frac{1}{80}$ der f' . Unter der Annahme, dass die f''' in demselben Verhältniss weiter fallen, ergibt sich für f'''_α ein Werth von etwa $16''$, für f'''_δ etwa $2''$.

Der Fehler $\frac{f'''}{6}$ in den Geschwindigkeiten beläuft sich also in α auf weniger als $3''$, in δ auf weniger als $1''$. Diese Fehler sind nicht grösser, als die relativen Beobachtungsfehler und können die durch die Beobachtungsfehler bedingte Genauigkeitsgrenze nicht erheblich schädigen.

Zur Beurteilung des Einflusses der allgemeinen Parallaxe berechne man zunächst die geocentrischen und barycentrischen Parallaxenfactoren, sowie deren Summe, auf welche es hier ankommt, nach Anmerkung 1, S. 999 des Anhangs¹⁾. Man erhält:

	I	II	III		I	II	III
$p''_\alpha q_g$	$-5''82$	$-5''49$	$-0''97$	$p''_\delta q_g$	$+5''30$	$+4''85$	$+4''35$
$p'''_\alpha q_m$	$+5.95$	$+5.97$	$+4.27$	$p'''_\delta q_m$	$+2.28$	$+1.61$	$+0.38$
$p_\alpha q$	$+0.13$	$+0.48$	$+3.30$	$p_\delta q$	$+7.58$	$+6.46$	$+4.73$

Die grösste Differenz der allgemeinen Parallaxenfactoren ist $3''$. Dieser Werth kann daher, ebensowenig wie die f''' , die Genauigkeit weiter schädigen, speciell da die Bewegung des Kometen eine grosse Erdnähe nicht vermuthen lässt. Man kann sich daher mit der theilweisen Elimination der Parallaxe, auf Grund der allgemeinen Factoren durch Anbringung der Correctionen $\Delta X = \Delta_1 X + \Delta_2 X$ an die mittleren Sonnencoordinaten, ähnlich wie im ersten Beispiele, begnügen. Dann erhält man für die corrigirten Sonnencoordinaten:

$$X - 0,651\,757, \quad Y - 0,683\,218, \quad Z - 0,296\,406$$

und aus diesen:

$$\begin{array}{llll} A & . & . & . & 226^\circ 21' 0'', & \log \sin D & 9,476\,400_n, & \log \cos D & 9,979\,592, & \log R & 9,995\,487 \\ \psi & . & . & . & 167^\circ 43' 36'', & \log c & 9,989\,959_n, & \log s & 9,327\,514. \end{array}$$

A IIa.

$\log \alpha''$	$9,21670_n$	$\log \delta''$	$9,26776$	$\log (tg \delta)'$	$9,40741_n$
$\log \alpha'$	$8,29767_n$	$\log \delta'$	$9,39859_n$	$\log (tg \delta)''$	$9,31676$

A IIIa.

$\log n$	$9,31688$	$\log \Phi$	$9,36691_n$	$\log a_x$	$8,42032$
$\log C_1$	$9,23599$	$\log \lambda/x$	$8,24336$	$\log a_y$	$7,44387$
$\log C_2$	$9,15699$			$\log a_z$	$9,40313_n$

A IVa.

$\log a^2$	$8,80217$	q'^2	$+14,6555$	c'	$-2,3102$
$\log b$	$8,92252$	$\log p'$	$0,12486$	s	$+0,2126$
$\log G^2$	$0,00884$	$\log h$	$1,51240$	h/s	$153,069$

Gemäss der Anmerkung 1, S. 468, ist nur eine parabolische Lösung möglich, denn es ist: $p' > 0$, $c < 0$, $\psi > 125^\circ 16'$. Die graphische Lösung ergibt: $\log z = 0,090\,37$. Zur Probe auf die Richtigkeit der parabolischen Hypothese sind noch N und κ nach A IIIa, sowie m und z_L zu berechnen. Diese Rechnung folgt ausführlich, zumal weil sie sonst, nach Verwerfung der Parabel, wiederholt werden müsste.

¹⁾ Eine ausführliche Berechnung von Parallaxenfactoren etc. findet sich im fünften Beispiele.

$\log \alpha'^3$	4,89301n	$\log C_1$	9,23599	$\log \mu$	0,692
$\log \delta$	9,15598	$\log I$	7,53366n	$\log \mu^{3/2}$	1,038
$\log I$	4,04899n			$\log \mu^{3/2}$	8,962
		$\log C_2$	9,15679	Sub.	9,958
$\log \alpha''$	9,21670n	$\log II$	8,56420n	$\log (1 - \mu^{-3/2})$	9,958
$\log (tg \delta)'$	9,40741n	Add.	0,03870	$\log z_L$	9,894
$\log II$	8,62411	$\log \{ \}$	8,60290n		
		$\log R \cos D$	9,97508	$\log z$	0,090
$\log \alpha'$	8,29767n	$\log N$	1,33536n	Sub.	9,757
$\log (tg \delta)''$	9,31676	$\log z$	9,91334n	$\log (z - z_L)$	9,651
$\log III$	7,61443n			$(z - z_L)$	0,448
		$\log R^4$	9,98195		
I	— 0,000001	$\log \cos \delta$	9,99559		
— II	— 0,042083	$\log \text{Nenner}$	9,97754		
+ III	— 0,004116	$\log m$	9,93580		
N	— 0,046200				
$\log N$	8,66464n				

Für die Genauigkeit von N ist hier wieder das zweite von α'' , d. h. von f_α'' abhängige Glied ausschlaggebend. Da nach dem Obigen fast nur die Beobachtungsfehler in Betracht kommen, so soll der Fehler in f_α'' auf 5'', also etwa auf den zehnten Theil seines Werthes angenommen werden. Daher kann die Unsicherheit von N und sodann von $\frac{1}{m} = 1,15932$ auf denselben Bruchtheil seines Werthes, also auf etwa 0,12, angenommen werden. In dem in Betracht kommenden Theile der Tafel XVI entspricht nun eine Aenderung von 0,01 in z einer Aenderung von 0,0115 in $\frac{1}{m}$. Dem Unterschiede $z - z_L = 0,448$ entspräche daher eine Unsicherheit von 0,515 in $\frac{1}{m}$. Dieser Werth ist aber mehr als das Vierfache der oben abgeleiteten Unsicherheit von $\frac{1}{m}$. Man ist daher berechtigt, die Richtigkeit der parabolischen Hypothese zu bezweifeln. Interpolirt man jetzt also genau den Werth von z für die allgemeine Lösung mit den Argumenten $\frac{1}{m}$ und ψ aus der Tafel XVI, so findet sich $\log z = 9,830230$ oder angenähert $z = 0,676$. Die Thatsache, dass dieser Werth ausserhalb des Bereiches zwischen dem parabolischen $z = 1,231$ und $z_L = 0,784$ fällt, bestätigt die Unhaltbarkeit der parabolischen Hypothese.

Der Sicherheit halber sollen jetzt aber noch die Unterschiede $B - R$ für die parabolische Hypothese direkt, wie im ersten Beispiel, berechnet werden.

A Va.

$\log q$	0,08586	$\log x'$	9,86769n	$\log r'$	7,65131n
$\log x$	0,13052	$\log y'$	9,78120	Controlle	
$\log y$	0,22181	$\log z'$	8,64902n	$\log g^2$	9,95943
$\log z$	9,67132			$\log 2/r$	9,95944
$\log r$	0,34159				

A VIa.

i	1	3
$\log f_i$	9,99997	9,99997
$\log g_i$	8,59102n	8,58613
$(B - R) \left\{ \begin{array}{l} \partial, \alpha_i \\ \partial \delta_i \end{array} \right.$	— 0,0023	— 0,0019
	+ 0,0041	+ 0,0030
$\log q_i$	0,08641	0,08579

Die parabolische Hypothese könnte also nur unter der Annahme von grösseren Beobachtungsfehlern, etwa z. B. 13'' in der mittleren Declination, welche Annahme indess bei diesem Kometen unzulässig ist, beibehalten werden. Da, wie zuvor gezeigt wurde, die vernachlässigten f''' und die Unterschiede der Parallaxenfactoren nicht für die obigen Unterschiede $B - R$ verantwortlich sind, so ist auch kein besseres Resultat durch Verbesserung der ersten Annäherung unter Beibehaltung der parabolischen Hypothese zu erwarten. Dagegen würde eine Verbesserung der obigen parabolischen Bahn, ohne Voraussetzung über die Excentricität, zu einer ausgesprochenen Ellipse führen. Diese unnöthige Rechnung ist hier unterlassen, zumal die Anwendung der Formeln der Bahnverbesserung in den folgenden Beispielen ausführlich erläutert ist.

Man kann die Rechnung A Va zunächst und die Berechnung von z_L ganz vermeiden, wenn man in A III a gleich N und K und in A IV a gleich m bei der parabolischen Lösung mitbestimmt, dann z für die allgemeine Lösung angenähert aus der Tafel XVI interpolirt und endlich, wie oben, auf Grund der Unsicherheit von $\frac{1}{m}$ entscheidet, ob die parabolische Hypothese zu verwerfen ist.

Da nun in diesem Falle die parabolische Lösung zu verwerfen ist, so ist die Berechnung der Bahn nach den Formeln A V c, A VI c, A VII c abzuschliessen.

A V c.

$\log z$	9,83023	$\log \tau_1$	8,58614	$\log x'$	9,87604 _n
$\log \varrho$	9,82572	$\log \tau_2$	8,59103	$\log y'$	9,78011
$\log \sigma$	9,82131	$\log x$	0,01521	$\log z'$	8,96830
$\log \varrho_1$	9,82606	$\log y$	0,08756	$\log r'$	7,46052 _n
$\log \varrho_2$	9,82543	$\log z$	9,59252	$\log g^2$	9,97171
		$\log r$	0,21747	$\log 1/a$	9,43966
		$\log r^2$	0,43494	$\log p$	0,40664
		Controlle		e	0,54590
		$\log R^2$	9,99097	$\log a^{3/2} = \log P$ (in	
		$\log \mu$	0,44397	Jahren)	0,84045
		$\log r^2$	0,43494	P	6,9255 Jahre

A VI c.

	1	3
$\log f_i$	9,99993	9,99993
$\log g_i$	8,59101 _n	8,58611
$\log \xi_i$	9,58384	9,58535
$\log \eta_i$	9,73272	9,73284
$\log \zeta_i$	9,00704	8,94758
$(B - R) \left\{ \begin{array}{l} \partial \alpha_i \\ \partial \delta_i \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} + 0,0002 \\ + 0,0005 \end{array}$	$\begin{array}{l} + 0,0005 \\ - 0,0007 \end{array}$
$\log \varrho_i$	9,82636	9,82574

Der grösste Unterschied $B - R$ für die directe allgemeine Lösung ist $\partial \delta_3 = -2'',5$. Die beiden Unterschiede in δ könnten leicht, da dieselben entgegengesetztes Zeichen haben, durch eine willkürliche Aenderung von z' fortgeschafft werden.

Aus den obigen Erörterungen geht hervor, dass die Bahn etwas über die erste Ziffer, z. B. in der Excentricität, Periode etc. verbürgt ist. Die obigen Elemente, zusammen mit den weiter unten folgenden, führten daher auf Grund vorliegender Bahnbestimmung zur Identificirung dieses im November 1910 von Cerulli entdeckten Kometen mit dem berühmten, in der vorhergehenden Erscheinung nicht wiedergefundenen Fayeschen Kometen.

Es sollen nun weiter diesmal zunächst die auf den Aequator bezogenen Elemente (i), (δ), (ω), sodann die Constanten in Bezug auf den Aequator und endlich die auf die Ekliptik bezogenen Elemente i , δ , ω nach VII 2c berechnet werden:

VII c.

$\log r'$	7,46052 _n	$\log xy'$	9,79532	$\log z$	9,59252
$\log \sqrt{p}$	0,20332	$\log yx'$	9,96360 _n	$\sin(i)$	9,40847
$\log e \sin v$	7,66384 _n	Sub.	0,22499	$\log r \sin(u)$	0,18405
		$\log \sqrt{p} \cos(i)$	0,18859	$\log x \cos(\delta)$	9,99494
$\log p/r$	0,18917	$\log yz'$	9,05586	$\log y \sin(\delta)$	9,56253 _n
Sub.	9,73709	$\log zy'$	9,37263	Add.	9,79970
$\log e \cos v$	9,73709	Sub.	0,03092	$\log r \cos(u)$	9,79464
$tg v$	7,92675 _n	$\log \sqrt{p} \sin(i) \sin(\delta)$	9,08678 _n	$tg(u)$	0,38941
v	—0°4840			(u)	67°8077
		$\log xz'$	8,98351	v	359,5160
$\sin v$	7,92624 _n	$\log zx'$	9,46856 _n	(w)	68,2917
$\cos v$	9,99998	Sub.	0,12297	(Controlle)	
$\log e$	9,73711	$\log \sqrt{p} \sin(i) \cos(\delta)$	9,59153	$\sin(u)$	9,96657
e	0,54590	$tg(\delta)$	9,49525 _n	$\cos(u)$	9,57716
Controlle		(δ)	342°6311	$\log r$	0,21748
$\log e^2$	9,47422	$\sin(\delta)$	9,47497 _n		
Sub.	9,84634	$\cos(\delta)$	9,97973		
$\log(1 - e^2)$	9,84634	$\log \sqrt{p} \sin(i)$	9,61180		
$\log a$	0,56030	$tg(i)$	9,42321		
		(i)	14°8410		

$\sin(\delta)$	9,47497 _n	$\sin \frac{1}{2}[(i) + \epsilon]$	9,51584	δ	205°4848
$\cos(i)$	9,98527	$\sin \frac{1}{2}(\delta)$	9,17895	σ	221,9528
$\sin a \cos(A)$	9,46024	$\cos \frac{1}{2}[(i) + \epsilon]$	9,97529	(w)	68,2917
$\sin a \sin(A)$	9,97973	$\sin \frac{1}{2}[(i) - \epsilon]$	8,87544 _n	ω	206,3389
$tg(A)$	0,51949	$\cos \frac{1}{2}(\delta)$	9,99497 _n	π	51,8237
(A)	73°1774	$\cos \frac{1}{2}[(i) - \epsilon]$	9,99878	$\frac{1}{2}v$	—0,2420
(ω)	68,2917	$\sin \frac{1}{2}i$	8,95040	$tg \frac{1}{2}v$	7,62560 _n
A'	141,4691	$\cos \frac{1}{2}i$	9,99825	$\log \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$	9,73398
$\sin(A)$	9,98100	$tg \frac{1}{2}i$	8,95215	$tg \frac{1}{2}E$	7,35958 _n
$\cos(A)$	9,46151	$\frac{1}{2}i$	5°1182	$\frac{1}{2}E$	—0°1311
$\log \sin a$	9,99873	i	10,2364	E	—0,2622
$\cos(\delta)$	9,97973	$\sin \frac{1}{2}i \sin \frac{1}{2}[\delta + \sigma]$	8,69479	$\sin E$	7,66054 _n
$\cos(i)$	9,98527	$\cos \frac{1}{2}[\delta + \sigma]$	9,92001	$\log e$	9,73711
$\sin b \cos(B)$	9,96500	$\sin \frac{1}{2}[\delta + \sigma]$	9,74438	$\colog \sin 1''$	5,31442
$\sin b \sin(B)$	9,47497 _n	$\sin \frac{1}{2}i \cos \frac{1}{2}[\delta + \sigma]$	8,87041	$\log II$	2,71207 _n
$tg(B)$	9,50997 _n	$tg \frac{1}{2}[\delta + \sigma]$	9,82438	II	—515'31
(B)	—17°9300	$\frac{1}{2}[\delta + \sigma]$	33°7188	($E - II$) = M . . .	—428,69
B'	50,3617	$\cos \frac{1}{2}i \sin \frac{1}{2}[\delta - \sigma]$	9,15424	$\log - k''$	3,55001
$\sin(B)$	9,48835 _n	$\sin \frac{1}{2}[\delta - \sigma]$	9,15599	$\colog a^{3/2}$	9,15955
$\cos(B)$	9,97838	$\cos \frac{1}{2}[\delta - \sigma]$	9,99550 _n	$\log \mu$	2,70956
$\log \sin b$	9,98002	$\cos \frac{1}{2}i \cos \frac{1}{2}[\delta - \sigma]$	9,99375 _n	μ	512'34
(ω) = C'	68°2917	$tg \frac{1}{2}[\delta - \sigma]$	9,16049 _n	$\log M$	2,63214 _n
$\sin(i) = \sin c$. . .	9,40847	$\frac{1}{2}[\delta - \sigma]$	171°7660	$\log \frac{M}{\mu} = \log(t_2 - T)$	9,92258 _n
ϵ	23°4508			$t_2 - T =$	—0,8367
$\frac{1}{2}[(i) + \epsilon]$	19,1416			$t_2 = \text{Nov.}$	11,5762
$\frac{1}{2}[(i) - \epsilon]$	—4,3050			$T = 1910 \text{ Nov.}$. .	12,4129
$\frac{1}{2}(\delta)$	171,3157				

Drittes Beispiel.

Als weiteres Beispiel einer directen parabolischen Bahnbestimmung, sowie als Beispiel dafür, wenn bei der Verbesserung einer beliebigen parabolischen Ausgangsbahn (Formeln B β), wegen kleiner heliocentrischen Distanz, sowie verhältnissmässig langer Intervalle die Anwendung der geschlossenen Ausdrücke für $f, g, \partial f, \partial g$ erforderlich wird, möge folgende, von Herrn Meyer und Fräulein Levy durchgeführte Rechnung von Bahnen des Kometen a 1910 dienen. Hier repräsentirte die erste Bahnbestimmung einen aussergewöhnlichen Fall, für welchen die Leuschner'sche Methode wie gewöhnlich eine directe Lösung ohne irgend welche vorherige Annahme ergab.

A Ia.

Die Bahnbestimmung beruht auf den folgenden photographischen Beobachtungen, welche bereits auf den Jahresanfang, einschliesslich der Aberrationsglieder, reducirt sind:

1910, Gr. M. Z.	α (1910.0)	δ (1910.0)	Beobachter
Febr. 1.6153	324° 43' 13"	+ 3° 19' 40"	Curtis-Lick
Febr. 2.6111	325 15 6	+ 3 57 8	Curtis-Lick
Febr. 5.6146	326 40 39	+ 5 35 5	Curtis-Lick

Die Sonnencoordinaten, sowie deren Geschwindigkeiten, wurden aus den American Ephemeris and Nautical Almanac ganz wie in den beiden ersten Beispielen interpolirt.

	X	Y	Z
I	+ 0,664607	— 0,667684	— 0,289639
II	+ 0,677441	— 0,656936	— 0,284977
III	+ 0,714883	— 0,623306	— 0,270390
$\log X'$	9,871123	$\log Y'$	9,801678
		$\log Z'$	9,438913

Die theilweise Elimination der geocentrischen Parallaxe durch Anbringung von Correctionen an die mittleren Sonnencoordinaten ergibt:

X	+ 0,677423	Y	— 0,656965	Z	— 0,285003
A	315,8803	D	343,1961	$\log R$	9,993766
$\log \tau_1$	8,713209	$\log \tau_2$	8,233753		

A II a.

$\log \alpha''$	0,239928 _n	$\log \delta''$	0,391686 _n	$\log (tg \delta)'$	9,791034
$\log \alpha'$	9,721432	$\log \delta'$	9,788966	$\log (tg \delta)''$	0,384441 _n

Wegen der Unsicherheit der Beobachtungen dieses Kometen, der Unregelmässigkeit seiner Bewegung, und der Ungleichheit der Intervalle soll hier ohne Weiteres eine parabolische Lösung durchgeführt werden.

A III a.

$\log n$	0,38100 _n	$\log \lambda/x$	0,12542	$\log a_x$	0,14510
$\log C_1$	9,56839	ψ	22,727	$\log a_y$	9,51610 _n
$\log C_2$	9,21172 _n	$\log c$	9,96490	$\log a_z$	9,85143
$\log \Phi$	9,40597	$\log s$	9,58698		

A IV a.

$\log a^2$	0,40677	q'^2	+ 0,24961	c'	+ 0,51558
$\log b$	0,00990	$\log p'$	9,60936	s	+ 0,38635
$\log G^2$	0,01244	$\log h$	9,91296	h/s	+ 2,11825

Da $9(2s^2 + q'^2) > c'^2$, so ist nach Anmerkung 1, S. 468, nur eine Lösung möglich.
Es findet sich durch die graphische Lösung: $\log z = 0,15419$.

A V a.

$\log x$	9,67671	$\log q$	0,14796	$\log z$	9,58196
$\log x'$	0,08494	$\log y$	9,15371 _n	$\log z'$	9,85823
$\log r$	9,79653	$\log y'$	0,03890 _n	$\log g^2$	0,50453
		$\log r'$	0,20736		

A VII a.

$\log q$	9,06780	v	128° 47' 30"	$T = \text{Jan.}$. . .	16,7938 Gr. M. Z.
$\sin a$	9,88021	$\sin b$	9,98588	$\sin c$	9,84392
A'	321° 9' 21" 11	B'	64° 8' 57" 4	C'	350° 2' 8" 16

Darstellung des ersten und dritten Ortes mit Anwendung der **geschlossenen**
Ausdrücke für f und g :

B VI.

A VI a.

i	1	3	i	1	3
$\log (t_i - T)$	1,19903	1,29693	X_i	+ 0,664607	+ 0,714883
$\log M_i$	2,59733	2,69523	$f_i x$	+ 0,474722	+ 0,472733
v_i	127° 31' 28"	132° 1' 17"	$g_i x'$	— 0,020824	+ 0,062719
$\frac{1}{2} v_i$	63 45 44	66 0 38	ξ_i	+ 1,118505	+ 1,250335
$\sec^2 \frac{1}{2} v_i$	0,70896	0,78174	Y_i	— 0,667684	— 0,623306
$\log r_i$	9,77676	9,84954	$f_i y$	— 0,142377	— 0,141781
Sub.	9,90555	9,92153	$g_i y'$	+ 0,018729	— 0,056410
$\log (r_i - q)$	9,68231	9,77107	η_i	— 0,791332	— 0,821497
$\log I$	9,84116	9,88554	Z_i	— 0,289639	— 0,270390
$\log (II = \sqrt{r - q})$. .	9,85338		$f_i z$	+ 0,381673	+ 0,380075
Sub.	8,45533	8,88571	$g_i z'$	— 0,012355	+ 0,037212
$\log \gamma_i$	8,29648 _n ⁵	8,73908 ⁵	ζ_i	+ 0,079679	+ 0,146897
B VI'.			$\log q \cos \delta \cos \alpha$. . .	0,04864	0,09703
$\log \gamma_i^2$	6,59297	7,47817	$\log q \cos \delta \sin \alpha$. . .	9,89836 _n	9,91461 _n
$\log \gamma_i^2 / r$	6,79644	7,68164	$\log \tan \alpha$	9,84972 _n	9,81758 _n
$\log f_i$	9,99973	9,99791	α_R	324° 7' 21" 2	326° 6' 94" 1
$\log r r_i$	9,57329	9,64607	α_B	324,7217	326,6789
$\log 2 r r_i$	9,87432	9,94710	$(B - R) \begin{cases} A \alpha \\ A \alpha \cos \delta \end{cases}$. . .	+ 0,0005	— 0,0152
$\log p \gamma_i^2$	5,96180	6,84700		+ 0,0005	— 0,0152
Sub.	9,99995	9,99965	$\log \sin \alpha$	9,76160 _n	9,73966 _n
$\log []$	9,87427	9,94675	$\log \cos \alpha$	9,91188	9,92208
$\log g^2$	0,46724	7,42492	$\log q \cos \delta$	0,13676	0,17495
$\log g$	8,23362 _n	8,71246	$\log q \sin \delta$	8,90134	9,16701
$\log f_i x$	9,67644	9,67462	$\log \tan \delta$	8,76458	8,99206
$\log f_i y$	9,15344 _n	9,15162 _n	δ_R	+ 3° 32' 83	+ 5° 60' 78
$\log f_i z$	9,58169	9,57987	δ_B	+ 3,3289	+ 5,5858
$\log g_i x'$	8,31856 _n	8,79740	$(B - R) A \delta$	+ 0,0006	— 0,0220
$\log g_i y'$	8,27252	8,75136 _n	$\log \sin \delta$	8,76385	8,98998
$\log g_i z'$	8,09185 _n	8,57069	$\log \cos \delta$	9,99927	9,99791
			$\log q$	0,13749	0,17703
			$\log p_\alpha q$	0,846	0,848
			$\log p_\delta q$	0,723	0,723
			$\log p_\alpha$	0,709	0,671
			$\log p_\delta$	0,586	0,546
			p_α	+ 5"	+ 5"
			p_δ	+ +	+ 4

Der grösste Unterschied $B - R$ ist $0,0022 = 1,3$. Die Unterschiede $B - R$ könnten leicht durch eine einmalige Verbesserung der Bahn fortgeschafft werden. Jedemfalls hat auch hier die angewandte Methode sich vollständig bewährt, indem die directe Lösung in der ersten Annäherung eine verhältnissmässig genaue Darstellung der Beobachtungen ergeben hat. Anstatt nun aber die vorliegende, auf kurzen Intervallen beruhende Bahn auf Grund der obigen Unterschiede $B - R$ zu verbessern, soll diese erste Bahnbestimmung als beliebige Ausgangsbahn betrachtet werden und auf Grund eines verhältnissmässig langen geocentrischen Bogens verbessert werden. Es sollen zu diesem Zwecke die folgenden Beobachtungen dienen, deren zweite nahe an der dritten der ersten Bahnbestimmung liegt, so dass verschiedene für dieses Datum bei der Bahnverbesserung nothwendige Zahlen der ersten Rechnung direct entnommen werden können, wobei zu bemerken ist, dass mit noch längeren Intervallen der Gang der Rechnung derselbe sein würde:

B β .

1910, Gr. M. Z.	α (1910.0)	δ (1910.0)	Beobachter
I Jan. 18.1287	303° 32' 51,9	— 20° 53' 27,0	Zappa-Rome
II Febr. 5.6211	326 41 0,4	+ 5 35 18,6	Aitken-Lick
III März 13.0440	336 11 15,4	+ 15 38 53,9	Aitken-Lick

Coordinationen der Sonne.

	X	Y	Z
I	+ 0,4570857	— 0,7993384	— 0,3467534
II	+ 0,7149615	— 0,6232309	— 0,2703578
III.	+ 0,9847873	— 0,1255285	— 0,0544576

Die theilweise Elimination der geocentrischen Parallaxe durch Anbringung von Correctionen an die mittleren Sonnencoordinationen ergibt:

$$X . . + 0,7149449, \quad Y . . - 0,6232607, \quad Z . . - 0,2703833, \quad \log R . . 9,993992.$$

XVIII.

Aus der ersten Bahnbestimmung wurde $\log q = 0,17717$ für die Zeit der mittleren Beobachtung als Ausgangswerth interpolirt. Ausserdem ergeben sich die Ausgangswerthe, x', y', z' , wie folgt, aus den Constanten für den Aequator. Mit dem angenommenen Werthe von q und den genauen Werthen von α_2 und δ_2 sind sodann die Ausgangswerthe x, y, z genau zu berechnen. Man erhält somit eine intermediäre Ausgangsbahn, worin q, x', y', z' dieselben Werthe wie in der ersten Bahnbestimmung haben und die beiden fehlenden Constanten durch die genauen Werthe von α_2, δ_2 gegeben sind:

t	5,6211	$\cos \frac{1}{2}v$	9,609078	$\log x'^2$	0,104200
Aberr.	— 0,0087	$\log \sqrt{2/q}$	0,616615	$\log y'^2$	0,053904
t (reducirt) Febr.	5,6124	$\sin a$	9,880210	Add.	0,276610
T (Jan.)	10,7938	$\cos (A' + \frac{1}{2}v)$	9,916197	Summe	0,380810
$t - T$	19,8186	$\log x'$	0,052100	$\log z'^2$	9,627672
$\log (t - T)$	1,29707 ⁸			Add.	0,070609
$\log q^{3/2}$	8,60170	$\sin b$	9,985880	$\log g^2$	0,451419
$\log M$	2,69537 ³	$\cos (B' + \frac{1}{2}v)$	9,815379 _n		
		$\log y'$	0,026952 _n		
v	132° 1' 39,4				
$\frac{1}{2}v$	66 0 49,7				
$(A' + \frac{1}{2}v)$	27° 56' 5,7	$\sin c$	9,843920	$\log q$	0,17717
$(B' + \frac{1}{2}v)$	130 49 16,3	$\cos (C' + \frac{1}{2}v)$	9,744223	$\cos \delta$	9,997931
$(C' + \frac{1}{2}v)$	56 17 43,5	$\log z'$	9,813836	$\log \sigma$	0,175101

$\cos \alpha$	9,922024	$\log x^2$	9,457802	$\log xx'$	9,781001
$\log (I = \xi)$	0,097125	$\log y^2$	8,596663	$\log yy'$	9,325284
$\log (X)$	9,854273	Add.	0,056019	Add.	0,130390
Sub.	9,874628	Summe	9,513821	Summe	9,911391
$\log x$	9,728901	$\log z^2$	9,239900	$\log zz'$	9,433786
		Add.	0,185317	Add.	0,124818
$\sin \alpha$	9,739782 _n	$\log r^2$	9,699138	$\log rr'$	0,036209
$\log (I = \eta)$	9,914883 _n	$\log r$	9,849569	$\log r$	9,849569
$\log (Y)$	9,794669 _n			$\log r'$	0,186640
Sub.	9,503662			$\log r'^2$	0,373280
$\log y$	9,298332 _n				
		$\log 2/r$	0,451461		
		$\log g^2$	0,451419		
		Sub.	5,99		
		$\log 1/a$	6,44		
$tg \delta$	8,990553				
$\log (I = \zeta)$	9,165654				
$\log (Z)$	9,431980 _n				
Sub.	0,187970				
$\log z$	9,619950				

Da $\log 1/a = 6,44$ ist, so ist die intermediäre Ausgangsbahn nicht genau parabolisch. Anstatt dieselbe jedoch genau parabolisch zu machen, etwa durch willkürliche Aenderung von z' , soll $1/a$ bei der Berechnung von $\partial \varrho$ nach IV und V fortgeschafft werden. Die Ausgangsbahn soll zum Zwecke der Berechnung aller Hilfsgrössen als parabolisch betrachtet werden, zumal da die grossen Unterschiede $B - R$, deren Ableitung direct folgt, durch nur einmalige Anwendung der linearen Beziehungen zwischen diesen Unterschieden und den gesuchten Correctionen $\partial \varrho, \partial r', \partial y', \partial z'$ kaum fortzuschaffen sein werden.

A VIIa.

$$\log q . . . 9,066382, \quad v = 132^{\circ} 6' 23'', 1, \quad T = \text{Jan. } 16, 80804 \text{ Gr. M. Z.}$$

VI, VI'', A VI.

i	1	3
v_i	41° 58' 33'', 4	147° 29' 52'', 7
$\log r_i$	9,126008	0,172542
$\log \gamma_i$	9,804577 _n	9,604685
$\log f_i$	9,628501	9,887065
$\log g_i$	9,291870 _n	9,762326
$(B - R) \left\{ \begin{array}{l} \partial, \alpha_i \\ \partial \delta_i \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} - 52' 54'', 6 \\ - 57 \quad 36, 4 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} - 14' \quad 3'', 8 \\ - 24 \quad 29, 4 \end{array} \right.$
$\log \varrho_i$	9,940365	0,366882

Wäre die erste aus kurzen Zwischenzeiten berechnete Bahn verbessert worden, so wären die obigen Unterschiede $B - R$ kleiner ausgefallen. Diese Verbesserung wurde aber absichtlich unterlassen, um diese zweite Bahnbestimmung aus längeren Intervallen auf eine weniger genaue Bahn zu basiren. Die Convergenz der hier zur Anwendung kommenden Methode der Bahnverbesserung wird dadurch besonders zu Tage gefördert, zumal da die fortzuschaffenden Unterschiede $B - R$ sehr gross sind, und die heliocentrische Distanz zur Zeit der ersten Beobachtung sehr klein ist.

A IIIa.

$$\log \cos \psi 9,96456, \quad \log R \cos \psi 9,95856.$$

XI.

		i	1	3
$\log \varrho$	0,17717			
$\log R \cos \psi$	9,95856			
Sub.	9,81577	$\log \sqrt{2} \cos \beta$	0,07528	0,07528
$\log r \cos \beta$	9,77433	$\log \gamma_i$	9,80457 ⁷ⁿ	9,60468 ³
$\log \cos \beta$	9,92476	$\log II$	0,27070 _n	0,47060
		$\log (I = \varphi)$	0,19943	
$\log x' \xi$	0,14922	Add.	9,25127	0,18627
$\log y' \eta$	9,94184	$\log \varphi_i$	9,45070 _n	0,65687
Add.	0,20061			
Summe	0,35883			
$\log z' \zeta$	8,97949	$\log x' r \gamma_i$	9,70625 _n	9,50635
Add.	0,01777	$\log \sqrt{2} x$	9,87942	9,87942
$\log \varrho \varphi$	0,37660	Add.	9,69015	0,15338
$\log \varphi$	0,19943	$\log []$	9,30640	0,03280
		$\log \gamma_i^8$	9,41373 _n	8,81405
		$\colog rr_i$	1,02442	9,97789
		$\log g x_i$	9,83455 _n	8,82474

i	1	3	i	1	3
$\log y' r \gamma_i$	9,68110	9,48120 _n	$\log (I = f_i \xi / \varrho)$. . .	8,61698	8,87554
$\log \sqrt{2} y$	9,44885 _n	9,44885 _n	$\log II$	9,45472	9,05494
Add.	9,84946	0,28515	$\log III$	9,35972	9,33803
$\log []$	9,29831	9,76635 _n	I	+ 0,04140	+ 0,07508 ³
$\log \gamma_i^8 / rr_i$	0,43815 _n	8,79194	II	+ 0,28492	+ 0,11348 ⁸
$\log g y_i$	9,73646 _n	8,55829 _n	III	+ 0,22894	+ 0,21778 ³
			$f s_i$	+ 0,55526	+ 0,40635
			$\log f s_i$	9,74450	9,60890
$\log z' r \gamma_i$	9,46799 _n	9,26809	XII.		
$\log \sqrt{2} z$	9,77046	9,77046			
Add.	0,00288	0,11876	i	1	3
$\log []$	9,47087	9,88922	$\log f y_i \cos \alpha_i$. . .	9,08415 _n	9,76815 _n
$\log \gamma_i^8 / rr_i$	0,43815 _n	8,79194	$\log f x_i \sin \alpha_i$. . .	9,87633 _n	9,63941 _n
$\log g z_i$	9,90902 _n	8,68116	Sub.	9,92357	9,53788
			$\log []$	9,79990	9,17729 _n
			$\log \frac{1}{\varrho_i} []$	9,85954	8,81041 _n
$\log (I = f_i \xi / \varrho)$. . .	9,54846	9,80702	$\log \cos \delta_i \left(\frac{p_\alpha \varrho}{\varrho_i^2} \right)^{1)}$.	5,523	4,796 _n
$\log II$	9,56367	9,16389	Add.	0,00002	0,00004
$\log III$	9,28525	9,48161	$\log A f_i$	9,85956	8,81045 _n
I	+ 0,35356	+ 0,64124	$\log g y_i \cos \alpha_i$. . .	9,48945 _n	8,52046 _n
II	+ 0,36616	+ 0,14584	$\log g x_i \sin \alpha_i$. . .	9,75061	8,42665 _n
III	+ 0,19286	+ 0,30311	Sub.	0,18979	9,38221
$f x_i$	+ 0,91258	+ 1,09019	$\log []$	9,94040 _n	7,80886 _n
$\log f x_i$	9,96027	0,03750	$\colog \varrho_i$	0,05964	9,63312
			$\log A g_i$	0,00004 _n	7,44198 _n
$\log (I = f_i \eta / \varrho)$. . .	9,36621 _n	9,62477 _n			
$\log II$	9,13310 _n	8,73332 _n			
$\log III$	9,18716	9,21516 _n			
I	— 0,23238	— 0,42147			
II	— 0,13586	— 0,05411			
III	+ 0,15387	— 0,16412			
$f y_i$	— 0,21437	— 0,63970			
$\log f y_i$	9,33116 _n	9,80598 _n			

¹⁾ Correctionsglied zur Berücksichtigung einer etwaigen Aenderung der Parallaxe (cf. 82. Vorlesung, S. 490).

XII (Fortsetzung).

i	1	3	i	1	3
$\log f_{y_i} \sin \alpha_i$	9,24722	9,40789	$\log g_{y_i} \sin \alpha_i$	9,65252	8,16020
$\log f_{x_i} \cos \alpha_i$	9,71326	9,99967	$\log g_{x_i} \cos \alpha_i$	9,58754 _n	8,78691
Add.	0,12774	0,09898	Add.	9,20786	0,09210
$\log ()$	9,84100	0,09865	$\log ()$	8,79540	8,87901
$\sin \delta_i$	9,53256 _n	9,44184	$\sin \delta_i$	9,53256 _n	9,44184
$\log I$	9,37356 _n	9,54049	$\log I$	8,32796 _n	8,32085
$\log (II = f_{z_i} \cos \delta_i)$. .	9,71768	9,59162	$\log (II = g_{z_i} \cos \delta_i)$. .	0,88220 _n	8,66388
Sub.	0,16220	9,09673	Sub.	9,98771	0,08029
$\log []$	9,87988 _n	8,63722 _n	$\log []$	9,86991	8,40114 _n
$\log \frac{1}{e_i} []$	9,93952	8,27034	$\log B_{g_i}$	9,92955 _n	8,03426
$\log \left(\frac{p_{\Delta} q}{\varrho^2} \right)^{1)}$	5,643	4,665	$\log g_i$	9,29187 _n	9,76233
Add.	0,00002	0,00011	$\log e_i$	9,94036	0,36688
$\log B_{f_i}$	9,93954	8,27045	$\log C_i$	9,35151 _n	9,39545

XIII.

$\log A_{f_1} A_{g_3}$	7,30154 _n	$\log I$	8,80013 _n	$\log a d_1$	8,31724
$\log A_{f_3} A_{g_1}$	8,81049	$\log II$	9,22788	$\log Q_y$	9,33549 _n
Sub.	0,01325	Sub.	0,13782	$\log (II = a_3 P_x)$. .	7,88878
$\log A$	8,82374 _n	$\log b_3$	9,36570 _n	$\log III$	7,75548
$\log I$	6,70955 _n	$\log I$	8,43920 _n	$\log I$	9,32469 _n
$\log II$	8,99740	$\log II$	7,33259 _n	$\log II$	9,54950 _n
Sub.	0,00223	Sub.	9,96462	Add.	0,20301
$\log a_1$	8,99963 _n	$\log b_4$	8,40382 _n	$\log c_3$	9,75251
$\log I$	8,07802 _n	$\log A$	8,82374 _n	$\log I$	9,37817
$\log II$	8,55692 _n	$\log z$	9,61995	$\log II$	7,65421
$\log III$	8,55264 _n	$\log c_2$	8,44369 _n	Add.	0,00812
I	— 0,011968	$\log (II = \frac{c_3}{c_2} a_2)$.	9,69382 _n	$\log c_4$	9,38629 _n
— II	+ 0,071932	$\log (III = \frac{a_3}{a_1} a_1)$.	0,11543	$\log \vartheta, \alpha_1$	8,18726 _n
+ III	— 0,035698			$\log \vartheta, \alpha_3$	7,61180 _n
a_2	+ 0,024266			$\log I$	7,61184
$\log a_2$	8,38500			$\log II$	5,62924
$\log I$	8,63706	$I = a_3$	+ 0,49881	Sub.	9,99546
$\log II$	9,65845 _n	— II	+ 0,49411	$\log e_1$	7,60730
Sub.	0,03949	— III	— 1,30445	$\log I$	7,47136 _n
$\log a_3$	9,69794	a	— 0,31153	$\log II$	6,99771
$\log I$	8,79946	$\log a$	9,49350 _n	Sub.	0,12581
$\log II$	7,76316	$\log II$	0,53903 _n	$\log e_3$	7,59717 _n
Sub.	9,95809	$\log III$	0,47413	$\log e_3$	8,22420
$\log a_4$	8,75755	$I = b_3$	— 0,23211	$\log e_4$	7,85272
$\log I$	6,54648	— II	+ 3,45962	$\log b$	9,39465
$\log II$	9,35766 _n	— III	— 2,97940	$\log II$	8,90599
Sub.	0,00067	b	+ 0,24811	$\log III$	8,72310 _n
$\log b_1$	9,35833 _n	$\log a_1 e$	7,03793	$I = e_3$	+ 0,01675 ⁷
$\log I$	7,91495	$\log a e_1$	7,10080 _n	— II	— 0,08053 ⁶
$\log II$	9,21718	Sub.	0,27073	— III	+ 0,05285 ⁷
$\log III$	8,12207	Zähler	7,37153	e	— 0,01092 ²
I	+ 0,008221 ⁵	$\log P_y$	8,38978 _n	$\log e$	8,03830 _n
— II	— 0,164885	$\log (-b d_1)$	8,21839		
— III	— 0,013245 ⁵	$\log Q_x$	9,23664 _n		
— b_2	— 0,169909				
$\log b_2$	9,23021				

¹⁾ Siehe die Anmerkung, S. 1029.

XIV.

$\log b e_1$	7,00195	$\log (II = a_4 P_x)$	6,94839	$-c_3 Q_{x_1}$	+ 0,83428
$\log b_1 e$	7,39663	$\log III$	6,79300	$\log c_3 Q_{x_1}$	9,92131
Sub.	0,17064			$\log Q_{x_1}$	0,16880n
Zähler	7,17259n	$I = e_4$	+ 0,007124	$\log (II = a_4 Q_x)$	7,99419n
		$-II$	- 0,000888	$\log III$	7,73931
$\log a_1 b$	8,39428n	$-III$	- 0,000622		
$\log a b_1$	8,85183	$c_4 P_{x_3}$	+ 0,005614	$I = d_4$	+ 0,018640
Sub.	0,12992	$\log c_4 P_{x_3}$	7,74927	II	- 0,009867
Nenner	8,98175n	$\log P_{x_3}$	8,36298n	III	+ 0,005487
$\log P_x$	8,19084			$-c_1 Q_{x_1}$	+ 0,014260
$I = e_3$	+ 0,016757 ⁸	$\log (II = a_3 Q_x)$	8,93458n	$\log c_1 Q_{x_1}$	8,15412
$-II$	- 0,007740 ⁷	$\log III$	8,70119	$\log Q_{x_1}$	8,76783
$-III$	- 0,005694 ⁹				
$c_3 P_{x_1}$	+ 0,0033217	$I = d_3$	+ 0,870040		
$\log c_3 P_{x_1}$	7,52136	II	- 0,086016		
$\log P_{x_1}$	7,76885	III	+ 0,050256		

Da der Unterschied $B-R$ in der Declination des ersten Ortes sehr gross ist, soll $P_x = P_{x_1}$ und $Q_x = Q_{x_1}$ angenommen werden.

IV.

$\log (I = \frac{1}{2a})$	6,14	$\log (I = \frac{\cos \beta}{r^2})$	0,22562
$\log (II = x' P_x)$	8,24294	$\log (II = x' Q_x)$	0,28874n
$\log III$	8,41673	$\log III$	9,36244
$\log IV$	7,58269	$\log IV$	9,98264n
I	+ 0,000138	I	+ 1,68119
$-II$	- 0,017496	$-II$	+ 0,19442
$-III$	- 0,026105	$-III$	- 0,23038
$-IV$	- 0,003825 ⁵	$-IV$	+ 0,96082
P	- 0,047288	Q	+ 2,60605
$\log P$	8,67475n	$\log Q$	0,41598

VI.

$\log (\partial \varrho = \frac{P}{Q})$	8,25877n
---	----------

V, VI.

1. Versuch	2. Versuch		1. Versuch	2. Versuch
$\log \partial \varrho_a$	8,25877n	$\log (1 - \frac{1}{3} \cos^2 \beta) \cdot 2r^3$	0,20005n	0,20005n
$\log Q_x \partial \varrho_a$	7,49541	$\log (\partial \varrho)^2$	6,51754	6,52072
$\log P_x$	8,19084	$\log V$	6,71759n	6,72077n
Sub.	9,90202	$\log (1 - \frac{5}{8} \cos^2 \beta)$	9,2519n	9,2519n
$\log \partial x'$	8,09304	\log Zähler	9,6538n	9,6538
		$\log 2r^4$	0,3007	0,3007
$\log Q_y \partial \varrho_a$	7,59426	$\log (\partial \varrho)^3$	4,7763n	4,7811n
$\log P_y$	8,38978n	$\log VI$	4,7308	4,7356
Sub.	0,06451	P	- 0,047288 ⁵	- 0,047288 ⁵
$\log \partial y'$	8,45429n	$- \frac{1}{8} (\partial x')^2$	- 0, 76 ⁷	- 0, 76 ⁶
		$- \frac{1}{8} (\partial y')^2$	- 0, 405 ¹	- 0, 405 ⁵
$\log Q_z \partial \varrho_a$	8,42757	$- \frac{1}{8} (\partial z')^2$	- 0, 218 ³	- 0, 220 ³
$\log P_z$	7,76885	$- V$	+ 0, 521 ⁹	+ 0, 525 ⁷
Sub.	9,88242	VI	5 ⁴	5 ⁴
$\log \partial z'$	8,31999n	$Q \partial \varrho$	- 0,047461 ²	- 0,047459 ⁸
		$\log Q \partial \varrho$	8,67634n	8,67633n
$\log (\partial x')^2$	6,18608	$\log Q$	0,41508	0,41508
$\log (\partial y')^2$	6,90858	$\log \partial \varrho_e$	8,26036n	8,26035n
$\log (\partial z')^2$	6,63998			

$\log \varnothing q_e$	8,26035 n	$\log x'$	0,052100
$\log \xi/q$	9,91996	$\log \varnothing x'$	8,09264
$\log \varnothing x$	8,18031 n	Add.	0,004742
$\log x$	9,728901	$\log x'$	0,056842
Add.	9,987543	$\log y'$	0,026952 n
$\log x$	9,716444	$\log \varnothing y'$	8,45451 n
$\log \eta/q$	9,73771 n	Add.	0,011471
$\log \varnothing y$	7,99806	$\log y'$	0,038423 n
$\log y$	9,298332 n	$\log z'$	9,813836
Add.	9,977683	$\log \varnothing z'$	8,32203 n
$\log y$	9,276015 n	Add.	9,985775
$\log t/q$	8,98848	$\log z'$	9,799611
$\log \varnothing z$	7,24883 n	$\log q$	0,177170
$\log z$	9,619950	$\log \varnothing q$	8,26035 n
Add.	9,998148	Add.	9,994708
$\log z$	9,618098	$\log q$	0,171878

A V.

$\log x^2$	9,432888
$\log y^2$	8,552030
Add.	0,053680
Summe	9,486568
$\log z^2$	9,236196
Add.	0,103642
$\log r^2$	9,680210
$\log r$	9,840105
$\log x'^2$	0,113684
$\log y'^2$	0,076846
Add.	0,283002
Summe	0,396686
$\log z'^2$	0,590222
Add.	0,064240
$\log g^2$	0,46926
$\log z/r$	0,460925
} Controle	
$\log x x'$	9,773266
$\log y y'$	9,314438
Add.	0,129580
Summe	9,902866
$\log z z'$	9,417709
Add.	0,122044
$\log r r'$	0,025810
$\log r'$	0,185705

Die durch diese erste Bahnverbesserung resultirenden Unterschiede $B-R$ berechnen sich genau wie die ursprünglichen Unterschiede, welche fortzuschaffen waren.

A VII a.

$\log q$. . . 9,110227, v . . . 128° 51' 51'',4, T . . . Jan. 17,08123 Gr. M. Z.

VI', VI'', A VI.

i	1	3
v_i	29° 58' 5'',7	145° 34' 43'',8
$\log r_i$	9,140275	0,167983
$\log \gamma_i$	9,815785 n	9,611329
$\log f_i$	9,581291	9,880072
$\log g_i$	9,269496 n	9,761252
$(B-R) \left\{ \begin{array}{l} \varnothing \alpha_i \\ \varnothing \delta_i \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} -1' 42'',4 \\ -1 \ 13,0 \end{array}$	$\begin{array}{l} +0' 4'',0 \\ -0 \ 31,2 \end{array}$
$\log q_i$	9,933627	0,364169

Die erste¹⁾ Verbesserung der beliebigen Ausgangsbahn hat die Unterschiede $B - R$ ganz bedeutend herabgedrückt, indem jetzt der grösste Unterschied nur $1'42''$ im Vergleich zu $57'36''$ ist. Wären die linearen Differentialformeln ausreichend gewesen, was in diesem Falle wegen der sehr grossen Unterschiede $B - R$ natürlich nicht zu erwarten war, so würde die verbesserte Bahn nur einen Unterschied in δ_3 übrig gelassen haben, dessen Grösse durch die Beobachtungsfehler und durch eine etwaige Abweichung von der Parabel abhängig gewesen sein würde. Es ist daher auch nicht zu erwarten, dass die Beobachtungen ausser δ_3 jetzt dadurch genau dargestellt werden können, dass man die Verbesserung unter Beibehaltung aller Hilfsgrössen, abgesehen von den von den neuen Unterschieden $B - R$ abhängigen, d. h. unter Beibehaltung der numerischen Werthe der Differentialquotienten der ersten Bahnverbesserung, wiederholt; vielmehr sollte jetzt die Rechnung durch eine zweite Bahnverbesserung mit neugerechneten Hilfsgrössen abgeschlossen werden. Zum Beweis des Gesagten sollen trotzdem die Unterschiede $B - R$ zunächst dadurch weiter herabgedrückt werden, dass von den in der ersten Bahnverbesserung gebrauchten Hilfsgrössen nur diejenigen neu berechnet werden, welche von den Unterschieden $B - R$ abhängen. Man erhält dann zunächst:

i	1	3
$(B - R) \begin{cases} \partial, \alpha_i & \dots\dots\dots \\ \partial \delta_i & \dots\dots\dots \end{cases}$	$\begin{matrix} -4''8 \\ -2,4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -0''3 \\ +14,9 \end{matrix}$

Wegen der Unsicherheit der Beobachtungen dieses Kometen dürfte man sich auch mit dieser Darstellung zufrieden geben. Inwieweit die aus der ersten Verbesserung erzielten Unterschiede durch die parabolische Hypothese durch eine zweite Verbesserung, mit Neuberechnung aller Hilfsgrössen, herabgedrückt werden können, zeigt sich, wie folgt:

$\log \partial \varrho \dots\dots\dots$	6,61734 _n	$\log x' \dots\dots\dots$	0,057116	<div> <div>Controlle:</div> <div> $\log y^2 \dots\dots\dots$ 0,461142 $\log 2/r \dots\dots\dots$ 0,461142 $\log q \dots\dots\dots$ 9,111002 $v \dots\dots\dots$ 128° 48' 6",0 $T = \text{Jan. 17,08880 Gr. M. Z.}$ </div> </div>	
$\log \partial x' \dots\dots\dots$	6,85757	$\log y' \dots\dots\dots$	0,038560 _n		
$\log \partial y' \dots\dots\dots$	6,53814 _n	$\log z' \dots\dots\dots$	9,799089		
$\log \partial z' \dots\dots\dots$	6,87963 _n	$\log r' \dots\dots\dots$	0,185700		
		$\log x \dots\dots\dots$	9,716156		
$\log \partial x \dots\dots\dots$	6,53729 _n	$\log y \dots\dots\dots$	9,275494 _n		
$\log \partial y \dots\dots\dots$	6,35505	$\log z \dots\dots\dots$	9,618056		
$\log \partial z \dots\dots\dots$	5,60582 _n	$\log r \dots\dots\dots$	9,839888		

i	1	3
$v_i \dots\dots\dots$	29° 41' 46",2	145° 32' 35",0
$\log r_i \dots\dots\dots$	9,140502	0,167882
$\log \gamma_i \dots\dots\dots$	9,816079 _n	9,611476
$\log f_i \dots\dots\dots$	9,579983	9,879909
$\log g_i \dots\dots\dots$	9,268867 _n	9,761224
$(B - R) \begin{cases} \partial, \alpha_i & \dots\dots\dots \\ \partial \delta_i & \dots\dots\dots \end{cases}$	$\begin{matrix} -0''9 \\ -1,0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -0''3 \\ +19,7 \end{matrix}$

Da alle Unterschiede $B - R$, ausser δ_3 , jetzt innerhalb der Unsicherheit der Rechnung fortgeschafft sind, so ist eine weitere Verbesserung unter Beibehaltung der parabolischen Hypothese nicht möglich. Der Unterschied $\partial \delta_3 = +19'',7$ deutet auch hier auf eine Abweichung von der Parabel. Die allgemeinen Elemente sind aber wegen der Unsicherheit der Beobachtungen aus dem gegebenen geocentrischen Bogen unbestimmbar.

¹⁾ Wegen eines Rechenfehlers stimmt das in Lick Observatory Bull. Nr. 179 ursprünglich veröffentlichte Resultat der ersten Bahnverbesserung etc. mit den hier abgeleiteten Resultaten nicht überein. Der Unterschied in den Endresultaten rührt jedoch nur daher, dass in L. O. Bull. Nr. 179 die nicht ganz fortzuschaffenden Unterschiede $B - R$ auf den ersten und dritten Ort vertheilt, während sie hier in δ_3 vereint sind. Spätere Beobachtungen werden daher durch die Bahn in L. O. Bull. Nr. 179 etwas besser dargestellt.

Für die übrigen Elemente und für die Constanten für den Aequator erhält man nach A VII a:

Elemente.

$$\begin{aligned} T &= 1910 \text{ Jan. } 17,08880 \text{ Gr. M. Z.} \\ \omega &= 320^{\circ} 57' 51'',4 \\ \left. \begin{aligned} \lambda &= 88 \ 49 \ 28,8 \\ i &= 138 \ 46 \ 42,5 \end{aligned} \right\} 1910,0 \\ \log q &= 9,111002 \end{aligned}$$

Constanten für den Aequator.

$$\begin{aligned} x &= r [9,876385] \sin (322^{\circ} 31' 36'',1 + v) \\ y &= r [9,981342] \sin (67 \ 44 \ 3,9 + v) \\ z &= r [9,856490] \sin (354 \ 35 \ 3,1 + v) \end{aligned}$$

Viertes Beispiel.

Als Beispiel der Anwendung der geschlossenen Ausdrücke für f , g , ∂f , ∂g bei der Bahnverbesserung im Falle einer nahezu parabolischen Bahn mit sehr langem Bogen (Formeln Bb) möge folgende, von Prof. Crawford und Herrn Meyer durchgeführte Rechnung der Bahn des Kometen c 1909 (Halley) dienen. Es ist zu bemerken, dass diese Bahn nur auf drei Oertern während der letzten Erscheinung beruht und daher nicht mit Bahnen, welche aus mehreren Erscheinungen abgeleitet sind, vergleichbar ist.

Die Bahnbestimmung beruht auf den folgenden Beobachtungen. Dabei sind die Beobachtungszeiten bereits für planetarische Aberration und die Coordinaten für Parallaxe corrigirt. Der mittlere Ort ist ein aus vier Beobachtungen abgeleiteter Normalort.

Gr. M. Z. 1909	α (1909.0)	δ (1909.0)	Beobachter
Jan. 260,85720	$94^{\circ} 44' 51'',6$	$+ 17^{\circ} \ 8' \ 59'',2$	Barnard-Yerkes
„ 350,77347	$49 \ 56 \ 33,7$	$+ 13 \ 59 \ 51,8$	Aitken-Lick
„ 424,63910	$8 \ 32 \ 55,9$	$+ 7 \ 53 \ 50,0$	Aitken-Lick

Coordinaten der Sonne:

	X	Y	Z
I	$-1,0003516$	$+ 0,0839090$	$+ 0,0364017$
II	$-0,0908435$	$-0,8988308$	$-0,3899142$
III	$+ 0,9293000$	$-0,3157650$	$-0,1369780$

Aus einer genäherten Bahn wurden folgende Ausgangswerthe und Hilfsgrößen, ganz wie beim dritten Beispiel, berechnet:

$\log \varrho$	$0,1324984$	$\log a$	$1,2458366$
$\log x'$	$8,9623567$	$\log r$	$0,3507902$
$\log y'$	$9,9489304_n$	$\log x$	$9,9722279$
$\log z'$	$9,2789578_n$	$\log y$	$0,2802252$
$\log r'$	$0,8911110_n$	$\log z$	$0,8561779$
$\log \gamma_1$	$9,5954958_n$	$\log \gamma_3$	$9,7321664$
$\log f_1$	$9,9688493$	$\log f_3$	$9,9395791$
$\log g_1$	$0,1812382_n$	$\log g_3$	$0,0778568$
$\log r_1$	$0,5248727$	$\log r_3$	$0,0082889$
$\log \xi$	$9,9279914$	$\log R$	$9,99298$
$\log \eta$	$0,0032959$	$\cos \psi$	$9,92008_n$
$\log \zeta$	$0,5161043$		

Aus diesen Werthen ergeben sich die folgenden Coordinaten und Unterschiede $B-R$ für den ersten und dritten Ort:

A VI.

$\log \varrho_1$	0,5274637	$\log \varrho_3$	0,2774120
α_1	$94^\circ 44' 50'' 8$	α_3	$8^\circ 33' 57'' 9$
δ_1	$+ 17 \ 8 \ 58,4$	δ_3	$+ 7 \ 54 \ 10,2$
$(B-R) \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 \alpha_1 \\ \delta_1 \delta_1 \end{array} \right.$	$+ \ 0,8$ $+ \ 0,8$	$\delta_1 \alpha_3$	$- \ 62'' 0$
		$\delta_1 \delta_3$	$- \ 20,2$

B α .

VII.		p	1	3
$\log \varrho$	0,13250	$\log -\tau_3 f_1; \log \tau_1 f_3$.	0,16880 _n	9,97972
$\log R \cos \psi$	9,91306 _n	$\log g_p$	0,18124 _n	0,07786
Sub.	0,20502	Sub.	8,46333	9,40405
$\log r \cos \beta$	0,33752	$\log ()$	8,63213	9,38377 _n
$\cos \beta$	9,98073	$\log I$	8,80822	9,55986 _n
$\log x' \xi$	8,89035	$\log \sqrt{2} r \gamma_p^c$	0,50035	0,49951
$\log y' \eta$	9,95223 _n	$\log \frac{1}{2} r r' \gamma_p$	9,53637	9,67304 _n
Add.	9,96061	Add.	0,04479	9,92987
Summe	9,91284 _n	$\log ()$	0,54514	0,42938
$\log z' \zeta$	8,79506 _n	$\log \gamma_p^3$	8,78649 _n	9,19650
Add.	0,03192	$\text{colog } r_p$	9,47513	9,93171
$\log \varrho \varphi$	9,94476 _n	$\log II$	8,80676 _n	9,55759
$\log \varphi$	9,81226 _n	Add.	7,52667	7,72000
		$\log [I + II]$	6,33343	7,27759 _n
		$\log N_p$	7,57927 _n	8,52343
p	1	3	VIII.	
$\log (t_p - t_0)$	1,95384 _n	1,86844	$\log (I = x' r \gamma_p)$.	8,90865 _n
$\log \tau_3; \log \tau_1$	0,18942	0,10402	$\log II$	0,12179
$\log \frac{\gamma_p^2}{2a}$	7,64412	7,91747	Add.	9,97257
Sub.			$\log []$	0,09436
$\log (\gamma_p^c)^2$	9,99808	9,99639	$\log \gamma_p^3 / r r_p$	7,91083 _n
$\log \gamma_p^c$	9,99904	9,99820	$\log g_{x_p}$	8,00519 _n
$\log \sqrt{2} \frac{\cos \beta}{\gamma_p}$	0,54175 _n	0,40508	$\log I$	9,89522
$\log II$	0,54079 _n	0,40328	$\log II$	0,42979
$\log (I = \varphi)$	9,81226 _n	9,81226 _n	Add.	0,11127
Add.	0,07440	9,87132	$\log []$	0,54106
$\log \Phi_p$	0,61519 _n	0,27460	$\log g_{y_p}$	8,45189 _n
$\log (I = r_p \gamma_p)$	0,12037 _n	9,80046	$\log I$	9,22525
$\log 2 r \gamma_p$	0,24732 _n	0,38399	$\log II$	0,00574
$\log (\gamma_p^c)^2$	9,99808	9,99640	Add.	0,06661
$\log II$	0,24540 _n	0,38039	$\log []$	0,07235
$\log \gamma_p^2$	9,19099	9,46433	$\log g_{z_p}$	7,98318 _n
$\log r r' / \sqrt{2}$	0,09139 _n		$\log x M_p$	7,51997
$\log \gamma_p^c$	9,99904	9,99820	$\log x' N_p$	6,54163 _n
$\log III$	9,28142 _n	9,55392 _n	Add.	9,95177
$\log IV$	0,51507	0,42883	$\log m_{x_p}$	7,47174
$+ I$	- 1,31939	+ 0,63163	$\log y M_p$	7,82797
$+ II$	- 1,75954	+ 2,40100	$\log y' N_p$	7,52820
$+ III$	- 0,19117	- 0,35803	Add.	0,17651
$+ IV; - IV$	+ 3,27392	- 2,68431	$\log m_{y_p}$	8,00448
$[]$	+ 0,00382	- 0,00971	$\log z M_p$	7,40392
$\log []$	7,58206	7,98722 _n	$\log z' N_p$	6,85823
$\log \gamma_p$	9,59550 _n	9,73217	Add.	0,10879
$\text{colog } r_p$	9,47513	9,93171	$\log m_{z_p}$	7,51271
$\log M_p$	7,54774	8,54615	$\log 2 m_{x_p}$	7,77277
			$\log x \gamma_p^2$	9,16322

p	1	3	p	1	3
Add.	0,01732	0,10170	$\log f_y \sin \alpha$	9,93749	9,15033
$\log []$	9,18054	9,53826	$\log f_x \cos \alpha$	8,73218 _n	9,88239
$\log \cos \beta / r^2$	9,28515		Add.	9,97205	0,07384
$\log II$	8,46569	8,82341	$\log ()$	9,90954	9,95623
			$\sin \delta_p$	9,46963	9,13828
$\log (I = f_p \xi / \varrho)$. .	9,76434	9,73507	$\log I$	9,37917	9,09451
$\log (III = g_x p \Phi_p)$.	8,62038	9,20801	$\log (II = \cos \delta_p f_{z_p})$	9,43897	9,53514
I	+ 0,58121	+ 0,54334	Sub.	9,16915	9,80445
II	+ 0,02922	+ 0,06659	$\log []$	8,54832 _n	9,33959 _n
III	+ 0,04172	+ 0,16144	$\log B f_p$	8,02086	9,06218
f_{x_p}	+ 0,65215	+ 0,77137			
$\log f_{x_p}$	9,81434	9,88726	$\log g_y \sin \alpha$	8,45040 _n	8,15697
			$\log g_x \cos \alpha$	6,92303	8,92854
$\log 2 m_y p$	8,30551	8,87360	Add.	9,98691	0,06789
$\log y \gamma_p^2$	9,47122	9,74456	$\log ()$	8,43731 _n	8,99643
Add.	0,02869	0,05484	$\log I$	7,90694 _n	8,13471
$\log []$	9,49991	9,79940			
$\log II$	8,78506	9,08455	$\log II$	7,96343 _n	8,66606
			Sub.	9,14275	9,84868
$\log I$	9,83965	9,81038	$\log []$	7,04969	8,51474 _n
			$\log B g_p$	6,52223 _n	8,23733
$\log III$	9,06708	9,25853	$\log m_y \sin \alpha$	8,00299	7,74561
I	+ 0,69127	+ 0,64622	$\log m_x \cos \alpha$	6,38958 _n	8,55204
II	+ 0,06096	+ 0,12149	Add.	9,98929	0,06302
III	+ 0,11670	+ 0,18135	$\log ()$	7,99228	8,61506
f_{y_p}	+ 0,86893	+ 0,94906	$\log I$	7,46191	7,75334
$\log f_{y_p}$	9,93898	9,97729			
			$\log II$	7,49296	8,27254
$\log 2 m_z p$	7,81374	8,57771	Sub.	8,86986	9,84352
$\log z \gamma_p^2$	9,04717	9,32051	$\log []$	6,33177 _n	8,11606 _n
Add.	0,02466	0,07218	$\log B m_p$	5,80431	7,83865
$\log []$	9,07183	9,39269			
$\log II$	8,35698	8,67784	$\log g_p$	0,18124 _n	0,07786
			$\log C_p$	9,65378 _n	9,80045
$\log I$	9,35246	9,32319			
$\log III$	8,59837	8,94480			
I	+ 0,225142	+ 0,210470			
II	+ 0,022750	+ 0,047626			
III	+ 0,039662	+ 0,088064			
f_{z_p}	+ 0,287554	+ 0,346160			
$\log f_{z_p}$	9,45872	9,53928			
	IX.			X.	
$\log f_y \cos \alpha$	8,85682 _n	9,97242	$\log (I = C_p \sin \alpha_p)$.	9,65229 _n	8,97349
$\log f_x \sin \alpha$	9,81285	9,06030	$\log (II = x A g_p)$.	7,53919	8,61135
Sub.	0,04558	9,94329	$\log (III = 2x' A m_p)$	6,31447 _n	7,48550
$\log []$	9,85843 _n	9,91571			
$\log \varrho_p$	0,52746	0,27741	I	- 0,44904	+ 0,094078
$\log A f_p$	9,33097 _n	9,63830	- II	- 0,00346	- 0,040865
			- III	+ 0,00021	- 0,003058
$\log I$	7,36973	8,97906	- b_1 ; - b_3	- 0,45229	+ 0,050155
$\log II$	8,00370 _n	8,10645	$\log b_1$; $\log b_3$. . .	9,65542	8,70032 _n
Sub.	0,09072	9,93747			
$\log []$	8,09442	8,91653	$\log I$	8,04125	8,93386
$\log A g_p$	7,50696	8,63912	$\log II$	6,49446 _n	8,20956
			$\log III$	5,06770	7,10204
$\log I$	6,92232 _n	8,56770	I	+ 0,0109964	+ 0,085874
$\log II$	7,47025	7,72995	- II	+ 0,0003122	- 0,016202
Sub.	0,10829	9,93182	- III	- 0,0000117	- 0,001265
$\log []$	7,57854 _n	8,49952	- b_2 ; - b_4	+ 0,0112969	+ 0,068407
$\log A m_p$	7,05108 _n	8,22211	$\log b_2$; $\log b_4$. . .	8,05296 _n	8,83510 _n
			$\log (I = C_p \cos \alpha_p)$.	8,57162	9,79558
			$\log II$	7,84719	8,91935
			$\log III$	7,30104	8,47207 _n
			I	+ 0,0372925	+ 0,62457
			II	+ 0,0070338	+ 0,08305
			III	+ 0,0020000	- 0,02965
			c_1 ; c_3	+ 0,0463263	+ 0,67797
			$\log c_1$; $\log c_3$. . .	8,66583	9,83121

p	1	3	p	1	3
$\log I$	9,12192 _n	8,11177	$\log (I = C_p \cos \delta_p)$	9,63403 _n	9,79631
$\log II$	6,80246 _n	8,51756	$\log II$	6,37841 _n	8,09351
$\log III$	6,05427 _n	8,08861 _n	$\log III$	5,38430 _n	7,41864 _n
I	— 0,132409	+ 0,0129351	I	— 0,43056	+ 0,62561
— II	+ 0,000635	— 0,0329277	II	— 0,00024	+ 0,01240
— III	+ 0,000113	+ 0,0122634	III	— 0,00002	— 0,00262
— c_2 ; — c_4	— 0,131661	— 0,0077292	d_2 ; d_4	— 0,43082	+ 0,63539
$\log c_2$; $\log c_4$. .	9,11946	7,88813	$\log d_2$; $\log d_4$. .	9,63430 _n	9,80304
$\log (I = z A g_p)$. .	7,42314	8,49530	$\log \delta \alpha_p$	9,90849	1,79232 _n
$\log II$	6,63107	7,80210 _n	$\cos \delta_p$	9,98025	9,99586
Add.	0,00499	9,90163	$\log \sin 1''$	4,68558	
$\log d_1$; $\log d_3$. .	7,48813	8,39693	$\log n_1$; $\log n_3$. .	4,57432	6,47376 _n
			$\log \delta \delta_p$	9,92428	1,30643 _n
			$\log n_2$; $\log n_4$. .	4,60986	5,99201 _n

Man hat also folgende Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten, wobei die Coefficienten logarithmisch angesetzt sind:

$$\begin{aligned}
 (9,33097_n) \delta \varrho + (9,65542) \delta x' + (8,66583) \delta y' + (7,48813) \delta z' &= (4,57432) \\
 (8,02086) \delta \varrho + (8,05296_n) \delta x' + (9,11946) \delta y' + (9,63430_n) \delta z' &= (4,60986) \\
 (9,63830) \delta \varrho + (8,70032_n) \delta x' + (9,83121) \delta y' + (8,39693) \delta z' &= (6,47376_n) \\
 (9,06218) \delta \varrho + (8,83510_n) \delta x' + (7,88813) \delta y' + (9,80304) \delta z' &= (5,99201_n)
 \end{aligned}$$

Die Auflösung ergibt:

$$\log \delta \varrho . . . 5,37967 \quad \log \delta x' . . . 5,82046 \quad \log \delta y' . . . 6,64756_n \quad \log \delta z' . . . 6,16537_n$$

und daher:

$$\log \delta x . . . 5,17516 \quad \log \delta y . . . 5,25047 \quad \log \delta z . . . 4,76328$$

Rechnet man nun mit den verbesserten heliocentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten noch r, r' nach A IV, die nöthigen Elemente nach A VII, und endlich f_1, f_3, g_1, g_3 nach B VI', B VI'', so ergeben sich die folgenden Unterschiede $B - R$ aus A VI:

	1	3
$(B - R) \left\{ \begin{array}{l} \delta, \alpha \\ \delta, \delta \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 0'',0 \\ 0,0 \end{array}$	$\begin{array}{l} -0'',1 \\ 0,0 \end{array}$

Da es hier nur darauf ankommt, den Gang der Bahnverbesserung zu erläutern, so kann die Ableitung der verbesserten Elemente und der Constanten für den Aequator, die ganz wie in den vorhergehenden Beispielen vor sich geht, unterlassen werden.

Fünftes Beispiel.

Als Beispiele der vollständigen Parallaxenelimination bei erster Bahnbestimmung, sowie der Anwendung der geschlossenen Ausdrücke für $f, g, \partial f, \partial g$ bei der Bahnverbesserung auf Grund eines längeren Bogens (Formeln B β), im Falle einer Ausgangsellipse von mässiger Excentricität, möge folgende, von den Herren S. Einarsson und R. Young durchgeführte Rechnung von Bahnen des Kometen e 1909 (Daniel) dienen:

A I.

Die erste Bahnbestimmung beruht auf den folgenden Beobachtungen von Aitken auf der Licksternwarte, welche bereits auf den Jahresanfang einschliesslich der Aberrationsglieder reducirt sind:

1909, Gr. M. Z.	α (1909.0)	δ (1909.0)
Dec. 11.74000	94° 23' 43",3	+ 38° 06' 15",2
Dec. 15.70788	94 29 59, 2	+ 41 12 20, 6
Dec. 18.75589	94 30 46, 4	+ 43 25 59, 3

Coordinationen der Sonne.

	X	Y	Z
I	— 0,1780529	— 0,8882410	— 0,3853174
II	— 0,1093873	— 0,8971793	— 0,3891974
III	— 0,0562684	— 0,9010569	— 0,3908799

Geschwindigkeit der Sonnencoordinaten.

$$\log X' . . . 0,004615 \quad \log Y' . . . 8,994638_n \quad \log Z' . . . 8,632210_n$$

Da die Beobachtungen als verhältnissmässig genau betrachtet werden können, so sollen die Beobachtungsfehler ganz ausser Acht gelassen und sofort die in den α' , δ' , α'' , δ'' durch Vernachlässigung der f''' verursachten Fehler abgeschätzt werden. Die Zwischenzeiten und die Differenzen in α und δ sind:

$t_2 - t_1$	3,9679	$\alpha_2 - \alpha_1$	375",9	$\delta_2 - \delta_1$	11165",4
$t_3 - t_2$	3,0480	$\alpha_3 - \alpha_2$	47, 2	$\delta_3 - \delta_2$	8018, 7

Ueberschlagsweise, auf ein constantes Intervall von 3,5 Tagen reducirt, ergibt sich folgendes Differenzenschema:

f'_α	f''_α	f'_δ	f''_δ
331",6	— 276",8	9208",6	638",8
54, 2		9848, 8	
193		9529	

Unter den f'_α und f'_δ sind gleich die Durchschnittswerthe, von denen α' , δ' der Hauptsache nach abhängen, angesetzt. Das Verhältniss der f'' zu den f' ist dann in α und δ , 1,4, bezüglich 0,07. Nimmt man ein gleiches Verhältniss der f''' zu den f'' an, so ergibt sich $f'''_\alpha = 393''$; $f'''_\delta = 43''$. Es leuchtet sofort ein, dass δ' , δ'' viel genauer mit Vernachlässigung der f''' bestimmt werden können als α' , α'' . Um den Fehler in α' abzuschätzen, hat man $\frac{f'''_\alpha}{6} = 66''$ mit $f'_\alpha = 193''$ zu vergleichen. Es ist also der Fehler in α' etwa gleich $\frac{1}{3} \alpha'$. Um den Fehler in α'' abzuschätzen, hat man

$$\frac{\tau_3 - \tau_1}{3} \frac{f'''_\alpha}{\tau} = \frac{0,92}{3} \frac{f'''_\alpha}{3,5} = 36'' \text{ mit } f''_\alpha = 277''$$

zu vergleichen. Es ist also der Fehler in α'' etwa gleich $\frac{1}{8} \alpha''$. Ganz ebenso findet sich, dass der Fehler in δ' nur etwa gleich $\frac{1}{1860} \delta'$ und derjenige in δ'' nur $\frac{1}{160} \delta''$ ist.

Wegen des grossen Fehlers in α' könnte man nun schliessen, dass es nicht der Mühe werth sein wird, eine vollständige Elimination der Parallaxe vorzunehmen. Ueberhaupt wird zum Zwecke der Darstellung der Beobachtungen eine solche Elimination nur äusserst selten angebracht sein, wie auch an diesem Beispiele noch besonders

klar gemacht werden wird. Bedenkt man jedoch, dass die f_a^I ziemlich klein sind und dass für f_a^{III} ein verhältnissmässig sehr grosser Werth angenommen wurde, so ist es nicht ausgeschlossen, dass die Genauigkeit der Bahn doch durch die Parallaxenelimination erhöht werden kann, obwohl ein derartiges Resultat bei ersten Bahnbestimmungen wegen der erforderlichen Mehrarbeit fast ausschliesslich von theoretischer und nicht von praktischer Wichtigkeit ist. Es wird aber hier ausserdem bezweckt, die Methode der Parallaxenelimination ausführlich zu erläutern, und es sollen daher zunächst die allgemeinen Parallaxenfactors nach der Anmerkung 1, S. 999 berechnet werden. Die dabei erforderlichen Mondecoordinaten sind den American Ephemeris und Nautical Almanac entnommen worden.

Berechnung der barycentrischen Parallaxenfactors, sowie der Reductionen A_1X , A_1Y , A_1Z der Sonnencoordinaten auf den Schwerpunkt des Erde—Mond-Systems:

	1	2	3
Gr. M. Z.	17 ^h 46 ^m	16 ^h 59 ^m	18 ^h 08 ^m
α	94° 24'	94° 30'	94° 31'
α_{\odot}	251 14	307 33	348 59
δ	+ 38° 06'	+ 41° 12'	+ 43° 26'
δ_{\odot}	— 22 49	— 23 31	— 10 24
$\alpha - \alpha_{\odot}$	203° 10'	146° 57'	105° 32'
$\cos \delta_{\odot}$	9,9646	9,9623	9,9928
$\cos \alpha_{\odot}$	9,5075 _n	9,7849	9,9919
$\log A_1X$	4,9664	5,2415 _n	5,4790 _n
$\cos \delta_{\odot}$	9,9646	9,9623	9,9928
$\sin \alpha_{\odot}$	9,9763 _n	9,8992 _n	9,2812 _n
$\log A_1Y$	5,4352	5,3558	4,7683
$\sin \delta_{\odot}$	9,5886 _n	9,6010 _n	9,2565 _n
$\log A_1Z$	5,0829	5,0953	4,7508
$\colog \cos \delta$	0,1041	0,1235	0,1390
$\cos \delta_{\odot}$	9,9646	9,9623	9,9928
$\sin (\alpha - \alpha_{\odot})$	9,5948 _n	9,7367	9,9838
$\log p_{\alpha}^m q_m$	0,4722 _n	0,6312	0,9243
$\sin \delta_{\odot}$	9,5886 _n	9,6010 _n	9,2565 _n
$\cos \delta$	9,8959	9,8765	9,8610
$\log I$	9,4845 _n	9,4775 _n	9,1175 _n
$\cos \delta_{\odot}$	9,9646	9,9623	9,9928
$\sin \delta$	9,7903	9,8187	9,8373
$\cos (\alpha - \alpha_{\odot})$	9,9635 _n	9,9233 _n	9,4278 _n
$\log II$	9,7184 _n	9,7043 _n	9,2579 _n
Sub.	9,8535	9,8362	9,5817
$\log \{ \dots \}$	9,3380 _n	9,3137 _n	8,6992 _n
$\log p_{\delta}^m q_m$	0,1467 _n	0,1224 _n	9,5079 _n

Die geocentrischen Parallaxenfactors wurden direct aus der „Table of the Sun's Parallax in R. A. and Declination“, Publications of the Lick Observatory, vol. I, S. 262, mit den Argumenten „Stundenwinkel“ und „Declination“ entnommen. Es sollen nun die geocentrischen, die barycentrischen und deren Summe, die allgemeinen Parallaxenfactors, übersichtlich zusammengestellt werden:

	1	2	3
$p_{\alpha}^g \varrho_g$	— 6",81	— 7",86	— 5",82
$p_{\alpha}^m \varrho_m$	— 2, 97	+ 4, 28	+ 8, 40
$p_{\alpha} \varrho$	— 9, 78	— 3, 58	+ 2, 58
$p_{\delta}^g \varrho_g$	+ 1, 37	+ 1, 50	+ 0, 00
$p_{\delta}^m \varrho_m$	— 1, 40	— 1, 33	— 0, 32
$p_{\delta} \varrho$	— 0, 03	+ 0, 17	— 0, 32

Wären jetzt die geocentrischen Distanzen des Kometen bekannt, so würde naturgemäss der Parallaxe dadurch vollständig Rechnung getragen werden können, dass man mit Hülfe der obigen allgemeinen Parallaxenfactoren die Beobachtungen auf den Schwerpunkt des Erde—Mond-Systems reducirt, sowie gleichzeitig die Sonnenkoordinaten durch Anbringung der oben berechneten Correctionen $\mathcal{A}_1 X$ etc. und die Geschwindigkeiten der Sonnenkoordinaten durch Anbringung der Geschwindigkeiten $(\mathcal{A}_1 X)'$ auf denselben Schwerpunkt bezieht. Dieses Verfahren würde zu denselben Resultaten führen, wie die hier vorzunehmende vollständige Elimination der Parallaxe.

Nun ist aber sofort ersichtlich, dass selbst für kleine geocentrische Distanzen die p_{δ} die Beobachtungsfehler an Grösse nicht übersteigen. Man könnte daher, ohne die Genauigkeit zu schädigen, in den folgenden Rechnungen der Parallaxenelimination die $p_{\delta} \varrho$ kurzweg der Null gleichsetzen. Ausserdem sind hier auch die Unterschiede der $p_{\alpha} \varrho$ constant, nämlich gleich 6",2. Daher könnte man alle von den zweiten Differenzen der $p_{\alpha} \varrho$ abhängigen Glieder in der Parallaxenelimination ebenfalls der Null gleichsetzen. Diese Abkürzungen sind aber im Folgenden unterlassen, da, wie oben bereits bemerkt wurde, hier bezweckt wird, den Rechenmechanismus der vollständigen Parallaxenelimination ausführlich zu erläutern.

Vorerst aber soll noch der Einfluss der Parallaxe auf die Genauigkeit von z abgeschätzt werden. Zu diesem Zwecke berechne man gleich jetzt die unter A II angegebenen Werthe von $\alpha', \delta', \alpha'', \delta''$, sowie den unter A III angegebenen Werth von N . Die drei Glieder von N sind:

$$N = 0,0000 + 0,4995 + 0,0041.$$

Ausschlaggebend für die Genauigkeit von N , und daher von $\frac{1}{m}$, ist also wieder das zweite, von α'' abhängige Glied. Da nun aber, wie oben gezeigt wurde, die zweiten Differenzen der $p_{\alpha} \varrho$ gleich Null sind, so würde die Genauigkeit von z nicht beeinflusst werden, wenn die vollständige Elimination der Parallaxe unterlassen würde. Da der Fehler in α'' etwa gleich $\frac{1}{8} \alpha''$ ist, so wird also der Fehler von N ebenfalls etwa $\frac{1}{8} N$ sein, worauf wir später noch zurückkommen werden.

Die weitere Rechnung nach Anmerkung 1, Seite 999, stellt sich wie folgt:

	1	2	3
$\cos \delta$	9,8959	9,8765	9,8610
$\sin \alpha$	9,9987	9,9987	9,9986
$\log I$	5,5703 _n	5,1150 _n	4,9571
$\sin \delta$	9,7903	9,8187	9,8373
$\cos \alpha$	8,8849 _n	8,8946 _n	8,8962 _n
$\log II$	1,8645	2,6406 _n	2,9270
Add.	9,9999	0,0015	0,0040
$\log \mathcal{A}_2 X$	5,5703 _n	5,1165 _n	4,9611

	1	2	3
$\cos \delta$	9,8959	9,8765	9,8610
$\cos \alpha$	8,8849 _n	8,8946 _n	8,8962 _n
$\log I$	4,4565	4,0109	3,8547
$\sin \delta$	9,7903	9,8187	9,8373
$\sin \alpha$	9,0987	9,9987	9,9986
$\log II$	2,0783 _n	3,7447	4,0294 _n
Sub.	142	9,9273	9,695
$\log A_2 Y$	4,4707 _n	3,6720 _n	3,5497 _n
$\log A_2 Z$	3,0852	3,8038 _n	4,0545
$\log A_1 X$	4,9664	5,2415 _n	5,4790 _n
$\log A_2 X$	5,5703 _n	5,1165 _n	4,9611
Add.	9,8757	2430	9,8430
$\log A X$	5,4460 _n	5,4845 _n	5,3220 _n
$\log A_1 Y$	5,4352	5,3558	4,7683
$\log A_2 Y$	4,4707 _n	3,6720 _n	3,4597 _n
Add.	9,9501	9,9909	9,9781
$\log A Y$	5,3853	5,3467	4,7464
$\log A_1 Z$	5,0829	5,0953	4,7508
$\log A_2 Z$	3,0852	3,8038 _n	4,0545
Add.	43	9,9772	796
$\log A Z$	5,0872	5,0725	4,8304

$P = X, Y, Z; p = x, y, z$	d_x	d_y	d_z
$\log A_2 P_3$	4,9611	3,5497 _n	4,0545
$\log I$	5,5597	4,1483 _n	4,6531
$\log A_2 P_1$	5,5703 _n	4,4707 _n	3,0852
$\log II$	6,0543 _n	4,9547 _n	3,5692
Add.	9,8324	0,0630	0,0345
\log Zähler	5,8867 _n	5,0177 _n	4,6876
$\log A_2 P_2$	5,1165 _n	3,6720 _n	3,8038 _n
\log Nenner	5,9626 _n	4,5181 _n	4,6499 _n
$\log (d_p + 1)$	9,9241	0,4996	0,0377 _n
Sub.	9,2810	9,8347	0,2825
$\log d_p$	9,2051 _n	0,3343	0,3202 _n

$\log 2 d_x$	9,5061 _n	$\log A_2 Y_2$	3,6720 _n	$\log (X_2)$	9,0391 _n
$\log 2 d_y$	0,6353	$\log j \sin a$	6,7540 _n	$\log A_2 X_2$	5,1165 _n
$\log 2 d_z$	0,6212 _n	$tg a$	9,6902 _n	$\log I$	4,1556
$\log I = \log 1/(R)^3$	0,0210	a	333° 54'	$\log (Y_2)$	9,9529 _n
$\log \tau_1 \tau_3$	7,5537	$\sin a$	9,6434 _n	$\log A_2 Y_2$	3,6720 _n
$\log II$	1,9524 _n	$\cos a$	9,9533	$\log II$	3,0249
Add.	9,9949	$\log j$	7,1106	Add.	0,1121
$\log []$	1,9473 _n	$\log II$	3,0675 _n	\log Summe	4,2677
$\log A_2 X_2$	5,1165 _n	Add.	9,9996	$\log (Z_2)$	9,5002 _n
$\log j \cos a$	7,0638	$\log []$	3,0671 _n	$\log A_2 Z_2$	3,8038 _n
$\log II$	3,0816	$\log A_2 Z_2$	3,8038 _n	$\log III$	3,3040
Add.	0,0004	$\log j tg d$	6,8709	Add.	0,0545
$\log []$	3,0820	$tg d$	9,7603	\log Zähler	4,3222
				$\log (R)$	9,9930
				$\log A_2 R_2$	4,3292

Nach Anmerkung 2, S. 999:

i	1	2	3
X	— 0,1780529	— 0,1093873	— 0,0562684
ΔX	— 0279	— 0305	— 0210
(X)	— 0,1780808	— 0,1094178	— 0,0562894
Y	— 0,8882410	— 0,8971793	— 0,9010569
ΔY	+ 0243	+ 0222	+ 056
(Y)	— 0,8882167	— 0,8971571	— 0,9010513
Z	— 0,3853174	— 0,3891974	— 0,3908799
ΔZ	+ 0122	+ 0118	+ 068
(Z)	— 0,3853052	— 0,3891856	— 0,3908731
A 263° 02' 47",5	D — 23° 17' 49",5	$(R) = 0,984038$	

A II a.

$\log \alpha'$	8,148227	$\log \delta'$	9,883022	$\log (tg \delta)'$	0,130182
$\log \alpha''$	9,568359 _n	$\log \delta''$	9,932162 _n	$\log (tg \delta)''$	9,468466

Nach Anmerkung 4, S. 999 ($P = X, Y, Z$):

$(\Delta P)'$	$(\Delta X)'$	$(\Delta Y)'$	$(\Delta Z)'$
$(\Delta P)_3$	— 0,0000210	+ 0,0000055	+ 0,0000068
$(\Delta P)_2$	— 0305	+ 0222	+ 0118
$(\Delta P)_1$	— 0279	+ 0243	+ 0122
$(\Delta P)_3 - (\Delta P)_2$	+ 0,0000095	— 0,0000167	— 0,0000050
$(\Delta P)_2 - (\Delta P)_1$	— 026	— 021	— 04
$\log [(\Delta P)_3 - (\Delta P)_2]$. .	4,9777	5,2227 _n	4,6990 _n
$\log [(\Delta P)_2 - (\Delta P)_1]$. .	4,4150 _n	4,3222 _n	3,6021 _n
$\log (\Delta P)_1$	4,4937	4,7387 _n	4,2150 _n
$\log (\Delta P)_3$	3,8164 _n	3,7236 _n	3,0035 _n
$\log (t_3 - t_2)$	0,4840	0,4840	0,4840
$\log I$	4,3004 _n	4,2076 _n	3,4875 _n
$\log (t_2 - t_1)$	0,5986	0,5986	0,5986
$\log II$	5,0923	5,3373 _n	4,8136 _n
Add.	9,9235	0,0311	0,0200
\log Nenner	5,0158	5,3684 _n	4,8336 _n
$\log (\Delta P)'$	5,9341	6,2867 _n	5,7519 _n

A III a, c.

$\log n$	9,468722	$\log s$	9,540590	$\log N$	9,702125
$\log C_1$	9,631002 _n	$\log \Gamma$	9,666908 _n	$\log x$	9,672183 _n
$\log C_2$	9,297910	$\log \Phi$	9,787231 _n	$\log a_x$	8,265375
$\log c$	9,972105 _n	$\log \frac{\lambda}{x}$	9,616567 _n	$\log a_y$	9,616387 _n
ψ	159° 41' 0,0''			$\log a_z$	9,994487

Nach Anmerkung 1, S. 1000:

$a - \alpha$	239° 24'	$\log \Gamma$	9,6669 _n	$\log I$	8,1575 _n
$\log c_1$	0,0093 _n	$\log \gamma$	0,0744	$\log c_2$	9,9349 _n
$\log c_2$	9,9349 _n	$\log \frac{\Gamma}{\gamma}$	9,7413	$\log (tg \delta)'$	0,1302
$\log j$	7,1106 _n	\log Zähler	0,1907	$\log II$	0,0651 _n
$\log j c_2$	7,0455 _n	$\log \Phi$	0,2128 _n	Add.	0,0053
$\log 2$	9,6990	$\log \beta$	7,1480 _n	$\log []$	0,0704 _n
\log Summe	6,7445 _n	$\log \alpha'$	8,1482	$\log j/N$	7,4084
				$\log \Delta x$	7,4788

$[P]'$	$[X]'$	$[Y]'$	$[Z]'$
$\log P'$	0,004615	8,994638 _n	8,632210 _n
$\log (\Delta P)'$	5,9341	6,2867 _n	5,7519 _n
Add.	037	0850	0572
\log Summe	0,004652	8,995488 _n	8,632782 _n
$\log III$	6,0426	7,1467 _n	7,0903 _n
Add.	048	0,006109	0,012278
$\log [P]'$	0,004700	9,001597 _n	8,645060 _n

A IV a.

$\log a^2$	9,812094	q'^2	1,64537	h	+ 3,23519
$\log b$	8,094215	p'	+ 0,019458	c'	— 0,957246
$\log G^2$	0,014480				

Da $p' > 0$, $c < 0$, und $\psi > 125^\circ 16'$ ist, so ist, nach Anmerkung 1, S. 468, nur eine parabolische Lösung möglich. Die graphische Lösung ergibt $z = 0,628992$. Mit dem oben bereits angegebenen Werthe von x findet sich $\frac{1}{m} = 1,50067$ und somit $z_L = 0,5051$. Es entspricht nun in der Tafel XVI eine Aenderung von 0,01 in z einer Aenderung von 0,015 in $\frac{1}{m}$. Dem Unterschiede $z - z_L = 0,124$ entspricht also eine Unsicherheit von 0,19. Es wurde aber oben gefunden, dass die Unsicherheit in N gleich $\frac{1}{8} N$ ist, und da $\frac{1}{m}$ dem Werthe von N proportional ist und keine weitere Unsicherheit in der Berechnung von $\frac{1}{m}$ eintritt, so ist die durch Vernachlässigung der f''' in $\frac{1}{m}$ verursachte Unsicherheit etwa $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{m}$, also etwa $= 0,19$. Die parabolische Lösung fällt also noch gerade auf die, durch die Vernachlässigung der f''' gesetzte Sicherheitsgrenze, und es ist kein Grund vorhanden, an dieser Stelle die parabolische Lösung zu verwerfen. Interpolirt man aber den Werth von z für die allgemeine Lösung aus der Tafel XVI, so erhält man $z = 0,4283$. Der Unterschied zwischen der parabolischen und allgemeinen Lösung erfordert also eine Unsicherheit von $0,30$ in $\frac{1}{m}$. Dieser Werth, welcher die Grenze $0,19$ weit übersteigt, könnte nur dadurch berechtigt sein, dass der für f''' sehr gross angenommene Werth dennoch zu klein wäre. Man wäre also jetzt berechtigt, die Parabel zu verwerfen. Anstatt dies jedoch zu thun, sollen beide Lösungen, die parabolische, und die allgemeine durchgeführt werden. Zu diesem Zwecke ist nach der Anmerkung 1, S. 1001, noch (m) zu berechnen, und der der Tafel entnommene Werth von z mit Anwendung der Differentialformel, Anmerkung 1), S. 1001, zu verbessern. Man erhält dann

$$\log(m) = 9,826358, \quad \frac{1}{(m)} = 1,49156, \quad z = 0,436426.$$

V a. c.

	Parabel	Ellipse		Parabel	Ellipse
$\log \varrho$	9,791391	9,632923	$\log x'$	0,001001 _n	0,002135 _n
$\log \sigma$	9,667811	9,509343	$\log y'$	8,963922 _n	8,521245 _n
$\log \varrho_1$	9,7840	9,6255	$\log z'$	9,702152	9,560137
$\log \varrho_2$	9,7973	9,6388	$\log r$	0,198329	0,144504
$\log \tau_1$	8,719590	8,719593	$\log r'$	9,109027	8,931513
$\log \tau_2$	8,834133	8,834135	$\log g^2$	0,102701	0,058005
$\log x$	8,862764	8,924634	$\log 1/a$	—	9,463940
$\log y$	0,133892	0,086099	$\log p$	0,493657	0,344233
$\log z$	9,901284	9,827434	$\log e^2$	0,000000	9,552737

VI a. c.

	Parabel	Ellipse		Parabel	Ellipse
$\log f_1$	9,999742	9,999625	$\log g_1$	8,834047 _n	8,834012 _n
$\log f_2$	9,999849	9,999781	$\log g_2$	8,719540	8,719520

(O — C) Parabel¹⁾.

(O — C) Ellipse¹⁾.

	1	3		1	3
∂, α	— 21''6	— 27''7	∂, α	+ 12''7	— 6''6
$\partial \delta$	— 01' 15,0	— 12, 1	$\partial \delta$	— 37, 8	+ 15, 3

¹⁾ Wegen eines Fehlers in der im Lick Observatory Bulletin Nr. 179 veröffentlichten Originalrechnung ist diese Darstellung der Beobachtungen eine bedeutend bessere.

Wie oben bereits im Voraus entschieden wurde, ist die Darstellung der Beobachtungen durch die Ellipse (allgemeine Lösung) bedeutend besser als durch die Parabel. Da die Unterschiede $B - R$ für die Ellipse für den ersten und dritten Ort durchweg entgegengesetztes Zeichen haben, so können diese Unterschiede der Hauptsache nach durch willkürliche Aenderung von x' , y' , z' entfernt werden, so dass man die Anwendung der Formeln der Bahnverbesserung in diesem Falle gänzlich vermeiden kann. Es soll diese einfache Verbesserung jedoch hier nicht vorgenommen werden, sondern die unverbesserte Bahn soll weiter unten als Ausgangsbahn für eine zweite Bahnbestimmung aus längerem geocentrischen Bogen dienen.

Um näher zu erläutern, was nun in diesem Beispiele durch die Parallaxenelimination erreicht worden ist, sollen die obigen Resultate mit denjenigen verglichen werden, welche man erhalten hätte: 1. mit vollständiger Vernachlässigung der Parallaxe; 2. wenn die Beobachtungen etc., wie oben angedeutet wurde, im Voraus durch Anbringung der allgemeinen Parallaxe auf den Schwerpunkt des Erde—Mond-Systems reducirt worden wären. Im letzteren Falle sollten die Resultate mit den durch die Elimination der Parallaxe abgeleiteten innerhalb der durch die Stellenzahl der Differenzen der α und δ gesetzten Sicherheitsgrenze übereinstimmen. Im ersteren Falle ist ein Unterschied zu erwarten: a) in z (und daher in x , y , z) wegen der durch Anbringung der Correctionen ΔX_2 etc. an die mittleren Sonnencoordinaten bewirkten Elimination der Parallaxe (während die, von den $p_\delta q$ und von den zweiten Differenzen der $p_\alpha q$ abhängigen Glieder, wie oben im Voraus gezeigt wurde, ohne Einfluss sind); b) in x' , y' , z' wegen der Elimination der ersten Differenzen in $p_\alpha q$, welche constant $= 6''.2$ waren. Beide Unterschiede können aber keinen merklichen Einfluss auf die Darstellung der Beobachtungen haben, da der mittlere Ort stets genau repräsentirt ist, selbst mit fehlerhafter geocentrischer Distanz, und da weiter, bei der Darstellung der beiden äusseren Oerter, die Geschwindigkeiten mit den Zwischenzeiten multiplicirt werden. Kleine Aenderungen der Geschwindigkeiten können daher nur bei langen Zwischenzeiten Unterschiede in der Darstellung der Beobachtungen hervorbringen. Stellt man nun die entsprechenden Resultate für die drei Arten der Bahnbestimmung zusammen, so wird man die eben gezogenen Schlüsse vollständig bestätigt finden, wobei zu bemerken ist, dass wir es hier immer noch mit unverbesserten Bahnen, d. h. directen Lösungen, zu thun haben, und dass die absolute Grösse der Unterschiede $B - R$ nicht in Betracht kommt.

	(a) Parallaxe vernachlässigt	(b) Parallaxe eliminirt	(c) Parallaxe im Voraus angebracht
z	0,4283	0,4364	0,4371

Die beiden letzteren Werthe von z stimmen miteinander vollständig innerhalb der unvermeidlichen Unsicherheit der Lösungen überein, wogegen bei Vernachlässigung der Parallaxe z um 0,0084 von dem Mittel der beiden anderen Lösungen abweicht. Auch dieser Unterschied ist unbedeutend, würde aber grösser gewesen sein, wenn hier nicht zufällig die ersten Differenzen der $p_\alpha q$ konstant und die $p_\delta q$ nicht sehr klein gewesen wären.

$O - C$	(a)	(b)	(c)
δ, α_1	+ 11''	+ 13''	+ 12''
$\delta \delta_1$	— 36	— 38	— 38
δ, α_3	— 8	— 7	— 6
$\delta \delta_3$	+ 17	+ 15	+ 14

Die Darstellung der Beobachtungen ist also wegen der kurzen Zwischenzeiten, wie oben vorausbestimmt wurde, fast die gleiche in den drei Fällen; vergleicht man aber die Bahnen mit der folgenden späteren Beobachtung, deren Abstand mehr als $2\frac{1}{2}$ Monate von der Epoche beträgt:

1910 März 3,47726 α (app.) $111^{\circ} 15' 51''$ δ (app.) $+ 52^{\circ} 54' 42''$ (Rambaud-Algier),
so erhält man folgende Unterschiede, $B - R$:

	(a)	(b)	(c)
$\Delta \alpha$	— 0,8	— 5,4	— 5,0
$\Delta \delta$	+ 6,5	— 2,0	— 2,7

Die Unterschiede (b) und (c) stimmen innerhalb der Unsicherheit der aus kurzen Intervallen berechneten Bahnen miteinander überein und sind bedeutend kleiner als diejenigen, welche unter (a) bei Vernachlässigung der Parallaxe erzielt wurden.

Mit der vollständigen Parallaxenelimination erzielt man also auf jeden Fall eine genauere Ephemeride. Da aber jede erste Bahnbestimmung mehr oder weniger unsicher ist, und man stets eine solche Bahn auf Grund längerer Intervalle verbessern wird, so ist dieser Vortheil hauptsächlich von theoretischem Interesse, und ist demselben nicht zu viel Gewicht beizulegen.

Die zweite Bahnbestimmung (Bahnverbesserung) beruht auf den folgenden Beobachtungen, welche bereits auf den Jahresanfang, einschliesslich der Aberrationsglieder, reducirt sind:

Gr. M. Z.	α (1909.0)	δ (1909.0)	Beobachter
1909 Dec. 7.66050	$94^{\circ} 09' 31,4$	$+ 34^{\circ} 44' 21,5$	Barnard-Yerkes
1909 Dec. 18.75589	$94 \ 30 \ 46,4$	$+ 43 \ 25 \ 50,3$	Aitken-Lick
1910 März 3.47726	$111 \ 14 \ 26,1$	$+ 52 \ 54 \ 37,2$	Rambaud-Algier

Der mittlere Ort stimmt mit dem dritten Ort der ersten Bahnbestimmung überein, so dass verschiedene, zur Bahnverbesserung notwendige Werthe direct der ersten Bahnbestimmung entnommen werden können.

Coordinationen der Sonne (1909.0):

	X	Y	Z
<i>I</i>	— 0,2477340	— 0,8745100	— 0,3793587
<i>II</i>	— 0,0562684	— 0,9010569	— 0,3908799
<i>III</i>	+ 0,9458691	— 0,2734153	— 0,1186087

Nach theilweiser Elimination der geocentrischen Parallaxe erhält man folgende Werthe für die

Coordinationen der Sonne (1909.0):

	X	Y	Z
<i>I</i>	— 0,2477581	— 0,8745050	— 0,3793684
<i>II</i>	— 0,0562888	— 0,9010553	— 0,3908799
<i>III</i>	+ 0,9458926	— 0,2734097	— 0,1186062

Ganz wie im dritten Beispiele ist ein Ausgangswerth für $\log q$ der ersten Bahn zu entnehmen und Ausgangswerthe für $x' y' z'$ aus den Constanten für den Aequator zu berechnen, und zwar ist es ganz einerlei für die vorliegenden Zwecke, welche der obigen drei Bahnen für die Ausgangswerthe herangezogen wird. Wie im dritten Beispiele hat man:

$\log \varrho$	9,651336	$\log x'$	0,002608 _n	v	+ 15° 35' 48",4
$\log x$	8,486963	$\log y'$	8,732781 _n	E	+ 07 31 30,6
$\log y$	0,088284	$\log z'$	9,561878	M	+ 02 50 00,9
$\log z$	9,844430	$\log r'$	9,048453	μ	496",138
$\log r$	0,149544				

VI.

VI''.

E_1	03° 28' 38",4	$2 g_1$	— 04° 02' 52",2	$\log f_1$	9,997141
E_3	32 14 38,1	$2 g_3$	+ 24 43 07,5	$\log f_3$	9,880218
$\log r_1$	0,144677	$\log \gamma_1$	8,983296 _n	$\log g_1$	9,279764 _n
$\log r_3$	0,242785	$\log \gamma_3$	9,765817	$\log g_3$	0,075722

(O — C).

	1	3
∂, α	— 01",5	+ 319",4
$\partial \delta$	+ 09,3	— 735,8

Diese Unterschiede entsprechen also wieder einer intermediären Ausgangsbahn, deren Constanten α_2 , δ_2 und die obigen, auf Grund der ersten Bahnbestimmung angenommenen Werthe von ϱ , x' , y' , z' sind.

VII.

$\log \varrho$	9,651336	Add.	9,67128	$\log \xi$	8,40826 _n
$\log R \cos \psi$	9,962755 _n	$\log \text{Summe}$	7,91509	$\log \eta$	0,51103
Sub.	0,172656	$\log \varepsilon' \zeta$	9,05049	$\log \zeta$	9,48861
$\log \text{Zähler}$	0,135411	Add.	0,03069	$\log \xi/\varrho$	8,75692 _n
$\log r$	0,149544	$\log \text{Zähler}$	9,08118	$\log \eta/\varrho$	9,85969
$\cos \beta$	9,985867	$\log \varrho$	9,65134	$\log \xi/\varrho$	9,83727
$\log x' \xi$	8,41087	$\log \Phi$	9,42984		
$\log y' \eta$	8,24381 _n				

i	1	3	i	1	3
$\log \gamma_i^2$	7,96659	9,53163	$\log a \gamma_i$	9,55290 _n	0,33542
$\log R^2/2a$	7,09596	8,66100	$\log M_i$	5,43666	8,49670
Sub.	9,99946	9,97963	$\log \frac{r r'}{2} \gamma_i$	7,88027 _n	8,66279
$\log \gamma_i^2$	9,99973	9,98982	$\log \sqrt{2} r \gamma_i^2$	0,29979	0,28088
$\log \sqrt{2} \cos \beta \gamma_i^c$	0,13611	0,12620	Add.	9,99835	0,01013
$\log \frac{\sqrt{2}}{\gamma_i} \cos \beta \gamma_i^c$	1,15281 _n	0,36038	$\log ()$	0,29814	0,30001
Add.	9,99170	0,04819	$\log \gamma_i^3$	6,94990 _n	9,29746
$\log \Phi_i$	1,14451 _n	0,40857	$\log r_i$	9,85532	9,75722
$\log 2 r \gamma_i \gamma_i^c$	9,43360 _n	0,20621	$\log \gamma_i^3/r_i ()$	7,10336 _n	9,35469
$\log \frac{r r'}{\sqrt{2}} \gamma_i^2$	7,01407	8,57911	$\log \gamma_i^2$	7,96659	9,53163
Add.	9,99835	0,01013	$\log \gamma_i^2/r_i$	7,82191	9,28885
$\log \text{Summe}$	9,43195 _n	0,21634	$\log (1 - \gamma_i^2/r_i)$	9,99711	9,90609
$\log \tau_i \frac{3}{\sqrt{2}}$	9,60732	0,43560	$\log \tau_i$	9,28072	0,10900
Add., Sub.	9,69679	9,81741	$\log \mp \tau_i (1 - \gamma_i^2/r_i)$	9,27783 _n	0,01509
$\log ()$	9,12874	0,03375 _n	$\log g_i$	9,27976 _n	0,07572
$\log \gamma_i^2 ()$	9,12847	0,02357 _n	Sub.	7,64800	9,17554
$\log r_i \gamma_i$	9,12798 _n	0,00860	$\log ()$	6,92583	9,19063 _n
Add.	7,05000	8,54500	$\log 3/2 ()$	7,10192	9,36672 _n
$\log []$	6,17798	8,55360 _n	Add.	7,52000	8,44850
$\log r_i r$	9,70578	9,60768	$\log []$	4,62192 _n	7,80319 _n
			$\log N_i$	5,19152	8,37279

VIII.

$p = x, y, z$	g_{x_1}	g_{y_1}	g_{z_1}	g_{x_3}	g_{y_3}	g_{z_3}
$\log p' r \gamma_i$	9,13545	7,86562	8,69472 _n	9,91797 _n	8,64814 _n	9,17724
$\log \sqrt{2} p \gamma_i^c$	8,61721	0,23853	9,99468	8,62730	0,22862	9,98477
Add.	0,11975	0,00184	9,97767	9,97717	9,98843	0,11753
$\log []$	9,25520	0,24037	9,97235	9,89514 _n	0,21705	0,10230
$\log \gamma_i^3$	6,94990 _n	0,94990 _n	6,94990 _n	9,29740	9,29746	9,29746
$\colog r_i r$	9,70578	9,70578	9,70518	9,60768	9,60768	9,60768
$\log p_i$	5,91088 _n	6,89605 _n	6,62803	8,80028 _n	9,12219	9,00744
	m_{x_1}	m_{y_1}	m_{z_1}	m_{x_3}	m_{y_3}	m_{z_3}
$\log p M_i$	3,92362	5,52494	5,28109	6,98366	8,58498	8,34113
$\log p' N_i$	5,19413 _n	3,92430 _n	4,75340	8,37540 _n	7,10557 _n	7,93467
Add.	9,97606	9,98897	0,11284	9,98201	9,98536	0,14371
$\log m_{p_i}$	5,17019 _n	5,51391	5,19393	8,35741 _n	8,57034	8,48484
	f_{x_1}	f_{y_1}	f_{z_1}	f_{x_3}	f_{y_3}	f_{z_3}
$\log I$	8,75406 _n	9,85683	9,83441	8,63714 _n	9,73991	9,71749
$\log 2 m_{p_i}$	5,47122 _n	5,81494	5,69496	8,65844 _n	8,87137	8,78587
$\log p \gamma_i^2$	6,45355	8,05487	7,81102	8,01859	9,61991	9,37606
$\log II$	5,15800 _n	5,50172	5,38174	8,34522 _n	8,55815	8,47265
$\log III$	6,14033	7,74165	7,49780	7,70537	9,30669	9,06284
$\log IV$	7,055 9	8,04050	7,77254	9,20885 _n	9,53076	9,41601
+ I	— 0,0567625	+ 0,719167	+ 0,682983	— 0,0433650	+ 0,549425	+ 0,521788
+ II	— 0144	+ 032	+ 024	— ,0221421	+ ,036154	+ ,029692
+ III	+ 01381	+ 05516	+ 03146	+ 050742	+ 0,202624	+ 0,115568
+ IV	+ 011360	+ ,010979	+ 05923	— 0,1617520	+ 0,339438	+ 0,260624
f_{p_i}	— 0,0555028	+ 0,735694	+ 0,692076	— 0,222185	+ 1,127641	+ 0,927672
$\log f_{p_i}$	8,74431 _n	9,86670	9,84016	9,34671 _n	0,05217	0,90740

IX.

i	1	3	i	1	3
$\log \sin \alpha$	9,99886	9,96945	$\log []$	6,14090	8,03535
$\cos \alpha$	8,86051 _n	9,55905 _n	$\log A g_i$	6,50653	8,01100
$\sin \delta$	9,75573	9,90184	$\log \cos \alpha . m_{y_i}$	4,37442 _n	8,12939 _n
$\cos \delta$	9,91476	9,78037	$\log \sin \alpha . m_{x_i}$	5,16905 _n	8,32686 _n
$\log \cos \alpha f_{y_i}$	8,72721 _n	9,61122 _n	Sub.	9,92404	9,76019
$\log \sin \alpha f_{x_i}$	8,74317 _n	9,31616 _n	$\log []$	5,09309	7,88958
Sub.	8,57325	9,98798	$\log A m_i$	5,45872	7,86523
$\log []$	7,30046	9,30414 _n	$\log \sin \alpha . f_{y_i}$	9,86556	0,02162
$\log I = \log 1/q_i []$	7,66609	9,27979 _n	$\log \cos \alpha . f_{x_i}$	7,60482	8,90576
$\log q_i$	9,63437	0,02435	Add.	0,00238	0,03205
$\log q_i^2$	9,26874	0,04870	$\log ()$	9,86794	0,05367
$\log P_\alpha q_i$	5,4589 _n	5,5990	$\log \sin \delta ()$	9,62367	9,95551
$\colog q_i^3$	0,73126	9,95130	$\log \cos \delta f_{z_i}$	9,75492	9,74777
$\log II^1$	6,10492 _n	5,33067	Sub.	9,54758	9,78774
Add.	9,98791	9,99995	$\log []$	9,17125 _n	9,53551
$\log A f_i$	7,65400	9,27974 _n	$\log I = \log 1/q_i []$	9,53688	9,51116 _n
$\log \cos \alpha . g_{y_i}$	5,75656	8,68124 _n	$\log p_\delta q_i$	5,0705	4,6184 _n
$\log \sin \alpha . g_{x_i}$	5,90974 _n	8,76973 _n	$\log II^1 = \log p_\delta q_i / q_i^2$	5,80176	4,5697 _n
Sub.	0,23116	9,35411	Add.	0,00008	0,00001
			$\log B f_i$	9,53696	9,51117 _n

¹⁾ cf. die Anmerkung S. 1029.

IX (Fortsetzung).

	1	3		1	3
$\log \sin \alpha \, g y_i$	6,89491 n	9,09164	$\log \cos \alpha \, m x_i$	4,03070	7,91646
$\log \cos \alpha \, g x_i$	4,77139	8,35933	Add.	0,01408	0,09274
Add.	9,99672	0,07380	$\log ()$	5,52685	8,63253
$\log ()$	6,89163 n	9,16544	$\log \sin \delta ()$	5,28258	8,53437
$\log \sin \delta ()$	6,64736 n	9,06728	$\log \cos \delta \, m z_i$	5,30869	8,26521
$\log \cos \delta \, g z_i$	6,54279 n	8,78781	Sub.	8,79217	9,93374
Sub.	9,43495	9,95575	$\log []$	4,07475 n	8,19895
$\log []$	5,97774 n	8,74356	$\log B m_i$	4,44038	8,17460 n
$\log B g_i$	6,34337	8,71921 n	$\log g_i$	9,27976 n	0,07572
$\log \sin \alpha \, m y_i$	5,51277	8,53979	$\log C_i$	9,64539 n	0,05137

X.

Es ergeben sich also die folgenden Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten $\partial \varrho$, $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$, wobei die Coefficienten logarithmisch angesetzt sind:

$$\begin{aligned} (7,65400) \, \partial \varrho + (9,64421) \, \partial x' + (8,51116) \, \partial y' + (6,38976) \, \partial z' &= 4,85560 n \\ (9,53696) \, \partial \varrho + (8,26160 n) \, \partial x' + (9,40045) \, \partial y' + (9,55997 n) \, \partial z' &= 5,65405 \\ (9,27974 n) \, \partial \varrho + (0,02675 n) \, \partial x' + (9,59770 n) \, \partial y' + (8,09747) \, \partial z' &= 7,18989 \\ (9,51117 n) \, \partial \varrho + (9,54871) \, \partial x' + (9,95398 n) \, \partial y' + (9,80023) \, \partial z' &= 7,55233 n \end{aligned}$$

Die Auflösung ergibt:

$$\log \partial \varrho . . \, 8,04315 n , \quad \log \partial x' . . \, 5,44027, \quad \log \partial y' . . \, 7,0605, \quad \log \partial z' . . \, 7,99555 $n$$$

und somit ferner:

$\log x$	8,495803	$\log y$	0,085441	$\log z$	9,839687
$\log x'$	0,002596 n	$\log y'$	8,724556 n	$\log z'$	9,549926

und weiter nach A Vc, B VI', VI'', A VIc:

	1	3
$(B - R) \left\{ \begin{array}{l} \partial, \alpha \, \\ \partial \delta \, \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} - 0,7 \\ - 1,2 \end{array}$	$\begin{array}{l} + 1,4 \\ - 12,6 \end{array}$

Die Neuberechnung der absoluten Glieder der obigen Gleichungen mit diesen neuen Unterschieden, und die Auflösung der Gleichungen ergibt weitere Correctionen $\partial \varrho$, $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$ und daher von ∂x , ∂y , ∂z , nach deren Anbringung an die obigen Werthe von x , y , z , x' , y' , z' man folgende endgültige Werthe erhält:

$\log x$	8,495919	$\log x'$	0,002600 n
$\log y$	0,085404	$\log y'$	8,724205 n
$\log z$	9,839623	$\log z'$	9,549805

Die Darstellung des ersten und dritten Ortes ergibt:

	1	3
$(B - R) \left\{ \begin{array}{l} \partial, \alpha \, \\ \partial \delta \, \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} + 0,8 \\ + 0,2 \end{array}$	$\begin{array}{l} - 0,2 \\ + 0,5 \end{array}$

Die Elemente und Constanten für den Aequator können in ähnlicher Weise wie in den vorangehenden Beispielen nach A VII berechnet werden.

Sechstes Beispiel.

Im Falle, wo gemäss den, in der Anmerkung 1, S. 468 enthaltenen Kriterien eine dreifache parabolische Lösung zum Vorschein kommt, lässt sich, ganz wie in den obigen Beispielen, mit Hilfe der Tafel XVI entscheiden, ob alle drei zu verwerfen sind, oder ob eine derselben mit der allgemeinen Lösung übereinstimmt und daher zu adoptiren ist.

Die grösste Anzahl der bei einer Kometenbahn in Betracht kommenden Lösungen ist fünf, nämlich drei mit und zwei ohne Voraussetzung über die Excentricität. Damit aber eine parabolische Lösung auch eine physische Bedeutung habe, muss dieselbe innerhalb der Sicherheit der Rechnung mit einer allgemeinen Lösung übereinstimmen. Dadurch reducirt sich aber die Anzahl der möglichen parabolischen Lösungen zunächst auf zwei. Somit können **drei** parabolische Lösungen überhaupt nicht in Betracht kommen. Da aber immer nur entweder eine, oder drei parabolische Lösungen in Betracht kommen, kann daher höchstens eine als von physischer Bedeutung übrig bleiben, nämlich diejenige, welche mit einer der allgemeinen Lösungen übereinstimmt.

Stimmt nun aber keine der drei mathematischen parabolischen Lösungen mit einer der beiden allgemeinen Lösungen überein, so ist die Parabel überhaupt zu verwerfen und die allgemeine Lösung durchzuführen. Da nun $q = Rz$ und $r^2 = q^2 - 2qR \cos \psi + R^2$ ist, so berechne man zunächst die beiden Werthe r_1 und r_2 , welche den Tafelwerthen z_1 und z_2 (allgemeinen Lösungen) entsprechen. Ist dann eine der heliocentrischen Distanzen r_1, r_2 grösser, die andere kleiner als R , dann kann nur eine derselben die Gleichung $\sigma = q \cos \delta = x \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right)$ befriedigen und ist als die allein mögliche allgemeine Lösung beizubehalten. Sind aber r_1 sowohl als r_2 , entweder beide $> R$, oder beide $< R$: dann und nur dann müssen, bei dem gegenwärtigen Stande der Untersuchungen über dies Problem, die beiden allgemeinen Lösungen bis zur Darstellung der Beobachtungen durchgeführt und die Entscheidung über die physisch richtige der beiden mathematischen allgemeinen Lösungen muss auf Grund der Unterschiede $B - R$ getroffen werden. Werden die Beobachtungen durch beide Lösungen dargestellt, eventuell nach Verbesserung der ersten Annäherungen, so muss eine vierte Beobachtung zur Entscheidung herangezogen werden.

In jedem Falle ist es gerathen, vor der Darstellung der Beobachtungen die halbe grosse Axe a aus $\frac{1}{a} = g^2 - x'^2 + y'^2 + z'^2$ zu berechnen. Man dürfte sich dann wohl berechtigt betrachten, etwaige hyperbolische Lösungen, sowie elliptische mit sehr kleiner Periode (etwa kleiner als zwei Jahre) von vornherein als unwahrscheinlich zu verwerfen.

Als Beispiel, wie im Falle von drei mathematischen parabolischen Lösungen die physisch richtige Lösung festzustellen ist, möge folgende von Frl. Levy ausgeführte Bahnbestimmung des Kometen a 1910 aus kurzen Zwischenzeiten dienen.

Wie in den vorhergehenden Beispielen sind die Beobachtungen bereits auf den Jahresanfang 1910.0, einschliesslich der Aberrationsglieder, reducirt.

1910, Gr M. Z.	α (1910.0)	δ (1910.0)	Beobachtungsort
Jan. 18,1287	303° 32' 52"	— 20° 53' 27"	Rom
Jan. 19,0166	307 1 0	— 17 43 31	Algier
Jan. 20,0266	310 11 24	— 14 25 38	Algier

Wie im ersten Beispiele ergeben sich die folgenden Hilfsgrößen:

A I.

X	+ 0,470804	$\log X'$	9,951520	$\log R$	9,992992
Y	— 0,792680	$\log Y'$	9,645695	A	300° 42' 28"
Z	— 0,343805	$\log Z'$	9,283051	D	339 32 45
ψ	6° 33' 20"	$\log c$	9,997151	$\log s$	9,057539

A II.

$\log \alpha'$	0,557023	$\log \delta'$	0,541683	$\log (tg \delta)'$	0,583929
$\log \alpha''$	1,670860 _n	$\log \delta''$	1,252009 _n	$\log (tg \delta)''$	1,450666 _n

A III.

$\log n$	1,51032 _n	$\log \Phi$	0,60412 _n	$\log N$	1,79951
$\log C_1$	8,74264	$\log \lambda/x$	0,33778	$\log x$	7,51196
$\log C_2$	9,04095 _n				
$\log ax$	0,62217	$\log ay$	9,63653	$\log az$	0,49703

A IV.

$\log a^2$	1,39873	q'^2	+ 0,01176	c'	+ 0,81794
$\log b$	0,63606	$\log p'$	9,24434	h/s	+ 0,73413
$\log G^2$	0,01382	$\log h$	8,92332	$1/m$	— 274,72

Da $p' > 0$ und $c > 0$, so sind nach Anmerkung 1, S. 468, drei parabolische Lösungen möglich, wenn $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ negativ ist. Die Rechnung ergibt:

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = -0,00006.$$

Es kommen also drei parabolische Lösungen in Betracht; und zwar findet man, unter Anwendung der graphischen Methode, ganz wie im ersten Beispiele, als

Parabolische Lösungen:

$$z_1^p \dots 1,0167, \quad z_2^p \dots 0,8643, \quad z_3^p \dots 0,6348.$$

Da die Tafel XVI die Werthe von $1/m$ für $\psi < 10^\circ$ nicht enthält und da in diesem Falle $\psi = 6,56$ ist, so sind die den allgemeinen Lösungen entsprechenden Werthe von z durch Auflösung der Gleichung (91) auf S. 473, unter Benutzung der, in der Anmerkung 1, S. 1001, gegebenen Differentialformel zu bestimmen. Man erhält dann als

Allgemeine Lösungen:

$$z_1'' \dots 1,08600, \quad z_2'' \dots 0,8810.$$

Es ist also festzustellen, ob eine und zwar welche der drei parabolischen Lösungen innerhalb der Unsicherheit der Lösungen mit einer allgemeinen Lösung übereinstimmt. Auf den ersten Blick ersieht man, dass die beste Uebereinstimmung zwischen z_2^p und z_2^a besteht. Die dem Werthe von z_2^p entsprechende Parabel ist also die vorläufige Bahn, vorausgesetzt, dass die sofort näher zu untersuchende Unsicherheit von z_2^a nicht bedeutend kleiner ist, als der Unterschied zwischen z_2^p und z_2^a , so dass die Parabel überhaupt zu verwerfen wäre; oder dass etwa gar der nächst in Betracht kommende Unterschied zwischen z_1^p und z_1^a kleiner als die Unsicherheit von z_1^a wäre, in welchem Falle natürlich eine Entscheidung überhaupt nicht möglich wäre. Eine derartige Unsicherheit ist indess, gemäss den Erörterungen in der 82. Vorlesung, ausgeschlossen.

Die Unsicherheit der Lösungen hängt von den Beobachtungsfehlern, der in diesem Falle vernachlässigten Parallaxe, und den, bei der Bestimmung von α' , δ' , α'' , δ'' vernachlässigten dritten und höheren Differenzen der geocentrischen Bewegung ab.

Wegen der verhältnissmässig grossen Schwierigkeit der Beobachtung dieses Kometen sollen die durch Vernachlässigung der geocentrischen und barycentrischen Parallaxe den Beobachtungen anhaftenden Fehler mit den Beobachtungsfehlern vereint gedacht und die letzteren genügend gross, und zwar auf $15''$, angesetzt werden.

Reducirt man die Differenzen der beobachteten α und δ auf eintägige Intervalle und schreibt die Differenzen wie im fünften Beispiel, S. 1038, nieder, so erhält man:

f_α^I	f_α^{II}	f_δ^I	f_δ^{II}
14064,7		12834,7	
11355,8	2860,5	11802,2	1090,3
12710		12318	

Bezeichnet man die Beobachtungsfehler mit e_1 , e_2 , e_3 , so ist der Fehler des Mittelwerthes f' offenbar gleich $\frac{e_3 - e_1}{2}$ und der Fehler von $f'' = e_3 - 2e_2 + e_1$ (cfr. auch S. 457). Unter der obigen Annahme von $e = e_1 = e_2 = e_3 = \pm 15''$ und indem man die Vorzeichen so wählt, dass die Fehler sich nicht aufheben, sondern numerisch vollauf zählen, erhält man also als Maximalfehler von f_α^I und f_δ^I den Werth $e = 15''$ und als Maximalfehler von f_α^{II} und f_δ^{II} den Werth $4e = 60''$.

Es erübrigt, die durch die vernachlässigten dritten Differenzen f_α^{III} , f_δ^{III} verursachten Fehler abzuschätzen. Das Verhältniss der f^{II} zu den f^I in α und δ ist 0,225, bezüglich 0,888. Nimmt man wieder ein gleiches Verhältniss der f^{III} zu den f^{II} an, so ergibt sich $f_\alpha^{III} = 644''$ und $f_\delta^{III} = 91''$, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen. Es ist also jetzt $\frac{f_\alpha^{III}}{6} + e = 122''$ mit $f_\alpha^I = 12710''$ und $\frac{f_\delta^{III}}{6} + e = 30''$ mit $f_\delta^I = 12318''$ zu vergleichen, um das Verhältniss des Fehlers $\partial \alpha'$ zu α' , bezüglich $\partial \delta'$ zu δ' , zu ermitteln. Es ergibt sich sodann $\partial \alpha' = \frac{1}{104} \alpha'$ und $\partial \delta' = \frac{1}{411} \delta'$.

Um den Fehler in α'' abzuschätzen, hat man $\frac{\tau_3 - \tau_1}{3} \frac{f_\alpha^{III}}{\tau} + 4e = \frac{0,12k}{3} \frac{644''}{k} + 60'' = 85''$ mit $f_\alpha^{II} = 2860''$ zu vergleichen. Es ist also der Fehler $\partial \alpha'' = \frac{1}{33} \alpha''$. Ganz ebenso findet sich der Fehler $\partial \delta'' = \frac{1}{17} \delta''$.

Die Rechnung ergab ferner:

$$N = \alpha' \operatorname{tg} \delta - \alpha'' (\operatorname{tg} \delta)' + \alpha' (\operatorname{tg} \delta)'' = -14,987 + 179,800 - 101,786 = 63,027.$$

Ausschlaggebend für die Genauigkeit von N sind also der Hauptsache nach die beiden letzten Glieder. Am wenigsten genau in diesen beiden Gliedern sind aber α'' und δ'' . Die Ungenauigkeit des zweiten Gliedes ist daher der Hauptsache nach gleich $\frac{1}{33}$ seines Werthes, also etwas mehr als 5 Einheiten. In ähnlicher Weise hat man für die Ungenauigkeit des letzten Gliedes $\frac{1}{17}$ seines Werthes, also etwa 6 Einheiten. Die Maximalungenauigkeit in N ist daher auf etwa 11 Einheiten, also auf 0,17 seines Werthes anzunehmen. Für $\frac{1}{m}$ ergab die Rechnung den Werth $-274,72$ und für $\psi = 6,56$. Da N und $\frac{1}{m}$ einander proportional sind, so ist die Maximalungenauigkeit von $\frac{1}{m}$ gleich $\pm 0,17 (274,72) = 47$ Einheiten.

Da nun die Tafel XVI die Werthe von $\frac{1}{m}$ für $\psi < 10^\circ$ nicht enthält, so kann man in diesem Falle aus derselben auch nicht den angenäherten Differentialquotienten $\frac{\partial \frac{1}{m}}{\partial z}$ direct (nämlich durch Division der entsprechenden Differenzen) entnehmen. Man kann sich aber dadurch helfen, dass man diesen Differentialquotienten durch Differentiation der Gleichung (91) auf S. 473 ableitet und erhält sodann, wenn man noch zur Abkürzung $z^2 - 2cz + 1 = \frac{r^2}{R^2} = u^2$ setzt:

$$\frac{\partial \frac{1}{m}}{\partial z} = \frac{1}{z} \left[\frac{3(z-c)}{u^5} - \frac{1}{m} \right].$$

Für die den beiden allgemeinen Lösungen entsprechenden Werthe von z , nämlich $z_1^a = 1,0899$ und $z_2^a = 0,8810$, für welche $\log r_1^a = 9,16743$ und $\log r_2^a = 9,19766$ sind, erhält man dann, wenn $\partial z_1 = \partial z_2 = 0,01$ gesetzt wird:

$$1. \quad \frac{\partial \frac{1}{m}}{\partial z} = 38,15; \qquad 2. \quad \frac{\partial \frac{1}{m}}{\partial z} = -33,16.$$

Das Vorzeichen von $\frac{\partial \frac{1}{m}}{\partial z}$ ist natürlich nicht von Belang. Da nun die oben abgeleitete ungefähre Unsicherheit $\Delta \frac{1}{m} = 47$ ist, so ergibt sich also für die Unsicherheit der beiden allgemeinen Werthe von z :

$$\Delta z_1^a = 0,0123; \qquad \Delta z_2^a = 0,0142.$$

Es stimmt daher nur die **zweite parabolische** Lösung, für welche $z_2^p = 0,8643$ ist, mit der **zweiten allgemeinen** Lösung, für welche $z_2^a = 0,8810$ ist, hinsichtlich der Unsicherheit der Lösungen überein, denn es ist die Differenz $z_2^a - z_2^p = 0,0167$ nur um Weniges grösser als die Unsicherheit $\Delta z_2^a = 0,0142$. Die beiden anderen parabolischen Lösungen sind daher zu verwerfen.

Die parabolische Lösung z_2^p liegt zwar etwas ausserhalb der Uebereinstimmungsgrenze mit der allgemeinen Lösung z_2^a ; da aber die Unsicherheit einer allgemeinen Lösung immer nur angenähert, wie oben, bestimmt werden kann, so ist kein Grund vorhanden, die einzig in Betracht kommende parabolische Lösung zu verwerfen.

Dem in der Astronomie gegenwärtig bestehenden Gebrauche gemäss, wonach die Parabel als Lösung zu betrachten ist, wenn auch die Beobachtungen durch eine solche dargestellt werden können, wäre also die Rechnung mit dem Werthe z_2^p , genau wie im ersten Beispiele, fortzusetzen.

Wenn statt der geschlossenen Ausdrücke, wie sie in den Beispielen 3, 4 und 5 angewandt wurden, die Reihen für f , g , ∂f , ∂g genügen, so rechnet man ohne Unterschied der Excentricität der Ausgangsbahn nach den Formeln $B\alpha$, I—VI. Wegen der Einfachheit der Rechnung kann ein Beispiel hierfür übergangen werden.

Die directe Berechnung einer Kreisbahn unterscheidet sich so wenig von derjenigen einer Parabel, dass auch hierfür ein Beispiel unnöthig erscheint.

III. Die Bahnbestimmung mit sofortiger Berücksichtigung der Störungen.

Bei der Bahnbestimmung mit sofortiger Berücksichtigung der Störungen handelt es sich um die Berechnung von genäherten osculirenden Elementen in dem gewöhnlichen Sinne und um deren Verbesserung auf differentiellem Wege, auf Grund der Beobachtungen. Es ist also beabsichtigt, ausser der Anziehung des Centralkörpers auch derjenigen der störenden Körper von vornherein Rechnung zu tragen. Dabei sollen alle Körper als Massenpunkte betrachtet werden. Der Einfachheit halber soll hier auch nur der Fall, dass ein störender Körper in Betracht kommt, behandelt werden. Der Fall, dass mehrere störende Körper oder Störungen durch Abplattung zu berücksichtigen sind, lässt sich in ganz ähnlicher Weise bearbeiten.

Die hier vorgeschlagene Methode kann zunächst auf Trabanten, welche zur Zeit der Entdeckung starken Störungen, wie z. B. von der Sonne, ausgesetzt sind, angewandt werden. Doch dürfte sie auch bei kleinen Planeten und bei Kometen, welche von einem der grossen Planeten beträchtlich gestört werden, zur Bahnbestimmung dienen.

Den Anlass zur Aufstellung der Methode boten die Schwierigkeiten, welche die Berechnung der Bahnen von Monden bereitet, welche vom Centralkörper weit entfernt und starken Störungen unterworfen sind.

Zunächst sollen zur Zeit einer, nahe der Mitte der Beobachtungszeiten gewählten Epoche t , zu welcher die Beobachtung α, δ gehören soll, die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen $\alpha', \delta', \alpha'', \delta''$ ermittelt werden. Sind diese einmal bekannt, so kann das Problem in ähnlicher Weise gelöst werden, wie die in der 82. Vorlesung entwickelten directen Methoden der Bahnbestimmung. Man wird sich vorerst graphisch vergewissern, dass die geocentrische Bewegung des gestörten Körpers nicht all zu unregelmässig ist. Dann benutzt man fünf, sieben oder eventuell mehr Oerter, und verfährt wie in der Anmerkung 1, S. 456. Es ist aber zu beachten, dass man nach den Entwicklungen des I. Abschnittes oft aus einem kürzeren Bogen genauere Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ermitteln kann, als aus einem längeren. Es sind nur genäherte Werthe erforderlich, da man doch stets zur Darstellung des ganzen gegebenen Materiales eine Bahnverbesserung, eventuell mit Anwendung der im II. Abschnitte von Vorlesung 82 gegebenen geschlossenen Formeln unternehmen wird. Die Verhältnisse lassen sich leicht durch einen Blick auf die Curven der beobachteten Rectascensionen und Declinationen entscheiden. Liegen die Verhältnisse sehr ungünstig, das heisst, ist die geocentrische Bewegung sehr unregelmässig, so ist es geraten, die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Positionswinkels und der Distanz in Bezug auf den Centralkörper zuerst zu ermitteln, und diese dann in $\alpha', \delta', \alpha'', \delta''$ zu verwandeln.

Wir wollen also jetzt annehmen, dass zur Zeit t_0 die Grössen $\alpha, \delta, \alpha', \delta', \alpha'', \delta''$ des Massenpunktes mit unbekannter Bahn gegeben sind und nun die Lösung der zweiten Aufgabe vornehmen. Dabei soll hier nur, wie bereits oben festgesetzt wurde,

ein einfacher Fall behandelt werden, und zwar der Fall, dass die Bahn eines von der Sonne stark gestörten Trabanten aus den Beobachtungen zu bestimmen ist.

Die Lösung kann in verschiedener Weise vorgenommen werden, je nach der Wahl der Coordinaten. Sehr bequem gestaltet sie sich, wenn man das Problem als die Umkehrung der Encke'schen Methode der speciellen Störungsrechnung auffasst. Bei der Rechnung der speciellen Störungen handelt es sich ja darum, aus osculirenden Elementen die gestörten Coordinaten zu ermitteln, während im Vorliegenden erstrebt wird, aus den Beobachtungen (gestörten Orten) osculirende Elemente zu bestimmen.

Gemäss unseren bisherigen Voraussetzungen nennen wir die drei in Betracht kommenden Körper „Trabant“, „Planet“ und „Sonne“. Wir nehmen an, dass die Masse des Trabanten der Null gleichgesetzt werden kann und bezeichnen mit m die Masse des Planeten, in Einheiten der Sonnenmasse.

Es seien ferner zur Zeit t_0 :

$$\begin{aligned} \alpha, \delta, \varrho, \sigma &= \varrho \cos \delta, \quad \xi, \eta, \zeta \\ &\text{Coordinaten des Trabanten in Bezug auf die Erde,} \\ a, d, r, s &= r \cos d, \quad x, y, z \\ &\text{Coordinaten des Trabanten in Bezug auf den Planeten,} \\ [a], [d], [r], [s] &= [r] \cos [d], [x], [y], [z] \\ &\text{Coordinaten des Trabanten in Bezug auf die Sonne,} \\ (\alpha), (\delta), (\varrho), (\sigma) &= (\varrho) \cos (\delta), (\xi), (\eta), (\zeta) \\ &\text{Coordinaten des Planeten in Bezug auf die Erde,} \\ (a), (d), (r), (s) &= (r) \cos (d), (x), (y), (z) \\ &\text{Coordinaten des Planeten in Bezug auf die Sonne,} \\ A, D, R, S &= R \cos D, \quad X, Y, Z \\ &\text{Coordinaten der Sonne in Bezug auf die Erde.} \end{aligned}$$

Dann sind die Bewegungsgleichungen des Trabanten in Bezug auf den Planeten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + mk^2 \frac{x}{r^3} &= -k^2 \left\{ \frac{(x)}{[r]^3} + \frac{x}{(r)^3} \right\} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + mk^2 \frac{y}{r^3} &= -k^2 \left\{ \frac{(y)}{[r]^3} + \frac{y}{(r)^3} \right\} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + mk^2 \frac{z}{r^3} &= -k^2 \left\{ \frac{(z)}{[r]^3} + \frac{z}{(r)^3} \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Setzt man:

$$mk^2 = (k)^2; \quad \frac{k^2}{(k)^2} = \frac{1}{m} = \gamma; \quad \frac{1}{(k)^2} \frac{d^2 x}{dt^2} = x''; \quad \frac{1}{(k)^2} \frac{d^2 y}{dt^2} = y''; \quad \frac{1}{(k)^2} \frac{d^2 z}{dt^2} = z'', \quad (2)$$

wobei also die Zeiteinheit gleich $\frac{1}{(k)}$ mittleren Sonnentagen angenommen ist, so erhält man aus den Gleichungen (1) die folgenden:

$$\left. \begin{aligned} x'' &= -x \left[\frac{1}{r^3} + \frac{\gamma}{[r]^3} \right] - \gamma \frac{(x)}{[r]^3} + \gamma \frac{(x)}{(r)^3} \\ y'' &= -y \left[\frac{1}{r^3} + \frac{\gamma}{[r]^3} \right] - \gamma \frac{(y)}{[r]^3} + \gamma \frac{(y)}{(r)^3} \\ z'' &= -z \left[\frac{1}{r^3} + \frac{\gamma}{[r]^3} \right] - \gamma \frac{(z)}{[r]^3} + \gamma \frac{(z)}{(r)^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Beachtet man, dass

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi - (\xi), & y &= \eta - (\eta), & z &= \xi - (\xi) \\ x'' &= \xi'' - (\xi''), & y'' &= \eta'' - (\eta''), & z'' &= \xi'' - (\xi'') \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

und dass

$$(\xi) - (x) = X, \quad (\eta) - (y) = Y, \quad (\xi) - (z) = Z, \dots \dots \dots (5)$$

so kann man die Gleichungen (3), wie folgt, schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \xi'' + \xi \left[\frac{1}{r^3} + \frac{\gamma}{[r]^3} \right] &= \frac{(\xi)}{r^3} + \gamma \frac{X}{[r]^3} + \gamma \frac{(x)}{(r)^3} + (\xi'') \\ \eta'' + \eta \left[\frac{1}{r^3} + \frac{\gamma}{[r]^3} \right] &= \frac{(\eta)}{r^3} + \gamma \frac{Y}{[r]^3} + \gamma \frac{(y)}{(r)^3} + (\eta'') \\ \xi'' + \xi \left[\frac{1}{r^3} + \frac{\gamma}{[r]^3} \right] &= \frac{(\xi)}{r^3} + \gamma \frac{Z}{[r]^3} + \gamma \frac{(z)}{(r)^3} + (\xi'') \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Mit Vernachlässigung der Erdmasse, sowie der Störungen des Planeten und der Erde lassen sich die Beschleunigungen (ξ'') , (η'') , (ξ'') des Planeten mit Hülfe der Bewegungsgleichungen des Planeten und der Erde in Bezug auf die Sonne bequem eliminieren. Zunächst hat man:

$$(\xi'') = (x'') + X'', \quad (\eta'') = (y'') + Y'', \quad (\xi'') = (z'') + Z'' \dots \dots (7)$$

und dann, gemäss der Bewegung um die Sonne:

$$\left. \begin{aligned} (x'') &= -\gamma \frac{(x)(1+m)}{(r)^3}, & (y'') &= -\gamma \frac{(y)(1+m)}{(r)^3}, & (z'') &= -\gamma \frac{(z)(1+m)}{(r)^3} \\ X'' &= -\gamma \frac{X}{R^3}, & Y'' &= -\gamma \frac{Y}{R^3}, & Z'' &= -\gamma \frac{Z}{R^3} \end{aligned} \right\} (8)$$

Es können jedoch auch genaue Ausdrücke für die Beschleunigungen (ξ'') , (η'') , (ξ'') aufgestellt werden. Doch soll auf dieselben hier nicht weiter eingegangen werden.

Substituiert man nun für (ξ'') , (η'') , (ξ'') die Ausdrücke (7) und (8) in die Gleichungen (6), so hat man zunächst für die Summe der drei letzten Glieder rechter Hand der ersten Gleichung:

$$\gamma \frac{X}{[r]^3} + \gamma \frac{(x)}{(r)^3} + (\xi'') = \gamma X \left(\frac{1}{[r]^3} - \frac{1}{R^3} \right) - \frac{(x)}{(r)^3} \dots \dots \dots (9)$$

und analoge Ausdrücke für die beiden letzten Gleichungen.

Die Gleichungen (6) sollen dazu dienen, die geocentrische Distanz ϱ , deren Geschwindigkeit ϱ' und deren Beschleunigung ϱ'' , oder auch $\sigma = \varrho \cos \delta$, σ' und σ'' aus α , δ , α' , δ' , α'' , δ'' zur Zeit t_0 zu bestimmen. Zu diesem Zwecke sind durchweg Polarcoordinaten in die Gleichungen (6) einzuführen.

Durch zweifache Differentiation der Ausdrücke:

$$\xi = \sigma \cos \alpha, \quad \eta = \sigma \sin \alpha, \quad \xi = \sigma \operatorname{tg} \delta \dots \dots \dots (10)$$

erhält man mit Rücksicht auf die angenommene Zeiteinheit von $\frac{1}{(k)}$ mittleren Sonnentagen:

$$\left. \begin{aligned} \xi'' &= \sigma'' \cos \alpha - 2 \sigma' \sin \alpha \alpha' - \sigma \sin \alpha \alpha'' - \sigma \cos \alpha (\alpha')^2 \\ \eta'' &= \sigma'' \sin \alpha + 2 \sigma' \cos \alpha \alpha' - \sigma \cos \alpha \alpha'' - \sigma \sin \alpha (\alpha')^2 \\ \xi'' &= \sigma'' \operatorname{tg} \delta + 2 \sigma' (\operatorname{tg} \delta)' + \sigma (\operatorname{tg} \delta)'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

Ausserdem hat man zur weiteren Einführung von Polarcoordinaten:

$$\left. \begin{aligned} (\xi) &= (\sigma) \cos (\alpha), & (\eta) &= (\sigma) \sin (\alpha), & (\xi) &= (\sigma) \operatorname{tg} (\delta) \\ (x) &= (s) \cos (a), & (y) &= (s) \sin (a), & (z) &= (s) \operatorname{tg} (d) \\ X &= S \cos A, & Y &= S \sin A, & Z &= S \operatorname{tg} D \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

Setzt man nun der Reihe nach die Relation (9), (10), (11) und (12) in die Gleichungen (6) ein, so entstehen die folgenden Gleichungen zur Bestimmung von σ , σ' und σ'' :

$$\left. \begin{aligned} \sigma'' \cos \alpha - 2 \sigma' \sin \alpha \alpha' - \sigma \sin \alpha \alpha'' - \sigma \cos \alpha (\alpha')^2 \\ + \sigma \cos \alpha \left[\frac{1}{r^3} + \frac{\gamma}{[r]^3} \right] &= \frac{(\sigma) \cos (\alpha)}{r^3} \\ + \gamma S \cos A \left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right] - \frac{(s) \cos (a)}{(r)^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13a)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma'' \sin \alpha + 2 \sigma' \cos \alpha \alpha' + \sigma \cos \alpha \alpha'' - \sigma \sin \alpha (\alpha')^2 \\ + \sigma \sin \alpha \left[\frac{1}{r^3} + \frac{\gamma}{[r]^3} \right] &= \frac{(\sigma) \sin (\alpha)}{r^3} \\ + \gamma S \sin A \left[\frac{1}{[r]^3} - \frac{1}{R^3} \right] - \frac{(s) \sin (a)}{(r)^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13b)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma'' \operatorname{tg} \delta + 2 \sigma' (tg \delta)' + \sigma (tg \delta)'' \\ + \sigma \operatorname{tg} \delta \left[\frac{1}{r^3} + \frac{\gamma}{[r]^3} \right] &= \frac{(\sigma) \operatorname{tg} (\delta)}{r^3} \\ + \gamma S \operatorname{tg} D \left[\frac{1}{[r]^3} - \frac{1}{R^3} \right] - \frac{(s) \operatorname{tg} (d)}{(r)^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13c)$$

Addirt man die Gleichungen (13a) und (13b), einerseits nachdem die erste mit $\cos \alpha$, die zweite mit $\sin \alpha$, anderseits nachdem die erste mit $-\sin \alpha$, die zweite mit $\cos \alpha$ multiplicirt worden ist, und behält die Gleichung (13c) unverändert bei, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \sigma'' + \sigma \left[\frac{1}{r^3} - (\alpha')^2 + \gamma \frac{1}{[r]^3} \right] &= \frac{(\sigma)}{r^3} \cos [(\alpha) - \alpha] \\ + \gamma S \left[\frac{1}{[r]^3} - \frac{1}{R^3} \right] \cos [A - \alpha] - \frac{(s)}{(r)^3} \cos [(a) - \alpha] \end{aligned} \right\} \dots \dots (14a)$$

$$\left. \begin{aligned} 2 \sigma' \alpha' + \sigma \alpha'' &= \frac{(\sigma)}{r^3} \sin [(\alpha) - \alpha] \\ + \gamma S \left[\frac{1}{[r]^3} - \frac{1}{R^3} \right] \sin [A - \alpha] - \frac{(s)}{(r)^3} \sin [(a) - \alpha] \end{aligned} \right\} \dots \dots (14b)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma'' \operatorname{tg} \delta + 2 \sigma' (tg \delta)' + \sigma \left[\frac{\operatorname{tg} \delta}{r^3} + (tg \delta)'' + \gamma \frac{\operatorname{tg} \delta}{[r]^3} \right] \\ = \frac{(\sigma)}{r^3} \operatorname{tg} (\delta) + \gamma S \left[\frac{1}{[r]^3} - \frac{1}{R^3} \right] \operatorname{tg} D - \frac{(s)}{(r)^3} \operatorname{tg} (d) \end{aligned} \right\} \dots \dots (14c)$$

In diesen Gleichungen sind γ , α , δ , α' , δ' , α'' , δ'' , (σ) , (α) , (δ) , (r) , (a) , (d) , (s) , R , A , D , S bekannte Grössen, $(tg \delta)'$ und $(tg \delta)''$ ergeben sich aus:

$$\left. \begin{aligned} (tg \delta)' &= \sec^2 \delta \delta'; \\ (tg \delta)'' &= \sec^2 \delta [2 \operatorname{tg} \delta (\delta')^2 + \delta''] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

Als Unbekannte erscheinen σ , σ' , σ'' , r und $[r]$.

Durch Auflösung der Gleichungen (14) lassen sich σ , σ' , und σ'' als Functionen der Unbekannten r und $[r]$ und bekannter Grössen darstellen. In der ersten und dritten der Gleichungen (14) enthalten die Coëfficienten von σ zwar die Unbekannten r und $[r]$, aber die Determinante der Coëfficienten von σ , σ' und σ'' ist von denselben unabhängig. Diese Determinante, welche also nur bekannte Grössen enthält, soll mit $2A$ bezeichnet werden. Substituirt man nun die Ausdrücke rechter Hand der Gleichungen

chungen (14) an Stelle der Coëfficienten von σ in $2A$, so erkennt man sofort, dass die so entstehende neue Determinante sich als die Summe von drei Determinanten schreiben lässt, von denen die erste den Factor $\frac{1}{r^3}$, die zweite den Factor $\left[\frac{1}{[r]^3} - \frac{1}{R^3}\right]$ und die dritte den Factor $\frac{1}{(r)^3}$ enthält.

Setzt man also, weil:

$$A = (\alpha')^3 tg \delta - \alpha'' (tg \delta)' + \alpha' (tg \delta)'', \quad (16a)$$

noch:

$$\left. \begin{aligned} A\kappa &= -S \{ (tg \delta \cos[A - \alpha] - tg D) \alpha' + \sin[A - \alpha] (tg \delta)' \} \\ A(\kappa) &= -(\sigma) \{ (tg \delta \cos[(\alpha) - \alpha] - tg(\delta)) \alpha' + \sin[(\alpha) - \alpha] (tg \delta)' \} \\ A[\kappa] &= -(s) \{ (tg \delta \cos[(a) - \alpha] - tg(d)) \alpha' + \sin[(a) - \alpha] (tg \delta)' \} \end{aligned} \right\} \cdot (16b)$$

so ist:

$$\sigma = \frac{(\kappa)}{r^3} + \gamma \kappa \left[\frac{1}{[r]^3} - \frac{1}{R^3} \right] - \frac{[\kappa]}{(r)^3} \cdot \dots \dots \dots (17)$$

oder auch, wenn man die Hilfsgrössen

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{\kappa}{\cos \delta}; & F &= \frac{\gamma \kappa}{\cos \delta}; \\ G &= -\frac{\gamma}{\cos \delta} \left[\frac{\kappa}{R^3} + \frac{m[\kappa]}{(r)^3} \right] = -F \left[\frac{1}{R^3} + \frac{m[\kappa]}{\kappa(r)^3} \right] \end{aligned} \right\} \cdot \dots \dots \dots (18)$$

einführt:

$$\varrho = \frac{E}{r^3} + \frac{F}{[r]^3} + G \cdot \dots \dots \dots (19)$$

in welcher Gleichung E , F und G vollständig bekannte Grössen sind.

Zur Bestimmung von ϱ , r und $[r]$ sind noch zwei weitere Gleichungen nothwendig. Diese Gleichungen erhält man aus den beiden Dreiecken, welche von Erde, Trabant, Planet und von Erde, Trabant, Sonne gebildet werden. Bezeichnet man nämlich den bekannten Winkel an der Erde in dem einen Dreieck mit ψ , in dem anderen mit $[\psi]$, so bestehen die Relationen:

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= (\varrho)^2 + \varrho^2 - 2(\varrho) \varrho \cos \psi \\ [r]^2 &= R^2 + \varrho^2 - 2R \varrho \cos [\psi] \end{aligned} \right\} \cdot \dots \dots \dots (20)$$

welche in Verbindung mit (19) die Bestimmung von ϱ , r und $[r]$ gestatten. Es möge hier noch angedeutet werden, dass die Auflösung der Gleichungen (19) und (20) sich in verhältnissmässig einfacher Weise durchführen lässt.

Sind jetzt einmal die Distanzen des Trabantens vom Planeten und von der Sonne bestimmt, so kann man auch den Centralkörper bestimmen.

Wir wollen jetzt den Fall setzen, dass es von vornherein ausgeschlossen sei, eine sichere Annahme über die Natur des neu entdeckten Körpers zu machen, wie dies z. B. bei dem achten Jupitermonde der Fall gewesen ist. Dann ergibt sich aus dem Vorhergehenden, ob der in Frage stehende Körper ein Trabant oder ein kleiner Planet ist. Die Lösung der Aufgabe aber bleibt ganz dieselbe.

Somit ermöglicht das hier angegebene Verfahren nicht nur eine Bahnbestimmung, sondern es giebt auch Aufschluss über die Natur des Körpers.

Nachdem σ ermittelt worden ist, ergibt die Gleichung (14b) noch σ' . Ausserdem erhält man σ'' aus (14a) oder (14c).

Im Weiteren verfährt man ganz ähnlich wie in den directen Methoden des I. Abschnittes der 82. Vorlesung.

Wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist, enthält die vorliegende Methode eine Verallgemeinerung der soeben citirten Methoden der Vorlesung 82. Vernachlässigt man in den vorangehenden Formeln die von der Sonnenmasse abhängigen Glieder, so entsteht eine Methode, eine ungestörte Mondbahn zu berechnen.

Zur Berechnung der Elemente dienen die Coordinaten x, y, z und die Geschwindigkeiten x', y', z' . Die ersteren erhält man aus den Gleichungen (4), erste Zeile, und die letzteren aus:

$$x' = \xi' - (\xi)'; \quad y' = \eta' - (\eta)'; \quad z' = \zeta' - (\zeta)',$$

wobei ξ', η', ζ' sich aus $\sigma', \alpha', (tg \delta)'$, wie im I. Abschnitte der 82. Vorlesung berechnen, und $(\xi)', (\eta)', (\zeta)'$ sich aus den Planetenephemeriden der astronomischen Jahrbücher durch numerische Differentiation ermitteln lassen.

Die Bahnverbesserung gestaltet sich ganz ebenso, wie in der 82. Vorlesung, nur sind bei der Berechnung der Unterschiede $(B - R)$ die durch die in Betracht gezogenen störenden Körper verursachten Störungen zu berücksichtigen. Am besten berechnet man diese Störungen nach Art der Encke'schen Methode.

Siebentes Beispiel.

Beispiel der Bahnbestimmung mit sofortiger Berücksichtigung der Störungen.

Als Beispiel dieser Methode möge folgende, von Herrn Prof. Crawford, unter Mitwirkung des Herrn A. J. Champreux durchgeführte Rechnung der durch die Sonne gestörten Bahn des siebenten Jupitertrabanten aus folgenden Beobachtungen, welche dem Lick Observatory Bulletin Nr. 78 entnommen sind, dienen, wobei zu bemerken ist, dass die Beobachtungen bereits auf den Jahresanfang, einschliesslich der Aberrationsglieder, reducirt sind, sowie, dass dieselben auf das Erdcentrum mit der Parallaxe Jupiters reducirt sind:

	Gr. M. Z.	α (1905.0)	δ (1905.0)
I 1905, Jan. 3.	15 ^h 12 ^m 0 ^s	1 ^h 16 ^m 23 ^s .68	+ 7° 13' 57".2
II 1905, Jan. 28.	14 58 0	1 27 44.32	+ 8 18 10, 7
III 1905, Febr. 8.	15 10 0	1 34 40.59	+ 8 55 18, 0
IV 1905, Febr. 21.	15 25 0	1 44 2.98	+ 9 43 51, 6
V 1905, März 6.	15 40 0	1 54 24.15	+ 10 35 49, 9

Als Epoche wurde das Datum der dritten Beobachtung gewählt. Unter Annahme von Newcomb's Werthe der Jupitermasse erhält man aus Formel (2):

$$\log(k) \dots\dots\dots 6,7255344, \quad \log \gamma \dots\dots\dots 3,020094.$$

Aus den obigen fünf Beobachtungen wurden die geocentrischen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen nach den Formeln der Anmerkung 1), Seite 456, abgeleitet, wobei die Zeiteinheit gleich $1/(k)$ mittlere Sonnentage ist.

$\log \alpha'$	0,743547	$\log (tg \delta)'$	0,200872
$\log \alpha''$	2,069686	$\log (tg \delta)''$	1,523510

Aus der Gleichung (16a) erhält man:

$$\log A \dots\dots\dots 1,352830n.$$

Den American Ephemeris und Nautical Almanac für 1905 entnimmt man die heliocentrischen Jupitercoordinaten für die Epoche:

(l)	35° 28' 34".6	} 1905,0
(b)	— 1 10 36, 0	
$\log (r)$	0,696347	

Diese auf den Aequator transformirt, werden:

(a)	33° 34' 39".6
$\log tg (d)$	9,336497

Die Coordinaten der Sonne für die Epoche sind:

X	$+ 0,7529310$
Y	$- 0,5851685$
Z	$- 0,2538530$
$\log R$	$9,9942280$
A	$322^{\circ} 8' 45'' 9$
$\log \operatorname{tg} D$	$9,425222_n$

Wiederum aus den American Ephemeris und Nautical erhält man für die geocentrischen Jupitercoordinaten zur Zeit der Epoche:

(α)	$1^{\text{h}} 34^{\text{m}} 34,14$
(δ)	$+ 8^{\circ} 41' 1'',8$
$\log(\varrho)$	$0,724258$

Aus den geocentrischen Coordinaten des Trabanten, Jupiters und der Sonne, ergibt sich:

$\sin \psi$. . .	$7,621288$	$\cos[\psi]$	$9,618345$
$\cos \psi$. . .	$9,999996$		

Die Formeln (16b) ergeben nach der Division durch \mathcal{A} :

$\log x$	$7,761025$
$\log [x]$	$6,704818_n$
$\log(x)$	$7,721069$

Aus den Formeln (18) erhält man:

$\log E$	$7,726356$
$\log F$	$0,786406$
$\log G$	$0,803722_n$

und somit für (19), (Coefficienten logarithmisch):

$$\varrho = [7,726356] r^{-3} + [0,786406] [r]^{-3} + [0,803722_n].$$

Aus dieser Gleichung müssen nun, in Verbindung mit den Gleichungen (20), die unbekannten Grössen ϱ , r und $[r]$ bestimmt werden. Die Auflösung der drei Gleichungen kann in verschiedener Weise vorgenommen werden. Es soll hier eine Gleichung für die verhältnissmässig kleine Grösse r aufgestellt werden. Setzt man in der Gleichung (19)

$H = \frac{F}{[r]^3} + G$ und eliminirt dann ϱ und $[r]$ aus den Gleichungen (19) und (20), so erhält man folgende Gleichung zur Bestimmung von r :

$$r^8 - \{[(\varrho) \cos \psi - H]^2 + (\varrho)^2 \sin^2 \psi\} r^6 + 2E[(\varrho) \cos \psi - H] r^3 - E^2 = 0,$$

oder, indem man nach r^3 auflöst:

$$r^3 = \frac{E \pm r^3 \sqrt{r^2 - (\varrho)^2 \sin^2 \psi}}{(\varrho) \cos \psi - H},$$

worin also noch H eine von der Unbekannten $[r]$ abhängige Hilfsgrösse ist. Die Gleichung für r^3 kann durch Versuche gelöst werden, indem man im ersten Versuche in dem Ausdrücke für H die heliocentrische Distanz $[r]$ des Trabanten gleich der helio-

centrischen Distanz des Jupiters setzt, und indem man ferner zunächst in dem Ausdrucke für r^3 auf der rechten Seite das mit der Quadratwurzel multiplicirte Glied vernachlässigt, so dass:

$$r^3 = \frac{E}{(\varrho) \cos \psi - H}.$$

Weiter kann man:

1. den soeben berechneten Werth von r in das mit der Quadratwurzel multiplicirte Glied einsetzen, während der erste Werth von H noch beibehalten werden kann. Man erhält dann zwei Werthe von r aus der Gleichung für r^3 , von denen der eine dem positiven, der andere dem negativen Vorzeichen der Quadratwurzel entspricht. Mit diesen beiden Werthen von r wird die Berechnung von r aus der Gleichung für r^3 fortgesetzt, indem man für jeden der beiden Werthe von r das entsprechende Vorzeichen der Quadratwurzel beibehält, und zwar so lange, bis keine weitere Aenderung der beiden Werthe für r eintritt. Es muss aber jetzt noch die erste Annahme für H verbessert werden; zu diesem Zwecke berechne man zunächst $\varrho = \frac{E}{r^3} + H$ aus (19), und zwar für beide Werthe von r , und dann $[r]$ aus der zweiten der Gleichungen (20) für beide Werthe von ϱ . Mit den beiden Werthen von $[r]$ berechne man für jede der beiden Lösungen eine zweite Annäherung für H , und wiederhole dann die Berechnung von r aus der Gleichung für r^3 . Dabei wird man aber sofort in dem mit der Quadratwurzel multiplicirten Gliede die letzten aus der ersten Annäherung von H erhaltenen Werthe von r einsetzen. Diese versuchsweise Bestimmung von r für beide Lösungen wird nun fortgesetzt, einerseits für einen bestimmten Werth von H , andererseits indem man mit dem letzten Werthe von r die Werthe von ϱ , $[r]$ und H neu bestimmt, und zwar so lange, bis Aenderungen nicht mehr eintreten.

Oder man bestimmt:

2. die successiven Annäherungen von r durch folgende, leicht abzuleitende Differentialformel, einmal, indem man den ersten Werth für H beibehält, und dann wieder mit dem in derselben Weise wie oben verbesserten Werthe von H :

$$\partial r = \frac{-M}{3r^2 \left\{ 1 \mp \frac{[4r^2 - 3(\varrho)^2 \sin^2 \psi]}{3K\sqrt{r^2 - (\varrho)^2 \sin^2 \psi}} \right\}},$$

wo

$$M = r^3 - \frac{E \pm r^3 \sqrt{r^2 - (\varrho)^2 \sin^2 \psi}}{K}$$

und

$$K = (\varrho) \cos \psi - H,$$

worin das obere Zeichen im Nenner des Ausdruckes für ∂r dem oberen Zeichen in dem Ausdrucke für r^3 entspricht, so dass also wiederum zwei Lösungen erfolgen. Es ist am besten, in jedem einzelnen Falle die Art der Auflösung den gegebenen Verhältnissen anzupassen. Im vorliegenden Beispiel wurde das erste Verfahren angewandt, während bei der Berechnung der gestörten Bahn des achten Jupitertrabanten sich das zweite Verfahren bewährt hat. In anderen Fällen wiederum dürften andere Verfahren der Auflösung der Gleichungen (19) und (20) vortheilhafter sein.

In der nun folgenden Bestimmung von r soll der in der Gleichung für r^3 dem $+$ -Zeichen entsprechende Werth von r mit r_1 , der dem $-$ -Zeichen entsprechende Werth mit r_2 bezeichnet werden. Die successiven Annäherungen für r_1 und r_2 sind mit römischen Ziffern bezeichnet.

Erste Annäherung für H :

	I		II	III, r_1	III, r_2
$\log E$	0,786406	$\log r^2$	7,774254	7,776090	7,772408
$\log (r)^3$	7,910959	$(e)^2 \sin^2 \psi$	6,691092	6,691092	6,691092
$\log I$	8,697365	Sub.	9,962572	9,962737	9,962405
$\log (II = G)$	0,803722 _n	$\log \text{Diff.}$	7,736826	7,738827	7,734813
Add.	9,996587	$\log \sqrt{\text{Diff.}}$	8,868413	8,869414	8,867406
$\log H$	0,800309 _n	$\log r^3$	6,661382	6,664135	6,658612
$\log (e) \cos \psi$	0,724254	$\log r^3 \sqrt{\text{Diff.}}$	5,529795	5,533549	5,526018
Sub.	0,264665	$\log E$	7,726356		
$\log \text{Nenner}$	1,064974	Add.	0,002753	0,002777	
$\log E$	7,726356	Summe	7,729109	7,729133	
$\log r^3$	6,661382	$\log r_1^3$	6,664135	6,664159	
$\log r$	8,887127	$\log r_1$	8,888045	8,888053	
		Sub.	9,997230		9,997253
		Diff.	7,723586		7,723609
		$\log r_2^3$	6,658612		6,658635
		$\log r_2$	8,886204		8,886212

Zweite Annäherung für H :

	r_1	r_2		r_1	r_2
$\log r^3$	6,664159	6,658635	$\log F$	0,786406	0,786406
$\log E$	7,726356	7,726356	$\log [r]^3$	2,070283	2,108358
$\log E r^{-3}$	1,062197	1,067721	$\log F[r]^{-3}$	8,716123	8,678048
$\log H$	0,800309 _n	0,800309 _n	$\log G$	0,803722 _n	0,803722 _n
Add.	9,917836	9,929941	Add.	9,996436	9,996736
$\log e$	0,718145	0,730250	$\log H$	0,800158 _n	0,800458 _n
$\log e^2$	1,436290	1,460500			
$\log 2 R$	0,295258	0,295258	$\log (e) \cos \psi$	0,724254	0,724254
$\log \cos [\psi]$	9,618345	9,618345	Sub.	0,264734	0,264597
$\log (III = 2 e R \cos [\psi])$	0,631748	0,643853	$\log [(e) \cos \psi - H]$	1,064892	1,065055
$\log (I = R^2)$	9,988456				
I	+ 0,97377	+ 0,97377			
II	+ 27,30800	+ 28,87353			
$- III$	- 4,28300	- 4,40406			
$[r]^3$	+ 23,99877	+ 25,44324			
$\log [r]^2$	1,380189	1,405572			
$\log [r]$	0,690094	0,702786			

	IV, r_1	IV, r_2
$\log r^2$	7,776106	7,772424
$(e)^2 \sin^2 \psi$	6,691092	6,691092
Sub.	9,962738	9,962407
$\log \text{Diff.}$	7,738844	7,734831
$\log \sqrt{\text{Diff.}}$	8,869422	8,867415
$\log r^3$	6,664159	6,658635
$\log r^3 \sqrt{\text{Diff.}}$	5,533581	5,526050
Add.	0,002777	
Summe	7,729133	
Nenner	1,064892	
$\log r_1^3$	6,664241	
$\log r_1$	8,888080	
Sub.		9,997253
Diff.		7,723600
Nenner		1,065055
$\log r_2^3$		6,658554
$\log r_2$		8,886185

Dritte Annäherung für H :

	r_1	r_2
$\log r^3$	6,664241	6,658554
$\log I$	1,062115	1,067802
$\log (II = H)$	0,800158 _n	0,800458 _n
Add.	9,917989	9,929793
$\log \varrho$	0,718147	0,730251
$\log \varrho^2$	1,436294	1,460502
$\log III$	0,631750	0,643854
I	+ 0,97377	+ 0,97377
II	+ 27,30825	+ 28,87367
$- III$	- 4,28302	- 4,40407
$[r]^2$	+ 23,99900	+ 25,44337
$\log [r]^2$	1,380193	1,405574
$\log [r]$	0,690096	0,702787

Diese Werthe von $[r]$ stimmen so nahe mit den aus der zweiten Annäherung für H berechneten überein, dass die zweite Annäherung für H sich als genügend erweist. Somit sind also auch die vierten Annäherungen von r_1 und r_2 als endgültig zu betrachten. Im Weiteren soll die dem Werthe von r_1 entsprechende Lösung als erste Lösung, die dem Werthe von r_2 entsprechende als zweite Lösung bezeichnet werden.

Berechnung von σ und σ' :

	Erste Lösung	Zweite Lösung
$\log \varrho$	0,718147	0,730251
$\cos \vartheta$	9,994713	
$\log \sigma$	0,712860	0,724964
Nach Gleichung (14b):		
$\log \alpha'$	2,069686	
$\log (I = \sigma \alpha')$	2,782546	2,794650
$\colog r^3$	3,335759	3,341446
$\log (\sigma)$	0,719250	0,719250
$\sin [(\alpha) - \alpha]$	6,675247 _n	6,675247 _n
$\log II$	0,730256 _n	0,735943 _n
$\colog [r]^3$	7,929712	7,891639
$\colog R^3$	0,017316	0,017316
Sub.	9,996436	9,996736
$\log []$	0,013752 _n	0,014052 _n
$\sin (A - \alpha)$	9,943994 _n	9,943994 _n
$\log S$	9,979360	9,979300
$\log \gamma$	3,020094	3,020094
$\log III$	2,957200	2,957500
$\log (s)$	0,686353	
$\colog (r)^3$	7,910959	
$\sin [(\alpha) - \alpha]$	9,235709	
$\log IV$	7,833021	
$- I$	- 606,1029	- 623,2329
$+ II$	- 5,3735	- 5,4443
$+ III$	+ 906,1500	+ 906,7760
$- IV$	- 0,0068	- 0,0068
$+ 2 \alpha' \sigma'$	+ 294,6668	+ 278,0920
$\log 2 \alpha' \sigma'$	2,469331	2,444188
$\log 2 \alpha'$	1,044577	
$\log \sigma'$	1,424754	1,399611

Die jovicentrischen Coordinaten x, y, z, r und Geschwindigkeiten x', y', z', r' erhält man jetzt aus den Formeln *AV*, indem die geocentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten des Jupiter an Stelle derjenigen der Sonne treten. Die hier angegebenen geocentrischen Geschwindigkeiten des Jupiter wurden nach den Formeln der numerischen Differentiation aus den geocentrischen Coordinaten des Jupiter für Februar 1,0, 5,0, 9,0, 13,0 und 17,0 berechnet, während diese letzteren geocentrischen Coordinaten aus den entsprechenden Werthen von (α) , (δ) , (ρ) , welche den American Ephemeris und Nautical Almanac für 1905 entnommen werden können, durch Transformation abzuleiten sind. Die Zeiteinheit ist wiederum $1/(k)$ mittlere Sonnentage. Man erhält dann:

$\log (\xi)'$	1,115800
$\log (\eta)'$	1,530600
$\log (\zeta)'$	1,172561

Für die Werthe der jovicentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten ergibt sich sodann:

	Erste Lösung	Zweite Lösung
$\log x$	8,85176 _n	8,79625
$\log y$	8,45400 _n	8,47899
$\log z$	8,01177	8,52087
$\log x'$	9,27024 _n	9,27435 _n
$\log y'$	9,46734	9,48758
$\log z'$	9,60898 _n	9,54432 _n
$\log r'$	9,98330 _n	9,67826 _n

Als Elemente erhält man aus *AVII 2*:

i	170° 26' 58"	25° 39' 42"	} Aequator, 1905,0
Ω	328 54 25	289 47 45	
ω	278 40 44	189 15 19	
φ	26 21 10	7 34 56	
$\log a$	8,76743	8,88988	
μ	2 ^h 15044	1 ^h 40879	
P , in mittl. Sonnentagen	167,4073	255,5376	
Epoche Febr.	8,60178	8,60093	
M	241° 26' 13"	281° 13' 48"	

Um zu entscheiden, welche von den beiden Bahnen die physisch richtige ist, sind die Unterschiede $B-R$ aus beiden Bahnen entweder für einige, nicht zur Bahnbestimmung herangezogene Beobachtungen, welche innerhalb des Intervalles zwischen der ersten und letzten Beobachtung liegen, oder für eine spätere Beobachtung zu berechnen. Im vorliegenden Falle wird sich finden, dass die hier als zweite Lösung bezeichnete Bahn sich den Beobachtungen anschliesst, während die erste Lösung zu verwerfen ist.

Wäre man im vorliegenden Falle nicht berechtigt gewesen, anzunehmen, dass das Object, dessen Bahn zu bestimmen war, ein Trabant sei, sondern wäre die Identität des Objectes, ob Trabant oder kleiner Planet, aus der Rechnung selbst zu entscheiden gewesen, so hätte man nach *AV*, aus beiden Werthen von σ und σ' , ausser den jovicentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten auch die heliocentrischen Coordinaten und Geschwindigkeiten, und, nach *AVII*, die dazu gehörigen beiden Elementensysteme ableiten müssen. Die Entscheidung, welche von den vier Bahnen die physisch richtige

ist, lässt sich dann wieder durch die Unterschiede $B-R$ treffen, wenn man nicht etwa gleich von vornherein alle hyperbolischen Lösungen verwerfen will.

Berechnet man mit den als zweite Lösung bezeichneten Elementen die speciellen Störungen, so finden sich die folgenden Unterschiede $B-R$ für die vier äusseren Oerter:

	Jan. 3.	Jan. 28.	Febr. 21.	März 6.
$(B-R) \begin{cases} \Delta \alpha & \dots \dots \\ \Delta \delta & \dots \dots \end{cases}$	$\begin{matrix} - 9''6 \\ + 23,9 \end{matrix}$	$\begin{matrix} - 2''3 \\ - 0,4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} + 2''6 \\ - 0,6 \end{matrix}$	$\begin{matrix} + 1''0 \\ - 11,3 \end{matrix}$

Eine einmalige Anwendung der Formeln der Bahnverbesserung, und zwar auf Grund der Reihen für $f, g, \partial f, \partial g$ (Formeln $B, I-III$) ergibt schliesslich

Epoche	1905, Febr. 8.6009, Gr. M. Z.
M	283° 4' 4"
i	25 39 24
δ	288 19 59
ω	187 29 41
φ	6 58 47
$\log \alpha$	8,89372
μ	1 ^h 39027
P	258,9424 Tage

Mit dem obigen Beispiele ist der numerische Beweis geliefert, dass man: 1. die Identität eines unbekannten Körpers entscheiden kann und: 2. die Bahn des Körpers mit sofortiger Berücksichtigung der Störungen durch eine **directe** Methode, ohne irgend welche der sonst üblichen Annahmen über Excentricität oder Umlaufszeit oder Neigung der Bahn etc. bestimmen kann.

Vergleicht man nun die obigen Resultate mit anderen bisher bekannt gewordenen Bahnbestimmungen dieses Trabanten, so tritt der Vorzug der hier zur Anwendung gebrachten Methode deutlich hervor. Es folgen drei Elementensysteme, welche bezw. mit 1, 2, 3 bezeichnet sind. Zur Bestimmung der beiden ersten Systeme waren 24 Beobachtungen zwischen Januar 2. und März 6. gegeben, für das dritte System die Beobachtungen zweier Oppositionen.

	1	2	3
δ	275 ^h 8	281 ^h 1	291 ^h 5
ω	188,1	50,2	182,8
i	26,3	26,2	25,3
e	0,24	0,025	0,208
μ	1 ^h 800	1 ^h 358	1 ^h 380
$\log \alpha$	8,8198	8,9004	8,8946
Periode.	200 Tage	265,0 Tage	260,6 Tage

Das erste System wurde von Perrine berechnet (Lick Observatory Bulletin Nr. 78). Perrine bemerkt dazu, dass die Darstellung der Beobachtungen unter Annahme einer Kreisbahn weder für directe noch retrograde Bewegung befriedigend war. Es wurde daher der Werth $e = 0,24$ angenommen, und dieser Werth gab eine bessere Darstellung für die retrograde, als für die directe Bewegung. Er entschied sich daher für die retrograde Bewegung, berechnete aber beide Bahnen, von denen nur die der directen Bewegung zugehörige oben, unten (1) wiedergegeben ist. Ein Versuch, die retrograde Bahn unter Anwendung von Differentialformeln zu verbessern, blieb ohne Erfolg. Die Bahnbestimmung war demnach mit grossen Schwierigkeiten verbunden.

Das zweite und dritte System wurde von F. E. Ross berechnet (Lick Observatory Bulletin Nr. 82 und A. N. Nr. 4175). Zu dem zweiten System bemerkt Ross, dass acht Beobachtungen zwischen dem 3. Januar und 6. März ihm zur Verfügung standen, und dass schliesslich die Methode der willkürlichen Variation der Bahnebene auf die Beobachtungen von 3. Januar, 8. Februar und 6. März angewandt wurde. Die Unterschiede $B - R$ erklärt er durch die grossen Sonnenstörungen. In A. N. Nr. 4175 fügt Ross noch hinzu, dass diese Bahnbestimmung wegen der grossen Aenderung der Sonnenstörungen zwischen dem 3. Januar und 6. März fast unmöglich war.

Das dritte, ebenfalls von Ross herrührende System beruht auf zwölf vom 3. Januar 1905 bis 25. September 1906 gleichmässig vertheilten Beobachtungen, mit Einschluss der hauptsächlichsten Störungen. Dies aus zwei Oppositionen abgeleitete System ist also als das beste der bekannten Systeme zu betrachten.

Ein Vergleich des im obigen Beispiel mit sofortiger Berücksichtigung der Sonnenstörungen abgeleiteten Systems, sowie des Perrine'schen (1) und des ersten Ross'schen Systems (2) mit dem zweiten Ross'schen System (3), zeigt auf den ersten Blick, dass das nach der hier vorgeschlagenen Methode berechnete System mit dem zweiten Ross'schen (3) am besten übereinstimmt, mit etwaiger Ausnahme der Excentricität, die aber überhaupt vielleicht noch als unsicher zu betrachten ist.

Bedenkt man nun, dass bei der Bestimmung des (1) und (2) Systemes Annahmen über die Excentricität, bezw. Bahnlage gemacht werden mussten und dass selbst dann die Bahnbestimmung mit grossen Schwierigkeiten verbunden, ja wegen der grossen Aenderung der unbekannten Störungen fast unmöglich war, während bei der Methode der Bahnbestimmung mit sofortiger Berücksichtigung der Störungen keinerlei Annahmen gemacht zu werden brauchen, und die Lösung direct von Statten geht, so scheint diese letztere Methode allen Anforderungen der Bahnbestimmung gestörter Körper zu genügen.

Berichtigungen.

- Seite 43, Zeile 11 von oben lies: $x = y + \theta (y^2 + 2\theta y^3) - \dots$
 statt: $x = y + 0 (y^2 + 2\theta y^3) - \dots$
- „ 198, „ 25 von oben lies: $\pi = 0,4882$ statt: $\pi = 0,4882$.
- „ 273, „ 5 von unten lies: 0,315650 statt: 0,315549.
- „ 273, „ 4 „ „ „ $244^\circ 11' 55,1$ statt: $244^\circ 11' 36,3$.
- „ 273, „ 3 „ „ „ $115^\circ 48' 4,8$ statt: $115^\circ 48' 23,7$.
- „ 315, „ 9 „ „ „ $= uu'' [3(r'' - r) + u''^2 - u^2]$
 statt: $= uu'' [3(r^4 - r) + u''^2 - u^2]$.
- „ 397 letzte Zeile lies: $\frac{(t'' - t)^2}{(r + r'')^2}$ statt: $\frac{(t'' - t)^2}{(r + r'')^2}$.
- „ 505, Zeile 7 von unten lies: $-\cos \alpha'''$ statt $\cos \alpha'''$.
- „ 508, „ 8 „ „ „ $+ \frac{1}{6} \frac{\tau' (t'' - t) P' \lambda}{P' \lambda + x'' + x''}$ statt: $\frac{1}{6} \frac{\tau' (t'' - t) P' \lambda}{P' \lambda + x'' + x''}$.
- „ 511, „ 11 „ „ „ $+ \tau \tau' \frac{(1 - P') \lambda}{x'' - c'}$ statt: $+ \tau \tau' \frac{(1 - P') \lambda}{x' - c'}$.
- „ 511, „ 10 „ „ „ $+ \tau \tau_0' \frac{(1 - P'') \lambda''}{x' - c''}$ statt: $\tau \tau_0' \frac{(1 - P'') \lambda''}{x'' - c''}$.
- „ 520, „ 4 „ „ „ sind die Zahlenwerte der ersten und dritten Zahlenkolumne für $\log n$ zu vertauschen.
- „ 567, „ 10 „ „ „ lies: Gleichungen (V) statt: Gleichungen (5).
- „ 571, „ 6 „ oben „ ${}^{11}f_0(a + i\omega)$ statt: ${}^{11}f_0(+i\omega)$.
- „ 585, Spalte: $-3,0$, Zeile 16 von unten lies: $-1,9415$ statt: $-9,9415$.
- „ 732, Zeile 17 von unten lies: $9. 0,8295 = 8,3816$ etc. statt: $9. 0,8295 = 8,8316$ etc.
- „ 737, „ 15 von oben (Tabelle, rechte Spalte) lies: $d + e$ statt: $d e$.

Auf Seite XXII der „Vorbemerkungen zur dritten Ausgabe“ (Zeile 3 und 4 von unten) sind die beiden Abhandlungen Herrn Harzer's über das Bahnrechnungsproblem citirt; nämlich die ursprüngliche, vom Jahre 1896 (cf. A. N. Bd. 141), und die darauf folgende, vom Jahre 1901 (cf. Publication der Sternwarte in Kiel, XI). In den nachfolgenden Darlegungen der „Vorbemerkungen“ aber ist nicht einzeln hervorgehoben, dass sich die angeführte Leuschner'sche Kritik auf die erste, die angeführte Frischauf'sche Kritik auf die zweite Harzer'sche Arbeit bezieht, in der Voraussetzung, dass der Leser selbst weiss, welche der Harzer'schen Arbeiten gemeint ist. Um jedes Missverständniss auszuschliessen, noch die folgende, ausführliche Bemerkung:

Herr Harzer hat im Ganzen drei verschiedene, das Bahnrechnungsproblem betreffende Methoden veröffentlicht, nämlich:

1. Die Laplace-Harzer'sche Methode (A. N. Bd. 141) im Jahre 1896. Diese Methode ist es, welche den Anlass zu den Leuschner'schen Arbeiten gegeben hat.
2. Ueber die Bestimmung und Verbesserung der Bahnen von Himmelskörpern nach drei Beobachtungen (Publ. der Sternwarte in Kiel, XI). Diese Methode hat mit der Laplace'schen, oder der zuvor genannten ersten Harzer'schen Methode nichts gemein.
3. Die im Jahre 1910 erschienene Harzer'sche geometrische Methode (Publ. der Sternwarte in Kiel, XII).

Herr Bauschinger macht in seinem Werk „Die Bahnbestimmung der Himmelskörper“ auf Seite 393 den Fehler, dass er bei der Kritik der Laplace'schen Methode auch die zweite Harzer'sche Methode (wohl nur versehentlich) mit citirt; d. h. statt bloss A. N. Bd. 141 anzuführen, ist auch noch Publ. der Sternwarte in Kiel, XI mit citirt. Auf diesen, durch Herrn Harzer in

A. N. Nr. 4058 bereits festgestellten Irrthum ist in den „Vorbemerkungen“ auf S. XXIII, Zeile 7 von oben hingewiesen. Nicht aber ist in den „Vorbemerkungen“ auf Seite XXV und XXVI gesondert hervorgehoben, dass sich die hier angeführte Frischauf'sche Kritik ausschliesslich auf die zweite zuvor genannte Harzer'sche Arbeit bezieht; woraus ein unerfahrener Leser vielleicht nicht genügend ersehen könnte, um welche der Methoden Herrn Harzer's es sich handelt.

Um jedes Missverständniss auszuschliessen: auf Seite XXIII der „Vorbemerkungen“ Zeile 5, 7 und 17 von oben ist natürlich die erste Harzer'sche Methode (A. N. Bd. 141) gemeint; auf Seite XXV, Zeile 16 von oben etc. und ebenso auf Seite XXVIII, Zeile 4 von oben ist die zweite Harzer'sche Methode (Kiel, XI) gemeint, während beim Hinweis auf Herrn Leuschner's Arbeiten auf Seite XXIX, Zeile 7 von oben selbstverständlich wieder die Laplace-Harzer'sche Methode (A. N. Bd. 141) gemeint ist.

Da die „Vorbemerkungen“ zum vorliegenden Werk vom Verlag schon einige Zeit vor der buchhändlerischen Ausgabe versandt wurden (das Imprimatur zu den „Berichtigungen“ erhielt der Verlag von mir am 21. Februar), so ist eine Entgegnung auf meine „Vorbemerkungen“ bereits erschienen, ehe das vorliegende Werk überhaupt zur Ausgabe gelangte. Es ist dies die von Herrn Stäckel für seinen Freund Harzer abgegebene „Erklärung“ in Nr. 4554 der „Astronomischen Nachrichten“.

Da diese „Erklärung“ den rein persönlichen Vorwurf gegen mich enthält, daß ich den Wortlaut Herrn Harzer's unrichtig wiedergegeben, mit anderen Worten mich eines falschen Citates schuldig gemacht habe, nehme ich an dieser Stelle, vor der unmittelbaren Ausgabe des Werkes, die Gelegenheit wahr, die vollständige Unrichtigkeit dieses Vorwurfes zu erweisen. Herr Harzer schreibt:

„Für die Gestaltung der analytischen Darstellung der Untersuchungen sind mir an einigen Stellen Gespräche, die ich mit meinem Collegen, Herrn Paul Stäckel gehabt habe, nützlich gewesen. Es sei mir gestattet, mit bestem Danke dessen und überdies der Hülfe zu gedenken, die mir die beiden Assistenten der Sternwarte; die Herren Friedrich Ristenpart und Wilhelm Ebert, bei der Berechnung der Tafeln gewährt haben.“

In der Anmerkung ¹⁾ auf Seite XXV meiner „Vorbemerkungen“ aber habe ich offenbar durchaus richtig citirt, indem ich die Anführungszeichen nur an Herrn Harzer's eigene Worte gesetzt habe, als ich schrieb:

¹⁾ Hierzu vergleiche man die von Herrn Harzer unmittelbar vor der „Einleitung“ seiner Arbeit gemachte Vorbemerkung auf S. 3, Zeile 4 und 5, wonach Winke des bekannten Mathematikers Prof. Stäckel, während dieser an der Kieler Universität wirkte, „für die Gestaltung der analytischen Darstellung der Untersuchungen nützlich gewesen“. —

Erstens ist es also eine offenbare Unterstellung, dass ich falsch citirt habe.

Zweitens aber hat Herr Harzer, wenn er extra hervorhebt, dass ihm die „Gespräche mit Herrn Stäckel für die Gestaltung der analytischen Darstellung der Untersuchungen an einigen Stellen nützlich gewesen“, nur selbst die Veranlassung zu der Meinung gegeben, dass ihm Winke, oder Hinweise, oder Rathschläge für seine Arbeit wichtig waren, die ihm von dem als hervorragend bekannten Mathematiker Herrn Stäckel zu Theil geworden sind. Denn sonst wäre diese Erwähnung überflüssig gewesen. Aus meinen „Vorbemerkungen“ geht zur Genüge hervor, daß ich im Übrigen gar nicht angezweifelt habe, dass Herrn Harzer's Arbeiten „sein geistiges Eigenthum seien“ (wenn er von der einen auch selbst sagt, dass ihm Herr Stäckel bei Abfassung derselben nützlich gewesen sei); sondern dass ich vor allem bestritten habe, dass diese Arbeiten trotz ihrer theilweisen Originalität und mancher schönen theoretischen Betrachtungen (cf. Seite XXX meiner „Vorbemerkungen“), von wirklich praktischer Brauchbarkeit für die Astronomie — das Haupterforderniss astronomischer Methoden — seien, ein Urtheil, hinsichtlich dessen ich mich in vollständiger Uebereinstimmung mit einer ganzen Anzahl, durch ihre wissenschaftlichen Leistungen anerkannter Fachcollegen befinde. —

Fehler-Verzeichnisse anderer Werke über Bahnrechnung¹⁾.

I.

Corrigenda zu Bauschinger's Lehrbuch über „Die Bahnbestimmung der Himmelskörper“.

pag.	88,	Zeile	5	von oben	lies:	$R = \frac{\cos \varphi^2}{1 + \sin \varphi \cos v}$	statt:	${}^n R = \frac{\cos \varphi^2}{1 + \sin \varphi \sin v}{}^u.$
"	88,	"	6	"	"	$\frac{\cos \varphi^2}{R} = 1 + \sin \varphi \cos v$	statt:	$\frac{\cos \varphi^2}{{}^n R} = 1 + \sin \varphi \sin v{}^u.$
"	159,	"	5	"	"	$X = \frac{4}{3 \cos^{\frac{1}{2}} g^2} (1 + \dots)$	statt:	${}^n X = \frac{1}{3 \cos^{\frac{1}{2}} g^2} (1 + \dots) {}^u.$
"	172,	"	6	"	"	$[r r'] = a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p} (\sin(E' - E) - 2e \sin \frac{1}{2}(E' - E) \cos \frac{1}{2}(E' + E))$	statt:	${}^n [r r'] = a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p} (\sin(E' - E) - 2e \sin \frac{1}{2}(E' - E) \cos \frac{1}{2}(E' - E)) {}^u.$
"	230,	"	9	"	"	$\sin c \cos C = \sin i \cos \varepsilon + \dots$	statt:	${}^n \sin c \sin C = \sin i \cos \varepsilon + \dots {}^u.$
"	230,	"	19	"	"	$\sin a' \sin A' = \cos \delta'$	statt:	${}^n \sin a' \cos A' = \cos \delta' {}^u.$
2)	"	236,	"	11	unten	$b_1 = -1^{\circ} 22'$	statt:	${}^n b_1 = -1^{\circ} 12' {}^u.$
"	246,	"	9	"	"	$\cos(U - u) = -\frac{1 + \sqrt{r}}{r + \frac{1}{\sqrt{r}}}$	statt:	${}^n \cos(U - u) = -\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{r}}}{r + \frac{1}{\sqrt{r}}} {}^u.$

¹⁾ Man vergleiche das in den Vorbemerkungen zur 3. Ausgabe von Klinkerfues' theoretischer Astronomie (Braunschweig, Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn, 1911) auf S. XIX Gesagte. Von den beifolgend mitgetheilten Verbesserungen sind die mit ¹⁾ bezeichneten bereits von Herrn Oppenheim in der Astronomischen Vierteljahrsschrift von 1907, Heft I, S. 12 mitgetheilt worden. Da ihre Richtigkeit angezweifelt wurde, habe ich dieselben nachgeprüft und gefunden, daß Herr Oppenheim in allen Stücken Recht hat. Die Kenntniss der fünf mit ²⁾ bezeichneten Fehler erhielt ich früher gelegentlich durch Herrn Dr. Wedemeyer. Für die übrigen Verbesserungen bin ich selbst verantwortlich. Jedoch habe ich das Bauschinger'sche Lehrbuch nicht einer genauen und umfassenden Nachprüfung unterzogen, — wie sie Herr Leuschner bei v. Oppolzer's Lehrbuch vorgenommen und sich dadurch ein so grosses Verdienst um die endgültige Sicherstellung des klassischen Werkes erworben hat, — da meine Zeit anderweitig in Anspruch genommen war. Anmerkung des Herausgebers der 3. Ausgabe von Klinkerfues' theoretischer Astronomie.

pag. 250, Zeile 20 von oben	lies:	$r = \frac{p}{1 + e \cos(u - \omega)}$	statt:	${}_nr = \frac{p}{1 + e \cos(u + \omega)}^u$.	
" 393 " 14 " " "		vorgeschlagen	statt:	${}_nvorschlagen^u$.	
1) " 430 " 4 " " "		$\log Q_{44}$ 1.12200	statt:	${}_n\log Q_{44}$ 0.12090 ^u .	
1) " 430 " 4 " " "		$\log p_i$ 8.87800	statt:	${}_n\log p_i$ 9.87910 ^u .	
1) " 431 " 3 " unten "		$ds \pm 2''.61$	statt:	${}_nds \pm 0''.82^u$.	
1) " 446 " 9 " " "		$ds = -23''.10 \pm 2''.61$	statt:	${}_nds = -23''.10 \pm 0.82^u$.	
" 460 " 7 " " "		$h \cos(H - \frac{1}{2}v) = \cos \frac{1}{2}v^4 + \frac{1}{5} \sin \frac{1}{2}v^4$	statt:	${}_nh \cos(H - \frac{1}{2}v) = \cos \frac{1}{2}v^4 + \frac{1}{5} \sin v^4^u$.	
" 497 " 5 " oben "		$\frac{d\mu}{dt} = -3 \frac{\mu a e}{p} \sin(v - \pi)(S) - \frac{3\mu a}{r}(T)$	statt:	${}_n\frac{d\mu}{dt} = -3 \frac{\mu a e}{p} \sin(v - (S) - \frac{3\mu a}{r}(T)^u$.	
" 505 " 4 " " "	6. Verticalcolumnne	lies:	$236^\circ 21' 34''$	statt:	${}_n236^\circ 21' 36''^u$.
" 505 " 5 " " "	6. " "		$330^\circ 19' 7''$	"	${}_n330^\circ 19' 3''^u$.
" 505 " 16 " " "	6. " "		$266^\circ 2' 27''$	"	${}_n266^\circ 2' 33''^u$.
" 505 " 17 " " "	5. " "		$252^\circ 48' 8''$	"	${}_n252^\circ 47' 28''^u$.
2) " 507 " 4 " " "	5. " "		$+ 0''.001$	"	${}_n-0''.001^u$.
2) " 507 " 18 " " "	8. " "		$-31''.856$	"	${}_n-31''.846^u$.
2) " 507 " 32 " " "	3. " "		$-3''.762$	"	${}_n+3''.762^u$.
" 534 " 5 " unten	lies:	$= e_0 \cos v_0 + \frac{1}{r} \left(\Delta p - \frac{p_0}{r_0} \Delta r \right)$	statt:	${}_n= e_0 \cos v_0 + \frac{1}{r} \left(\Delta p + \frac{p_0}{r_0} \Delta r \right)^u$.	
" 534 " 1 " " "		$\frac{1}{r} \left(\Delta p - \frac{p_0}{r_0} \Delta r \right) = n \cos N$	statt:	${}_n\frac{1}{r} \left(\Delta p + \frac{p_0}{r_0} \Delta r \right) = n \cos N^u$.	
" 535 " 8 " " "		$[r] - r_0 = 2 a_0 e_0 \sin \frac{1}{2}(E - E_0) \sin \frac{1}{2}(E + E_0)$	statt:	${}_n[r] - r_0 = 2 a_0 e_0 \sin \frac{1}{2}(E - E_0) \cos \frac{1}{2}(E + E_0)^u$.	
" 536 " 9 " oben "		$\Delta r = r - r_0 = \dots + 2 a_0 e_0 \sin \frac{1}{2}(E - E_0) \sin \frac{1}{2}(E + E_0)$	statt:	${}_n\Delta r = r - r_0 = \dots + 2 a_0 e_0 \sin \frac{1}{2}(E - E_0) \cos \frac{1}{2}(E + E_0)^u$.	
" 538 " 12 " " "		$\Delta r = r - r_0 = \dots + 2 a_0 e_0 \sin \frac{1}{2}(E + E_0) \sin \frac{1}{2}(E - E_0)$	statt:	${}_n\Delta r = r - r_0 = \dots + 2 a_0 e_0 \cos \frac{1}{2}(E + E_0) \sin \frac{1}{2}(E - E_0)^u$.	
" 538 " 15 " " "		$n \cos N = \frac{1}{r} \left(\Delta p - \frac{p_0}{r_0} \Delta r \right)$	statt:	${}_nn \cos N = \frac{1}{r} \left(\Delta p + \frac{p_0}{r_0} \Delta r \right)^u$.	
" 548 " 11 bis 13 von unten	lies:	$q \cos \delta \cos \alpha = x'_0 + X + \xi'$ $q \cos \delta \sin \alpha = y'_0 + Y + \eta'$ $q \sin \delta = z'_0 + Z + \xi'$	statt:	${}_nq \cos \delta \cos \alpha = x_0 + X + \xi'$ $q \cos \delta \sin \alpha = y_0 + Y + \eta'$ $q \sin \delta = z_0 + Z + \xi'^u$.	
2) " 554 " 4 von oben, 4. Verticalcolumnne	lies:	$+ 62.89$	statt	${}_n-62.89^u$.	

Fehler-Verzeichnisse anderer Werke über Bahnrechnung¹⁾.

II.

Corrigenda zu v. Oppolzer's „Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Cometen und Planeten“.

Von **Arnim O. Leuschner**.

Das Oppolzer'sche Werk ist heut zu Tage und wird auf lange Zeit ein maßgebendes Buch über die in ihm behandelten Gegenstände sein, nicht nur für den Lernenden, sondern auch für den practischen Rechner. Deshalb ist es ebenso wichtig wie angenehm, den Text von Druck- und anderen Fehlern befreit zu haben.

Das Werk besteht aus zwei Bänden; vom ersten Bande sind zwei Auflagen gedruckt, nämlich die erste 1870 und die zweite im Jahre 1882. Band II liegt noch in erster Auflage vor und erschien im Jahre 1880.

Jeder Band enthält ein Verzeichniss von Fehlern, die im Verlaufe des Druckes entdeckt wurden. Im Jahre 1880 veröffentlichte Prof. v. Oppolzer ein langes Verzeichniss von *Correcturen* zu Band II, das durch den Verlag von Engelmann in Leipzig erhältlich ist. Die vorliegende Publication berücksichtigt die erwähnten Verzeichnisse nicht, da sie jedem, der das Werk besitzt, zugänglich sind. Seit dem Jahre 1880 sind von verschiedenen Astronomen von Zeit zu Zeit in den *Astronomischen Nachrichten* *Corrigenda* publicirt worden, die ich gesammelt und im Folgenden, unter Anführung des Namens des Autors und der Nummer der *Astronomischen Nachrichten*, in der die betreffenden Verbesserungen zuerst erschienen sind, mit angeführt habe. Für diejenigen Verbesserungen jedoch, die nicht, wie die eben genannten, bezeichnet sind, bin ich selbst verantwortlich. Das vorliegende Fehler-Verzeichniss wurde auch an die *Astronomischen Nachrichten* gesandt. Allein Prof. Krueger erachtete es für besser, dass es anderswo erschiene. —

Dank der Güte von Dr. F. K. Ginzl an der Königlichen Sternwarte zu Berlin, der in enger Beziehung zur Oppolzer'schen Publication stand und auf meine Bitte das vorliegende Verzeichniss nochmals revidirt hat, wage ich zu behaupten, dass sich nur wenige oder gar keine Fehler in demselben befinden werden. Ausserdem war Dr. Ginzl noch im Besitz einer Anzahl von Verbesserungen, die noch vor Prof. v. Oppolzer's Tod seinen Assistenten bekannt geworden waren. Dieselben sind im Folgenden mit den zuvor genannten zusammen angeführt, so dass das Vorliegende im Verein mit dem von Prof. v. Oppolzer gegebenen Verzeichniss alle bis jetzt bekannten Fehler enthält.

¹⁾ Man vergleiche das in den Vorbemerkungen zur 3. Ausgabe von Klinkerfues' theoretischer *Astronomie* (Braunschweig, Druck und Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn, 1911) auf S. XX Gesagte. Das Leuschner'sche Fehler-Verzeichniss wurde von mir übersetzt und die vier im Folgenden mit einem Stern versehenen Errata wurden ihm noch hinzugefügt. Anmerkung des Herausgebers der 3. Ausgabe von Klinkerfues' theoretischer *Astronomie*.

Da Band II vor der zweiten Auflage von Band I erschien, so ist die Bezugnahme auf den ersten Band in seiner ersten Auflage nöthig. Im Allgemeinen bringt das keine weiteren Schwierigkeiten mit sich, da die „Tafel der Rückbeziehungen“, welche sich in der zweiten Auflage des ersten Bandes zu Anfang findet, die Seiten etc. der zweiten Auflage, welche denen der ersten entsprechen, angiebt. In einem Falle jedoch entsteht eine kleine Unbequemlichkeit, nämlich in Band II, Seite 398, wo der Leser auf die erste Auflage des vorhergehenden Bandes verwiesen wird (die ihm wahrscheinlich nicht zugänglich ist), während in der zweiten Auflage dieses Bandes die Formeln, auf die er sich verwiesen sieht, fehlen. Deshalb erscheint es der Mühe werth, die nöthigen Formeln hier abzuleiten, was wie folgt geschehen kann.

Die folgende Form der Gleichung ist diejenige, aus der die Formeln abgeleitet werden können (Bd. I, 2. ed., S. 65):

$$\frac{kt\sqrt{1+e}}{2q^{3/2}} = \tau \left\{ 1 - \frac{2}{3} \varepsilon \tau^2 + \frac{3}{5} \varepsilon^2 \tau^4 - \frac{4}{7} \varepsilon^3 \tau^6 + \dots \right\} \\ + \frac{\tau^3}{3} \left\{ 1 - \frac{6}{5} \varepsilon \tau^2 + \frac{9}{7} \varepsilon^2 \tau^4 - \frac{12}{9} \varepsilon^3 \tau^6 + \dots \right\}, \dots \dots \dots (I)$$

wobei: $\tau = tg \frac{1}{2} v$ und $\varepsilon = \frac{1-e}{1+e}$.

Durch Einführung der Grösse θ , die definirt ist durch die Relation:

$$tg^2 \frac{1}{2} v = \tau^2 = \frac{\theta}{\varepsilon}, \dots \dots \dots [A]$$

erhält man:

$$\frac{kt\sqrt{1+e}}{2q^{3/2}} = \sqrt{\frac{\theta}{\varepsilon}} \left\{ 1 - \frac{2}{3} \theta + \frac{3}{5} \theta^2 - \frac{4}{7} \theta^3 + \dots \right\} \\ + \frac{1}{3} \left\{ \frac{\theta}{\varepsilon} \right\}^{3/2} \left\{ 1 - \frac{6}{5} \theta + \frac{9}{7} \theta^2 - \frac{12}{9} \theta^3 + \dots \right\} \dots \dots \dots (II)$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $\frac{2(1-e)^{3/2}}{1+e}$, so erhält man leicht:

$$\frac{kt(1-e)^{3/2}}{q^{3/2}} = 2\sqrt{\theta} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \theta + \frac{1}{5} \theta^2 - \frac{1}{7} \theta^3 + \dots \right\} \\ - 2e\sqrt{\theta} \left\{ 1 - \theta + \theta^2 - \theta^3 + \theta^4 - \dots \right\} \dots \dots \dots (III)$$

Setzt man jetzt:

$$\alpha = 2\sqrt{\theta} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \theta + \frac{1}{5} \theta^2 - \frac{1}{7} \theta^3 + \dots \right\} \dots \dots \dots [B] \\ \beta = 2\sqrt{\theta} \left\{ 1 - \theta + \theta^2 - \theta^3 + \theta^4 - \dots \right\}$$

so ergiebt sich schliesslich:

$$\frac{kt(1-e)^{3/2}}{q^{3/2}} = \alpha - e\beta \dots \dots \dots (IV)$$

Dies ist die Form der Gleichung (I), Bd. I, S. 65 (zweite Auflage), welche in der ersten Auflage dieses Bandes (S. 60) auftritt. Jetzt kann ich mit Prof. v. Oppolzer's eigener Beweisführung fortfahren:

Ist $(1-e)$ eine Grösse erster Ordnung, so muss θ von derselben Ordnung sein, da wir angenommen haben, dass

$$\theta = \varepsilon tg^2 \frac{1}{2} v$$

ist. (Gauss nimmt bei seinen Untersuchungen an, dass $\sqrt{\theta}$ von der ersten Ordnung ist.) Man kann leicht zeigen, dass α und β in derselben Beziehung zu einander stehen, wie der Bogen zum Sinus. In unserem Falle hat man immer nahezu:

$$\alpha = e\beta.$$

Deshalb ist Gleichung (IV) in obiger Form jetzt nicht zur Lösung brauchbar. Vielerlei Transformationen können gemacht werden, die alle auf das gleiche Resultat führen, dass die Berechnung dieses Unterschiedes mit hinreichender Genauigkeit mittelst der gewöhnlichen Logarithmentafeln geleistet werden kann. Die folgende von Gauss vorgeschlagene Transformation hat den Vortheil, dass eine Grösse B (die weiter unten abgeleitet wird) gleich 1 gesetzt werden kann, ohne dass dabei Fehler, die grösser als von der zweiten Ordnung sind, begangen werden (entsprechend der Gauss'schen Bestimmung von Fehlern vierter Ordnung).

Man hat:

$$\alpha - e\beta = \frac{1-e}{10} (9\alpha + \beta) + \frac{1+9e}{10} (\alpha - \beta).$$

Setzt man:

$$A = 15 \frac{\alpha - \beta}{9\alpha + \beta}, \quad \dots \dots \dots [C_1]$$

so erhält man:

$$\frac{kt\sqrt{1-e}}{q^{3/2}} = \frac{9\alpha + \beta}{10} \left\{ 1 + \frac{1+9e}{1-e} \cdot \frac{A}{15} \right\}.$$

Durch Einführung der Grösse:

$$B = \frac{9\alpha + \beta}{20\sqrt{A}}, \quad \dots \dots \dots [C_2]$$

von der bewiesen werden kann, dass sie sich von der Einheit nur durch eine Grösse zweiter Ordnung unterscheidet, erhält man:

$$\frac{kt\sqrt{1-e}}{2q^{3/2}} = B \left\{ A^{1/2} + \frac{1+9e}{1-e} \cdot \frac{A^{3/2}}{15} \right\}.$$

Nimmt man an, dass:

$$A = \frac{5(1-e)}{1+9e} \cdot tg^2 \frac{1}{2} w,$$

so erhält man die Gleichung:

$$\frac{kt}{2Bq^{3/2}} \sqrt{\frac{1+9e}{5}} = tg \frac{1}{2} w + \frac{1}{3} tg^3 \frac{1}{2} w. \quad \dots \dots \dots [D]$$

Nimmt man B als bekannt an und setzt mit Nicolai:

$$\theta = AC^2 = C^2 \frac{5(1-e)}{1+9e} \cdot tg^2 \frac{1}{2} w, \quad \dots \dots \dots [C_{11}]$$

so folgt:

$$tg \frac{1}{2} v = C tg \frac{1}{2} w \sqrt{\frac{5(1+e)}{1+9e}}, \quad \dots \dots \dots [E]$$

da ja

$$tg^2 \frac{1}{2} v = \frac{1+e}{1-e} u.$$

Es ist nicht nöthig, weiter zu gehen. Nach Substitution der Relationen $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$, $[E]$ in die Differentialquotienten von S. 398 bleiben als unbekannte Grössen nur die Quotienten $\frac{B}{C}$ und $\frac{B}{C^3}$. Die Entwicklung dieser Grössen ist auf S. 398 u. f. gegeben.

Die folgenden *Hinzufügungen und Verbesserungen* sind der „Tafel der Rückbeziehungen“, die Band I, zweite Auflage vorausgeht, einzuverleiben. —

Band II	Rückbeziehung zur ersten Auflage von Band I	Rückbeziehung zur zweiten Auflage von Band I	Band II	Rückbeziehung zur ersten Auflage von Band I	Rückbeziehung zur zweiten Auflage von Band I
pag. 84	pag. 47, 48 u. 17	pag. 54, 57 u. 18	pag. 411	pag. 81	pag. 206
" 167	" 28	" 29 ff.	" 430	" 109	" 98, 16)
" 228	" 81	" 206, 24)	" 432	" 44	" 50
" 229	" 9	" 9, 2)	" 464	" 218	" 81
" 371	" 94	" 268	" 473	" 143	" 103, 7)
" 374	" 40	" 44, 1)	" 478	" 188	" 82, 8)
" 377	" 71 u. 32	" 123 u. 35, 30)	" 492	" 106, 3)	" 292, 9)
" 381	" 84	" 213			

Corrigenda zu Band I (zweite Auflage).

- 1) pag. 12, Zeile — 19, für: Ekliptikalcoordinaten lies: „Aequatorealcoordinaten“.
- 2) " 29, " — 8, für: φ lies: „ γ “.
- " 56, " — 1, für: $tg(45 + \frac{1}{2}\varphi)$ lies: „ $tg(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$ “.
- " 71, " — 5, für: wol lies: „wohl“.
- " 83, " — 1, für: $\frac{1}{a}$ lies: „ $\frac{1}{a}$ “.
- 2) " 95, " + 18, für: pag. 43 lies: „pag. 44“.
- 2) " 97, " + 4, für: pag. 104 lies: „pag. 81“.
- " 111, " — 10, für: $\sin \varphi'$ lies: „ $\cos \varphi'$ “.
- " 111, " — 3 und — 4, für: $\cos \varphi$ lies: „ $\cos \varphi'$ “.
- 2) " 114, " — 2, in der Anmerkung nach: $\pm 1,08$ füge ein: „mit“.
- 2) " 117, " — 8, für: $\sin \pi_0, \cos \pi_0$ lies: „ $\sin \pi'_0, \cos \pi'_0$ “.
- " 127, " — 2, in der ersten Gleichung für: $\Sigma m x$ lies: „ $\Sigma m y$ “; in der zweiten für: $\Sigma m y$ lies: „ $\Sigma m x$ “.
- " 127, " — 1, die erste Gleichung ist zu lesen: „ $\frac{d^2 x}{dt^2} \Sigma m z = 0$ “; die zweite: „ $\frac{d^2 y}{dt^2} \Sigma m z = 0$ “.
- " 128, " + 3 u. + 4, die Gleichungen sind zu lesen: „ $\frac{d^2 z}{dt^2} \Sigma m x = 0$ “ und: „ $\frac{d^2 z}{dt^2} \Sigma m y = 0$ “.
- " 142, " + 1, für: (pag. 139) lies: „(pag. 134)“.
- 2) " 146, " + 7, für: strenge lies: „strengen“.
- " 156, " — 9, für: n^2 lies: „ n “.
- 2) " 158, " — 14, für: $180^\circ - (II)$ lies: „ $180^\circ - (II) + \psi$ “.
- 2) " 164, " + 4, nach 20) füge ein: „nachdem sie mit $\cos b'$, resp. $\sin b'$ multiplicirt worden sind“.
- " 164, " — 1 u. — 9, für: pag. 162 lies: „pag. 145“.
- 2) " 199, " — 8, für: der Null gleich wird lies: „den Werth 280° annimmt“.
- 2) " 217, " + 18, nach: ermitteln füge ein: „hierbei ist $\Delta \varepsilon$ das Increment der lunisolaren Schiefe in der Zeit $(t_1 - t_0)$ “.
- " 218, " 18, für: β lies: „ β_1 “.
- " 221, " — 7, für: $\Delta \delta_0$ lies: „ $\Delta \alpha_0$ “.
- 2) " 225, " + 13, für: $\cos 2a$ lies: „ $\cos 2\alpha$ “.

1) Mitgetheilt durch Dr. Paul Lehmann, Astr. Nachr., Nr. 2810. — 2) Dr. F. K. Ginzel.

- 1) pag. 238, Zeile + 6, für: $9'', 2365$ lies: „ $9'', 2370$ “.
- 2) „ 241, „ + 11, für: erste Tafel lies: „zweite Tafel“.
- 2) „ 241, „ + 12, für: zweite Tafel lies: „erste Tafel“.
- 2) „ 242, „ — 15, für: pag. 114, 115 lies: „pag. 118“.
- 2) „ 246, „ — 3, für: pag. 120 lies: „pag. 123“.
- 2) „ 248, „ — 9, für: pag. 245 lies: „pag. 237, 238“.
- 2) „ 258, „ — 8, für: $\alpha - \alpha_0$ lies: „ $\alpha - \alpha_0$ “.
- „ 276, „ + 20, für: pag. 272 lies: „pag. 276“.
- „ 280, In Gleichung 10) ist auf der linken Seite das Minuszeichen fortzulassen.
- 2) „ 293, Zeile — 9, für: das Zeichen von $\cos \theta$ erhält lies: „im ersten Quadranten zu nehmen sein wird, da $\sin \varphi$ immer positiv ist“.
- 2) „ 322, „ + 14, für: $3'', 26$ lies: „ $32'', 6$ “.
- 2) „ 338, „ + 13, für: Sonnenort lies: „Cometenort“.
- 2) „ 338, „ — 14, für: Aberrationscorrection lies: „Aberrationscorrection“.
- „ 363, „ + 8, für: $\frac{dy}{dx}$ lies: $\frac{dy}{dz}$.
- „ 363, „ + 18 u. + 19, für: x lies: „ z “.
- „ 363, „ + 11, für: derselben lies: „desselben“.
- „ 370, „ — 4, füge ein: „ $dy_e =$ “.
- „ 372, „ — 1, für: $2, f'$ lies: „ $2 f',$ “.
- „ 372, „ — 15, für: $n,$ lies: „ n “.
- 2) „ 373, „ + 2, für: pag. 98 lies: „pag. 101“.
- „ 373, „ + 18, für: ersten lies: „erste“.
- 2) „ 376, „ — 11, } beide Glieder müssen den Coefficienten „ $-\frac{1}{2}$ “ erhalten.
- 2) „ 376, „ — 1, }
- 2) „ 382, „ — 13, für: IA_5 lies: „ IA_4 “.
- 2) „ 412, „ + 2, für: pag. 72 lies: „pag. 73“.
- 2) „ 414, „ — 4, für: $\cos J$ lies: „ $-\cos J$ “.
- „ 417, „ — 3, das Wort „diese“ ist fortzulassen.
- 2) „ 421, „ — 14, für: die mit x^2 multiplicirten Glieder lies: „die Glieder 3. Ordnung“.
- 2) „ 423, „ + 16, beide Glieder müssen den Coefficienten „ $-\frac{1}{2}$ “ erhalten.
- 2) „ 439, „ + 5, für: $\eta,$ lies: „ $\eta, - 1$ “.
- 2) „ 478. Argument: $41^\circ 6' 40''$, für: 87474 lies: „88474“.
- 2) „ 523, „ 615,5 (Fusstafel), für: 397,5 lies: „307,5“.
- 2) „ 532, „ $148^\circ 30' 20''$, für: 00795 lies: „00795“.
- 2) „ 535, „ $155^\circ 24' 40''$, für: 06898 lies: „06898“.
- 2) „ 538, „ $160^\circ 28' 50''$, für: 81120 lies: „81120“.
- 2) „ 538, „ $161^\circ 32' 60''$, für: 90293 lies: „90293“.
- 2) „ 542, „ $169^\circ 30' 40''$, für: 02767 lies: „02767“.
- 2) „ 586, „ 50,0 [col.: Parallaxe], für: $88'', 17$ lies: „ $8'', 817$ “.
- 2) „ 610, „ 77,6 [col.: $(g \cos G)_1$], für: $\left\{ \begin{matrix} + 20,17 \\ + 0,12 \end{matrix} \right\}$ lies: $\left\{ \begin{matrix} + 20,174 \\ + 0,127 \end{matrix} \right\}$.
- 2) „ 610, „ 77,7 [col.: $(g \cos G)_1$], für: $+ 0,53$ lies: „ $+ 0,153$ “.
- 1) Tafel Xb, Columnne ϵ_{11} und Tafel Xd, Columnne B_{11} sind mit einem falschen Werth berechnet; der resultirende Fehler ist jedoch nicht von grosser Bedeutung, da er nie die Hälfte einer Einheit der letzten Decimale übersteigt. Er kann mit grosser

1) Mitgetheilt durch Prof. Dr. v. Oppolzer (?), Astr. Nachr., Nr. 2492. — 2) Dr. F. K. Ginzell.

— 3) Dr. Prof. Ern. Pasquier, Astr. Nachr., Nr. 2719. —

Genauigkeit in Betracht gezogen werden, indem man in den beiden Columnen zur Berechnung der säcularen Glieder den Factor $t = \frac{t_0 - 1850}{100}$ an Stelle des Factors $t = \frac{t_0 - 1900}{100}$ gebraucht.

Corrigenda zu Band II.

- pag. 10, Zeile + 4, für: $C^{d-p} \{1^2, 3^2, \dots (2d-1)^2\}$ lies: „ $C^{d-p} \{1^2, 3^2, \dots (2d-1)^2\}$.“

$$p=d \quad p=d$$

 „ 10, „ — 7, für: $4d\delta \sum_{p=0} \dots$ lies: „ $4d\delta \sum_{p=0} \dots$.“
 „ 11, „ + 10, für: $p = d$ lies: „ p und d .“
 „ 11, „ + 14, für: $\frac{d}{2^{2d}}$ lies: „ $\frac{d}{2^{2d-2}}$.“
 „ 12, „ — 7, für: $2^{(2d-p)}$ lies: „ $2^{2(d-p)}$.“
 „ 15, „ — 9, für: wie dies in der Gleichung 4) lies: „wie dies in Gleichung 4), pag. 9.“
 „ 15, „ — 7, für: $mf \left(a + \left[i + \frac{1}{2} \right] w \right)$ lies: „ $mf^i \left(a + \left[i + \frac{1}{2} \right] w \right)$.“
 „ 15, „ — 4, für: $f \left(a + \left[i + \frac{1}{2} \right] w \right)$ lies: „ $f \left(a + \left[i + \frac{1}{2} \right] w \right)$.“
 „ 18, „ — 8, für: $-\frac{C^3 \{1^2, 5^2\}}{2^6}$ lies: „ $-\frac{C^3 \{1^2, \dots 5^2\}}{2^6}$.“
 „ 32, „ — 8, für: $dl = d(a + [i+n]w) + d \left(a + \left[i + \frac{1}{2} + m \right] w \right)$ lies:

$$„dl = d(a + [i+n]w) = d \left(a + \left[i + \frac{1}{2} + m \right] w \right)“.$$

$$d=\infty \quad d=\infty$$

 „ 34, „ + 3, für: $\sum_{a=1} \dots$ lies: „ $\sum_{d=1} \dots$.“
 „ 34, „ + 7, für: $C^{d-p} \{1^2, 3^2, \dots (2d-1)^2\}$ lies: „ $C^{d-p} \{1^2, 3^2, \dots (2d-1)^2\}$.“
 „ 35, „ + 13, für: B^i lies: „ B_i .“
 „ 39, „ — 3, für: $\frac{n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ lies: „ $\frac{n^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.“

$$a + [i + \frac{1}{2}m]w \quad a + [i + \frac{1}{2} + m]w$$

 „ 41, „ + 14, für: $\int f(l) dl$ lies: „ $\int f(l) dl$.“
 „ 44, „ + 13, für: der Formeln lies: „den Formeln.“
 „ 45, „ — 9, für: benütze lies: „benützen.“
 „ 47, „ — 8, für: ${}^i f \left(a + \frac{1}{2} w \right)$ lies: „ ${}^i f \left(a - \frac{1}{2} w \right)$.“
 „ 50, „ — 13, für: aus den für 21) lies: „aus den für 7)“.

$$a + iw \quad a + iw$$

 „ 55, „ — 13, für: $J_1 = \int f(a + [i+n]w) dl$ lies: „ $J_1 = \frac{1}{w} \int f(a + [i+n]w) dl$.“
 Der Gebrauch der Formel B_i , S. 35, ist dann klarer. Ver-
 gleiche die Gleichungen 2) und 4) S. 32.
 „ 56, Nach der ersten Gleichung füge die Zahl 34) hinzu.
 „ 59, Zeile + 2, für: $\frac{1}{2} {}^i f \left(a - \frac{1}{2} w \right)$ lies: „ $\frac{1}{2} {}^i f \left(a - \frac{1}{2} w \right)$.“

- pag. 59, Zeile — 6, für: $P_1^3(m) f''' \left(a - \frac{1}{2} w \right)$ lies: ${}_n P_2^3(m) f''' \left(a - \frac{1}{2} w \right)^u$.
- " 61, " + 6, für: $\log f(a + iw)$ lies: ${}_n \log f^d(a + iw)^u$.
- " 70, " + 13, für: $\frac{km_1}{\varrho^2}$ lies: ${}_n \frac{k^2 m_1}{\varrho^2}^u$.
- " 81*, " — 17, für: Orte vor und zwei Orte lies: „Funktionswerthe vor und zwei Functionswerthe“.
- " 82, { Die numerischen Werthe der Constanten sind etwas verschieden von denen
- " 86, { der zweiten Auflage von Band I. Man vergleiche das Vorwort zu demselben.
- " 99, " + 1, für: Rechnung lies: „Rechnung“.
- " 109*, " + 9, für: — 3,42 lies: „— 4,32“.
- " 147, " — 8, für: $\frac{a_0^2 \cos \varphi_0}{(r^2)}$ lies: ${}_n \frac{a_0^2 \cos \varphi_0}{(r)^2}^u$.
- " 150, " — 3, für: $\tau' t \dots$ lies: ${}_n \tau' \dots^u$.
- " 151, " — 17, für: $|P_{-1} + P_0|$ lies: „ $(P_{-1} + P_0)$ “.
- " 151, " — 7, für: $(12\gamma - a\alpha)$ lies: ${}_n (12\gamma + a\alpha)^u$.
- " 153, " + 4, für: $\frac{d^2 v_{+1}}{dt^3}$ lies: ${}_n \frac{d^2 v_{+1}}{dt^2}^u$.
- " 154, " + 13, für: $f' \left(a - \frac{1}{2} w \right)$ lies: ${}_n f' \left(a - \frac{1}{2} w \right)^u$.
- " 159, " — 15, Gleichung 7), Streng genommen kann man hier nicht $\cos u'$ für $\cos u$ schreiben, da diese Formeln allgemein sind und der besondere Fall $\cos J$ nahe = 1 noch nicht behandelt ist.
- " 165, " — 8, für: $\frac{z}{(r)} \frac{dz}{dt}$ lies: ${}_n \frac{z}{(r)} \frac{dz}{dt}^u$.
- " 174, " + 7, für: ω lies: ${}_n \omega_0^u$.
- " 175, " + 8, für: $\iint f(x) dx^2$ lies: ${}_n \iint f(x) dx^2$ (cf. pag. 233)^u.
- " 179, " + 4, für: $f''' \left(a - \frac{1}{2} w \right)$ lies: ${}_n f''' \left(a - \frac{1}{2} w \right)^u$.
- " 256, " — 7, für: mehr minder lies: „mehr oder minder“.
- " 292, " — 7, für: $\left(\frac{2}{3} \right)^2 \int \dots$ lies: ${}_n \frac{(2)^2}{3} \int \dots^u$.
- " 301*, " — 7, für: die Quadrate der Präcisionen lies: „die Quadratwurzeln der Gewichte“.
- " 308, " — 8, für: se lies: „es“.
- " 314, " + 3, 4, 16, besser: ${}_n n^u$ für: v.
- " 326, " — 1, für: $(\alpha\beta)$ lies: ${}_n [\alpha\beta]^u$.
- 1) " 340, In der Zeile $\log \frac{[cd_2]}{[c c_2]}$ für: $\left\{ \frac{[cd_2]}{[c c_2]} [cl_3] \right\}$ lies: ${}_n \left\{ \frac{[cd_2]}{[c c_2]} [cl_2] \right\}^u$.
- " 343, In der zweiten Eliminationsgleichung von unten, für: 064255 lies: „0,64255“.
- " 362, Zeile — 4, für: mehr minder lies: „mehr oder minder“.
- " 383, " + 5, für: Maasse lies: „Masse“.
- " 389*, " — 7, für: $\frac{2 + e \cos \varphi}{\cos \varphi^2}$ lies: ${}_n \frac{2 + e \cos v}{\cos \varphi^2}^u$.

1) Mitgetheilt durch Dr. F. K. Ginzell.

- 1) pag. 392, Zeile — 6, für: $\delta \pi = p \sin (N - \pi_0) + \frac{1}{2} p^2 \sin 1'' \sin (2N - \pi_0) + \dots$ lies:
- $$„\delta \pi = p \sin (N - \pi_0) - \frac{1}{2} p^2 \sin 1'' \sin (2N - \pi_0) + \dots“.$$
- „ 393, „ + 3, für: $\angle e$ lies: „ ∂e “.
- „ 394, „ — 16, für: $C = 180 - i$ lies: „ $C = 180 - i'$ “.
- „ 408, „ + 15, für: § 11 lies: „§ 2“.
- „ 414, „ + 4, für: $\cos \delta \partial \alpha : \sin i' \partial \oslash \oslash$ lies: „ $\cos \delta \partial \alpha : \sin i' \partial \oslash \oslash'$ “.
- „ 431, „ — 6, für: das ist lies: „dass ist“.
- „ 431, „ — 3, für: $h' = \left(r_0 \frac{\partial r_0}{\partial \tau} \right)$ lies: „ $h' = \left(r_0 \frac{dr_0}{d\tau} \right)$ “.
- „ 431, „ — 1, für: $\frac{\partial h'}{\partial x_0}$ und $\frac{\partial h'}{\partial \xi_0}$ lies: „ $\frac{\partial h'}{\partial x_0}$ und $\frac{\partial h'}{\partial \xi_0}$ “.
- „ 432, Gleichung 15) für: $\frac{\partial h'}{\partial x_0}$ lies: „ $\frac{\partial h'}{\partial x_0}$ “.
- „ 435, Zeile + 13, für: $\Sigma (x_a)^2$ lies: „ $\frac{1}{2} \Sigma (x_a)^2$ “.
- „ 455, „ — 10, für: A) lies: „ A_1)“.
- „ 458, „ — 18, für: ξ lies: „ ξ_0 “.
- „ 458, „ — 17, für: in B) lies: „von B) in A_2)“.
- „ 458, „ — 12, für: x lies: „ x_0 “.
- „ 458, „ — 9, für: pag. 368 lies: „pag. 369“.
- „ 459 „ — 1, 2, 4, 5, für: $d\xi$ und dx lies: „ $\partial \xi$ und ∂x “.
- „ 460, „ + 1, für: $d\xi$ und dx lies: „ $\partial \xi$ und ∂x “.
- „ 462, „ + 1, für: 17,96 lies: „47,96“.
- „ 463, Columnne $\cos \beta \partial \lambda$, erste Zeile, lies: „+ 0'',04“ und Columnne $\partial \beta$, zweite Zeile, lies: „— 0,70“.
- „ 466, Zeile + 1, für: darf lies: „dürfen“.
- „ 469, „ + 3, für: $\frac{(r + r')^{7/2}}{a}$ lies: „ $\frac{(r + r')^{7/2}}{a^2}$ “.
- 2) „ 488, „ — 6 u. — 7 auf der rechten Seite der Gleichungen, für: $\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \right) \Delta x$ und $\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial x} \right) \Delta x$ lies: „ $\left(\frac{\partial \beta_1}{\partial x} \right) \Delta x$ und $\left(\frac{\partial \beta_2}{\partial x} \right) \Delta x$ “.
- „ 491, „ + 9, für: $\tan \delta$ lies: „ $\tan \delta$ “.

Nachschrift.

Nachdem die vorstehenden Corrigenda gedruckt waren, wurde eine Liste von Fehlern zu Band II von General-Lieutenant J. F. Tennant, R. E., F. R. S. in den Monthly Notices der R. A. S. (Vol. I., No. 7) veröffentlicht. Die folgenden davon habe ich verificirt, und dieselben sind weder in dem vorstehenden, noch in früheren Fehler-Verzeichnissen enthalten:

- pag. 11, Zeile + 16, für: $C^{d-p} \{1, 2, 3, \dots d-1\}$ lies: „ $C^{d-p} \{1^2, 2^2, 3^2, \dots (d-1)^2\}$ “.
- „ 110, Log. $S_{(x)}$, Oct. 27, für: 1_n861612 lies: „2_n861612“.
- „ 110, „ $S_{(x)}$, Dec. 6, für: 0_n045547 lies: „0_n075547“.

1) Mitgetheilt durch Prof. Dr. A. Seydler, Astr. Nachr., Nr. 2856. — 2) T. Hackenberg, Astr. Nachr., Nr. 2899.

pag. 163, Zeile — 4, für: $\frac{\sin \frac{1}{2} (E - E_0)}{\frac{1}{2} (E - E_0)}$ lies: „ $\frac{\sin \frac{1}{2} (E - E_0)}{\frac{1}{2} (E - E_0) \sin 1''}$ “.

Die übrigen von General Tennant angegebenen Fehler sind entweder schon früher veröffentlicht, oder ich bin selbst nicht in der Lage, ihre Correctheit zu verbürgen.

Während ich damit beschäftigt war, diese Liste nochmals zu revidiren, bemerkte ich die folgenden Zahlenfehler auf S. 110 und 111:

pag. 110, Log. z , Jan. 15, für: $9_{\text{n}}148099$ lies: „ $9,148099$ “.
 „ 110, „ z , Dec. 6, für: $9_{\text{n}}150349$ lies: „ $9,150349$ “.
 „ 110, „ z , Oct. 27, für: $9,147436$ lies: „ $9,148436$ “.
 „ 111, „ $f q z$, Oct. 27, für: $1_{\text{n}}733151$ lies: „ $1,733151$ “.
 „ 111, $\mathcal{A} \Sigma (Z)$, Oct. 27, für: $-0,06$ lies: „ $+0,62$ “.

In den Astr. Nachr., Nr. 2968 lenkt cand. astr. H. Kloock aus Bonn die Aufmerksamkeit auf eine Behauptung in Band I bezüglich der täglichen Aberration, die zu allgemein ist. Die einfachste Weise zur Beseitigung dieser Zweideutigkeit ist die folgende:

Seite 111, Zeile — 17, nach: „Beobachtungen“ füge ein: „falls dieselben nicht gerade absolut sein sollten“.

4 32

UNIVERSITY OF VICTORIA
Library
VICTORIA, B.C.

